Sección de Ingeniería

HIPOPLASTICIDAD CONTRA ELASTOPLASTICIDAD (PARTE I)

A. Lizcano[1] D. Kolymbas[2],

Resumen

By means of simple questions and answers the article present the basic concepts of a hypoplastic constitutive model for the three-dimensional non-linear stress-strain and dilatant volume change behaviour of granular materials. The model is developed without recourse to the concept in elastoplasticity theory such as yield surface, plastic potencial and descomposition into elastic and plastic parts.

Palabras Claves

Modelo constitutivo, elastoplasticidad, hipoplasticidad, superficie de fluencia, potencial plástico.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los rasgos principales del comportamiento del suelo, observado en los trabajos de ingeniería y en los ensayos controlados de laboratorio, es la presencia de deformaciones irreversibles. En muchos problemas prácticos es admitido despreciar la dependencia del tiempo que de forma más o menos pronunciada presentan las deformaciones del suelo. En estos casos, el comportamiento del suelo es tratado como el de un material independiente de la velocidad de deformación (*rate-independent*). El marco teórico más conocido y usado para describir el comportamiento del suelo como un material independiente de la velocidad de deformación es la teoría de la elastoplasticidad. Desde los años 50, pasando por el trabajo pionero conocido como CAM-CLAY, se han desarrollado una gran variedad de modelos elastoplásticos, caracterizados por una complejidad creciente.

Una alternativa a los modelos elastoplásticos para la descripción matemática del comportamiento mecánico del suelo es la denominada hipoplasticidad, creada por uno de los autores [1]. Con esta teoría, inspirada en la mecánica racional moderna, los fenómenos más importantes del comportamiento mecánico de cierto tipo de suelos (en especial suelos granulares como las arenas) pueden ser representados por una simple ecuación constitutiva, sin necesidad de recurrir a las acostumbradas nociones adicionales de la elastoplasticidad como la superficie de fluencia, el potencial plástico, etc.

El objetivo del presente artículo es introducir al lector en los conceptos básicos de la hipoplasticidad. Para facilitar esta introducción se han previsto dos entregas. La actual (Parte I), en donde se inicia la presentación mediante preguntas y respuestas, y se tratan críticamente algunos conceptos básicos de la elastoplasticidad. La Parte II, que se publicará en el próximo número de esta revista, tratará más en detalle la ecuación constitutiva hipoplástica, su calibración y los resultados obtenidos con ella.

[1] Profesor asistente, Universidad de los Andes

[2] Profesor Universidad de Innsbruck (Austria)

2. Hipoplasticidad con preguntas y respuestas

2.1 ¿Qué es una ecuación constitutiva?

Una ecuación constitutiva es una relación matemática que conecta esfuerzos y deformaciones de un material particular. Los esfuerzos y las deformaciones deben ser tratados en ella como cantidades tensoriales. Además del esfuerzo y de la deformación, dentro de una ecuación constitutiva aparecen algunas cantidades adicionales denominadas las constantes del material (por ejemplo el Módulo de YOUNG). Los valores de las constantes del material ajustan la ecuación constitutiva a un material particular, es decir permiten distinguir por ejemplo entre un caucho elástico y un acero elástico.

2.2 ¿Para qué es util una ecuación constitutiva?

Para predecir la deformación y/o la estabilidad de un cuerpo sometido a cargas es necesario conocer su ecuación constitutiva. Por ejemplo es necesario conocer la ecuación constitutiva del suelo para predecir la estabilidad de un talud o de un corte, o para predecir las cargas ejercidas en la clave o en la solera de un túnel. También se requiere de esta ecuación para predecir las deformaciones alrededor de una excavación o el asentamiento de la superficie debido a la construcción de un túnel o a la extracción de petróleo del subsuelo. Para contestar estas preguntas pueden emplearse también las leyes de equilibrio de la mecánica (equilibrio de masa y de momento). Pero debido a que estas ecuaciones resultan (en la mayoría de los casos) insuficientes para resolver el problema, se requiere de alguna información adicional, que es proporcionada por la ecuación constitutiva.

2.3 ¿Qué es elasticidad?

