ИНФОРМАТИКА, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И УПРАВЛЕНИЕ

УДК 681.511
DOI: 10.26467/2079-0619-2019-22-1-106-123

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ФАЗОВЫХ СИСТЕМ

А.Ф. ГРИБОВ[1], Б.И. ШАХТАРИН[1]
[1]*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 18-07-00269

Создание методов исследования нелинейных фазовых систем имеет длительную историю, начиная с 60-х годов прошлого века (В.И. Тихонов, В. Линдсей, М.В. Капранов, Б.И. Шахтарин и др.). К настоящему времени разработаны строгие и приближенные методы анализа таких систем. Однако большинство методов ограничиваются анализом систем невысокого порядка. Лишь в последние годы предприняты попытки создания методов, позволяющих проводить анализ фазовых систем высокого порядка. К таким методам относится и материал данной статьи. В статье рассмотрено построение решений фазовых систем на примере фазовой автоподстройки частоты произвольной размерности с кусочно-линейной аппроксимацией нелинейной функции. Такая аппроксимация позволила использовать явный вид решений в областях линейности и получить аналитические условия существования разнообразных типов поведения этой системы. Получены аналитические условия существования решений, приводящих к возникновению сложных предельных множеств траекторий фазовых систем и их бифуркаций. Это гомоклинические траектории в случае состояния равновесия типа седло-фокус, играющие решающую роль в возникновении хаоса. Также показана возможность получения аналитических условий бифуркации рождения и существования многообходных вращательных циклов в кусочно-линейной фазовой системе, на основе которых может быть получен критерий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода устойчивого цикла, который в соответствии с теоремой Шарковского заканчивается бифуркацией рождения цикла периода три и возникновением развитого хаоса. Следует отметить, что описанные в работе методы исследования кусочно-линейных систем применялись авторами не только к фазовым системам, но, например, к системе Чуа, допускающей разнообразное хаотическое поведение.

Ключевые слова: кусочно-линейная фазовая система, гомоклиническая траектория, вращательные циклы, хаос, бифуркации.

ВВЕДЕНИЕ

Кусочно-линейная аппроксимация нелинейных характеристик динамических систем позволяет получить явный аналитический вид решений и широко используется при анализе работы различных устройств автоматического регулирования. В то же время кусочно-линейные фазовые системы описывают работу широко распространенных технических устройств в таких областях, как связь, обработка сигналов, автоматическое управление, синхронные и вибрационные машины, различные маятниковые системы и др. [1, 2]. Рассмотренные в статье приемы нахождения решений применимы не только к фазовым, но и другим кусочно-линейным системам, таким как, например, система Чуа, допускающая разнообразное хаотическое поведение [3]. В работе построение различных видов движения рассматривается на примере фазовой автоподстройки частоты, операторное уравнение которой имеет вид [1]

$$\sum_{k=1}^{n} a_{k-1} p^k \varphi + \sum_{k=0}^{m} b_k p^k \Phi(\varphi) = 0, \qquad (1)$$

где $\Phi(\varphi) \equiv F(\varphi) - \gamma$ – скалярная 2π-периодическая функция, γ, a_i, b_i – параметры системы. В матричном виде (1) можно записать как

$$\dot{y} = Ay + g\Phi(\varphi), \tag{2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -\dfrac{a_0}{a_{n-1}} & -\dfrac{a_1}{a_{n-1}} & \dots & -\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \end{pmatrix}, \qquad g = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{n-m} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{gathered} c_{n-m} = -\frac{b_m}{a_{n-1}}, \quad c_{n-k} = -\frac{b_k}{a_{n-1}} - \sum_{i=n-m+k}^{n-1} \frac{a_{n-m+k-i}}{a_{n-1}} c_{i-k}, \\ k = 1, \dots, m-1. \\ c_n = -\frac{b_0}{a_{n-1}} - \sum_{i=n-m}^{n-1} \frac{a_{n-m-i}}{a_{n-1}} c_i. \end{gathered} \tag{3}$$

Система (2) определена в цилиндрическом n-мерном фазовом пространстве $G = R^{n-1} \times S^1 = \{\varphi, x \mid x \in R^{n-1}, \varphi \in S^1\}$. Цилиндричность фазового пространства приводит к тому, что все возможные периодические траектории системы удовлетворяют следующему условию:

$$x(t+T) = x(t), \qquad \varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi l.$$

При этом $l = 0$ соответствует предельным циклам первого рода, или O-циклам, а целые $l \neq 0$ соответствуют предельным циклам второго рода, или -циклам.

Будем в дальнейшем рассматривать нелинейную составляющую $F(x)$ следующего вида:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{c} & \text{при} \quad |x| \le |c| \qquad \text{(область I)}, \\ \dfrac{\pi - x}{\pi - c} & \text{при} \quad x \in (c; 2\pi - c) \quad \text{(область II)}. \end{cases} \tag{4}$$

$$F(x) = 1 - \frac{x}{\pi}, \qquad x \in (0; 2\pi). \tag{5}$$

$$F(x) = \frac{x}{\pi}, \qquad x \in (-\pi; \pi). \tag{6}$$

Система (2), (4) преобразуется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = A_i y + s_i g, \quad i = 1, 2, \tag{7}$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} g_1 k_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ g_2 k_i & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n k_i & -\dfrac{a_0}{a_{n-1}} & -\dfrac{a_1}{a_{n-1}} & \dots & -\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \end{pmatrix},$$

$$k_1 = c^{-1}, k_2 = -(\pi - c)^{-1}, s_1 = -\gamma, s_2 = \pi(\pi - c)^{-1} - \gamma,$$
$$g = (g_1, \dots, g_n)^T, g_1 = \dots = g_{n-m-1} = 0,$$

а $\{g_{n-j}\}$ вычисляются в соответствии с (3) $j = 0, \dots, m-1$. Обозначим корни характеристического уравнения в областях I и II соответственно через p_i и p_i', $i = 1, \dots, n$; f_i и f_i' $i = 1, \dots, n$ – собственные векторы, соответствующие собственным значениям p_i и p_i'.

