

# SIMULACIÓN DEL MOVIMIENTO DEL JUGO EN UN INTERCAMBIADOR PIROTUBULAR PARA LA INDUSTRIA PANELERA

Gerardo Gordillo<sup>1</sup>

Rita C. Jaramillo<sup>2</sup>

## Abstract

*This article presents a study to optimize tube configuration in a pirotubular reservoir used in the sugar cane industry. Optimized tube configuration should eliminate problems in the stage of juice clarification (during which juice is heated from 60°C to 96°C), and improve panela's quality. This study consists of: a) a mathematical model describing the macroscopic flow of juice, b) a finite-element modelling (FEM) simulation of the microscopic flow, and c) a comparison between results obtained by the two methods. The FEM simulated flow is then applied to several geometric configurations of the tubes in order to optimize tube configuration to provide an improved juice clarification stage. From the configurations tested, semielliptical tubes presented a better performance.*

## 1 INTRODUCCIÓN

La panela se obtiene por deshidratación del jugo de caña en un proceso de evaporación abierta por calentamiento directo en hornos paneleros, que usan como combustible el bagazo de la caña.

En estudios técnicos realizados por CIMPA en 1987 [1] se encontró que la eficiencia térmica promedio de las hornillas es del ~30%, lo cual implica el uso madera, caucho, etc. para suplir las deficiencias energéticas de los trapiches.

Con el fin de mejorar la eficiencia de las hornillas se realizó un estudio en el que se planteó el uso de pailas pirotubulares aleteadas de un solo tubo [2]. Estas pailas se probaron en un trapiche y su desempeño fue bueno en lo referente al flujo de calor, pero se presentaron flujos turbulentos en el jugo antes de llegar a la temperatura de ebullición, lo cual no es conveniente porque impide retirar eficientemente las impurezas solubles e insolubles del jugo.

Para evitar el problema descrito se realizó en forma intuitiva un nuevo diseño con tres tubos (Fig. 1), con el que se logró disminuir la turbulencia del jugo; sin embargo aún no se logra una limpieza ideal del mismo.

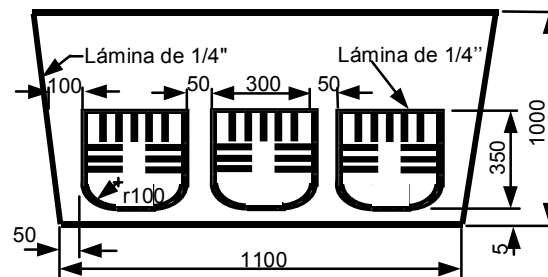


Fig 1. Paila pirotubular modificada (medidas en mm)

El objetivo de este trabajo es utilizar herramientas de análisis en ingeniería para simular el flujo del jugo dentro de la paila cuando se calienta desde 60°C hasta 95°C y determinar una configuración óptima de los tres tubos aleteados, con el fin de evitar la formación de puntos de estancamiento en el fluido y así poder realizar una limpieza adecuada del mismo.

## 2 MODELO MATEMÁTICO

El fluido en la paila se mueve por efecto de la convección libre. En este caso, se usan las ecuaciones de

1 Profesor Asistente, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Los Andes.

2 Estudiante de Maister, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Los Andes.

conservación de masa, momentum y energía para un fluido newtoniano incompresible con la aproximación de Boussinesq [5].

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

$$-\frac{\nabla p'}{\rho_o} + \beta T' g \nabla z + \nu \nabla^2 \vec{V} = \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad (2)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + v_x \frac{\partial T'}{\partial x} + v_y \frac{\partial T'}{\partial y} = \frac{K}{\rho C_p} \nabla^2 T' \quad (3)$$

El modelo matemático desarrollado es un modelo transiente unidimensional, donde se establece una formulación de la ecuación de momentum análoga a la ecuación de un circuito eléctrico y posteriormente se aplica diferencias finitas a la ecuación de la energía. Los resultados son la dirección y la magnitud del caudal que circula entre los tubos de la paila y las temperaturas en función del tiempo. Se utilizan como condiciones iniciales una temperatura uniforme  $T_o$  y velocidad (caudal) cero en todos los nodos. Las condiciones de frontera se basan en los datos de funcionamiento de las pailas actuales (Tabla 1) y son:

