УДК 519.217.4 + 519.633.2

# СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ФИЛЬТРАЦИИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ДИФФУЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНОГО ТИПА[1]

К.А. РЫБАКОВ

В статье рассматривается решение задач оптимальной фильтрации и прогнозирования сигналовв нестационарных стохастических дифференциальных системах с пуассоновской составляющей. Для приближенного нахождения апостериорной плотности вероятности вектора состояния объекта наблюдения применяется спектральный метод, в основе метода лежит представление решений робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи и уравнения Колмогорова – Феллера в виде ортогональных рядов.

**Ключевые слова:** апостериорная плотность вероятности, фильтрация, прогнозирование, робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи, спектральный метод, стохастическая система, уравнение Колмогорова – Феллера.

## ВВЕДЕНИЕ

В продолжение исследований, начатых в [1–4], рассматриваются задачи оптимальной фильтрации и прогнозирования сигналов в стохастических дифференциальных системах диффузионно-скачкообразного типа. В этих задачах требуется оценить вектор состояния динамической системы (объекта наблюдения) в текущий и будущий моменты времени по результатам измерений, полученных к текущему моменту времени, с учетом помех. Предполагается, что объект наблюдения описывается стохастическим дифференциальным уравнением с пуассоновской составляющей, а измерительная система – стохастическим дифференциальным уравнением без пуассоновской составляющей. На этапе фильтрации предлагается использовать робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи, а на этапе прогнозирования – уравнение Колмогорова – Феллера. Для решения этих уравнений применена спектральная форма математического описания [5, 6]. Такой подход более универсален по сравнению с другими подходами, использующими математический аппарат ортогональных рядов для представления плотностей вероятности [7–10]. В задачах анализа, синтеза, идентификации и фильтрации в стохастических дифференциальных системах его универсальность и удобство реализации алгоритмов расчета обусловлены тем, что ортонормированный базис не фиксируется и все соотношения записываются в матричной форме, вид этих соотношений не зависит от базиса.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Модель объекта наблюдения задается стохастическим дифференциальным уравнением Ито с пуассоновской составляющей [3, 4, 7, 11, 12]:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

где $X \in R^n$ – вектор состояния, $t \in [t_0, T + \Delta(T)]$ – время; $f(t,x)$: $[t_0, T+\Delta(T)] \times R^n \to R^n$ – $n$-мерная вектор-функция, $\sigma(t,x)$: $[t_0, T+\Delta(T)] \times R^n \to R^{n\times s}$ – матричная функция $n \times s$; $\Delta(t)$: $[t_0, T] \to [0, +\infty)$ – опережение по времени: $\max\limits_{t\in[t_0,T]} (t + \Delta(t)) = T + \Delta(T)$; $W(t)$ – $s$-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния $X_0$ с плотностью вероят-

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 13-08-00323-а.

ности $\varphi_0(x)$; $Q(t)$ – общий пуассоновский процесс, заданный соотношением $Q(t)=\sum_{k=1}^{P(t)}\Delta_k$, в котором $P(t)$ – пуассоновский процесс, $\Delta_k$ – независимые случайные векторы из $R^n$, распределение которых задано плотностью вероятности $\psi(\tau_k,\Delta)$, т.е. вектор состояния $X$ получает случайные приращения в моменты времени $\tau_1,\tau_2,\ldots\in[t_0,T+\Delta(T)]$, образующие пуассоновский поток событий: $X(\tau_k)=X(\tau_k-0)+\Delta_k$. Если величина приращения зависит от вектора состояния, то используется условная плотность вероятности $\psi(\tau_k,\Delta\,|\,x)$, характеризующая распределение $\Delta_k$ при условии $X(\tau_k-0)=x$. В частном случае $\psi(\tau_k,\Delta\,|\,x)=\psi(\tau_k,\Delta)$. Наряду с $\psi(\tau_k,\Delta\,|\,x)$ введем плотность вероятности $\eta(\tau_k,x\,|\,\xi)$, характеризующую распределение $X(\tau_k)$ при условии $X(\tau_k-0)=\xi$, т.е. $\Delta_k=X(\tau_k)-\xi$. Пуассоновский поток событий и, следовательно, моменты времени $\tau_1,\tau_2,\ldots$, а также пуассоновский процесс $P(t)$ определяются интенсивностью $\lambda(t,x)$.