Система (7) при $\gamma < 1$ имеет два состояния равновесия $O_1(\varphi = \varphi_1 < \varphi_0, x = 0)$ и $O_2(\varphi = \varphi_2 > \varphi_0, x = 0)$, где φ_1 и φ_2 – корни уравнения $\Phi(\varphi) = 0$. Пусть p_i и p_i' $(i = 1, \dots, n)$ – собственные значения матриц линеаризованной системы (7) в окрестностях точек O_1 и O_2 соответственно, и предположим, что

$$\begin{gathered} p_i \neq p_j, \ p_i' \neq p_j' \quad \text{при}\, i \neq j, \operatorname{Re} p_i < 0 \quad i = 1, \dots, n, \\ \operatorname{Im} p_1' = 0 \operatorname{Re} p_1' > 0, \operatorname{Re} p_k' < 0, k = 2, \dots, n, \\ -\operatorname{Re} p_i' \geq -\operatorname{Re} p_n' \quad i = 2, \dots, n. \end{gathered} \tag{8}$$

В этом случае состояние O_1 – асимптотически устойчиво, а O_2 – седловое состояние равновесия. Через седло O_2 в его окрестности проходит два локальных многообразия: устойчивое $W^s(\dim W^s = n - 1)$ и неустойчивое W^u, составленное из двух одномерных (выходящих) сепаратрис.

В случае кусочно-линейной аппроксимации (5) система (2) принимает вид

$$\dot{y} = Ay + (1 - \gamma)g, \tag{9}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -g_1/\pi & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -g_2/\pi & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -g_n/\pi & -\dfrac{a_0}{a_{n-1}} & -\dfrac{a_1}{a_{n-1}} & \dots & -\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \end{pmatrix}.$$

Такие системы допускают наличие петли сепаратрисы состояния равновесия типа седло-фокус, которая играет принципиальную роль при возникновении и существовании хаоса в динамических системах [4, 5]. При исследовании таких систем в основном рассматривались уравнения второго и третьего порядков [6, 7]. Существования O-цикла и l-обходного φ-цикла в системе (1) делает возможным сценарий перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода устойчивого цикла. В общем случае хаотические режимы таких систем исследовались с использованием качественной теории и численно [8, 9, 10, 11].

ПЕТЛЯ СЕПАРАТРИСЫ В КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Построение петли сепаратрисы и условие ее существования в системе (7) описаны в [12]. Аналогично этому рассмотрим систему (9). Петля сепаратрисы (рис. 1) состоит из

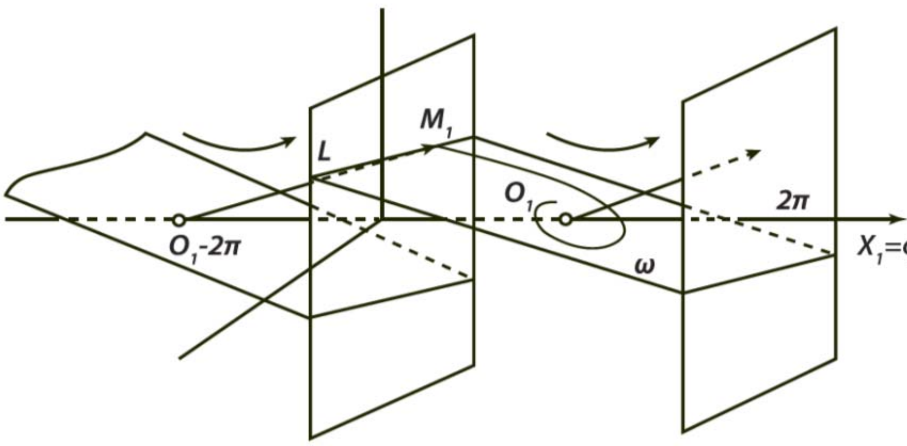

Рис. 1. Петля сепаратрисы
Fig. 1. Separatrix loop

– отрезка прямой O_2M_1, проходящей через точку $O_2(O_1-2\pi,0,\ldots,0)$ параллельно вектору f'_1. Точка M_1 принадлежит следу L на плоскости $x_1=0$ $(n-1)$-мерной сепаратрисной плоскости ω, которая проходит через точку O_1 и параллельна векторам $f'_j, j=2,\ldots,n$ (или их действительной и мнимой составляющим, если p'_j – комплексное число);

– части интегральной кривой M_1O_1, лежащей на плоскости ω и не выходящей из области $x_1\in(0,2\pi)$.

Параметрическое (η – параметр) уравнение прямой O_2M_1 запишем в виде $x_1=-\pi(1+\gamma)+\eta,\quad x_j=(f'_1)^j\eta,\quad j=2,\ldots,n.$ Если $(x_1^1,\ldots,x_n^1)$ – координаты точки M_1, то $x_1^1=0$. Поэтому для точки M_1 $\eta=\pi(1+\gamma)$, а

$$\begin{aligned} &x_1^1=0,\\ &x_j^1=(f'_1)^j\pi(1+\gamma)\qquad j=2,\ldots,n. \end{aligned}\tag{10}$$

Обозначим через $W(p_1,\ldots,p_n)$ матрицу, столбцами которой являются собственные векторы, соответствующие собственным значениям p_i. Пусть $w_i=w(p_1,\ldots,p_n\,|\,a)$ – определитель, получающийся из $\det W(p_1,\ldots,p_n)$ заменой i-го столбца на вектор-столбец a; $e_1=(1,0,\ldots,0)^T$, $w'=\det\ W\left(p'_1,\ldots,p'_n\right)$.

