УДК 519.46

О КОНСТРУКЦИИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ БЕЗДИВЕРГЕНТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА $\mathbb{R}^n$

А.М. ЛУКАЦКИЙ

Рассматривается задача продолжения бездивергентных векторных полей, определенных в окрестности начала координат в $\mathbb{R}^n$, до бездивергентных финитных на $\mathbb{R}^n$. Получены явные формулы продолжений для элементов простой алгебры Ли бездивергентных векторных полей известной серии Э. Картана. Конструкция позволяет перейти от уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости к уравнениям Эйлера на конечномерных группах Ли.

Ключевые слова: локально-бездивергентные векторные поля, гладкие продолжения, финитные векторные поля, идеальная несжимаемая жидкость, алгебры Ли, факторизация, уравнения Эйлера.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть дано n-мерное вещественное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$. Будем рассматривать $\mathbb{R}^n$ как область течения идеальной несжимаемой жидкости [1]. Конфигурационным пространством этой физической задачи является подгруппа группы $Diff_\mu(\mathbb{R}^n)$ сохраняющих элемент объема диффеоморфизмов $\mathbb{R}^n$, изотопных тождественному и быстро сходящихся к тождественному на бесконечности, $Diff_\mu^0(\mathbb{R}^n)$. Ее алгебра Ли $V_\mu^0(\mathbb{R}^n)$ состоит из бездивергентных векторных полей, быстро убывающих на бесконечности [2, с. 33-36], [3], которые являются полями скоростей течений идеальной несжимаемой жидкости. Если обозначить через $V_\mu^\delta(\mathbb{R}^n)-$ алгебру Ли финитных бездивергентных векторных полей на $\mathbb{R}^n$, то имеем $V_\mu^\delta(\mathbb{R}^n)\subset V_\mu^0(\mathbb{R}^n)$.

Динамика течений идеальной несжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил описывается уравнением Эйлера [1, с. 42] их полей скоростей на M :

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\nabla_w w+\nabla p=0 \tag{1}$$

Здесь $w-$ поле скоростей идеальной несжимаемой жидкости, а $p-$ давление жидкости. Течения идеальной несжимаемой жидкости являются геодезическими многообразия $Diff_\mu^0(M)$ в смысле правоинвариантной (в смысле групповой структуры) метрики, задаваемой в единице группы формой-кинетической энергии:

$$(u,v)=\int_M <u(x),v(x)> d\mu(x). \tag{1'}$$

Введем алгебру Ли $P_\mu(\mathbb{R}^n)-$ полиномиальных бездивергентных векторных полей на $\mathbb{R}^n$. Эту алгебру Ли много изучали С. Ли и Э. Картан, еще С. Ли доказал, что это простая алгебра Ли ([4, с. 273]). Заметим, что $P_\mu(\mathbb{R}^n)$ не является подалгеброй $V_\mu^0(\mathbb{R}^n)$, т.к. эти векторные поля не убывают быстро на бесконечности. Локализуем векторные поля из $P_\mu(\mathbb{R}^n)$, рассматривая их на единичном круге $\mathbf{B}^n\subset\mathbb{R}^n$, и обозначим образованную ими алгебру Ли через $P_\mu(\mathbf{B}^n)$. Ниже будет предложена явная конструкция продолжения таких векторных полей с $\mathbf{B}^n$ до векторных полей на $\mathbb{R}^n$, быстро убывающих на бесконечности (элементов $V_\mu^0(\mathbb{R}^n)$), а точнее до финитных бездивергентных векторных полей на $\mathbb{R}^n$ (элементов $V_\mu^\delta(\mathbb{R}^n)$).

1. КОНСТРУКЦИЯ ПРОДОЛЖЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ БЕЗДИВЕРГЕНТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА $\mathbb{R}^n$

Удобно ввести гладкую функцию на прямой:

$$f(t)=\begin{cases}1, 0\le t\le 1;\\ 0, t\ge 2.\end{cases}$$

Чтобы избежать излишне громоздких формул, условимся обозначать $f((x,x)), x\in\mathbb{R}^n$ через f, $\frac{df}{dx}\big|_{(x,x)}$ $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{(x,x)}$ через f'.