Модель измерительной системы задается уравнением

$$dY(t)=c(t,X(t))dt+\zeta(t)dV(t),\quad Y(t_0)=Y_0=0, \tag{2}$$

где $Y\in R^m$ – вектор измерений, $t\in[t_0,T]$; $c(t,x)$: $[t_0,T]\times R^n\to R^m$ – $m$-мерная вектор-функция, $\zeta(t)$: $[t_0,T]\to R^{m\times d}$ – матричная функция $m\times d$; $V(t)$ – $d$-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $W(t)$ и от начального состояния $X_0$.

Задачи фильтрации и прогнозирования состоят в нахождении оценки $\hat X(t+\Delta(t))$ по результатам измерений $Y_0^t=\{Y(\tau),\tau\in[t_0,t)\}$, для случая $\Delta(t)=0$ – это задача фильтрации, а для $\Delta(t)>0$ – задача прогнозирования. При решении задач фильтрации и прогнозирования, как и ранее [1–4, 12, 13], будем исходить из несмещенности оценки и минимума среднеквадратического отклонения. Тогда $\hat X(t+\Delta(t))=\mathbb{M}[X(t+\Delta(t))\,|\,Y_0^t]$, где $\mathbb{M}[\,\cdot\,]$ – математическое ожидание.

## 2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АПОСТЕРИОРНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Задачу прогнозирования будем решать в два этапа. На первом этапе определим апостериорную плотность вероятности $p(t,x\,|\,Y_0^t)$ вектора состояния объекта наблюдения с учетом имеющихся измерений $Y_0^t$, используя уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи [3, 9–12]:

$$\begin{gathered}\frac{d\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)}{dt}=\mathcal{L}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)-\lambda(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)+\int_{R^n}\lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\varphi(t,\xi\,|\,Y_0^t)d\xi+\\+\sum_{\alpha=1}^m\sum_{\beta=1}^m c_\alpha(t,x)q_{\alpha\beta}(t)\frac{dY_\beta(t)}{dt}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t),\quad \varphi(t_0,x)=\varphi_0(x),\end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\mathcal{L}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)=\mathcal{A}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^m\sum_{\beta=1}^m c_\alpha(t,x)q_{\alpha\beta}(t)c_\beta(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t),\quad q^{-1}(t)=\zeta(t)\zeta^{\mathrm T}(t),$$

$$\mathcal{A}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)=-\sum_{i=1}^n\frac{\partial[f_i(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)]}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\frac{\partial^2[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)]}{\partial x_i\partial x_j},\quad g(t,x)=\sigma(t,x)\sigma^{\mathrm T}(t,x).$$

Уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи – стохастическое интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, его можно записывать в разных формах (приведенное уравнение записано в форме Стратоновича). Оно содержит процесс типа белого шума в последних слагаемых или траекторию белого шума при фиксированных измерениях, что вносит дополнительные сложности в применении приближенных методов решения интегро-дифференциальных уравнений, например, спектральных методов, основанных на ортогональных разложениях плотности вероятности.

Пусть $h(t,x) = q(t)c(t,x)$, $h(t,x)$ – $m$-мерная вектор-функция. Тогда уравнение (3) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)}{dt} = \mathcal{L}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) - \lambda(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) + \int_{R^n}\lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\varphi(t,\xi\,|\,Y_0^t)d\xi +$$
$$+\sum_{\alpha=1}^m h_\alpha(t,x)\frac{dY_\alpha(t)}{dt}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t),\quad \mathcal{L}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) = \mathcal{A}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^m h_\alpha(t,x)c_\alpha(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t),$$

и с помощью замены

$$\rho(t,x\,|\,Y_0^t) = \mu^{-1}(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t),\quad \mu(t,x) = \exp\left\{\sum_{\alpha=1}^m h_\alpha(t,x)Y_\alpha(t)\right\}, \tag{4}$$

перейти к робастному уравнению Дункана – Мортенсена – Закаи [4, 12] для ненормированной апостериорной плотности $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$, вообще говоря, характеризующей распределение вектора состояния другой стохастической системы, отличной от (1):

$$\frac{\partial\rho(t,x\,|\,Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{L}\rho(t,x\,|\,Y_0^t) - \lambda(t,x)\rho(t,x\,|\,Y_0^t) +$$
$$+\int_{R^n}\lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\exp\left\{\sum_{\alpha=1}^m (h_\alpha(t,\xi) - h_\alpha(t,x))Y_\alpha(t)\right\}\rho(t,\xi\,|\,Y_0^t)d\xi - \tag{5}$$
$$-\sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha(t)\mathcal{L}_\alpha\rho(t,x\,|\,Y_0^t) + \sum_{\alpha=1}^m\sum_{\beta=1}^m Y_\alpha(t)Y_\beta(t)\mathcal{L}_{\alpha\beta}\rho(t,x\,|\,Y_0^t) - \sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha(t)\frac{\partial h_\alpha(t,x)}{\partial t}\rho(t,x\,|\,Y_0^t).$$