Точка $M \in R^n$ тогда и только тогда принадлежит плоскости ω, когда векторы $\overline{O_1M}, f_2', \ldots, f_n'$ – линейно зависимы, т. е. когда

$$w_1(p_1', \ldots, p_n' \mid \overline{O_1M}) = 0. \tag{11}$$

Учитывая (10), можно показать, что

$$\begin{aligned} \overline{O_1M_1} &= (\pi(\gamma-1), x_2^1, \ldots, x_n^1) = \\ &= (\pi(\gamma-1), (f'_1)^2 \pi(1+\gamma), \ldots, (f'_1)^n \pi(1+\gamma)) = \\ &= (\pi(1+\gamma) - 2\pi, (f'_1)^2 \pi(1+\gamma), \ldots, (f'_1)^n \pi(1+\gamma)) = \\ &= (\pi(1+\gamma), (f'_1)^2 \pi(1+\gamma), \ldots, (f'_1)^n \pi(1+\gamma)) - (2\pi, 0, \ldots, 0) = \\ &= \pi(1+\gamma)(1, (f'_1)^2, \ldots, (f'_1)^n) - 2\pi(1, 0, \ldots, 0) \\ &= \pi(1+\gamma) f'_1 - 2\pi e_1 \end{aligned} \tag{12}$$

и, следовательно,

$$\begin{gathered} w_1(p_1', \ldots, p_n' \mid \overline{O_1M_1}) = \pi(1+\gamma) w_1(p_1', \ldots, p_n' \mid f'_1) - 2\pi w_1(p_1', \ldots, p_n' \mid e_1) = \\ = \pi(1+\gamma) w(p_1', \ldots, p_n') - 2\pi w_1(p_1', \ldots, p_n' \mid e_1). \end{gathered}$$

Приравнивая последнее равенство к нулю в силу (11), получаем

$$(1+\gamma) w' - 2 w_1(p_1', \ldots, p_n' \mid e_1) = 0,$$

откуда следует:

$$\gamma_{kc} = 2 \frac{w_1(p_1', \ldots, p_n' \mid e_1)}{w'} - 1.$$

То обстоятельство, что траектория M_1O_1 не выходит из области, означает: для любого $\theta > 0$ выполняются неравенства

$$0 < x_1(\theta) < 2\pi.$$

Уравнение движения в области может быть представлено в следующем виде:

$$W(p_1', \ldots, p_n')(d_1 \exp\, p_1'\theta, \ldots, d_n \exp\, p_n'\theta)^T = \overline{O_1N}. \tag{13}$$

Так как при $\theta = 0$ $N = M_1$, то имеет место равенство

$$W(p_1', \ldots, p_n')(d_1, \ldots, d_n)^T = \overline{O_1M_1},$$

из которого следует, что при $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$$d_i = w(p'_1, \dots, p'_n \mid \overline{O_1 M_1}) / w'.$$

Из (13) имеем

$$x_1(\theta) - x_{01} = \sum_{i=1}^{n} w_i(p'_1, \dots, p'_n \mid \overline{O_1 M_1}) / w' \exp\, p'_i \theta.$$

Преобразуем правую часть последнего равенства, используя (12):

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(p'_1, \dots, p'_n \mid \overline{O_1 M_1}) = \sum_{i=2}^{n} w_i(p'_1, \dots, p'_n \mid \pi(1+\gamma) f'_1 - 2\pi e_1) =$$

$$\sum_{i=2}^{n} (\pi(1+\gamma) w_i(p'_1, \dots, p'_n \mid f'_1) - 2\pi w_i(p'_1, \dots, p'_n \mid e_1)) =$$

$$= -\sum_{i=2}^{n} 2\pi w_i(p'_1, \dots, p'_n \mid e_1),$$

так как $w_i(p'_1, \dots, p'_n \mid f'_1) = 0$ при $i \neq 1$ как определитель с одинаковыми столбцами. Отсюда следует, что

$$x_1(\theta) = \pi(1-\gamma) - 2\pi \sum_{i=2}^{n} w_i(p'_1, \dots, p'_n \mid e_1) / w' \exp\, p'_i \theta.$$

Поэтому

$$0 < \pi - \pi\gamma - \frac{2\pi}{w'} \sum_{i=2}^{n} w_i(p'_1, \dots, p'_n \mid e_1) \exp\, p'_i \theta < 2\pi$$

или, что то же самое,

$$1 > \gamma + \frac{2}{w'} \sum_{i=2}^{n} w_i(p'_1, \dots, p'_n \mid e_1) \exp\, p'_i \theta > -1.$$

Последнее неравенство может быть представлено в виде

$$\left| \gamma + \frac{2}{w'} \sum_{i=2}^{n} w_i(p'_1, \dots, p'_n \mid e_1) \exp\, p'_i \theta \right| < 1.$$

Таким образом, справедливы

Теорема 1. *Для существования петли сепаратрисы в системе (9), увеличивающей периодическую координату* $x_1 = \varphi$ *на* 2π, *необходимо, чтобы* $\gamma = \gamma_{kc}$, *где*

$$\gamma_{kc} = 2 \frac{w_1(p'_1, \dots, p'_n \mid e_1)}{w'} - 1. \tag{14}$$

Теорема 2. Для существования петли сепаратрисы достаточно выполнения условия (14), *если для всех* $\theta > 0$

$$|\gamma + \frac{2}{w'}\sum_{i=2}^{n} w_i(p'_1,\dots,p'_n \mid e_1)\exp\, p'_i\theta| < 1. \quad (15)$$

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ В КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ФАЗОВЫХ СИСТЕМАХ

Треугольная аппроксимация нелинейности.

Рассмотрим фазовую систему (7) с кусочно-линейной функцией $F(x)$, представленной в виде (4), и фазовым пространством $G = R^{n-1} \times S^1$. Для этой системы возможны вращательные замкнутые траектории – предельные циклы второго рода.

Рассмотрим накрывающее для G пространство $R^n = \{\varphi, y \mid \varphi \in R^1, y \in R^{n-1}\}$. Если система (7) имеет замкнутую траекторию, один раз охватывающую цилиндрическое фазовое пространство, и $M_1(-c, y_2^1,\dots,y_n^1), M_2(c, y_2^2,\dots,y_n^2)$ и $M_3(2\pi - c, y_2^3,\dots,y_n^3)$ точки на гиперплоскостях $y_1 = -c$, $y_1 = c$ и $y_1 = 2\pi - c$, в которых этот цикл пересекает эти плоскости, то $(y_2^3,\dots,y_n^3) = (y_2^1,\dots,y_n^1)$. Состояниями равновесия в областях I и II будут соответственно точки $O_1(\gamma c, 0,\dots,0)$ и $O_2(\pi - \gamma c\mu, 0,\dots,0)$.