Зададим векторные поля на $\mathbb{R}^n$:

$$w_k=\frac{1}{k}(kx_2^{k-1}f+2x_2^{k+1}f',-2x_1x_2^kf',0,...,0),$$

$$v_k=(x_1^kf+2x_1^kx_2^2f',-kx_1^{k-1}x_2f-2x_1^{k+1}x_2f',0,...,0).$$

Имеем $\operatorname{div}w_k=\operatorname{div}v_k=0$.

Заметим, что

$$w_k\,|\,\mathbf{B}^n=(x_2^{k-1},0,...,0), v_k\,|\,\mathbf{B}^n=(x_1^k,-kx_1^{k-1}x_2,0,...,0).$$

Введем следующие обозначения:

$$\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$e_{i,j}=x_i\partial_j, h_{i,j}=x_i\partial_i-x_j\partial_j, i\ne j, \quad (2)$$

$$q_{i,j}=x_i^2\partial_j, i\ne j,$$

$$g_{i,j}=x_i^2\partial_i-2x_ix_j\partial_j, i\ne j.$$

Вернемся к алгебре Ли $P_\mu(\mathbf{B}^n)$. Обозначим через $P_\mu^k(\mathbf{B}^n)\subset P_\mu(\mathbf{B}^n)$ подпространство из векторных полей с координатами - однородными многочленами степени k. Имеем

$$P_\mu(B^n)=\sum_{k=0}^{\infty}P_\mu^k(\mathbf{B}^n). \quad (3)$$

Заметим, что пространство $P_\mu^0(\mathbf{B}^n)$ является алгеброй Ли $\mathbf{R}^n$ с базисом $\partial_i, i=1,...,n$.

Пространство $P_\mu^1(\mathbf{B}^n)$ является алгеброй Ли $sl(n)$ с базисом $e_{i,j}, h_{1,k}, 1 \le i \ne j \le n, 2 \le k \le n$.

Рассмотрим пространство $P_\mu^k(\mathbf{B}^n), k > 1$. В нем можно выделить подпространство $P_\mu^k(\mathbf{B}^n)'$ из векторных полей, i-я координата которых не зависит от x_i для $i = 1,...,n$. В пространстве $P_\mu^k(\mathbf{B}^n)^r ime$ можно построить базис из векторных полей вида:

$$x_1^{p_1}...x_n^{p_n}\partial_i, p_i = 0, p_1 + ... + p_n = k, i = 1,...,n. \tag{4}$$

С каждым мономом $t = x_1^{p_1}...x_n^{p_n}$ степени $k-1$, т.е. $p_1 + ... + p_n = k-1$ можно связать подпространство $P_\mu^k(\mathbf{B}^n)^t$, состоящее из векторных полей вида:

$$\sum_{i=0}^n a_i x_i t \partial_i,$$

где

$$\sum_{i=0}^n a_i (p_i + 1) = 0.$$

Пространство $P_\mu^k(\mathbf{B}^n)^t$ имеет размерность $n-1$, в нем можно выбрать базис из элементов

$$(p_i + 1)x_1 t\partial_1 - (p_1 + 1)x_i t\partial_i, i = 2,...,n. \tag{5}$$

Непосредственно проверяется, что

$$P_\mu^k(B^n) = P_\mu^k(\mathbf{B}^n)' + \sum_{t, degt = k-1} P_\mu^k(B^n)^t,$$

а элементы (4), (5) дают базис пространства $P_\mu^k(\mathbf{B}^n)$.

Ниже будет доказано, что последовательным коммутированием с векторными полями второй степени можно получить всю алгебру Ли $P_\mu(\mathbf{B}^n)$.

Теорема 1.
Линейная оболочка элементов

$$\{[g_{i,j}, P_\mu^{k-1}(\mathbf{B}^n)] \,|\, 1 \le i \ne j \le n\} \tag{6}$$

является пространством $P_\mu^k(\mathbf{B}^n)$, $k \ge 1$.