- Paredes de la paila adiabáticas

-  $T_a = 298^\circ\text{K}$  y  $h_a = 20 \text{ W/m}^2$

$T_g = 730^\circ\text{K}$  y  $m_g = 0.2534 \text{ Kg/s}$

VOLUMEN DE JUGO	1.012 M3
Masa de gases de combustión	0.7603 Kg/s
Temperatura de entrada gases	796 °K
Temperatura de salida gases	666 °K

TABLA 1. DATOS DE FUNCIONAMIENTO DE UNA PAILA

La ecuación (2), en forma integral:

$$\beta g \int_1^2 T' \nabla z \cdot d\vec{s} - \int_1^2 \frac{\partial \mathcal{V}_s}{\partial t} \cdot d\vec{s} - \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} - h_{12} = \frac{p_2' - p_1'}{\rho_o} \quad (4)$$

$$h_{12} = f \frac{L \bar{V}^2}{D} \quad (5)$$

Al aplicar la ec. (4) al modelo de la fig. 2 entre los puntos 1 y 2 se tiene:

$$\beta g \int_i^{i+1} T' dz - \frac{H}{e_{iy}} \frac{dQ}{dt} - \frac{V_{i+1}^2 - V_i^2}{2} - f \frac{L e_i}{D_{Hi}} \left( \frac{1}{e_{iy}} \right)^2 \frac{Q^2}{2} \quad (6)$$

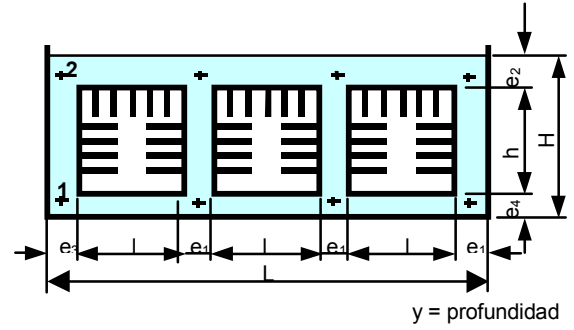


Fig. 2 Geometría del modelo matemático de una paila

$$= \frac{P_{i+1}' - P_i'}{\rho_o}; \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

En la ec. 6 se puede despejar la presión y establecer una analogía eléctrica. El circuito equivalente aparece en la fig. 3. De éste resultan las siguientes ecuaciones de malla:

$$V_{f1} - V_{f1} - (R_1 + R_2)Q_1 - (L_1 + L_2) \frac{dQ_1}{dt} + R_2 Q_2 + L_2 \frac{dQ_2}{dt} = 0 \quad (7)$$

$$V_{f3} - V_{f2} - (R_2 + R_3 + R_5)Q_2 - (L_2 + L_2 + L_5) \frac{dQ_2}{dt} + R_2 Q_1 + L_2 \frac{dQ_1}{dt} - R_3 Q_3 - L_3 \frac{dQ_3}{dt} = 0 \quad (8)$$

$$V_{f3} - V_{f4} - (R_3 + R_4)Q_3 - (L_3 + L_4) \frac{dQ_3}{dt} - R_3 Q_2 - L_3 \frac{dQ_2}{dt} = 0 \quad (9)$$

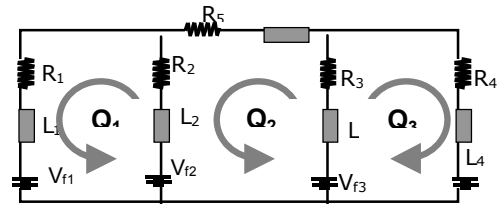


Fig. 3 Analogía eléctrica de la ecuación de momentum

Los parámetros equivalentes del circuito se definen por las expresiones:

$$V_{fk} = \beta g \sum_{canal} T_i' \Delta z \quad k=1, \dots, 4 \quad (10)$$

$$L_1 = \frac{1}{y} \left[ \frac{L}{e_2} + \frac{H}{e_3} + \frac{L}{e_4} \right]; \quad L_2 = \frac{L}{e_{1y}} \quad (11)$$

$$L_3 = L_2 \quad ; \quad L_4 = L_1 \quad ; \quad L_5 = \frac{1}{y} \left[ \frac{L}{e_2} + \frac{L}{e_4} \right]$$