La propiedad de la elasticidad se da si el esfuerzo (o la deformación) depende únicamente de la deformación (o del esfuerzo). Esto significa que la historia de la deformación (o del esfuerzo) es inmaterial y sólo el valor actual de la deformación (o del esfuerzo) es necesario para determinar el valor *actual* del esfuerzo (o de la deformación). Esta propiedad también es llamada *"independiente de la trayectoria"*, debido a que la historia previa de deformación (o de esfuerzos) del material puede concebirse como una trayectoria cualquiera de deformaciones (o de esfuerzos). En términos matemáticos, elasticidad significa que los esfuerzos son una *función* de la deformación, o viceversa. Los materiales elásticos no exhiben deformaciones irreversibles. El caso particular de elasticidad isotrópica y lineal es descrito matemáticamente por la ecuación constitutiva de HOOKE.

2.4 ¿Por qué la teoría de la elasticidad es inapropiada para describir el comportamiento del suelo?

La capacidad de un suelo de exhibir deformaciones irreversibles significa la capacidad que tiene éste para memorizar las cargas a las cuales ha sido sometido previamente. Además de este fenómeno básico, existen otros efectos importantes que no pueden describirse en el reino de la elasticidad: (i) la fluencia plástica, es decir, el crecimiento ilimitado de la deformación bajo un esfuerzo constante, (ii) dilatancia y contractancia, que pueden describirse como la tendencia de un material a cambiar su volumen cuando es sometido a deformaciones de corte, (iii) la rigidez como una función de los esfuerzos (*stress dependent stiffness*).

2.5 ¿Cómo se pueden describir deformaciones inelásticas (es decir irreversibles)?

Una ecuación constitutiva capaz de describir el comportamiento inelástico del suelo debe manejar, de alguna manera, rigideces para carga y descarga. Por supuesto, esto debe estar acompañado por un criterio que permita diferenciar entre lo que se entiende por carga y por descarga. El aparato matemático más extendido para describir el comportamiento de materiales que exhiban deformaciones irreversibles es la llamada teoría de la elastoplasticidad. Del concepto básico de la elastoplasticidad ha surgido una gran diversidad de modelos. Debido a esto, solo es posible tener con mucha dificultad una apreciación global sobre estos modelos. Muchos científicos consideran que la elastoplasticidad es el único marco teórico para describir el comportamiento de los materiales inelásticos. Ellos ignoran que hay una alternativa a la elastoplasticidad, la cual es dada por la reciente rama de la hipoplasticidad.

2.6 ¿Qué es la elastoplasticidad?

Según la elastoplasticidad, un material se comporta elásticamente en la fase inicial de deformación, mientras que la deformación plástica se inicia más adelante en el curso de una carga continuada. El inicio de las deformaciones plásticas está determinado por una superficie en el espacio de esfuerzos, la cual es denominada la *superficie de fluencia*. La dirección de las deformaciones plásticas es determinada por otra superficie, *el potencial plástico*, mientras su magnitud puede determinarse a partir de la denominada *condición de consistencia*. Esta última requiere que un punto de esfuerzos arrastre detrás de sí la superficie de fluencia, cuando el material está siendo cargado. En consecuencia, la elastoplasticidad está caracterizada por una serie de nociones adicionales (principalmente de naturaleza geométrica) que ocultan la estructura matemática de la ecuación constitutiva. Las diferentes ecuaciones constitutivas elastoplásticas son en su conjunto difíciles de tratar, difíciles de implementar en programas de Elementos Finitos y sumamente sensible a los parámetros que controlan los diferentes algoritmos numéricos involucrados. Normalmente estas desventajas no son ni comentadas ni confesadas.

2.7 ¿Qué es la hipoplasticidad?

La hipoplasticidad apunta a describir los fenómenos físicos de inelasticidad mencionados arriba sin recurrir a las nociones adicionales introducidas por elastoplasticidad (como lo son la superficie de fluencia, el potencial plástico, etc.). La hipoplasticidad permite que se presenten deformaciones inelásticas desde el comienzo del proceso de carga. No distingue a priori entre deformaciones elásticas y deformaciones plásticas. El rasgo más importante de la hipoplasticidad es su simplicidad: no sólo evita las nociones adicionales mencionadas arriba sino que usa una ecuación única (contrario a la elastoplasticidad) tanto para el proceso de carga como para el de descarga. La distinción entre carga y descarga es ejecutada automáticamente por la propia ecuación. Además de las cantidades indispensables 'esfuerzo' y 'deformación' (y su cambio con el tiempo) la ecuación hipoplástica considera algunas constantes para el material. Igual que cualquier ecuación constitutiva, existen varias versiones de hipoplasticidad, unas simples (iniciales) y otras más avanzadas. De manera análoga a cualquier ecuación constitutiva, hay efectos que todavía no pueden cubrirse con la más reciente versión de la ecuación constitutiva hipoplástica. Pero la investigación al respecto continua con el fin de mejorar las versiones actuales.