В уравнении (5) $\mathcal{L}_\alpha = [\mathcal{H}_\alpha,\mathcal{A}]$, $\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\mathcal{H}_\alpha,\mathcal{A}_\beta] = \frac{1}{2}[\mathcal{H}_\alpha,[\mathcal{H}_\beta,\mathcal{A}]]$, а $[\mathcal{H}_\alpha,\mathcal{A}]$ и $[\mathcal{H}_\alpha,\mathcal{A}_\beta]$ – коммутаторы, $\mathcal{H}_\alpha$ – оператор умножения на функцию $h_\alpha(t,x)$, $\alpha,\beta = 1,2,\ldots,m$. Начальное условие для этого уравнения $\rho(t_0,x) = \varphi_0(x)$, что следует из формулы замены ненормированной апостериорной плотности вероятности (4) при $t = t_0$ с учетом равенства $Y(t_0) = 0$.

Робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи не содержит процессов типа белого шума или их траекторий, т.е. оно не относится к классу стохастических дифференциальных уравнений, оно удобнее для приближенного решения с помощью различных методов, в том числе и спектрального [1–4].

Уравнение (5) должно решаться на промежутке $[t_0,\theta]$, где $\theta\in[t_0,T]$ – текущее время. Переход от функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$ к апостериорной плотности вероятности $p(t,x\,|\,Y_0^t)$ вектора состояния объекта наблюдения осуществляется за два шага: обратная замена и нормировка, т.е.

$$\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)=\mu(t,x)\rho(t,x\,|\,Y_0^t),\quad p(t,x\,|\,Y_0^t)=\frac{\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)}{\int_{R^n}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)dx},\quad t\in[t_0,\theta].$$

Отметим, что часто ограничиваются рассмотрением только стационарной модели измерительной системы: $c(t,x)=c(x)$ и $\zeta(t)=\zeta$. Кроме того, для удобства матрица $\zeta$ полагается равной единичной матрице, т.е. $h(t,x)=h(x)=c(x)$. При такой постановке задачи робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи проще, оно не содержит последнего слагаемого с производными координат функции $h(t,x)$ по времени [1, 3, 12, 15]. Стационарность модели объекта наблюдения, т.е. $f(t,x)=f(x)$ и $\sigma(t,x)=\sigma(x)$, робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи не упрощает. Нестационарный случай рассмотрен в [2, 16] для стохастических дифференциальных систем диффузионного типа, а в [4] для систем диффузионно-скачкообразного типа.

На втором этапе в случае $\Delta(\theta)>0$ определяется апостериорная плотность вероятности $p(t,x\,|\,Y_0^\theta)$ как решение уравнения Колмогорова – Феллера

$$\frac{\partial p(t,x\,|\,Y_0^\theta)}{\partial t}=\mathcal{A}p(t,x\,|\,Y_0^\theta)-\lambda(t,x)p(t,x\,|\,Y_0^\theta)+\int_{R^n}\lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)p(t,\xi\,|\,Y_0^\theta)d\xi \qquad (6)$$

на промежутке $[\theta,\theta+\Delta(\theta)]$ с начальным условием $p(\theta,x\,|\,Y_0^\theta)$ – апостериорной плотностью вероятности вектора состояния, полученной на первом этапе.

## 3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ АПОСТЕРИОРНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

В [2] спектральный метод был применен к решению робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи, соответствующего нестационарной системе наблюдения диффузионного типа, т.е. без пуассоновской составляющей в уравнении объекта наблюдения, а в [3] – для стационарной системы наблюдения диффузионно-скачкообразного типа. Эти результаты были использованы для решения задачи фильтрации в нестационарных системах наблюдения диффузионно-скачкообразного типа [4]. Используя соотношения спектрального метода для решения задачи анализа стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа [11, 17], можно построить спектральный метод решения задач фильтрации и прогнозирования сигналов для нестационарных систем наблюдения диффузионно-скачкообразного типа.

