УДК 512.541

АДДИТИВНЫЕ ГРУППЫ АССОЦИАТИВНЫХ КОЛЕЦ

Е.И. КОМПАНЦЕВА

В работе изучаются абелевы группы, на которых существует, хотя бы одно ассоциативное полупростое кольцо (полупростые группы), проблема описания которых сводится к случаю редуцированных групп. Как следствие, показано, что любая абелева группа без кручения, ранг делимой части которой бесконечен и равен m, а ранг редуцированной части не больше 2^m, является полупростой.

Ключевые слова: абелева группа, кольцо на группе, полупростая группа, полупростое кольцо.

Абелева группа называется полупростой, если на ней существует полупростое ассоциативное кольцо. Кольцом на абелевой группе G называется кольцо, аддитивная группа которого совпадает с G. Проблема изучения полупростых групп была сформулирована в [1] и исследовалась в [2, 3].

Ниже рассматривается только абелевы группы без кручения и только ассоциативные кольца, а слова группа и кольцо всюду в дальнейшем означают соответственно «абелева группа без кручения» и «ассоциативное кольцо».

Умножением на группе G называется гомоморфизм $\mu: G\otimes G \to G$, при этом часто будем обозначать $\mu(g\otimes g) = g_1 \times g_2$ для $g_1, g_2 \in G$. Группа G с заданным на ней умножением $\times$ называется кольцом на группе G, это кольцо обозначается $(G,\times)$, его радикал Джекобсона - $J(G,\times)$.

Пусть $G = A\oplus B, (G,\times)$ - кольцо. Определим умножение на A следующим образом: $a_1 \times_A a_2 = \pi_A(a_1\times a_2)$ для всех $a_1, a_2 \in A$. Будем называть $\times_A$ умножением, индуцированным на А умножением $\times$.

Приведем без доказательства две леммы, которые используются при доказательстве теорем 3 и 4.

Лемма 1. Пусть $G = A\oplus B, (G,\times)$ – кольцо, B – идеал кольца $(G,\times)$. Тогда 1) $(G/B,\times) \cong (A,\times_A)$. 2) $J(G,\times) \subset J(A,\times_A)\oplus B$. 3) Если B – квазирегулярный идеал, то $J(G,\times) = J(A,\times)\oplus B$. 4) Если K – идеал кольца $(G,\times)$, то $\pi_A(K)$ - идеал кольца $(A,\times_A)$.

Лемма 2. Пусть $G = A\oplus B$ - прямая сумма групп, $(G,\times)$ – кольцо на G, B – полупростой идеал кольца $(G,\times)$ с единицей e. Тогда $J(G,\times) = \{a - a\times e \mid a \in J(A,\times_A)\}$.

Пусть D – делимая группа конечного ранга и $(D,\times)$ - кольцо на ней. По основной теореме Веддерберна о сепарабельных конечномерных алгебрах существует разложение $(D,\times) = S\oplus N$ векторного пространства $(D,\times)$ в прямую сумму векторных пространств. Здесь S – полупростая подалгебра с единицей в алгебре D, а N – радикал D, обязательно нильпотентный. Эти обозначения будем использовать в дальнейшем.

Теорема 3. Пусть $G = A\oplus D$ – прямая сумма редуцированной группы A и делимой группы D конечного ранга. Пусть $(G,\times)$ – кольцо и для идеала $(D,\times)$ имеет место разложение $(D,\times) = S\oplus N$. Пусть e – единица подалгебры S, $B = \{a - a\times e \mid a\in J(A,\times_A)\}$. Тогда $J(G,\times) = B + N$.

Доказательство. Так как $N = J(D,\times)$, то $N = J(G,\times)\cap D$ и, следовательно, N – нильпотентный идеал кольца $(G,\times)$. Значит, $J(G,\times) = J(A\oplus S,\times_{A\oplus S})\oplus N$ по лемме 1. Нетрудно видеть, что $(S,\times_{A\oplus S}) = (S,\times)$ – полупростой идеал кольца $(A\oplus S,\times_{A\oplus S})$ с единицей e. Следовательно, $J(A\oplus S,\times_{A\oplus S}) = \{a - a\times_{A\oplus S} e \mid a\in J(A,\times_A)\}$ по лемме 2, откуда

$J(G,\times)=B+N$.