$$R_1 = \frac{1}{2y^2} \left[ f_2 \frac{Le_2}{D_{H2}} \frac{1}{e_2^2} + f_3 \frac{Le_3}{D_{H3}} \frac{1}{e_3^2} + f_4 \frac{Le_4}{D_{H4}} \frac{1}{e_4^2} \right] \cdot |Q_1|$$

$$R_2 = f_1 \frac{Le_1}{D_{H1}} \cdot \frac{|Q_1 - Q_2|}{2e_1^2 y^2} \quad R_3 = f_6 \frac{Le_6}{D_{H6}} \frac{|Q_2 + Q_3|}{2e_1^2 y^2}$$

$$R_5 = \frac{1}{2y^2} \left[ f_5 \frac{Le_5}{D_{H5}} \frac{1}{e_2^2} + f_{10} \frac{Le_{10}}{D_{H10}} \frac{1}{e_3^2} \right] \cdot |Q_2| \quad (12)$$

Los subíndices de f, Le y DH identifican los 'canales' de flujo, (Fig. 4).

Las ec. 7, 8 y 9 se resuelven para avances discretos en el tiempo ( $\Delta t$ ) utilizando la aproximación:

$$\frac{dQ}{dt} \cong \frac{Q_t - Q_{t-1}}{\Delta t} \quad (13)$$

La sustitución de la expresión anterior en las ec. 7, 8 y 9, da origen a un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$[MQ]QK = CQK \quad (14)$$

La fuente del circuito ( $V_p$ ), se halla con la ec. (10), al aplicar diferencias finitas la ecuación de la energía toma la forma discreta. Fig.4.

$$\frac{\delta_k U_k}{e_k} (T_g - T'_i - T_o) + \frac{H_k}{e_k} (T_a - T_o - T'_i) + \frac{k}{\Delta s^2} (T'_{i+1} + T'_{i-1} - 2T'_i) \\ = \frac{\rho C p}{\Delta t} (T'_i - T'_{i,t-1}) + \frac{\rho C p Q}{2e_k \Delta s y} (T'_{i+1} - T'_{i-1}) \quad (15)$$

Donde:  $k = 1, 2, \dots, 10$

$H_k = H_a$  para  $k = 2, 7, 10$  (superficie del fluido) y cero en los otros casos.

$\delta k = 2$  para  $k = 1, 6$ ; 1 en otros casos.

$U_k$  es el coeficiente global de transferencia de calor de los gases al jugo.

$$U = \left[ \frac{1}{h_g \eta_s (A_g / A_j)} + \frac{\delta_i}{k_i} + \frac{1}{h_j} \right]^{-1} \quad (16)$$

Para determinar  $h_g$  se utiliza la ec. (17) [7] para flujo turbulento en tubos y la ec. (18).[2]

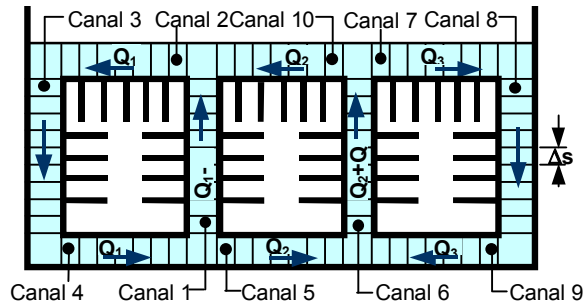


Fig. 4 Modelo discreto de paila pirotubular

$$Nu = \frac{h D_H}{k_g} = 0.027 Re_g^{0.8} Pr^{1/3} (\mu / \mu_w)^{0.14} \quad (17)$$

$$Nur = \frac{h_g D_{Hg}}{k_g} = 2.2952 Nu - 7.263 \quad (18)$$

Para estimar  $h_j$  se utilizará la correlación experimental para flujo turbulento[7]:

$$Nu = \frac{h_j D_{Hj}}{k} = \frac{(f/8) Re_j Pr}{1.07 + 12.7(f/8)^{1/2} (Pr^{2/3} - 1)} \left( \frac{\mu}{\mu_w} \right)^{0.11} \quad (19)$$

Las ec. 15 forman un sistema lineal para  $T'$  de la forma  $[M]T' = Ci$ , el cual se resuelve conjuntamente con la ec. 14, para determinar  $Q$  y  $T'$  a través del tiempo. El algoritmo correspondiente se programó en MATLAB V.4.0.