2.8 ¿Cuál es la ventaja de la hipoplasticidad?

No hay métodos ni algoritmos que puedan medir el éxito o la utilidad de una ecuación constitutiva. Comparado con personas, no hay ninguna manera que permita decir que la persona A es mejor que la persona B, aún cuando A sea un triunfador Olímpico. Sin embargo, las personas familiarizadas con la hipoplasticidad encuentran que ésta es más fácil de ejecutar en cualquier clase de algoritmo numérico y también que es más fácil para entender.

2.9 ¿Qué hace la ecuación constitutiva hipoplástica?

La ecuación constitutiva hipoplástica expresa el *incremento de esfuerzos* como una función de un *incremento de deformaciones* dado y de los *esfuerzos y la relación de vacíos actuales*. En lugar de incrementos de esfuerzos y de deformaciones en hipoplasticidad se habla de tasa de esfuerzos y de deformaciones. De acuerdo con esto, la tasa de esfuerzos es concebida como un incremento del esfuerzo obtenido dentro de una unidad de tiempo. Como los esfuerzos y las deformaciones son cantidades tensoriales, la ecuación hipoplástica es una ecuación tensorial. Aquí el esfuerzo es denotado simbólicamente por **T** y la tasa de deformación es denotada por **D**. Alternativamente, se puede emplear la escritura completa el tensor de esfuerzos, es decir

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{1}$$

o utilizar la notación con índices para un elemento representativo de la matriz, es decir σ_{ij}. Sin embargo la notación simbólica es más simple.

2.10 ¿Por qué existen varias versiones de hipoplasticidad?

La ecuación hipoplástica original, publicada por uno de los autores [1] en 1977 (en esos días aún no se había acuñado el nombre de hipoplasticidad), tenía varias limitaciones y era muy compleja. Posteriormente -sobre todo en la última década- diferentes autores propusieron varias versiones mejoradas de hipoplasticidad. Debido a esto, la hipoplasticidad debe considerarse más bien como un marco de ecuaciones constitutivas en lugar de una única ecuación en particular. Después de todo, una ecuación constitutiva no es un teorema con validez absoluta como, por ejemplo, la ecuación de equilibrio de masa, la cual puede ser verdadera o falsa. Una ecuación constitutiva es una ecuación de comportamiento, ya que esta describe el comportamiento mecánico de una clase particular de materiales. Esta descripción será siempre aproximada y, por lo tanto, cada ecuación constitutiva puede (por lo menos en principio) ser mejorada.

Es natural que cada autor que presenta una nueva versión de la ecuación hipoplástica le dé a ella su punto de vista personal. En tales situaciones uno podría estar tentado a preguntar: ¿sigue siendo la versión x una ecuación hipoplástica o no?. O: ¿Cuáles son las raíces reales de la hipoplasticidad?. Pero los autores creen que actitudes dogmáticas son inútiles.

2.11 ¿Cuál es el rango de validez de las versiones actuales de hipoplasticidad?

Las versiones actuales de hipoplasticidad pueden recomendarse para materiales granulares (por ejemplo arenas) compuestos por granos no muy blandos. El proceso de carga puede comprender carga y descarga pero no cargas cíclicas. Suelos con valores bajos de cohesión pueden ser considerados, pero suelos fuertemente sobreconsolidados están todavía por fuera del alcance de las actuales versiones de hipoplasticidad. La viscosidad del esqueleto granular no debe jugar ningún papel en el comportamiento del suelo. Por supuesto, se espera tener en un futuro mejores versiones de hipoplasticidad que cubran las limitaciones mencionadas.