Обозначим через τ время, за которое точка M_1 переходит в области I в точку M_2, а через θ – время, за которое точка M_2 переходит в области II в точку M_3. Пусть p_i и p'_i – корни характеристических многочленов в областях I и II соответственно; f_i и f'_i – собственные векторы, соответствующие собственным значениям p_i и p'_i. $W(f_1,\dots,f_n)$, $V(f'_1,\dots,f'_n)$ – матрицы, столбцами которых являются собственные векторы f_i и f'_i соответственно;

$$\Lambda(t) = \mathrm{diag}(\exp\, p_1 t,\dots,\exp\, p_n t), \Lambda'(t) = \mathrm{diag}(\exp\, p'_1 t,\dots,\exp\, p'_n t)$$

– диагональные матрицы. Общее решение системы (7) в области I представим в виде

$$(y_1 - \gamma c, y_2,\dots,y_n)^T = W(f_1,\dots,f_n)\Lambda(t)(c_1,\dots,c_n)^T,$$

где $\{c_i\}$ – постоянные интегрирования.

Пусть при $t = 0$ $y_1 = -c$, $y_i = y_i^1$, $i = 2,\dots,n$. Поэтому

$$(-c - \gamma c, y_2^1,\dots,y_n^1)^T = W(f_1,\dots,f_n)(c_1,\dots,c_n)^T.$$

Таким образом,

$$(c_1,\dots,c_n)^T = W^{-1}(f_1,\dots,f_n)(-c - \gamma c, y_2^1,\dots,y_n^1)^T. \quad (16)$$

При $t = \tau$ $y_1 = c$, $y_i = y_i^2$, $i = 2,\dots,n$. Следовательно,

$$(c - \gamma c, y_2^2,\dots,y_n^2)^T = W(f_1,\dots,f_n)\Lambda(\tau)(c_1,\dots,c_n)^T. \quad (17)$$

Подставляя $\{c_i\}$ из (16) в (17), приходим к следующему уравнению:

$$\begin{gathered}(c-\gamma c, y_2^2,\dots,y_n^2)^T = \\ = W(f_1,\dots,f_n)\Lambda(\tau)W^{-1}(f_1,\dots,f_n)(-c-\gamma c, y_2^1,\dots,y_n^1)^T.\end{gathered} \tag{18}$$

В области II общее решение системы (7) представим в виде

$$(y_1-\pi+\gamma c\mu, y_2,\dots,y_n)^T = V(f_1',\dots,f_n')\Lambda'(t)(c_1,\dots,c_n)^T, \tag{19}$$

где $\{c_i\}$ – постоянные интегрирования.

При $t=0$ $y_1=c,\ y_i=y_i^2,\ i=2,\dots,n.$ Поэтому

$$(c-\pi+\gamma c\mu, y_2^2,\dots,y_n^2)^T = V(f'_1,\dots,f'_n)(c_1,\dots,c_n)^T,$$

и, как следствие,

$$(c_1,\dots,c_n)^T = V^{-1}(f_1',\dots,f_n')(c-\pi+\gamma c\mu, y_2^2,\dots,y_n^2)^T. \tag{20}$$

При $t=\theta$ $y_1=2\pi-c,\ y_i=y_i^1,\ i=2,\dots,n.$ Поэтому

$$(\pi-c+\gamma c\mu, y_2^1,\dots,y_n^1)^T = V(f'_1,\dots,f'_n)\Lambda'(\theta)(c_1,\dots,c_n)^T. \tag{21}$$

Используя (20), представим (21) в виде

$$\begin{gathered}(\pi-c+\gamma c\mu, y_2^1,\dots,y_n^1)^T = \\ = V(f'_1,\dots,f'_n)\Lambda(\tau)V^{-1}(f'_1,\dots,f'_n)(c-\pi+\gamma c\mu, y_2^2,\dots,y_n^2)^T.\end{gathered} \tag{22}$$

Введем обозначения

$$P(\tau)=W\Lambda(\tau)W^{-1}, Q(\theta)=V\Lambda(\theta)V^{-1}.$$

Исключая $y_2^2,\dots,y_n^2$ из (18), (22) при фиксированных τ и θ, получаем линейную относительно $\gamma, y_2^1,\dots,y_n^1$ систему уравнений

$$\begin{gathered}\gamma c\left[\left(\mu+1\right)Q-QP-\mu E\right]e_1+(QP-E)(0,y_2^1,\dots,y_n^1)^T = \\ = c[(\mu+1)Q+QP+\mu E]e_1.\end{gathered}$$

Кроме выполнения условия (23) необходимо, чтобы за время τ точка M_1 переводилась в точку M_2. Используя первое уравнение из (18), это условие можно представить в следующем виде:

$$e_1^T(P-E)(-c\gamma, y_2^1,\dots,y_n^1)^T = ce_1^T(P+E)e_1. \tag{24}$$

Пусть $\gamma = \dfrac{2\pi}{\tau+\theta}$ – частота цикла. В этом случае условия (23), (24) позволяют получить характеристику колебаний в виде $\gamma = \gamma(\gamma_c)$.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Для существования в системе (7) предельного цикла второго рода необходимо, чтобы выполнялась линейная относительно $\gamma, y_2^1, \ldots, y_n^1$ система уравнений*

$$\gamma c\left[\left(\mu+1\right)Q - QP - \mu E\right]e_1 + (QP-E)(0, y_2^1, \ldots, y_n^1)^T = \\ = c[(\mu+1)Q + QP + \mu E]e_1$$

и было справедливо выражение

$$e_1^T(P-E)(-c\gamma, y_2^1, \ldots, y_n^1)^T = ce_1^T(P+E)e_1.$$

Для исследования устойчивости найденного цикла найдем точечное преобразование плоскости $y_1 = -c$ в плоскость $y_1 = 2\pi - c$. Для этого воспользуемся результатами, представленными в [13]. Пусть мы имеем кусочно-линейную систему

$$\frac{dX}{dt} = A_i X + F_i(t), F_i(t) = F_i(t+T),\ t_{i-1} < t < t_i.$$

Тогда матрица точечного преобразования имеет вид

$$U = \prod_i e^{A_i \Delta t_i} H_i, \tag{25}$$

где произведение распространяется на все промежутки $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ внутри периода. При этом если решение непрерывно, то

$$H_i = \Delta\dot{X}_i \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial X_i}\right)^T \frac{1}{\left(\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial X_i}\right)^T \dot{X}_i^- + \dfrac{\partial\varphi_i}{\partial t}} + E. \tag{26}$$

Здесь

$$\Delta\dot{X}_i = \dot{X}_i^+ - \dot{X}_i^- = A_{i+1}X_i^+ - A_i X_i^- + F_{i+1}(t_i) - F_i(t_i)$$

– вектор, определяющий разрывы правых частей уравнений в моменты переключений; $\varphi_i(X_i^-, t) = 0$ – условия переключения, определяющие смену одного уравнения другим; $\left(\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial X_i}\right)$ – вектор из производных $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$, где x_j – составляющие вектора X.