### 3 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

La simulación con elementos finitos se hizo con el software FLOTRAN de ANSYS para un modelo bidimensional de media paila pirotubular (Fig. 1), en el que se incluye el conjunto de fluido y aletas, usando las mismas condiciones iniciales y de frontera del modelo matemático y un coeficiente de película de los gases  $h_g = 35 \text{ W/m}^2\text{K}$ , el cual se calculó con las (Ec. 17 y 18), y los mismos datos de funcionamiento (Tabla 1).

La malla de elementos finitos utilizada consta solo de cuadriláteros. Se probaron varios tamaños de elemento ( $h_c$ ) y del incremento de tiempo  $\Delta t$ , no se notó ningún cambio significativo en la solución al refinar la malla más de 0.6 cm, ni al usar un  $\Delta t$  inferior a 0.05 s. Por lo tanto se tomaron estos parámetros para todos los modelos.

## 4 RESULTADOS

El programa del modelo matemático descrito se ejecutó hasta un tiempo final de 1200 s, utilizando elementos de 1 cm de espesor. Los resultados se presentan en la fig. 5 y 6.

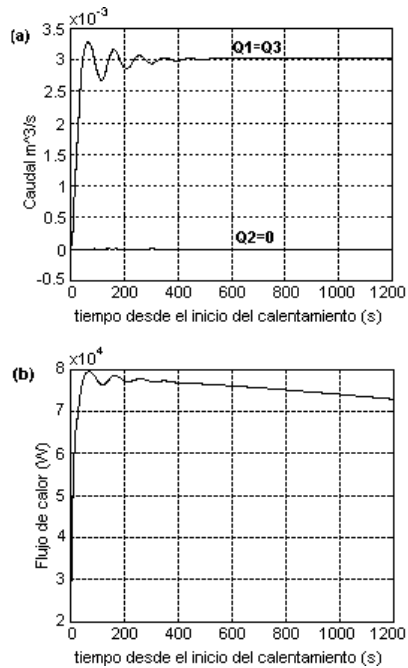


Fig. 5 Modelo matemático. (a) caudal (b) Flujo de calor de los gases al jugo

El modelo matemático, por su naturaleza unidimensional, no permite captar la formación de vórtices, solo estimar un valor del caudal inducido por la convección natural entre los tubos del modelo, como se muestra en la curva de la Fig. 5. Esta presenta fluctuaciones al inicio del calentamiento, producidas por la inercia del sistema, que desaparecen una vez haya transcurrido el tiempo suficiente para vencerla. Además los valores positivos de la curva confirman el sentido asumido de circulación del flujo, es decir, el fluido asciende por los 'canales' entre los tubos donde el flujo de calor es mayor y desciende por los laterales, más fríos.

Las gráficas de la (Fig. 6) presentan el incremento de temperatura que sufre el fluido en una sección transversal de la paila. Se puede observar un gradiente térmico en el fluido entre los tubos, que a su vez genera un gradiente de densidad, originando las fuerzas de flotación responsables del movimiento del fluido en convección natural.

Con los datos experimentales de la paila (tabla 1) se calculó el tiempo de calentamiento del jugo de 60 a

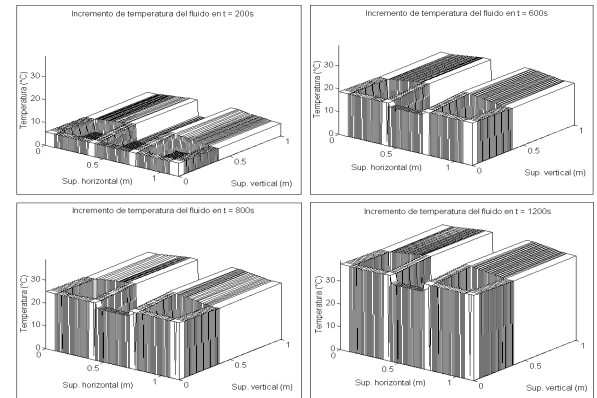


Fig. 6 Modelo matemático. Incremento de temperatura del fluido

96°C, este resultó ser de 1338 s (22.3 min). El modelo matemático predice un tiempo aproximado de 1200s (20 minutos) para que el fluido sufra el mismo incremento de temperatura (~36°C), que equivale a un 10.3% de desviación.