Теорема 4. Пусть $G=A\oplus D$ – прямая сумма редуцированной группы A и делимой группы D конечного ранга. Группа G является полупростой тогда и только тогда, когда полупростой является группа A.

Доказательство. Если A – полупростая группа, то существует полупростое кольцо $(A,\times)$, определим кольцо $(D,\times)$ как прямую группу полей, изоморфных полю рациональных чисел. Определяя кольцо $(G,\times)$ как прямую сумму полупростых идеалов $(A,\times)\oplus(D,\times)$, получим полупростое кольцо G.

Обратно, если на G существует полупростое кольцо $(G,\times)$, то в нем идеал $(D,\times)$ является полупростым. Следовательно, в разложении $(D,\times)=S\oplus N$ идеал N является нулевым. Значит, $J(G,\times)=\{a-a\times e \mid a\in J(A,\times_A)\}=0$ в силу леммы 1, где e – единица идеала $D=S$. Так как $a\times e\in D$ для любого $a\in A$, то из равенства $a-a\times e=0$ следует, что $a=0$. Таким образом, получаем, что $J(A,\times_A)=0$ и, следовательно, группа A полупроста.

Для описания полупростых групп в случае, когда ранг m ее делимой части бесконечен, введем понятие m-полупростой группы. Группу A назовем m-полупростой, если на ней можно определить кольцо, в котором существует полупростой идеал A^* такой, что фактор-кольцо A/A^* вкладывается в качестве подкольца в прямое произведение не более, чем m колец без кручения, ранг каждого из которых не превосходит m. Из этого определения следует, что m-полупростыми являются, в частности, все группы, ранг которых не более 2^m.

<u>Лемма 5.</u> Пусть $G=A\oplus D$, где A – редуцированна группа, D – делимая группа бесконечного ранга m. Если группа G полупроста, то группа A является m-полупростой.

Доказательство. Пусть $(G,\times)$ – полупростое кольцо. Запишем группу D в виде $D=\bigoplus_{i\in I}Qe_i$, где $|I|=m$, Q – поле рациональных чисел, $e_i\in D$.

Рассмотрим отображение $\varphi:G\to\prod_m D$, определяемое следующим образом: $\varphi(g)=(g\times e_i)_{i\in I}$. Обозначим $A^*=Ker\varphi$. Нетрудно видеть, что $A^*=Ann_G D$ и A^* является идеалом кольца $(G,\times)$. Так как $(D,\times)$ – идеал полупростого кольца $(G,\times)$, то $(D,\times)$ полупрост и, следовательно, $A^*\cap D=0$. Без потери общности можно считать, что A^* содержится в A. Очевидно, A^* – идеал кольца $(G,\times)$, а, значит, и кольца $(A,\times_A)$. В силу полупростоты кольца $(G,\times)$ идеал A^* является полупростым.

Для произвольного $i\in I$ рассмотрим отображение $\varphi_i:G\to D$, определяемое следующим образом $\varphi_i(g)=g\times e_i$. Легко видеть, что $Ker\varphi_i=Ann_G e_i$ и $|G/Ann_G e_i|\le|D|=m$.

Рассмотрим теперь подгруппы $G_i=Ann_G e_i+(Ann_G e_i)\times G$ и $\overline{G_i}$ – сервантную подгруппу, порожденную G_i. Так как $Ann_G e_i$ – левый идеал $(G,\times)$, то G_i является двусторонним идеалом этого кольца. Нетрудно видеть, что $\overline{G_i}$ также является идеалом кольца $(G,\times)$.

Обозначим $D_i=\overline{G_i}\cap D$, тогда $G_i=A_i\oplus D_i$ для некоторой группы A_i, для которой $A_i\cap D=0$. Без потери общности можно считать, что $A_i\subset A$.

Группа $A_i=\pi_A\left(\overline{G_i}\right)$ является идеалом кольца $(A,\times_A)$ по лемме 1 (4). Рассмотрим фактор-кольцо $(\grave{A}/A_i,\times_A)$. Так как $Ann_G e_i\subset\overline{G_i}$, то $\left|G/\overline{G_i}\right|\le m$. Для фактор-группы $G/\overline{G_i}$ имеет место изоморфизм, $G/\overline{G_i}=A/A_i\oplus D/D_i$, следовательно, $\left|A/A_i\right|\le m$. Так как A_i есть пересечение подгрупп $\overline{G_i}$ и A, сервантных в группе без кручения G, то A_i сервантна в G, а значит, и в A. Следовательно, A/A_i – кольцо без кручения.