В рассматриваемом случае Теоремы 3

$$\Delta\dot{Y}_1 = (A_2 - A_1)Y_1 + g\frac{\pi}{\pi - c},$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial X_i}\right)^T = (1,0\ldots,0) = e_1,$$

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = 0,$$

$$A_2 - A_1 = \frac{\pi}{c(c-\pi)}\begin{pmatrix} g_1 & 0 & \ldots & 0 \\ g_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$\Delta\dot{Y}_1 = \frac{\pi}{c(c-\pi)}(0, g_2(y_2^2 - c), \ldots, g_n(y_n^2 - c))^T,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial Y_1}\right)^T \dot{Y}_1^- = e_1^T(\dot{y}_1^2, \ldots, \dot{y}_n^2)^T = \dot{y}_1^2 =$$

$$= \frac{g_1}{c}y_1^2 + y_2^2 - g_1\gamma = g_1(1-\gamma) + y_2^2,$$

где $y_2^2, \ldots, y_n^2$ определены равенством (18). Таким образом,

$$H_1 = \frac{\pi}{c(c-\pi)(g_1(1-\gamma) + y_2^2)}(0, g_2(y_2^2 - c), \ldots, g_n(y_n^2 - c))^T e_1^T + E.$$

Для области II аналогично предыдущему получаем

$$\Delta\dot{Y}_2 = -\frac{\pi}{c(c-\pi)}(g_1 y_1^3, g_2 y_2^3, \ldots, g_n y_n^3)^T +$$

$$+\frac{\pi}{c(c-\pi)}(g_1(2\pi - c), g_2(2\pi - c), \ldots, g_n(2\pi - c))^T =$$

$$= \frac{\pi}{c(c-\pi)}(0, g_2(2\pi - c - y_2^1), \ldots, g_n(2\pi - c - y_n^1))^T,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial Y_2}\right)^T \dot{Y}_2^- = e_1^T(\dot{y}_1^1, \ldots, \dot{y}_n^1)^T = \dot{y}_1^1 =$$

$$= \frac{g_1}{c-\pi}y_1^3 + y_2^1 - g_1\frac{\pi}{c-\pi} - g_1\gamma = -g_1(1+\gamma) + y_2^1,$$

где $\gamma, y_2^1, \ldots, y_n^1$ определены равенствами (23), (24). Таким образом,

$$H_2 = \frac{\pi}{c(c-\pi)(-g_1(1+\gamma)+y_2^1)}(0, g_2(2\pi - c - y_2^1), \ldots, g_n(2\pi - c - y_n^1))^T e_1^T + E$$

и матрица точечного преобразования может быть представлена в виде

$$U = P(\tau)H_1 Q(\theta)H_2.$$

Если в системе (7) существуют предельные циклы, не охватывающие фазовый цилиндр, – O-циклы, или циклы первого рода, то они должны либо пересекать одну гиперплоскость $y_1 = c$, либо пересекать обе гиперплоскости $y_1 = c$ и $y_1 = 2\pi - c$.

Рассмотрим точечное преобразование плоскости $y_1 = c$ самой в себя. Пусть точка $M_1(y_1^1, \ldots, y_n^1)$ принадлежит плоскости $y_1 = c$ и движение с нее продолжается в область II. Используя уравнение движения (19) в области II и то, что через время θ точка M_1 вдоль траектории системы (7) переводится в точку $M_2(y_1^2, \ldots, y_n^2)$, также принадлежащую плоскости $y_1 = c$, получаем систему уравнений

$$(\mu c(\gamma - 1), y_2^2, \ldots, y_n^2)^T = Q(\theta)(\mu c(\gamma - 1), y_2^1, \ldots, y_n^1)^T. \tag{27}$$

Аналогично в области I точка M_2 за время τ переходит в точку $M_3 = M_1$. Этому условию соответствует следующая система уравнений:

$$(c(1-\gamma), y_2^1, \ldots, y_n^1)^T = P(\tau)(c(1-\gamma), y_2^2, \ldots, y_n^2)^T. \tag{28}$$

Системы (27) и (28) представим в виде

$$\begin{gathered}[\mu c(PQ - P) + c(E - A)](\gamma - 1, 0, \ldots, 0)^T + \\ +(PQ - E)(0, y_2^1 \ldots, y_n^1)^T = (0, \ldots, 0)^T.\end{gathered} \tag{29}$$

Добавим к системе (29) первое уравнение системы (27):

$$e_1^T(\mu c(\gamma - 1), y_2^2, \ldots, y_n^2)^T = e_1^T Q(\mu c(\gamma - 1), y_2^1, \ldots, y_n^1)^T. \tag{30}$$

Кроме выполнения условий (29) и (30) необходимо, чтобы за время $t \in (0, \tau)$ траектория не выходила из области I и за время $t \in (0, \theta)$ из области II. Первое из этих условий можно записать в виде $|y_1(t)| < c,$ чему соответствует неравенство

$$|\gamma + e_1^T P(t)(1-\gamma, y_2^2 / c, \ldots, y_n^2 / c)^T| < 1.$$

Второму условию $c < |y_1(t)| < 2\pi - c$ соответствует неравенство

$$|-\gamma + e_1^T Q(t)(\gamma - 1, y_2^1 / \mu c, \ldots, y_n^2 / \mu c)^T| < 1.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Для существования в системе (7) предельного цикла первого рода необходимо, чтобы выполнялась система*

$$[\mu c(PQ-P)+c(E-A)](\gamma-1,0,\ldots,0)^T +$$
$$+(PQ-E)(0,y_2^1\ldots,y_n^1)^T=(0,\ldots,0)^T$$
$$e_1^T(\mu c(\gamma-1),y_2^2,\ldots,y_n^2)^T=e_1^T Q(\mu c(\gamma-1),y_2^1,\ldots,y_n^1)^T,$$

и достаточно, чтобы кроме этого выполнения $\forall t\in(0,\tau)$

$$|\gamma+e_1^T P(t)(1-\gamma,y_2^2/c,\ldots,y_n^2/c)^T|<1$$

и $\forall t\in(0,\theta)$

$$|-\gamma+e_1^T Q(t)(\gamma-1,y_2^1/\mu c,\ldots,y_n^2/\mu c)^T|<1.$$

Пилообразная аппроксимация нелинейности.