3. HIPOELASTICIDAD Y ELASTOPLASTICIDAD

3.1 Ecuaciones de cambio

De una ecuación constitutiva se espera que represente los esfuerzos producidos por una historia de deformación a partir de un estado de referencia determinado. Si se representan los esfuerzos como una *función* de las deformaciones, esto significa automáticamente que los esfuerzos no dependen de la historia de deformación. Este caso especial es denominado (por definición) comportamiento elástico. El suelo no se comporta elásticamente. Por lo tanto es necesario encontrar otro tipo de relación. ¿Cómo se puede representar la historia de deformación? Algunos autores han tratado de responder esta pregunta introduciendo transformaciones integrables. En general, esta aproximación no es apropiada en suelos. Una manera general en física de introducir la dependencia de la historia (o de la trayectoria) es mediante el uso de formas diferenciables no integrables (o formas de PFAFF), es decir, representar y por la ecuación diferencial

$$dy = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n d_{xn} \qquad (2)$$

Esta ecuación asocia incrementos dx_1, dx_2, ... con dy (o dy_1, dy_2, ...) de tal modo que no existe una representación cerrada de $y(x)$. Es decir la relación (la cual es llamada incremental porque relaciona incrementos) $dy=f(dx_i)$ no es integrable. Esta es la manera de proceder en mecánica de suelos cuando se representan incrementos de esfuerzos como una función no integrable de los incrementos de las deformaciones:

$$d\sigma = f(d\varepsilon) \qquad (3)$$

Esta aproximación es común en las teorías de la plasticidad y de la hipoplasticidad.

Dividiendo todos los incrementos por dt se obtienen los cambios con el tiempo

$$\dot{\sigma} = d\sigma / dt, \qquad \dot{\varepsilon} = d\varepsilon / dt, \qquad \text{etc.}$$

De esta manera, una ecuación entre incrementos también puede ser representada como una ecuación entre cambios con el tiempo, cuando se haga referencia a materiales denominados *independientes del tiempo*. Una ecuación de la forma $\dot{\sigma} = f(\dot{\varepsilon})$ es llamada ecuación de cambio. Esto no implica la existencia de una ecuación $\sigma = f_1(\varepsilon)$.

3.2 Incremento no lineal

$d\sigma / d\varepsilon = \dot{\sigma} / \dot{\varepsilon}$ representa la rigidez incremental del material considerado (véase Fig. 3.1). Puesto que en materiales inelásticos (plásticos) el valor $|d\sigma|$ es mucho mayor en descarga que en carga (es decir la rigidez es mucho mayor en descarga que en carga), se infiere que para tales materiales la función $d\sigma = f(d\varepsilon)$ o $\dot{\sigma} = f(\dot{\varepsilon})$ debe ser no lineal en $\dot{\varepsilon}$ (o $d\varepsilon$). Esta no linealidad se conserva, sin importar qué tan pequeño sea $d\varepsilon$ Esta propiedad se denomina 'no linealidad en pequeños incrementos' o 'incremento no lineal'. Note que el

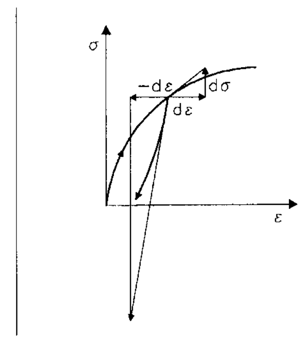

Figura 3.1
Rigideces diferentes en carga y descarga

incremento no lineal no tiene nada que ver con la forma de la curva de esfuerzo-deformación. Esta curva puede ser, por supuesto, linealizada para pequeños $d\varepsilon$, hecho este que ha llevado a muchas personas a creer que en física cada relación puede ser linealizada 'en pequeños incrementos'. Por lo anterior, todas las relaciones elastoplásticas e hipoplásticas son relaciones incrementales no lineales.