Определения и основные свойства спектральных характеристик функций, линейных операторов и функционалов, используемые далее, а также многочисленные примеры применения спектрального метода в задачах анализа непрерывных стохастических систем приведены в [5].

Далее определим базисные системы и получим спектральные аналоги уравнений (5) и (6) в предположении, что момент времени $\theta$ зафиксирован. Пусть $\{e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ и $\{e^{(\text{п})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ – ортонормированные базисные системы пространств $L_2([t_0,\theta]\times R^n)$ и $L_2([\theta,\theta+\Delta(\theta)]\times R^n)$, причем функции $e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)$ и $e^{(\text{п})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)$ порождаются всевозможными произведениями функций, образующих ортонормированные базисные системы $\{q^{(\text{ф})}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, $\{q^{(\text{п})}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространств $L_2([t_0,\theta])$, $L_2([\theta,\theta+\Delta(\theta)])$ и $L_2(\mathbb{R}^n)$ соответственно:

$$e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x) = q^{(\text{ф})}(i_0,t)\cdot p(i_1,\ldots,i_n,x),\quad e^{(\text{п})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x) = q^{(\text{п})}(i_0,t)\cdot p(i_1,\ldots,i_n,x).$$

Будем придерживаться обозначений из [2, 4, 5, 11, 17]. Тогда $P(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент $t_0$, $A(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора $\mathcal{A}$, $C_\alpha(n+1,n+1)$ и $H_\alpha(n+1,n+1)$ – спектральные характеристики операторов $\mathcal{C}_\alpha$ и $\mathcal{H}_\alpha$ соответственно, где $\mathcal{C}_\alpha$ – оператор умножения на функцию $c_\alpha(t,x)$, $\alpha=1,2,\ldots,m$:

$$\mathbb{S}[\mathcal{A}] = A(n+1,n+1),\quad \mathbb{S}[\mathcal{C}_\alpha] = C_\alpha(n+1,n+1),\quad \mathbb{S}[\mathcal{H}_\alpha] = H_\alpha(n+1,n+1).$$

Перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы $\{e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Таким образом, спектральные характеристики $L(n+1,n+1)$, $L_\alpha(n+1,n+1)$ и $L_{\alpha\beta}(n+1,n+1)$ операторов $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ соответственно, $\alpha,\beta=1,2,\ldots,m$, определенные относительно той же базисной системы, выражаются через спектральные характеристики $A(n+1,n+1)$, $C_\alpha(n+1,n+1)$ и $H_\alpha(n+1,n+1)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{S}[\mathcal{L}] = L(n+1,n+1) = A(n+1,n+1) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m} H_\alpha(n+1,n+1)\cdot C_\alpha(n+1,n+1),\\
&\mathbb{S}[\mathcal{L}_\alpha] = L_\alpha(n+1,n+1) = [H_\alpha(n+1,n+1), A(n+1,n+1)],\\
&\mathbb{S}[\mathcal{L}_{\alpha\beta}] = L_{\alpha\beta}(n+1,n+1) = \frac{1}{2}[H_\alpha(n+1,n+1),[H_\beta(n+1,n+1), A(n+1,n+1)]],
\end{aligned}$$

где $[H_\alpha(n+1,n+1), A(n+1,n+1)]$ – коммутатор спектральных характеристик линейных операторов [1].

Далее, $\Lambda(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на интенсивность $\lambda(t,x)$, а $H(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика интегрального оператора $\mathcal{H}$, задаваемого соотношением

$$\mathcal{H}\rho(t,x) = \int_{R^n} \lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{m}(h_\alpha(t,\xi)-h_\alpha(t,x))Y_\alpha(t)\right\}\rho(t,\xi)d\xi;$$