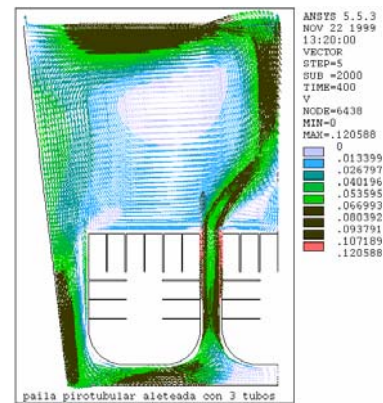


Fig. 7 Campo de velocidad del fluido

El modelo de elementos finitos se ejecutó hasta un tiempo de 400s. El campo de velocidades del flujo se presenta en la fig. 7. Los grandes vórtices que se observan sobre los tubos de la paila comienzan a formarse aproximadamente a los 10s de calentamiento del fluido y constituyen una zona de estancamiento y de concentración de las impurezas contenidas en el jugo, impidiendo que estas lleguen a la superficie y puedan ser removidas.

Finalmente, en la fig. 8 se establece una comparación entre obtenidas con el modelo matemático y el de elementos finitos. Las curvas de flujo de calor de los gases al jugo muestran que al inicio del calentamiento.

los valores estimados por ambos modelos son distintos pero después de un lapso de tiempo se estabilizan en valores con una diferencia relativa del ~11%.

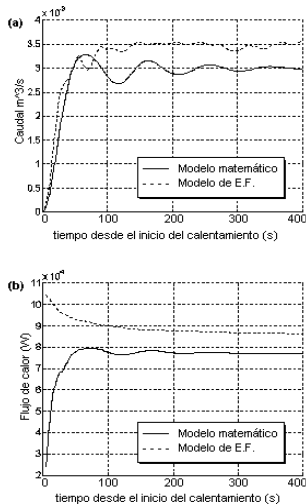


Fig. 8 Comparación de resultados de los modelos matemático y de elementos finitos. (a) Caudal (b) flujo de calor de los gases

La superposición de las curvas de caudal y de flujo de calor de los modelos matemático y de elementos finitos muestran una notable coincidencia. Esto apoya la validez de los resultados de la simulación. Además ambos modelos predicen que, una vez transcurridos los primeros minutos de calentamiento, el flujo alcanza un estado cuasi-estable, en el cual los valores de caudal y flujo de calor permanecen casi inalterables o presentan fluctuaciones muy pequeñas alrededor de un valor medio. Esta última observación es muy importante, puesto que los modelos de elementos finitos consumen mucho tiempo y recursos computacionales en su ejecución y este hecho permite obtener resultados significativos para el campo de velocidades del flujo con solo modelar los primeros minutos de calentamiento del fluido.

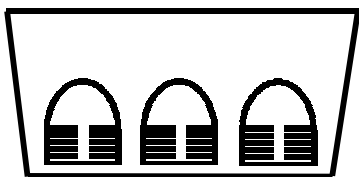


Fig. 9 modelo con tubos semielípticos

## 5 DETERMINACIÓN DE LA CONFIGURACIÓN ÓPTIMA

Como el volumen del jugo no se puede disminuir para evitar los vórtices se recurrió entonces a crear modelos con variaciones en la sección transversal de los tubos y la separación entre ellos. Inicialmente se probó una sección rectangular, lo cual permitió eliminar algunas aletas de la parte superior de los tubos y añadirles en

las caras laterales. Se realizaron tres variaciones de este modelo: el primero con dimensiones equivalentes a la paila original, el segundo aumentando la separación entre tubos y el tercero aumentando la separación entre los tubos y el fondo de la paila. En todos los casos se mantuvieron las dimensiones exteriores, el área de transferencia de calor de los gases al jugo y las condiciones experimentales de la paila original (tabla 1). Finalmente se realizó un modelo con tubos con sección transversal semielíptica (Fig. 10), para simular el efecto de un difusor y evitar el desprendimiento del flujo a la salida de los tubos ascendentes.

Todos los modelos se ejecutaron hasta un tiempo final de 400s de evolución del flujo. Los resultados obtenidos se muestran en las figuras 11 y 12.