Пусть точка $M_1(y_1^1,\ldots,y_n^1)$ принадлежит гиперплоскости $y_1=0,$ а точка $M_2(y_1^2,\ldots,y_n^2)$ гиперплоскости $y_1=2\pi.$ Запишем общее решение уравнения (9) в виде

$$(y_1-\pi(1-\gamma),y_2,\ldots,y_n)^T=W\Lambda(t)(c_1,\ldots,c_n)^T. \tag{31}$$

Пусть при $t=0$ $y_1=0,$ $y_j=y_j^1,$ $j=2,\ldots,n.$ Тогда из (31) следует, что

$$(c_1,\ldots,c_n)^T=W^{-1}(\pi(\gamma-1),y_2^1,\ldots,y_n^1)^T. \tag{32}$$

Если при $t=\theta$ $y_1=2\pi,$ $y_j=y_j^2=y_j^1,$ $j=2,\ldots,n,$ то

$$(\pi(\gamma+1),y_2^1,\ldots,y_n^1)^T=W\Lambda(\theta)(c_1,\ldots,c_n)^T$$

или, учитывая (32),

$$(\pi(\gamma+1),y_2^1,\ldots,y_n^1)^T=W\Lambda(\theta)W^{-1}(\pi(\gamma-1),y_2^1,\ldots,y_n^1)^T. \tag{33}$$

Полагая $Q(\theta)=W\Lambda(\theta)W^{-1},$ представим систему уравнений (33) в виде

$$(Q-E)(\gamma,y_2^1/\pi,\ldots,y_n^1/\pi)^T=(Q+E)e_1.$$

Выражая отсюда γ, находим характеристику колебаний в виде $\gamma=\gamma(\gamma_c)$, где $\gamma_c=\omega=2\pi/\theta$ – частота цикла.

$$\gamma(\gamma_c)=\frac{det\ (\overline{Q-E})}{det\ (Q-E)}. \tag{34}$$

Заметим, что элементы определителей в числителе и знаменателе (34) совпадают, за исключением a_{11}: $\overline{a_{11}} = a_{11} + 2$, где a_{ij} – элементы матрицы $Q - E$.

В соответствии с (25), (26) матрица точечного преобразования имеет вид

$$U = Q(\theta)H,$$

где

$$H = 2ge_1^T \frac{1}{e_1^T \dot{Y}^-} + E.$$

Так как $\dot{y}_1 = -\frac{g_1}{\pi} y_1 + y_2 + g_1(1-\gamma) = -g_1(1+\gamma) + y_2$, то

$$H = \frac{2}{-g_1(1+\gamma) + y_2^1} ge_1^T + E.$$

Для кусочно-линейной аппроксимации (6) характеристика колебаний запишется в виде

$$\gamma(\gamma_c) = -\frac{det\ (\overline{Q-E})}{det\ (Q-E)},$$

где $\overline{a_{11}} = a_{11} + 2$ и a_{ij} – элементы матрицы $Q - E$.

Матрица точечного преобразования так же, как и для (5), имеет вид

$$U = Q(\theta)H,$$

где

$$H = -\frac{2}{g_1(1-\gamma) + y_2^1} ge_1^T + E.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 5. *Характеристика колебаний* $\gamma = \gamma(\gamma_c)$, *где* $\gamma_c = \omega = 2\pi / \theta$ *– частота цикла для системы (9) имеет вид*

$$\gamma\left(\gamma_c\right) = \frac{det\ (\overline{Q-E})}{det\ (Q-E)}, \qquad (35)$$

а для кусочно-линейной аппроксимации (6)

$$\gamma\left(\gamma_c\right) = -\frac{det\ (\overline{Q-E})}{det\ (Q-E)}. \qquad (36)$$

Рассмотрим в системе (9) циклы, не охватывающие фазовый цилиндр. Такие циклы возможны, если они пересекают гиперплоскость $y_1 = 2\pi$. Рассмотрим накрывающее для фазового пространства системы (9) пространство R^n. В двух его областях изучаемая система имеет следующий вид:

$$\dot{y} = Ay + g(1-\gamma) \quad (\text{область I}) \quad y_1 \in (0, 2\pi),$$
$$\dot{y} = Ay + g(3-\gamma) \quad (\text{область II}) \quad y_1 \in (2\pi, 4\pi).$$

Пусть точка $M_1(y_1^1, \dots, y_n^1)$ принадлежит плоскости $y_1 = 2\pi$. Траектория системы из этой точки продолжается в область II и через время θ попадает в точку $M_2(y_1^2, \dots, y_n^2)$ на той же плоскости. Общее решение уравнения в области II может быть представлено в следующем виде:

$$(y_1 - \pi(3-\gamma), y_2, \dots, y_n)^T = W\Lambda(t)(c_1, \dots, c_n)^T.$$

Так как при $t = 0$ $y_1 = 2\pi$, $y_j = y_j^1$, $j = 2, \dots, n$, то

$$(-\pi(1-\gamma), y_2^1, \dots, y_n^1)^T = W(c_1, \dots, c_n)^T.$$

Отсюда следует, что

$$(c_1, \dots, c_n)^T = W^{-1}(\pi(\gamma-1), y_2^1, \dots, y_n^1)^T.$$

При $t = \theta$ $y_1 = 2\pi$, $y_j = y_j^2 = y_j^1$, $j = 2, \dots, n$. Поэтому

$$(-\pi(1-\gamma), y_2^2, \dots, y_n^2)^T = W\Lambda(\theta)W^{-1}(-\pi(1-\gamma), y_2^1, \dots, y_n^1)^T. \quad (37)$$