$Y_\alpha(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $Y_\alpha(t)$, $\dot{H}_\alpha(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на производную функции $h_\alpha(t,x)$ по времени, $\alpha=1,2,\ldots,m$. Спектральные характеристики $\Lambda(n+1,n+1)$, $H(n+1,n+1)$, $Y_\alpha(n+1,n+1)$ и $\dot{H}_\alpha(n+1,n+1)$, как и обозначенные выше, определены относительно базисной системы $\{e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Кроме того, пусть $q^{(\text{ф})}(1,0;t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q^{(\text{ф})}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ при $t=t_0$: $q^{(\text{ф})}(1,0;t_0) = [\,q^{(\text{ф})}(0,t_0)\ q^{(\text{ф})}(1,t_0)\ q^{(\text{ф})}(2,t_0)\ \ldots]^{\mathrm{T}}$, $\Phi_0(n,0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния $X_0$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$; $R(n+1,0)$ – искомая спектральная характеристика функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$, определенная относительно базисной системы $\{e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Применим спектральное преобразование к левой и правой частям уравнения (5). Учитывая линейность спектрального преобразования и введенные обозначения, получаем спектральный аналог робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи [4]:

$$
\begin{gathered}
P(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0)-q^{(\text{ф})}(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)=L(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0)-\Lambda(n+1,n+1)\times\\
\times R(n+1,0)+H(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0)-\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot L_\alpha(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0)+\\
+\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot Y_\beta(n+1,n+1)\cdot L_{\alpha\beta}(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0)-\\
-\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot \dot H_\alpha(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0).
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Решение робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи в спектральной форме математического описания имеет вид

$$
\begin{gathered}
R(n+1,0)=\Big(P(n+1,n+1)-L(n+1,n+1)+\Lambda(n+1,n+1)-H(n+1,n+1)+\\
+\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot L_\alpha(n+1,n+1)-\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot Y_\beta(n+1,n+1)\cdot L_{\alpha\beta}(n+1,n+1)+\\
+\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot \dot H_\alpha(n+1,n+1)\Big)^{-1}\cdot\Big(q^{(\text{ф})}(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)\Big).
\end{gathered}
$$

Следовательно,

$$
\begin{gathered}
\rho(t,x\,|\,Y_0^t)=\mathbb{S}^{-1}[R(n+1,0)]=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}r_{i_0i_1\ldots i_n}\cdot e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),\quad (t,x)\in[t_0,\theta]\times R^n,\\
\rho(\theta,x\,|\,Y_0^\theta)=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}r_{i_0i_1\ldots i_n}\cdot e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,\theta,x),\quad x\in R^n,
\end{gathered}
\tag{8}
$$

где $r_{i_0i_1\ldots i_n}$ – элементы спектральной характеристики $R(n+1,0)$, т.е. коэффициенты разложения функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$ в ряд по функциям базисной системы $\{e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Для записи спектрального аналога уравнения Колмогорова – Феллера (6) обозначим через $q^{(\text{п})}(1,0;\theta)$ матрицу-столбец значений функций базисной системы $\{q^{(\text{п})}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ при $t=\theta$: $q^{(\text{п})}(1,0;\theta)=[\,q^{(\text{п})}(0,\theta)\;\; q^{(\text{п})}(1,\theta)\;\; q^{(\text{п})}(2,\theta)\;\ldots]^{\text{T}}$, через $\Phi(n+1,0)$ – спектральную характеристику функции $p(t,x\,|\,Y_0^t)$, которую требуется найти наряду с $R(n+1,0)$, а через $K(n+1,n+1)$ – спектральную характеристику интегрального оператора $\mathcal{K}$, задаваемого соотношением

$$
\mathcal{K}p(t,x)=\int_{R^n}\lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\,p(t,\xi)\,d\xi.
$$

Новые спектральные характеристики $\Phi(n+1,0)$ и $K(n+1,n+1)$ определены относительно базисной системы $\{e^{(\text{п})}(i_0,i_1,\dots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\dots,i_n=0}^{\infty}$. Кроме того, пусть $\Phi_\theta(n,0)$ – спектральная характеристика апостериорной плотности вероятности $p(\theta,x\,|\,Y_0^\theta)$ как функции вектора состояния, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,\dots,i_n,x)\}_{i_1,\dots,i_n=0}^{\infty}$. Тогда [11, 17]

$$
\begin{gathered}
P(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)-q^{(\text{п})}(1,0;\theta)\otimes\Phi_\theta(n,0)=A(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)-\\
-\Lambda(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)+K(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)
\end{gathered}
\tag{9}
$$

и

$$
\begin{gathered}
\Phi(n+1,0)=\big(P(n+1,n+1)-A(n+1,n+1)+\Lambda(n+1,n+1)-\\
-K(n+1,n+1)\big)^{-1}\cdot\Big(q^{(\text{п})}(1,0;\theta)\otimes\Phi_\theta(n,0)\Big).
\end{gathered}
$$

В уравнении (9) $P(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в текущий момент $\theta$ (начальный для промежутка $[\theta,\theta+\Delta(\theta)]$). Как и выше, $A(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора $\mathcal{A}$, $\Lambda(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на интенсивность $\lambda(t,x)$, однако для этого уравнения перечисленные спектральные характеристики вычисляются относительно базисной системы $\{e^{(\text{п})}(i_0,i_1,\dots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\dots,i_n=0}^{\infty}$, а не $\{e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\dots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\dots,i_n=0}^{\infty}$.