3.3 Homogeneidad en los esfuerzos

Si $\overset{\circ}{\mathbf{T}}$ es el corrotacional de ZAREMBA (a menudo atribuido a JAUMANN), $\mathbf{D}$ el tensor de deformación de EULER y $\mathbf{T}$ el tensor de esfuerzos de CAUCHY, se supone inicialmente que la relación $\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$ es homogénea en $\mathbf{T}$, es decir

$$\mathbf{h}(\lambda\mathbf{T}, \mathbf{D}) = \lambda^n \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}) \tag{4}$$

Para investigar las consecuencias de esta suposición se considera un estado de esfuerzos $\mathbf{T}_1$. La deformación se determina de tal manera que $\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}_1, \mathbf{D}_1) = \lambda\mathbf{T}_1$. Si $\mathbf{D}_1$ se aplica continuamente se obtiene una trayectoria de esfuerzos representada por una línea recta que pasa por el origen del espacio de esfuerzos. Esta es una consecuencia de la suposición debido a que:

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}}(t + dt) = \mathbf{h}(\mathbf{T}_1 + \lambda\mathbf{T}_1 dt, \mathbf{D}_1) =$$

$$(1 + \lambda dt)^n \mathbf{h}(\mathbf{T}_1, \mathbf{D}_1) = (1 + \lambda dt)^n \overset{\circ}{\mathbf{T}}(t) \tag{5}$$

En otras palabras, la suposición implica que trayectorias proporcionales de deformaciones (es decir trayectorias con $\mathbf{D}$ = const) están conectadas con trayectorias proporcionales de esfuerzos (es decir trayectorias rectas de esfuerzos pasando a través del origen del espacio de esfuerzos).

Se debe tener en cuenta que las trayectorias proporcionales de esfuerzos deben limitarse dentro de un abanico, debido a que como es conocido existen estados de esfuerzos inaccesibles (impracticables).

Ahora se considera el grado de homogeneidad. Conociendo que $d\sigma / d\varepsilon = \dot{\sigma} / \dot{\varepsilon}$ o $\dot{\mathbf{T}}/\mathbf{D}$ es la rigidez, se infiere que $\dot{\mathbf{T}} / \mathbf{D}\big|_{\lambda\mathbf{T}} = \lambda^n \dot{\mathbf{T}} / \mathbf{D}\big|_{\mathbf{T}}$ En otras palabras, si se incrementa el esfuerzo por un factor λ, la rigidez es incrementada por un factor λ^n. Investigadores experimentales en mecánica de suelos recalcan a menudo que curvas normalizadas de esfuerzo-deformación coinciden unas con otras (éste es el caso particular de arcillas normalmente consolidadas). La consecuencia es $n = 1$. Esto implicaría que el ángulo de fricción es invariante con respecto al nivel de esfuerzos. Esta aproximación es aceptable en un comienzo. Sin embargo, si los cambios de los niveles de esfuerzos en una relación de vacíos dada son considerables, entonces la variación correspondiente al ángulo de fricción (y de dilatancia) no puede ser despreciada.

3.4 Hipoelasticidad

TRUESDELL [2] introdujo la relación constitutiva de la forma $\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$. El requería que la función $\mathbf{h}()$ fuera lineal en $\mathbf{T}$ y en $\mathbf{D}$. El introdujo el nombre de hipoelasticidad para dichas relaciones. Ecuaciones constitutivas hipoelásticas pueden producir relaciones esfuerzo-deformación curvadas, y en algunos casos esas curvas esfuerzo-deformación alcanzan un 'plateau' horizontal, modelando así la fluencia. Sin embargo, la linealidad incremental impuesta implica rigideces iguales para carga y descarga produciendo así relaciones inapropiadas para describir materiales inelásticos (plásticos). A pesar de esto, algunas relaciones hipoelásticas han sido propuestas en mecánica de suelos (por ejemplo DAVIS and MULLENGER [3]). Para superar la igualdad de rigideces en carga y descarga, estos modelos están dotados (en la mayoría de los casos tácitamente) con relaciones adicionales de esfuerzo-deformación que se mantienen durante la descarga. Estrictamente hablando, estas relaciones (consideradas en conjunto) no son más lineales, es decir ellas dejan de ser hipoelásticas.