Рассмотрим теперь отображение $\alpha : A \to \prod_{i\in I} A/A_i$, при котором $\alpha(a) = (a + A_i)_{i\in I}$ для любого $a \in A$. Нетрудно видеть, что это отображение является гомоморфизмом кольца $(A, \times_A)$ в прямое произведение $\prod_{i\in I}(A/A_i, \times_A)$ колец $(A/A_i, \times_A)$, $\operatorname{Ker}\ \alpha = \bigcap_{i\in I} A_i$ и $\operatorname{Im}(\pi_{A/A_i}) = A/A_i$ для всех $i \in I$. Покажем, что $\bigcap_{i\in I} A_i = A^*$. Пусть $a \in A^* = Ann_G D$. Тогда для любого $i \in I$ имеем $a \in Ann_G e_i$ и $a \in A$, значит, $a \in \overline{G_i} \cap A = A_i$. Следовательно, $\alpha = \bigcap_{i\in I} A_i$, откуда $A^* \subset \bigcap_{i\in I} A_i$. Докажем обратное включение. Пусть $a = \bigcap_{i\in I} A_i$, $d \in D$ и пусть $i \in I$. Элемент a представим в виде $a = r_i(c_i + f_i \times g_i)$, где $r_i \in Q, c_i f_i \in Ann_G e_i, g_i \in G$. Обозначим $F_i = \bigoplus_{i\neq j} Qe_j$. Тогда $a \times d = r_i c_i \times d + r_i f_i \times (g_i \times d) \in F_i$ для любого $d \in D$. В силу произвольности индекса $i \in I$ получаем, что $a \times d \in \bigcap_{i\in I} F_i = 0$. Следовательно, $a \in A^*$ и $\bigcap_{i\in I} A_i \subset A^*$.

Таким образом, $Ker\alpha = \bigcap_{i\in I} A_i = A^*$ и фактор-кольцо $(A/A^*, \times_A)$ вложимо в прямое произведение колец без кручения $(A/A_i, \times_A)$, мощность каждого из которых не более m. Так как A^* – полупростой идеал кольца $(A, \times_A)$, то A является m-полупростой группой.

<u>*Лемма 6.*</u> Пусть $G = A \oplus B,$ где D – делимая группа бесконечного ранга m, A – группа, ранг которой не больше, чем m. Пусть на группе A определено кольцо $(A, \times)$. Тогда кольцо $(A, \times)$ может быть вложено как подкольцо в кольцо $(G, \times)$, для которого выполняются следующие условия: 1) D – полупростой идеал кольца $(G, \times)$; 2) для любого ненулевого элемента $g \in G$ существует элемент $d \in D$ такой, что $g \times d \neq 0$.

Доказательство. Кольцо $(A, \times)$ вкладывается в кольцо $(\overline{A}, \times)$ на делимой оболочке $\overline{A}$ группы A. Пусть $\overline{A} = \oplus_{j\in J} Qa_j, D = \oplus_{i\in I} Qe_i, |J| \leq m, |I| = m$, и $a_j \times a_s = \sum_{j\in J} r_{js}{}^{(t)} a_t$ для произвольных $j, s \in J$ ($r_{js}{}^{(t)} \in Q$ и $r_{js}{}^{(t)} = 0$ почти для всех $t \in J$).

Пусть K – некоторое множество индексов мощности m, W – множество ассоциативных слов в алфавите $\{x_i, y_k \mid j \in J, k \in K\}$, не содержащих подслов вида $x_j x_s (j, s \in J)$, и пусть $F = \oplus_{w\in W} Qw$.