Таким образом,

$$
p(t,x\,|\,Y_0^\theta)=\mathbb{S}^{-1}[\Phi(n+1,0)]=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\dots\sum_{i_n=0}^{\infty}\varphi_{i_0i_1\dots i_n}\cdot e^{(\text{п})}(i_0,i_1,\dots,i_n,t,x),\quad (t,x)\in[\theta,\theta+\Delta(\theta)]\times R^n,
\tag{10}
$$

где $\varphi_{i_0i_1\dots i_n}$ – элементы спектральной характеристики $\Phi(n+1,0)$, т.е. коэффициенты разложения функции $p(t,x\,|\,Y_0^\theta)$ в ряд по функциям базисной системы $\{e^{(\text{п})}(i_0,i_1,\dots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\dots,i_n=0}^{\infty}$.

Используя спектральную форму математического описания, можно выразить спектральные характеристики $R(n+1,0)$ и $\Phi_\theta(n,0)$ функций $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$ и $p(\theta,x\,|\,Y_0^\theta)$ соответственно, связав таким образом уравнения (7) и (9) в спектральной области. Также можно выразить спектральную характеристику оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ через спектральную характеристику $\Phi(n+1,0)$. Для этого необходимо использовать спектральные характеристики линейных функционалов, ставящих в соответствие функции ее значение в определенной точке и значение интеграла от функции [5], а именно можно показать, что

$$
\begin{gathered}
\Phi_\theta(n,0)=\Big(\Big(q^{(\text{ф})}(0,1;\theta)\otimes J(0,n)\Big)\cdot\Psi(n+1,0)\Big)^{-1}\cdot\Big(\Big(q^{(\text{ф})}(0,1;\theta)\otimes E(n,n)\Big)\cdot\Psi(n+1,0)\Big),\\
\Psi(n+1,0)=M(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0),
\end{gathered}
$$

где $q^{(\text{ф})}(0,1;\theta)$ – матрица-строка значений функций базисной системы $\{q^{(\text{ф})}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ при $t=\theta$: $q^{(\text{ф})}(0,1;\theta)=[\,q^{(\text{ф})}(0,\theta)\;\;q^{(\text{ф})}(1,\theta)\;\;q^{(\text{ф})}(2,\theta)\;\;\dots\,]$, $J(0,n)$ – спектральная характеристика функционала, ставящего в соответствие функции вектора состояния интеграл от этой функции по пространству $R^n$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,\dots,i_n,x)\}_{i_1,\dots,i_n=0}^{\infty}$, а

$M(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\mu(t,x)$, определенная относительно базисной системы $\{e^{(\text{ф})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Отметим, что спектральные характеристики $H(n+1,n+1)$ и $K(n+1,n+1)$ интегральных операторов $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ соответственно связаны преобразованием подобия

$$H(n+1,n+1) = M^{-1}(n+1,n+1)\cdot K(n+1,n+1)\cdot M(n+1,n+1),$$

если они определены относительно одной и той же базисной системы со спектральной характеристикой $M(n+1,n+1)$.

Для координаты оптимальной оценки $\hat{X}_i(\theta+\Delta(\theta))$ справедливо соотношение

$$\hat{X}_i(\theta+\Delta(\theta)) = \left(q^{(\text{п})}(0,1;\theta+\Delta(\theta))\otimes J(0,n)\right)\cdot X_i(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0),\quad i=1,\ldots,n,$$

где $q^{(\text{п})}(0,1;\theta+\Delta(\theta))$ – матрица-строка значений функций $\{q^{(\text{п})}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ при $t=\theta+\Delta(\theta)$: $q^{(\text{п})}(0,1;\theta+\Delta(\theta)) = [\, q^{(\text{п})}(0,\theta+\Delta(\theta))\;\; q^{(\text{п})}(1,\theta+\Delta(\theta))\;\; q^{(\text{п})}(2,\theta+\Delta(\theta))\;\; \ldots\,]$, $X_i(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на координату $x_i$, определенная относительно базисной системы $\{e^{(\text{п})}(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