Доказательство. Будем вести индукцию по k. Имеем

$$[g_{i,j}, \partial_j] = 2e_{i,j}, [g_{j,i}, \partial_i] = -2h_{i,j},$$

откуда следует случай $k = 1$. Для $k = 2$ имеем

$$[e_{i,j}, g_{i,j}] = -3q_{i,j}, [e_{i,j}, g_{j,i}] = -2g_{i,j}.$$

При $n = 2$ получаем базис в $P_\mu^2(\mathbf{B}^n)$. При $n > 2$ возьмем различные $i, j,, k$. Имеем

$$[g_{i,j}, e_{k,i}] = 2x_i x_k \partial_j,$$

и также получаем базис в $P_\mu^2(\mathbf{B}^n)$.

Рассмотрим теперь $P_\mu^k(\mathbf{B}^n)$ для $k \geq 3$ и покажем, что любой элемент базиса (4), (5) можно получить по (6). Рассмотрим сначала элемент вида (4) для определенности $x_2^{p_2} ... x_n^{p_n} \partial_1$ с $p_2 \geq 1$ Имеем

$$[g_{2,1}, x_2^{p_2-1} ... x_n^{p_n} \partial_1] = (p_2 + 1) x_2^{p_2} ... x_n^{p_n} \partial_1.$$

Теперь рассмотрим элемент вида (5), для определенности выберем:

$$u = p_2 x_1^{p_1+1} x_2^{p_2-1} ... x_n^{p_n} \partial_1 - (p_1 + 1) x_1^{p_1} x_2^{p_2} ... x_n^{p_n} \partial_2,$$

где $p_1, p_2 \geq 1$. Обозначим $v = p_2 x_1^{p_1} x_2^{p_2-1} ... x_n^{p_n} \partial_1 - p_1 x_1^{p_1-1} x_2^{p_2} ... x_n^{p_n} \partial_2$. Имеем

$$[g_{1,2}, v] = (p_1 - 2p_2) u.$$

Поэтому при $p_1 \neq 2p_2$ получаем нужное представление. Рассмотрим теперь случай $p_1 = 2p_2$, тогда при ненулевых p_1, p_2 имеем $p_2 \neq 2p_1$. Введем векторное поле

$$w = (p_2 + 1) x_1^{p_1} x_2^{p_2} ... x_n^{p_n} \partial_1 - p_1 x_1^{p_1-1} x_2^{p_2+1} ... x_n^{p_n} \partial_2,$$
$$r = p_2 x_1^{p_1} x_2^{p_2-1} ... x_n^{p_n} \partial_1 - p_1 x_1^{p_1-1} x_2^{p_2} ... x_n^{p_n} \partial_2,$$

По аналогии с предыдущим можно получить

$$[g_{2,1}, r] = (2p_1 - p_2) w.$$

Заметим далее, что

$$[e_{1,2}, w] = (p_2 + 1) u.$$

Из тождества Якоби имеем

$$[e_{1,2}, [g_{2,1}, r]] = [g_{2,1}, [e_{1,2}, r]] - 2[g_{1,2}, r].$$

Так как $[e_{1,2}, r] \in P_\mu^{k-1}(B^n)$, это завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. Элементы

$$\partial_i, i = 1, ..., n,$$
$$g_{i,j}, 1 \leq i \neq j \leq n, \quad (7)$$

порождают алгебру Ли $P_\mu(\mathbf{B}^n)$.

Так как элементы системы образующих продолжаются до финитных бездивергентных векторных полей, то получаем, что бездивергентные полиномиальные векторные поля на единичном шаре ($P_\mu(\mathbf{B}^n)$) продолжаются до гладких финитных бездивергентных векторных полей на $\mathbf{R}^n$ с носителем в шаре радиуса 2 ($V_\mu^\delta(\mathbf{B}^n)$). Здесь, однако, удобно иметь прямую конструкцию такого продолжения. Для этого построим продолжения для элементов базиса (4) и (5). Рассмотрим сначала элементы вида (4), для определенности

$$x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n}\partial_1.$$

Его продолжением будет векторное поле

$$((p_2+1)x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n} f - 2x_2^{p_2+2}\dots x_n^{p_n} f')\partial_1 - 2x_1x_2^{p_2+1}\dots x_n^{p_n} f'\partial_2. \qquad (8)$$

