ISSN 2312 9557. Вісник Дніпропетровського університету. Серія: Математика. 2016, вип. **21**

УДК 517.5

В. І. Рубан*, О. О. Руденко**
* Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара,
Дніпропетровск, 49050. *E-mail: v_ruban@ukr.net*
** Дніпропетровський національный університет імені Олеся Гончара,
Дніпропетровск, 49050. *E-mail: aa-rudenko@yandex.ua*

Часова складність алгоритмів повного дослідження динамічних систем із дискретним часом, визначених на скінченній множині станів

Знайдено порядок зростання часової складності оптимальних алгоритмів повного дослідження дискретних динамічних систем зі скінченою кількістю станів

Ключові слова: часова складність, алгоритм, динамічна система.

Найден порядок возрастания временной сложности алгоритмов полного исследования дискретных динамических систем с конечным числом состояний

Ключевые слова: временная сложность, алгоритм, динамическая система.

Order of ascending time complexity of algorithms of discrete dynamical systems with a finite number of states is found.

Key words: time complexity, algorithm, dynamical system.

Динамічна система – об'єкт, що складається з двох елементів. Перший із них – множина X, яку надалі називатимемо *фазовим простором*; точки фазового простору – це *стани системи*. Другим елементом динамічної системи є однопараметрична група відображень множини X у себе (перетворень множини X), тобто сукупність відображень $f^t : X \to X$, де $t \in I \subset R$, причому, по-перше, $f^{t+s} = f^t \circ f^s$ для всіх t, $s \in I$, по-друге, $0 \in I$ і f^0 – тотожне відображення X у себе.

Якщо I є множина всіх дійсних чисел $\mathbb{R}$ або невід'ємних дійсних чисел $\mathbb{R}^+$, маємо *динамічну систему з неперервним часом*. Якщо I – множина всіх цілих чисел $\mathbb{Z}$ або невід'ємних цілих чисел $\mathbb{Z}^+$, маємо *динамічну систему з дискретним часом*.

Траєкторією точки x_0 із фазового простору називають відображення

$$\Theta_{x_0} : I \to X, \Theta_{x_0}(t) \stackrel{def}{=} f^t(x_0).$$

Образ траєкторії точки x_0, тобто множину

$$\{\Theta_{x_0}(t)\,, \quad t \in I\} \tag{1}$$

прийнято називати залежно від множини I. Якщо розглядають систему з неперервним часом, множину (1) називають *фазовою кривою* (що проходить через точку x_0). Якщо мова йде про систему з дискретним часом, то множину (1) називають *орбітою* (точки x_0).

У подальшому вважатимемо, що множиною значень часу в дискретній динамічній системі є множина $\mathbb{Z}^+$. Зрозуміло, що для $t \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{0\}\,, f^t = f^1 \circ f^1 \circ \ldots \circ f^1$, де суперпозицію застосовано $(t-1)$ раз.

Далі функцію f^1, що утворює півгрупу, позначатимемо просто f.

Точку x_0, для якої $x_0, f\left(x_0\right), \ldots, f^{m-1}\left(x_0\right)$ – попарно різні елементи і $f^m\left(x_0\right) = x_0$, називають *періодичною точкою періоду* m.

Точку x_0 періоду 1 називають *нерухомою точкою*, для неї виконується $x_0 = f\left(x_0\right)$.

Нарешті, точку x_0 називають *передперіодичною* для f, якщо сама вона не є періодична для f, але для деякого $s \geq 1$ точка $x_1 = f^s\left(x_0\right)$ є періодична для f.

Із кожною системою автономних звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{x} = \Phi(x), x = x(t) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

пов'язана динамічна система із неперервним часом $\{\mathbb{R}^n; f^t\}$, де f^t – відображення, яке ставить у відповідність точці $x_0 \in \mathbb{R}^n$ точку $f^t(x_0) = x(t, x_0)$, а $x(t, x_0)$ – розв'язок рівняння (2), який задовольняє початкову умову $x(0, x_0) = x_0$.

Системи з дискретним часом одержують, зокрема, у ході чисельного дослідження систем із неперервним часом (2) шляхом заміни похідної на поділену різницю

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

та заміни t на $i\Delta t$.

При чисельному дослідженні динамічних систем фазовий простір замінюють скінченною множиною. Наприклад, фазовий простір $[0,1]$ замінюють простором чисел із $[0,1]$, зображення яких у двійковій позиційній системі має не більше k знаків після коми.

Отже, у разі чисельного дослідження динамічна система – це пара (X, f), де X – скінченна множина, f – відображення X у себе.

Далі під парою (X, f) зручно розуміти орієнтований граф, у якому стани із X – це вершини, пари $(x, f(x))$ – орієнтовані ребра. У цьому графі степінь кожної вершини (кількість ребер, що починаються в цій вершині) дорівнює одиниці.

Зазначимо, що цей граф може мати петлі, тобто ребра, які починаються і закінчуються в одній вершині. Зрозуміло, що така вершина відповідає нерухомій точці динамічної системи.