3.5 Elastoplasticidad, una alternativa a la Hipoelasticidad

El problema de describir diferentes rigideces en carga y descarga puede ser tratado introduciendo por lo menos dos relaciones lineales diferentes entre $\dot{\sigma}$ y $\dot{\varepsilon}$ una de las cuales es mantenida para carga y la otra para descarga. Esta es la aproximación de la teoría de la elastoplasticidad. Esto requiere una serie de precauciones. Primero, se debe definir lo que es considerado como carga y descarga. Esto se logra introduciendo la llamada superficie de fluencia, una superficie en el espacio de esfuerzos. Sólo los incrementos de esfuerzos que empiezan en esta superficie y apuntan hacia fuera de esta superficie son considerados como carga, los restantes son considerados como incrementos de esfuerzos en descarga. Las teorías comunes de elastoplasticidad requieren que el comportamiento sea elástico por debajo de la superficie de fluencia, una suposición que no es real para suelos. Otra precaución hace referencia a que la transición entre la carga y descarga tiene que presentar una respuesta continua. Esto se logra mediante la conocida condición de consistencia. En la teoría de la elastoplasticidad es típico descomponer las deformaciones en una parte elástica y una parte plástica, lo cual no puede ser observado en experimentos. La relación esfuerzo-deformación para carga es determinada por la conocida regla de flujo. Esta regla establece que el incremento (o tasa) de la deformación plástica sea siempre normal a la superficie del potencial plástico. Un caso especial se presenta si la superficie del potencial plástico coincide con la superficie de fluencia. Este caso especial es denominado condición de normalidad. Un conjunto de teoremas muy útiles para estimar las cargas de colapso se han formulado para materiales que obedecen la condición de normalidad. Sin embargo, la normalidad no es realista para suelos friccionantes, pues esto implicaría que el ángulo de dilatancia fuera igual al ángulo de fricción, lo cual no es el caso para este tipo de suelos. Resumiendo: las leyes constitutivas elastoplásticas consisten en dos o más relaciones lineales entre $d\varepsilon$ y $d\sigma$. En conjunto, ellas son incrementales no lineales.

Los conceptos de elastoplasticidad son expresados matemáticamente como sigue: comenzando con la descomposición de las deformaciones en partes elásticas y plásticas,

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p} \tag{6}$$

la función de fluencia $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{p})$ se introduce de tal manera que la ecuación $f = 0$ defina la superficie de fluencia. Si f no depende de ε_{ij}^{p} se tiene el caso especial de plasticidad ideal. La dependencia de ε_{ij}^{p} se conoce como endurecimiento. Mediante la función de fluencia la *carga* se define como:

$$f = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \tag{7}$$

mientras que la *descarga* es dada si

$$f > 0 \quad \text{o}$$

$$f = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \tag{8}$$

El caso $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$ constituye la llamada carga neutral. En carga ε_{ij}^{p} cambia, es decir $\varepsilon_{ij}^{p} \neq 0$ y la condición

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} = 0 \tag{9}$$

conocida como la condición de consistencia, garantiza que la superficie de fluencia sea 'arrastrada' detrás del punto de esfuerzos en movimiento. La dirección del incremento de deformación plástica $d\varepsilon_{ij}^{p}$ es dada por una función adicional $g(\sigma_{ij})$, conocida como el potencial plástico, y definida como

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{10}$$

La ecuación (10) es llamada la regla de flujo. λ se obtiene reemplazando (10) en (9):

$$\lambda = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}{\dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon_{pq}^{p}} \dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{pq}}} d\sigma_{kl} \tag{11}$$

Finalmente se obtiene para carga:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p}$$

$$d\varepsilon_{ij} = \left[E_{ijkl} - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}}{\dfrac{\partial f}{\partial \varepsilon^{p}_{pq}} \dfrac{\partial g}{\partial \sigma_{pq}}} \right] d\sigma_{kl} \qquad (12)$$

y para descarga

$$d\varepsilon_{ij} = E_{ijkl} d\sigma_{kl} \qquad (13)$$

El caso especial $f = g$ es llamado 'condición de normalidad' o 'regla de flujo asociada'.

4. Referencias

[1] D. Kolymbas (1977): A ratedependent constitutive equation for soils. *Mech. Res. Comm.*, 4:367-372.

[2] C. Truesdell (1955): Hypoelasticity. *J. Rational Mech. Anal.*, Vol 4, 83-133, SpringerVerlag

[3] R. O. Davis, G. Mullenger (1978): A ratetype constitutive modell for soil with a critical state. *International Journal of Numerical and Analitical Methods in geomechanics,* Vol 2, 255-282.