Рассмотрим далее элементы вида (5), для определенности

$$u = p_2 x_1^{p_1+1}x_2^{p_2-1}\dots x_n^{p_n}\partial_1 - (p_1+1)x_1^{p_1}x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n}\partial_2.$$

Его продолжением будет векторное поле

$$u=(p_2x_1^{p_1+1}x_2^{p_2-1}\dots x_n^{p_n} f + 2x_1^{p_1+1}x_2^{p_2+1}\dots x_n^{p_n} f')\partial_1 - ((p_1+1)x_1^{p_1}x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n} f + 2x_1^{p_1+2}x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n} f')\partial_2. \qquad (9)$$

Доказательство состоит в громоздкой, но несложной выкладке.

2. ПРИЛОЖЕНИЯ КОНСТРУКЦИИ ПРОДОЛЖЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Пример 1.
Положим

$$s_{-1}=\partial_1, s_k = x_1^k\partial_1 - kx_1^{k-1}x_2\partial_2, k=1,2,\dots.$$

Имеют место следующие коммутационные соотношения:

$$[s_l, s_k] = (k-l)s_{k-l}.$$

Таким образом, элементы $s_r, r=-1,0,1,\dots$ образуют алгебру Ли S, изоморфную алгебре Ли всех полиномиальных векторных полей на прямой $\mathbb{R}$. Из предыдущего следует, что векторные поля алгебры Ли S продолжаются с B^n до векторных полей из $V_\mu^\delta(\mathbb{R}^n)$.

Таким образом, в конфигурационном пространстве идеальной несжимаемой жидкости на $\mathbb{R}^n$ содержится подгруппа с алгеброй Ли, локально изоморфной алгебре Ли формальных векторных полей на прямой $\mathbb{R}$.

Введем далее подпространство Ли $S_{\mu,k}(\mathbf{B}^n)$, состоящее из векторных полей степени не ниже k. Имеем

$$S_{\mu,k}(\mathbf{B}^n) = \sum_{r=k}^{\infty} P_{\mu}^r(\mathbf{B}^n). \tag{10}$$

Рассмотрим $S_{\mu,1}(B^n)$. Это подпространство векторных полей с особой точкой в начале координат; непосредственно проверяется, что оно является алгеброй Ли. Кроме того, нетрудно убедиться, что подпространство $S_{\mu,k}(\mathbf{B}^n) \subset S_{\mu,1}(\mathbf{B}^n)$ при $k > 1$ является нормальным делителем:

$$S_{\mu,1}(\mathbf{B}^n) \rhd S_{\mu,k}(\mathbf{B}^n), k > 1. \tag{11}$$

Введем в пространстве $P_{\mu}(\mathbf{B}^n)$ метрику:

$$\{u,v\} = \int_{\mathbf{B}^n} (u(x), v(x)) d\mu. \tag{12}$$

Метрику (12) можно интерпретировать как вклад в кинетическую энергию ограничения векторного поля на шаре.

Для векторного поля $u \in P_{\mu}(\mathbf{B}^n)$ обозначим через $\tilde{u}$ его продолжение до бездивергентного финитного поля на $\mathbb{R}^n$, полученного по формулам (8), (9). Введем в $P_{\mu}(\mathbf{B}^n)$ метрику, являющуюся кинетической энергией продолжений векторных полей.

$$< u,v >= \int_{\mathbf{R}^n} (\tilde{u}(x), \tilde{v}(x)) d\mu. \tag{13}$$

Имеем $\{u,v\} << u,v >$.

Уравнение (1) можно переформулировать как уравнение геодезических правоинвариантной метрики на группе сохраняющих объем диффеоморфизмов в виде:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = ad_w^* w \tag{14}$$

Здесь $ad_w^* -$ оператор коприсоединенного действия в смысле метрики (13).

Из (11) можно построить конечномерные фактор-алгебры

$$g_k = S_{\mu,1}(\mathbf{B}^n) / S_{\mu,k+1}(\mathbf{B}^n), k > 0, \tag{15}$$

им соответствуют конечномерные группы Ли G_k.