## 6 CONCLUSIONES

Los resultados de la simulación permiten describir la evolución del flujo: en los primeros instantes de calentamiento se observa la formación de pequeños remolinos adyacentes a la superficie de los tubos, en los puntos donde se encuentran las aletas y por lo tanto, hay mayor transferencia de calor. Estos remolinos que sugieren celdas de Bénard, posteriormente se disuelven, dando paso a un patrón de flujo con líneas

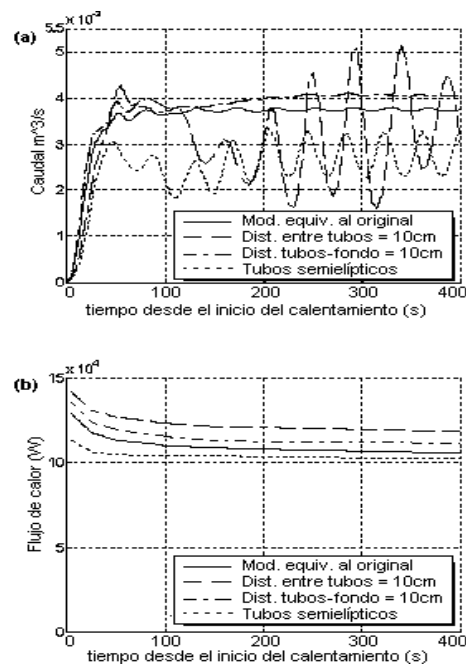


Fig. 10 Comparación de modelos con variación de la geometría. (a) caudal (b) flujo de calor de los gases al jugo



Paralelas a la superficie de los tubos, en el que el fluido asciende entre los 'canales' adyacentes al tubo central, donde el flujo de calor es mayor, y desciende por los canales laterales, más fríos. Al mismo tiempo, comienzan a formarse vórtices en la parte superior de la paila. Estos vórtices continúan expandiéndose hasta que, transcurrido un lapso de tiempo inferior a un minuto, el flujo alcanza un estado cuasi estable. Los vórtices que revelan los campos de velocidad para los distintos modelos, aparecen a los pocos segundos de calentamiento del jugo y causan grandes problemas en la etapa de clarificación, puesto que constituyen zonas de estancamiento que arrastran las partículas de impurezas a su interior impidiendo que lleguen a la superficie y puedan ser removidas.

De todos los modelos con variaciones en la geometría, el único que demostró una disminución de los vórtices fue el de tubos semielípticos. Sin embargo, la mayor altura de los tubos, que obligaría a dejar una gran cantidad de jugo remanente en la paila para evitar la formación de una capa de miel calcinada sobre los mismos al final de la clarificación, y las dificultades constructivas de este modelo, hacen que su valor sea solo científico. Por estas razones, se concluye que el uso de las pailas piro tubulares debe restringirse a la etapa de evaporación del jugo de caña, donde ha sido demostrada la ganancia en eficiencia térmica y la disminución del tiempo de residencia de los jugos a altas temperaturas. El proceso de clarificación resulta más efectivo si se lleva a cabo en pailas tradicionales.