Пусть точка M_2 за время τ вдоль траектории системы (9) в области I переводится в точку $M_3 = M_1$. Так как общее решение в области I имеет вид

$$(y_1 - \pi(1-\gamma), y_2, \dots, y_n)^T = W\Lambda(t)(c_1, \dots, c_n)^T$$

и при $t = 0$ $y_1 = 2\pi$, $y_j = y_j^2$, $j = 2, \dots, n$, то

$$(\pi(1+\gamma), y_2^2, \dots, y_n^2)^T = W(c_1, \dots, c_n)^T.$$

Поэтому

$$(c_1, \dots, c_n)^T = W^{-1}(\pi(\gamma+1), y_2^2, \dots, y_n^2)^T.$$

При $t = \tau$ $y_1 = 2\pi$, $y_j = y_j^1$, $j = 2, \dots, n$. Поэтому

$$(\pi(1+\gamma), y_2^1, \dots, y_n^1)^T = W\Lambda(\tau)W^{-1}(\pi(1+\gamma), y_2^2, \dots, y_n^2)^T. \quad (38)$$

Исключая из (37) и (38) $y_2^2 \dots, y_n^2$, получаем систему уравнений

$$(Q(\tau+\theta) - E)(\pi\gamma, y_2^1, \dots, y_n^1)^T = \pi(Q(\tau+\theta) - 2Q(\tau) + E)e_1, \quad (39)$$

где $Q(t) = W\Lambda(t)W^{-1}$. Кроме уравнения (39) рассмотрим также первое уравнение системы (37).

$$-\pi(1-\gamma) = e_1^T Q(\theta)(\pi(\gamma-1), y_2^1, \ldots, y_n^1)^T. \tag{40}$$

Условия (39), (40) являются необходимыми для того, чтобы в системе (9) существовали -циклы. Кроме выполнения условий (39) и (40) необходимо, чтобы за время θ траектория системы не выходила из области II, а за время τ из области I. Первое из этих условий $(2\pi < y_1(t) < 4\pi)$ принимает вид

$$|-\gamma + e_1^T Q(t)(\gamma+1, y_2^1/\pi, \ldots, y_n^1/\pi)| < 1, \forall t \in (0, \theta),$$

а второе $(0 < y_1 < 2\pi)$ –

$$|-\gamma + e_1^T Q(t)(\gamma+1, y_2^2/\pi, \ldots, y_n^2/\pi)| < 1, \forall t \in (0, \tau).$$

Для исследования устойчивости полученного цикла найдем матрицу точечного преобразования (25), (26):

$$U = Q(\theta) H_1 Q(\tau) H_2.$$

В этом случае

$$\Delta\dot{Y} = \dot{Y}^+ - \dot{Y}^- = -2g,$$

$$H_1 = -2ge_1^T \frac{1}{e_1^T \dot{Y}_1^-} + E.$$

Так как $\dot{y}_1 = -\dfrac{g_1}{\pi} y_1 + y_2 + g_1(3-\gamma) = g_1(1-\gamma) + y_2^2$, то

$$H_1 = -\frac{2}{g_1(1-\gamma) + y_2^2} ge_1^T + E,$$

где y_2^2 определяется равенством

$$y_2^2 = e_2^T Q(\theta)(-\pi(\gamma-1), y_2^1, \ldots, y_n^1)^T.$$

Аналогично находим

$$H_2 = \frac{2}{-g_1(1+\gamma) + y_2^1} ge_1^T + E.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 6. *Для существования в системе (9) циклов, не охватывающих фазовый цилиндр, необходимо выполнение условий*

$$(Q(\tau+\theta)-E)(\pi\gamma, y_2^1,\ldots,y_n^1)^T = \pi(Q(\tau+\theta)-2Q(\tau)+E)e_1^T,$$

$$-\pi(1-\gamma)=e_1^T Q(\theta)(\pi(\gamma-1), y_2^1,\ldots,y_n^1)^T$$

и чтобы

$$|-\gamma+e_1^T Q(t)(\gamma+1, y_2^1/\pi,\ldots,y_n^1/\pi)|<1, \forall t\in(0,\theta),$$

$$|-\gamma+e_1^T Q(t)(\gamma+1, y_2^2/\pi,\ldots,y_n^2/\pi)|<1, \forall t\in(0,\tau).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено исследование сложных притягивающих множеств траекторий различных типов странных аттракторов фазовой системы и их бифуркации. Получены аналитические условия существования гомоклинических траекторий для кусочно-линейных систем в сложном, наиболее интересном случае состояния равновесия типа седло-фокус. Тем самым установлено существование спирального хаоса Шильникова.

Показана возможность получения аналитических условий бифуркации рождения и существования многообходных вращательных циклов в кусочно-линейной фазовой системе. На основе этих условий получен критерий бифуркационного перехода к хаосу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А.** Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 446 с.

2. **Леонов Г.А., Смирнова В.Б.** Математические проблемы теории фазовой синхронизации. СПб.: Наука, 2000. 400 с.

3. **Кузнецов А.П., Савин А.В., Сатаев И.Р.** О критическом поведении в неидентичных несимметрично связанных системах Чуа // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. 2007. Т. 15, № 2. С. 3–12.

4. **Шильников Л.П.** Об одном случае существования счетного множества периодических движений // Доклады АН СССР. 1965. Т. 160, № 3. С. 558–561.

5. **Шильников Л.П.** О рождении периодического движения из траектории, двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло // Математический Сборник. 1968. Т. 77(119), № 3. С. 461–472.

6. **Грибов А.Ф., Крищенко А.П., Шахтарин Б.И.** Динамика кусочно-линейной системы третьего порядка // Автоматика и телемеханика. 1980. № 2. С. 21–31.

7. **Шахтарин Б.И., Крищенко А.П.** Исследование кусочно-линейной системы третьего порядка // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1978. № 6. С. 178–185.

8. **Пономаренко В.П.** Динамические режимы и бифуркации в системе частотно-фазовой автоподстройки с многочастотным дискриминатором // Радиотехника и электроника. 2015. Т. 60, № 2. С. 186–200.

9. **Грибов А.Ф., Крищенко А.П., Шахтарин Б.И.** Локализация инвариантных компактов системы фазовой синхронизации // Радиотехника и электроника. 2016. Т. 61, № 9. С. 871–877.