При численных расчетах необходимо усекать все спектральные характеристики и представлять приближенное решение задач фильтрации и прогнозирования в виде частичных сумм рядов (8) и (10), как и при решении задачи анализа [5, 11, 17]. Базисные системы для представления функций времени и вектора состояния могут формироваться различным образом из базисных функций одной переменной [5, 6, 18]. После определения апостериорной плотности вероятности $p(t,x\,|\,Y_0^{\theta})$ можно найти оптимальную оценку $\hat{X}(t)$, $t\in[\theta,\theta+\Delta(\theta)]$, $\theta\in[t_0,T]$ или воспользоваться соотношением для нахождения $\hat{X}_i(\theta+\Delta(\theta))$, которое приведено выше.

В рассматриваемых задачах оптимальной фильтрации и прогнозирования при выводе спектральных аналогов робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи и уравнения Колмогорова – Феллера предполагалось, что момент времени $\theta$ зафиксирован вместе с измерениями $Y_0^{\theta}$, однако можно воспользоваться и базисными системами, заданными на нестационарных отрезках времени [6], что позволит решать задачу оценивания текущего и будущего состояний сразу для всех моментов времени $\theta\in[t_0,T]$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

**1. Рыбаков К.А.** Решение робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи спектральным методом // Системи обробки інформації. – 2013. – Вып. 7 (114). – С. 139–143.

**2. Рыбаков К.А.** О решении робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи для нестационарных систем // Информационные и телекоммуникационные технологии. – 2014. – № 22. – С. 9–15.

**3. Рыбаков К.А.** Решение робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи для систем диффузионно-скачкообразного типа на основе спектрального метода // Системи обробки інформації. – 2014. – Вып. 7 (123). – С. 143–147.

**4. Рыбаков К.А.** О решении уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи для нестационарных систем диффузионно-скачкообразного типа спектральным методом // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики – 2015. Международная конференция, Новосибирск, 19–23 октября 2015 г.: Тр. конф. – Новосибирск: Абвей, 2015. – С. 643–649.

**5. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.** Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2015.

**6. Солодовников В.В., Семенов В.В.** Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974.

**7. Пугачев В.С., Синицын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990.

**8. Синицын И.Н.** Фильтры Калмана и Пугачева. – М.: Логос, 2007.

**9. Lototsky S., Mikulevicius R., Rozovskii B.L.** Nonlinear filtering revisited: A spectral approach // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1997. Vol. 35, № 2. – Pp. 435 – 461.

**10. Luo X., Yau S.S.-T.** Hermite spectral method to 1-D forward Kolmogorov equation and its application to nonlinear filtering problems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2013. Vol. 58, № 10. – Pp. 2495–2507.

**11. Рыбаков К.А.** Вероятностный анализ стохастических систем с пуассоновской составляющей // Научный вестник МГТУ ГА. – 2013. – № 194. – С. 55–62.

**12. Рыбаков К.А.** Фильтрация сигналов в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа на основе метода статистических испытаний // Научный вестник МГТУ ГА. – 2015. – № 220. – С. 73–81.

**13. Рыбаков К.А.** Приближенный метод фильтрации сигналов в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа // Научный вестник МГТУ ГА. – 2014. – № 207. – С. 54–60.

**14. Параев Ю.И.** Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. – М.: Советское радио, 1976.

**15. Hazewinkel M.** Lectures on linear and nonlinear filtering // Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems (ed. by W.O. Schiehlen, W. Wedig). – Springer-Verlag, 1988. – Pp. 103–136.

**16. Luo X., Yau S.S.-T.** Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2013. Vol. 58, № 10. – Pp. 2563–2578.

**17. Аверина Т.А., Рыбаков К.А.** Новые методы анализа воздействия пуассоновских дельта-импульсов в задачах радиотехники // Журнал радиоэлектроники. – 2013. – № 1. [Электронный ресурс]. URL: http://jre.cplire.ru/jre/contents.html

**18. Рыбаков К.А.** Многопараметрические базисные системы для представления функций в неограниченных областях // Научный вестник МГТУ ГА. – 2013. – № 195 (9). – С. 45–50.