Рассмотрим алгебру $(F, \cdot)$ над Q, определив для любых $w_1, w_2 \in W$ произведение $w_1 \cdot w_2$ как результат приписывания слова w_2 к слову w_1 справа и замены в полученном слове подслова вида $x_j x_s$ (если оно есть) на элемент $\sum_{j\in J} r_{js}{}^{(t)} x_t (j, s \in J)$. Алгебра $(F, \cdot)$ изоморфна фактор-алгебре алгебры $Q[x_j, y_k]$, порожденной множеством всех ассоциативных слов в алфавите $\{x_j, y_k \mid j \in J, k \in K\}$, по идеалу, порожденному множеством $\{x_j x_s - \sum_{t\in J} r_{js}{}^{(t)} x_t \mid j, s \in J\}$.

Пусть $\overline{W}$ – множество ассоциативных слов из W, содержащих хотя бы одно подслово вида $y_k (k \in K)$. Очевидно, мощность $\overline{W}$ равна m. Занумеруем слова множества $\overline{W}$ индексами из $I : \overline{W} = \{w_i \mid i \in I\}$. Тогда группу F записать в виде $F = \oplus_{j\in J} Qx_j \oplus \oplus_{i\in I} Qw_i$.

Отображение $\varphi : F \to \overline{A} \oplus D$, при котором $\varphi(x_i) = a_j ; \varphi(w_i) = e_i (j \in J, i \in I)$ является изоморфизмом аддитивных групп. Следовательно, на группе $\overline{A} \oplus D$ можно определить кольцо $(\overline{A}\oplus D,\times)$ так, что φ становится изоморфизмом колец $(F,\cdot)$ и $(\overline{A}\oplus D,\times)$. Как нетрудно видеть, $(A,\times)$ совпадет с заданным кольцом на A, а D – идеал кольца $(G,\times)$, изоморфный идеалу $(\oplus_{i\in I} Qw_i,\cdot)$ кольца $(F,\cdot)$.

Покажем, что кольцо $(\oplus_{i\in I} Qw_i,\cdot)$ полупросто. Пусть $a = r_{i_1}w_{i_1} + \cdots + r_{i_n}w_{i_n} \in J(\oplus_{i\in I} Qw_i,\cdot)$, где $r_{i_1},\dots,r_{i_n}\in Q; w_{i_1},\dots,w_{i_n}$ – различные слова из $\overline{W}$. Допустим, $a\neq 0$. Пусть $r_{i_n}\neq 0$ и $l(w_{i_1})\le \dots \le l(w_{i_n})$, где $l(w_t)$ – длина слова w_t.

Зафиксируем произвольный индекс $k\in K$ и рассмотрим элемент $a\cdot y_k = r_{i_1}w'_{i_1} + \dots + r_{i_n}w'_{i_n}$, где $w'_{i_t} = w_{i_t}\cdot y_k\,(t=1,\dots,n)$. Очевидно, $a\cdot y_k$ – также ненулевой элемент $J(\oplus_{i\in I} Qw_i,\cdot)$. Следовательно, существует элемент $b = s_{j_1}w_{j_1} + \dots + s_{j_m}w_{j_m}\neq 0$ $(s_{j_1}\dots,s_{j_m}\in Q, w_{j_1},\dots,w_{j_m}\in\overline{W})$ такой, что

$$a\cdot y_k + b - a\cdot y_k\cdot b = 0. \qquad (1)$$

Пусть $s_{j_m}\neq 0$ и $l(w_{j_1})\le\dots\le l(w_{j_m})$. Равенство (1) перепишем в виде

$$r_{i_1}w'_{i_1} + \dots + r_{i_n}w'_{i_n} + s_{j_1}w_{j_1} + \dots + s_{j_m}w_{j_m} - r_{i_1}s_{j_1}w'_{i_1}w_{j_1} - \dots - r_{i_n}s_{j_m}w'_{i_n}w_{j_m} = 0 \qquad (2)$$

Поскольку $w'_{i_n} = w'_{i_n}\cdot y_k$, то $l(w'_{i_n}\cdot w_{j_m}) = l(w'_{i_n}) + l(w_{j_m})$. Следовательно, среди слов левой части равенства (2) длина слова $w'_{i_n}\cdot w_{j_m}$ максимальна. Так как слово w'_{i_n} отлично от слов $w'_{i_1},\dots,w'_{i_{n-1}}$, то среди всех слагаемых левой части равенства (2) нет слагаемых с буквенной частью $w'_{i_n}\cdot w_{j_m}$. Поэтому из (2) следует, что $r_{i_n}s_{j_m} = 0$, что противоречит выбору чисел r_{i_n} и s_{j_m}. Значит, $a=0$, откуда $J(\bigoplus_{i\in I} Qw_i,\cdot) = 0$. Таким образом, идеал $(D,\times)$ кольца $(G,\times)$, изоморфный кольцу $(\bigoplus_{i\in I} Qw_i,\cdot)$ полупрост.