10. **Прохоров А.А., Мчедлова Е.С.** Сложная динамика генератора с кусочно-линейной вольт-амперной характеристикой под внешним периодическим многочастотным воздействием // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, № 4. С. 445–449.

11. **Мищенко М.А., Матросов В.В.** Синхронизация биений в системах фазовой автоподстройки частоты // Известия ВУЗов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25, № 2. С. 37–51.

12. **Грибов А.Ф., Крищенко А.П.** Условия существования сепаратрисного цикла в кусочно-линейной системе // Радиотехника и электроника. 1982. № 2. С. 321–325.

13. **Розенвассер Е.Н.** Колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1969. 576 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Грибов Александр Федорович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, alexandr-gribov@list.ru.

Шахтарин Борис Ильич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры автономных информационных и управляющих систем Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, shakhtarin@mail.ru.

THE CONSTRUCTION OF SOLUTIONS OF PIECEWISE-LINEAR PHASE SYSTEMS

Alexander F. Gribov[1], Boris I. Shakhtarin[1]
[1]Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), Moscow, Russia

The study was conducted with the support of the Russian Foundation for Basic Research, Grant № 18-07-00269

ABSTRACT

The creation of methods for the study of nonlinear phase systems has a long history, since the 60s of the last century (V.I. Tikhonov, V. Lindsay, M.V. Kapranov, B.I. Shakhtarin, etc.). By now, rigorous and approximate analysis methods of such systems have been developed. However, most methods are limited to the analysis of low order systems. Only in recent years attempts have been made to create methods, which allow to carry out the analysis of high-order phase systems. The material of this article deals with these methods. The article considers the construction of solutions of phase systems on the example of phase-locked frequency of arbitrary dimension with piecewise linear approximation of the nonlinear function. This approximation allowed to use an explicit form of solutions in the linearity and to obtain analytical conditions for the existence of various types of system behavior. The analytical conditions for the existence of solutions leading to the emergence of complex limit sets of the trajectories of phase systems and their bifurcations are obtained. These are homoclinic trajectories in the case of the saddle-focus equilibrium state, which play a decisive role in the occurrence of chaos. It is also shown that it is possible to obtain analytical conditions for the bifurcation of the birth and the existence of multi-pass rotational cycles in a piecewise linear phase system, on the basis of which a criterion for the transition to chaos through bifurcations cascade of doubling the stable cycle period can be obtained; in accordance with the Sharkovsky theorem it ends with the bifurcation of the cycle birth of the period three and the occurrence of developed chaos. It should be noted that the research methods of piecewise linear systems described in the paper were applied by the authors not only to phase systems, but, for example, to the Chua system, allowing various chaotic behavior.

Key words: piecewise-linear phase system, homoclinic trajectory, rotational cycles, chaos, bifurcations.

REFERENCES

1. **Shakhgil'dyan, V.V. and Lyakhovkin, A.A.** (1972). *Sistemy fazovoy avtopodstroyki chastoty* [Phase-locked systems]. Moscow: Svyaz, 446 p. (in Russian)

2. **Leonov, G.A. and Smirnova, V.B.** (2000). *Matematicheskiye problemy fazovoy sinkhronizatsii* [Mathematical problems of phase synchronization]. St. Petersburg: Nauka, 400 p. (in Russian)

3. **Kuznetsov, A.P., Savin, A.V. and Sataev, I.R.** (2007). *O kriticheskom povedenii v neidentichnykh nesimmetrichno svyazannykh sistemakh Chua* [On the critical behavior of non-identical asymmetrically coupled Chua's circuits]. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics, vol. 15, no. 2, pp. 3–12. (in Russian)

4. **Shilnikov, L.P.** (1965). *A case of the existence of a denumerable set of periodic motions.* Soviet Mathematics, vol. 160, no. 3, pp. 558–561.

5. **Shilnikov, L.P.** (1968). *On the generation of a periodic motion from trajectories doubly asymptotic to an equilibrium state of saddle type.* Mathematics of the USSR – Sbornik, vol. 77(119), no. 3, pp. 461–472.

6. **Gribov, A.F., Krishchenko, A.P. and Shakhtarin, B.I.** (1980). *Dynamics of piecewise linear system of the third order.* Automation and Remote Control, no. 2, pp. 21–31.

7. **Shakhtarin, B.I. and Krishchenko, A.P.** (1978). *Study of piecewise linear system of the third order.* Engineering Cybernetics, no. 6, pp. 178–185.

8. **Ponomarenko, V.P.** (2015). *Dynamic modes and bifurcations in the frequency-phase lock system with a multiple-frequency discriminator.* Journal of Communications Technology and Electronics, vol. 60, no. 2, pp. 179–192.

9. **Gribov, A.F., Krishchenko, A.P. and Shakhtarin, B.I.** (2016). *Localization of invariant compacts of a phase-lock system.* Journal of Communications Technology and Electronics, vol. 61, no. 9, pp. 1020–1025.

10. **Prokhorov, A.A. and Mchedlova, E.S.** (2006). *Complex dynamics of a generator with a piecewise-linear current-voltage characteristic subjected to an external periodic multifrequency signal.* Journal of Communications Technology and Electronics, vol. 51, no. 4, pp. 445–449.

11. **Mishchenco, M.A. and Matrosov, V.V.** (2017). *Sinkhronizatsiya biyeniy v sistemakh fazovoy avtopodstroyki chastoty* [Synchronization of beats in phase-locked loops]. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics, vol. 25, no. 2, pp. 37–51. (in Russian)

12. **Gribov, A.F. and Krishchenko, A.P.** (1982). *Conditions for the existence of a separatrix cycle in a piecewise linear system.* Radio Engineering and Electronic Physics, no. 2, pp. 321–325.

13. **Rozenvasser, E.N.** (1969). *Kolebaniya nelineynykh system* [Oscillations of nonlinear systems]. Moscow: Nauka, 576 p. (in Russian)

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alexander F. Gribov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Mathematical Simulation Chair, Bauman Moscow State Technical University, alexandr-gribov@list.ru.

Boris I. Shakhtarin, Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Autonomous Information and Control Systems Chair, Bauman Moscow State Technical University, shakhtarin@mail.ru.

Поступила в редакцию	10.07.2018	Received	10.07.2018
Принята в печать	17.01.2019	Accepted for publication	17.01.2019