Можно произвести редукцию метрики (13) на g_k. Для этого в каждом смежном классе факторизации достаточно выбрать представителем векторное поле с мономами степени не выше k (оно единственно). Далее можно рассмотреть уравнение (14) на g_k с таким образом определенной метрикой, это будет уравнение Эйлера (геодезических правоинвариантной метрики на группе G_k с алгеброй Ли правоинвариантных векторных полей либо левоинвариантной метрики на G_k с алгеброй Ли левоинвариантных векторных полей (2, [с. 63]).

Предложение 1. Решение уравнения Эйлера на группе G_k существует, единственно и продолжается на бесконечность во времени.

Доказательство. Это следует из того, что на любой конечномерной группе Ли решение уравнения геодезических правоинвариантной (или левоинвариантной) метрики обладает такими свойствами ([2, с.64], [5, с. 232]).

ВЫВОДЫ

Получены явные формулы продолжения полиномиальных бездивергентных векторных полей на единичном шаре в $\mathbb{R}^n$ до гладких финитных бездивергентных векторных полей на $\mathbf{R}^n$ Путем факторизации сделан переход к конечномерным группам Ли, где построены ассоциированные с конструкцией уравнения Эйлера, решения которых продолжаются на бесконечность во времени. Сохраняемая на решениях метрика совпадает с кинетической энергией продолжений соответствующих бездивергентных векторных полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Арнольд В.И., Хесин Б.А.** Топологические методы в гидродинамике. – М.: МЦНМО, 2007.
2. **Лукацкий А.М.** Структурно-геометрические свойства бесконечномерных групп Ли в применении к уравнениям математической физики. – Ярославль: изд. ЯрГУ, 2010.
3. **Лукацкий А.М.** О геометрии группы диффеоморфизмов, сохраняющих меру некомпактного многообразия // Научный вестник МГТУ ГА. 2005. № 91. С. 36-47.
4. **Картан Э.** Избранные труды. – М.: МЦНМО, 1998.
5. **Комраков Б.П.** Структуры на многообразиях и однородные пространства. – М.: Наука и техника, 1978.

ON A PROLONGATION CONSTRUCTION FOR LOCAL NON-DIVERGENT VECTOR FIELDS ON $\mathbb{R}^n$

Lukatsky A.M.

The problem of a prolongation of non-divergent vector field, defined in a vicinity of zero in $\mathbb{R}^n$ t, to a finite non-divergent vector field on $\mathbb{R}^n$ is considered. Explicit formulas for the elements of the simple Lie algebra of non-divergent vector from the well-known Cartan series are obtained. This construction allows to move from the Euler equations for the ideal incompressible fluid to the Euler equations on finite-dimensional Lie groups.

Keywords: locally non-divergent vector field, smooth prolongation, ideal incompressible fluid, Euler equations, finite vector field, Lie algebras.

REFERENCES

1. Arnol'd V.I., Hesin B.A. *Topologicheskie metody v gidrodinamike* (Topology Methods in Hydrodynamics). Moscow, MCCME, 2007, 284 p.
2. Lukackij A.M. *Strukturno-geometricheskie svojstva beskonechnomernyh grupp Li v primenenii k uravnenijam matematicheskoj fiziki* (Geometry structure characteristics of infinite Lie groups in their applications to mathematical physics). Jaroslavl', JarGU, 2010, 142 p.
3. Lukackij A.M. Nauchnyj vestnik MGTU GA, 2005, № 91, 36-47 p.
4. Kartan Je. *Izbrannye Trudy* (Selected Works), Moscow, MCCME, 1998, 440p.
5. Komrakov B.P. *Struktury na mnogoobrazijah i odnorodnye prostranstva* (Structures on manifolds and homogeneous spaces). Moscow, Nauka i tehnika, 1978, 210 p.

Сведения об авторе

Лукацкий Александр Михайлович, 1949 г.р., окончил МГУ им. М. В. Ломоносова (1972), доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник института энергетических исследований (ИНЭИ) РАН, автор 96 научных работ, область научных интересов – бесконечномерные группы Ли в применении к уравнениям математической физики.