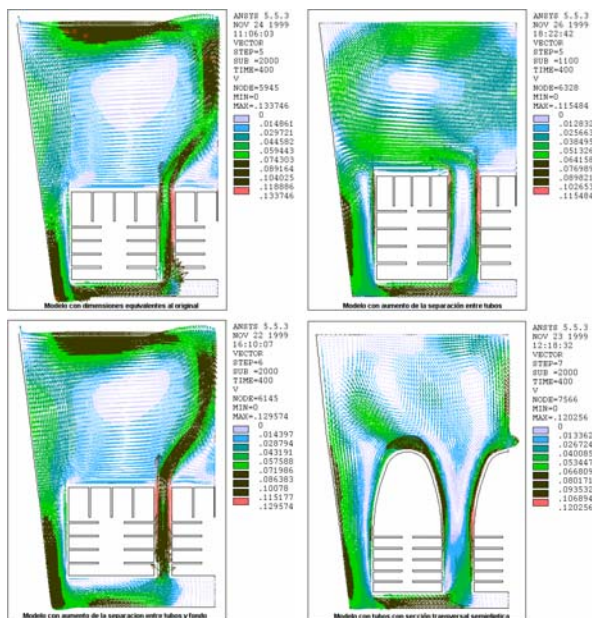


Fig. 11 Campos de velocidad de los modelos con variación en la geometría

Todos los modelos de pailas con tubos rectangulares presentan un aumento del flujo de calor de los gases al jugo, en relación con las pailas actuales (Fig. 11b). Esto se debe a que la sección rectangular permite añadir más aletas a la superficie lateral de los tubos. Estos resultados pueden ser utilizados para incrementar la eficiencia térmica de las pailas piro tubulares.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Gordillo, G., y García, H., Manual de diseño y operación de hornillas paneleras. Barbosa, Colombia: Ed. ICA., 1993
- Gordillo, G., y Sierra, R. Análisis térmico para la investigación de parámetros de diseño de intercambiadores piro tubulares con aplicación en la agroindustria panelera. Santafé de Bogotá, D.C., 1996. Tesis (Magíster en Ingeniería Mecánica).  
  
Universidad de Los Andes. Departamento de Ingeniería Mecánica.
- Hugot, E. Handbook of Cane Sugar Engineering. Third edition. Netherlands: Elsevier Science Publishers Company, 1986.
- Karlekar B.V., y Desmond, R.M. Transferencia de Calor. 2a. edición. México: Nueva Editorial Interamericana, S.A. de C.V., 1985.
- Monin, A.S., y Yaglom, A.M., Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of turbulence. Volume 2. Cambridge: The MIT Press, 1975.
- Nakamura, S., Análisis numérico y visualización gráfica con MATLAB. México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., 1997.
- Ozisik, Heat Transfer: a basic approach. New York: McGraw - Hill, 1985.
- SAS IP, Inc. ANSYS User's Manual Revision 5.0, Vol. IV, Theory Reference. Seventh Edition. Swanson Analysis Systems, Inc., 1996a.
- SAS IP, Inc. CFD FLOTTRAN Analysis Guide Release 5.3. First Edition. Swanson Analysis Systems, Inc., 1996b.
- Spencer, G. L., y Meade, G. P., Cane sugar handbook: a manual for cane sugar manufacturers and their che-

mist. New York: J. Wiley and Sons, Inc., 1945.

11 Zienkiewicz, O.C., y TAYLOR R.L. El método de los elementos finitos, Vol 2, Mecánica de sólidos y fluidos, dinámica y no linealidad. 4a. Edición. Barcelona: CIMNE, 1994

## Lista de símbolos

$B_j$  = brix del jugo

$C_p$  = calor específico

$D_H$  = diámetro hidráulico, m

$e/D$  = rugosidad relativa

$e_i$  = separación entre tubos y paredes de la paila o ancho de los 'canales'

$f$  = factor de fricción

$h$  = altura sección transversal tubos

$h_e$  = tamaño de malla del modelo de elementos finitos

$h_a$  = coeficiente convectivo del ambiente

$h_g$  = coeficiente convectivo lado gases

$h_j$  = coeficiente convectivo lado jugo

$k$  = conductividad térmica

$F$  = ancho de la sección transversal tubos

$Le$  = longitud equivalente para pérdidas

$L_i$  = inductancia del circuito hidráulico

$L_j$  = longitud de cada 'canal' del modelo

$m_g$  = flujo másico de los gases

$Nu$  = número de Nusselt

$P$  = presión estática

$Q$  = caudal que fluye por cada canal (ei)

$Q_g$  = flujo de calor de los gases al jugo

$q$  = flujo de calor por unidad de área

$R$  = resistencia equivalente del circuito hidráulico

$Re$  = número de Reynolds

$T$  = temperatura absoluta

$T_a$  = temperatura del aire ambiente

$T_g$  = temperatura media de los gases

$T_g$  = temperatura media de los gases

$T_g$  = temperatura de los gases a la entrada de los tubos

$T_{gs}$  = temperatura de los gases a la salida de los tubos

$T_0$  = valor inicial de la temperatura del jugo

$T'$  = variación de temperatura del jugo respecto a  $T_0$

$U$  = coeficiente global de transferencia de calor de los gases al jugo

$V_f$  = fuente del circuito hidráulico

$y$  = longitud de la paila

$\beta$  = coeficiente de expansión térmica

$\Delta t$  = incremento de tiempo,

$\eta_s$  = eficiencia de la superficie aleteada

$m$  = viscosidad dinámica

$\rho$  = densidad

$N_r$  = Número de Nusselt real