Повним чисельним дослідженням такої динамічної системи вважатимемо розбиття множини її вершини (станів) на підмножини, одна з яких є множина всіх передперіодичних станів, а кожна інша підмножина є множина станів, що утворюють цикл певної довжини.

Метою данного дослідження є визначення часової складності алгоритму, що реалізує повне дослідження динамічної системи зі скінченним фазовим простором.

Існують різні по формі й деталях, але такі, що в основному збігаються визначення часової складності алгоритму, які, як правило, пов'язані з поняттям машини Тюрінга (див. напр. [1;2]).

Загалом часова складність роботи алгоритму T – це максимальний час роботи над вхідним словом довжини n як функції від n $T(n)$.

Метою нашого дослідження є доведення існування алгоритму повного дослідження динамічної системи зі скінченним фазовим простором, часова складність якого є $O(n)$.

Відразу зазначимо, що алгоритмів, за допомогою яких розв'язують дану задачу зі складністю $o(n)$, не існує.

Дійсно, у разі розбиття множини вершин графа на підмножину передперіодичних точок і підмножини вершин, що утворюють цикли, кожна з вершин і кожне з ребер повинні бути задіяні хоча б один раз.

Теорема. Існує алгоритм повного дослідження динамічних систем зі скінченним X, для якого часова складність є $O(n)$, де n – кількість елементів X.

Доведення. Вхідним словом для нашого випадку є кількість вершин графа $\{v_1, ..., v_n\}$ (номерів) і перелік ребер, тобто впорядкованих пар вершин, тому вхідне слово має довжину $O(n)$.

Позначимо через A алгоритм, що будуватимемо, як суперпозицію скінченної кількості алгоритмів $A_1, A_2, ... < A_m$, які працюють зі словами сталої довжини і на обробку одного такого слова витрачають час $t(A_i) = t_i$.

Через T позначимо найбільше із чисел t_i.

До числа алгоритмів A_i далі буде включено алгоритми знаходження кінцевої вершини ребра, вилучення ребра, занесення вершини або ребра до пам'яті, опис дії яких буде дії яких буде наведено далі.

Побудову алгоритму A розіб'ємо на кроки.

Крок 1. Робимо дублікат s_1 вхідного слова s.

Крок 2. Будуємо маршрут у графі, що починається з вершини ν_1, вилучивши при цьому всі пройдені ребра, тобто знаходимо ребро (єдине), що починається з ν_1, вилучаємо його, потім повторюємо ті самі дії з кінцевою вершиною вилученого ребра і т. д.

Ребер у графі скінченна кількість, тому маршрут зупиниться у вершині ν_{n_1} слова s, яка вже не є початок ребер, що на цей час залишилися в s. Якщо $\nu_{n_1} = \nu_1$ – із графа вилучаємо цикл, послідовність вершин якого заносимо в пам'ять.

Якщо $\nu_{n_1} = \nu_k, k > 1$, то заносимо у пам'ять цикл $(\nu_k, \nu_{k+1}, ..., \nu_{n_1})$, а вершини $\nu_1, \nu_2, ..., \nu_{k-1}$ заносимо у пам'ять як передперіодичні та вилучаємо з s.

Повторюємо сценарій кроку 1 з вершиною найменшого номера, що залишилася в s, до зупинки маршруту. Далі шляхом звернення до слова s_1 заносимо в пам'ять пройдені вершини або як передперіодичні, маршрут через які закінчується в вершинах уже пройдених циклів на цьому чи попередніх кроках, або як вершини ще одного циклу.

Нескладно перевірити, що час роботи такого алгоритму не перевищує Cn, де C – деяка константа, яка не залежить від n.

Теорему доведено.

Описаний алгоритм був реалізований мовою java із застосуванням цілочисельної арифметики BigInteger для точного обчислення функції f.

Для фазового простору $X = (0, 1)$ і неперервного відображення f має місце знаменита теорема Шарковського [3], згідно з якою, якщо f має точку періоду k, то вона має періодичні точки всіх періодів n , які стоять праворуч k у порядку Шарковського

$$3 \to 5 \to 7 \to 9 \to ... \to 2 \cdot 3 \to 2 \cdot 5 \to 2 \cdot 7 \to 2 \cdot 9 \to ... \to$$

$$\to 2^2 \cdot 3 \to 2^2 \cdot 5 \to 2^2 \cdot 7 \to 2^2 \cdot 9 \to ... \to\to 2^n \to 2^{n-1} \to 2^2 \to 2 \to 1$$

на множині натуральних чисел.

Одержані нами результати повного дослідження систем зі скінченим фазовим простором свідчать, що для таких систем аналога теореми Шарковського не існує.

Бібліографічні посилання

1. *Cristian, C.* Theories of computational complexity [Text] /C.Cristian. – Amsterdam: North Holland, 1987. – 487 p.
2. *Sipser,M.* Introduction to the theory of computation [Text] /M Sipser. – Boston: Thomson Course Technology, 1996. – 431 p.
3. *Шарковский,А.Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя [Text] /А.Н. Шарковский //Укр. мат. журн.– 1964.– № 1.– С. 865–868.

Надійшла до редколегії 15.03.2016