Докажем, что выполняется условие 2). Если произвольный элемент a кольца $(F,\cdot)$ отличен от нуля, то $a\cdot y_k$ – ненулевой элемент идеала $(\bigoplus_{i\in I} Qw_i,\cdot)$. Так как кольцо $(G,\times)$ изоморфно подкольцу кольца $(F,\cdot)$ то для любого ненулевого элемента g кольца $(G,\times)$ существует элемент d идеала $(D,\times)$ такой, что $g\times d\neq 0$.

Сформулируем две леммы, которые можно доказать, используя лемму 6.

Лемма 7. Пусть $G = A + D$ где D – делимая группа бесконечного ранга m. Пусть на A существует кольцо $(A,\times)$ которое вложено в качестве подкольца в прямое произведение не более, чем m колец, ранг каждого из которых не больше m. Тогда кольцо $(A,\times)$ может быть вложено как подкольцо в полупростое кольцо $(G,\times)$.

Лемма 8. Пусть $G = A\oplus D$, D – делимая группа бесконечного ранга m, A – m-полупростая группа. Тогда группа G полупроста.

Следующая теорема является следствием лемм 5 и 8.

Теорема 9. Пусть $G = A\oplus D,$ где D – делимая группа бесконечного ранга m. Группа G полупроста тогда и только тогда, когда A является m-полупростой группой.

Следствие 10. Пусть $G = A\oplus D,$ где D – делимая группа бесконечного ранга m и ранг группы A не превосходит 2^m. Тогда группа G является полупростой.

Доказательство. Утверждение следствия вытекает из того, что если ранг группы A не превосходит 2^m, то A является m-полупростой. Действительно, на A можно определить кольцо с нулевым умножением, которое является подкольцом кольца на делимой оболочке группы A. Последнее кольцо, в свою очередь, можно рассматривать как прямое произведение m делимых колец с нулевым умножением, ранг каждого их которых равен 1.

Литература

[1] Beaumont R.A., Lawver D.A. Strongly semisimple abelian groups // Publ. J. Math. 1974. V. 53, № 2. P. 327-336.

[2] Eclof P.C., Mez H.C. Additive groups of existentially closed rings // Abelian Groups and Modules: Proceeding of the Udine conference. Vienna-N.York: Springer-Verlag, 1984. P. 243-252.

[3] Kompantseva E.I. Semisimple rings on completely decomposable abelian groups // J. of Math. Sciences. 2009. V. 154. № 3. P. 324-332.

ADDITIVE GROUPS OF ASSOCIATIVE RINGS

Kompantseva E.I.

An abelian group is said to be semisimple if it is an additive group of at least one semisimple associative ring. It is proved that the description problem for semisimple groups is reduced to the case of reduced groups. As a consequence, it is shown that a torsion free abelian group is semisimple if the rank of its reduced part is less than or equal to 2^m, where the infinite cardinal m is the rank of its divisible part.

Key words: abelian group, ring on a group, semisimple group, semisimple ring.

REFERENCES

[1] Beaumont R.A., Lawver D.A. Strongly semisimple abelian groups // Publ. J. Math. 1974. V. 53, № 2. P. 327-336.

[2] Eclof P.C., Mez H.C. Additive groups of existentially closed rings // Abelian Groups and Modules: Proceeding of the Udine conference. Vienna-N.York: Springer-Verlag, 1984. P. 243-252.

[3] Kompantseva E.I. Semisimple rings on completely decomposable abelian groups // J. of Math. Sciences. 2009. V. 154. № 3. P. 324-332.

Сведения об авторе

Компанцева Екатерина Игоревна, окончила МПГУ, математический факультет, д.т.н., доцент, Финансовый университет при Правительстве РФ, профессор кафедры ТВиМС, МПГУ, профессор кафедры алгебры, общее количество научных работ - 59, основные направления научных интересов: теория групп, теория колец, их применение к проблеме обеспечения помехоустойчивого кодирования.