## THE SPECTRAL METHOD OF OPTIMAL FILTERING AND EXTRAPOLATION FOR JUMP-DIFFUSION MODELS

**Rybakov K.A.**

The article deals with the optimal filtering and extrapolation problems for non-stationary stochastic differential systems with a Poisson component. To find an approximate density of the observed object's state vector the spectral method based on the representation of robust Duncan-Mortensen-Zakai equation and Kolmogorov-Feller equation solutions in the form of orthogonal series is used.

**Key words:** conditional density, extrapolation problem, jump-diffusion, Kolmogorov-Feller equation, filtering problem, robust Duncan-Mortensen-Zakai equation, spectral method, stochastic system.

### REFERENCES

**1. Rybakov K.A.** Solving robust Duncan-Mortensen-Zakai equation by spectral method. Information Processing Systems. 2013. No. 7 (114). Pp. 139–143. (in Russian).

**2. Rybakov K.A.** Solving robust Duncan-Mortensen-Zakai equation for nonstationary systems. Information and Communication Technologies. 2014. No. 22. Pp. 9–15. (in Russian).

**3. Rybakov K.A.** Solving robust Duncan-Mortensen-Zakai equation for jump-diffusion models by spectral method. Information Processing Systems. 2014. No. 7 (123). Pp. 143–147. (in Russian).

**4. Rybakov K.A.** The solution of the Duncan-Mortensen-Zakai equation for nonstationary jump-diffusion systems by spectral method. Proceedings of International Conference "Advanced Mathematics, Computations and Applications 2015". Novosibirsk. 2015. Pp. 643–649. (in Russian).

**5. Panteleev A.V., Rybakov K.A., Sotskova I.L.** Spectral Method of Nonlinear Stochastic Control System Analysis. Moscow. 2015. (in Russian).

**6. Solodovnikov V.V., Semenov V.V.** Spectral Theory of Nonstationary Control Systems. Moscow. 1974. (in Russian).

**7. Pugachev V.S., Sinitsyn I.N.** Stochastic Systems: Theory and Applications, World Scientific. 2001.

**8. Sinitsyn I.N.** Kalman and Pugachev Filters. Moscow. 2007. (in Russian).

**9. Lototsky S., Mikulevicius R., Rozovskii B.L.** Nonlinear filtering revisited: A spectral approach. SIAM Journal on Control and Optimization. 1997. Vol. 35. No. 2. Pp. 435–461.

**10. Luo X., Yau S.S.-T.** Hermite spectral method to 1-D forward Kolmogorov equation and its application to nonlinear filtering problems. IEEE Transactions on Automatic Control. 2013. Vol. 58. No. 10. Pp. 2495–2507.

**11. Rybakov K.A.** Probability analysis of stochastic systems with Poisson component. Scientific Herald MSTUCA. 2013. No. 194. Pp. 55–62. (in Russian).

**12. Rybakov K.A.** Filtering for jump-diffusion models by statistical modeling method. Scientific Herald MSTUCA. 2015. No. 220. Pp. 73–81. (in Russian).

**13. Rybakov K.A.** Approximate filter for jump-diffusion models. Scientific Herald MSTUCA. 2014. No. 207. Pp. 54–60. (in Russian).

**14. Paraev Yu.I.** Introduction to Statistical Dynamics of Control and Filtering Processes. Moscow. 1976. (in Russian).

**15. Hazewinkel M.** Lectures on linear and nonlinear filtering, Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems (ed. by W.O. Schiehlen, W. Wedig). Springer-Verlag. 1988. Pp. 103–136.

**16. Luo X., Yau S.S.-T.** Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory. IEEE Transactions on Automatic Control. 2013. Vol. 58. No. 10. Pp. 2563–2578.

**17. Averina T.A., Rybakov K.A.** New methods of Poisson impulses analysis in radio engineering problems. Journal of Radio Electronics. 2013. No. 1. Available at: http://jre.cplire.ru/jre/contents.html. (in Russian).

**18. Rybakov K.A.** Multiparameter basis to represent functions in unbounded domains // Scientific Herald MSTUCA. 2013. No. 195. Pp. 45–50. (in Russian).

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

**Рыбаков Константин Александрович,** 1979 г.р., окончил МАИ (2002), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики факультета «Прикладная математика и физика» МАИ, автор более 100 научных работ. Области научных интересов – анализ и синтез стохастических систем управления, спектральная форма математического описания, методы моделирования систем управления, электронный адрес: rkoffice@mail.ru.