

# HIPOPLASTICIDAD CONTRA ELASTOPLASTICIDAD (PARTE II)

## Resumen

A. Lizcano<sup>1</sup>  
D. Kolymbas<sup>2</sup>

*An alternative to elastoplastic models for the mathematical description of soil mechanical behaviour appeared in 1977, created by KOLYMBAS in his doctoral thesis at the University of Karlsruhe, Germany, and was named hypoplasticity. The article present the basic concepts of the hypoplastic constitutive model for the behaviour of granular materials. With a single constitutive equation, inspired by modern rational mechanics, without recourse to yield or potential surfaces, important phenomena of soil mechanical behaviour can be represented. The development of the model is commented briefly.*

## Palabras Claves

Modelo constitutivo, elastoplasticidad, hipoplasticidad, calibración de modelos, ensayos elementales, picnotropía, barotropía.

### 1. INTRODUCCIÓN

La primera parte de este artículo se publicó en la Revista de Ingeniería No. 10 de la Universidad de los Andes. En ese artículo se hizo una introducción al modelo constitutivo hipoplástico mediante preguntas y respuestas. En la segunda parte tratada aquí, se presentan las ecuaciones constitutivas hipoplásticas, se hace un recuento del desarrollo de la ecuación y se mencionan algunas de sus principales características. Igualmente se tratan aspectos como la calibración del modelo en relación con la realización de ensayos elementales. Una breve comparación con otras teorías es presentada al final del artículo.

### 2. HIPOPLASTICIDAD

La hipoplasticidad establece una ecuación diferencial tensorial, que describe la evolución del esfuerzo con la deformación. Las ecuaciones hipoplásticas (al igual que las elastoplásticas) tienen la siguiente forma general

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}) \quad (1)$$

es decir, la tasa de esfuerzos  $\dot{\mathbf{T}}$  es dada en función del tensor de esfuerzos actual  $\mathbf{T}$  (en forma matricial  $\sigma_{ij}$ ) y de la tasa de deformación  $\mathbf{D}$  (en forma matricial  $\dot{\epsilon}_{ij}$ ).

Partiendo de que toda función  $\mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$  puede ser representada como

1 Universidad de los Andes (Colombia)

2 Universidad de Innsbruck (Austria)

$$\mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}) = \psi_1 \mathbf{1} + \psi_2 \mathbf{T} + \psi_3 \mathbf{D} + \psi_4 \mathbf{T}^2 + \psi_5 \mathbf{D}^2 + \psi_6 (\mathbf{T}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{T}) + \psi_7 (\mathbf{T}\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^2\mathbf{T}) + \psi_8 (\mathbf{T}^2\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{T}^2) + \psi_9 (\mathbf{T}^2\mathbf{D}^2 + \mathbf{T}^2\mathbf{D}^2) \quad (2)$$

de acuerdo con el teorema de representación general ( $\psi_i$  son funciones escalares de invariantes y unen invariantes de  $\mathbf{T}$  y de  $\mathbf{D}$ ), se emprendió el experimento de encontrar una función única, semejante a la ecuación (2), que describiera satisfactoriamente las propiedades mecánicas de los suelos [1]. Para evitar las limitaciones de la hipoelasticidad, esta función tenía que ser no lineal en  $\mathbf{D}$ . Por otro lado, la función tenía que ser homogénea de primer grado en  $\mathbf{D}$ , para poder describir el comportamiento de materiales que fueran independientes de la velocidad de aplicación de la carga, y homogénea en  $\mathbf{T}$ , para describir trayectorias de esfuerzos pro-

porcionales en casos de trayectorias proporcionales de deformaciones. Las trayectorias proporcionales (véase Figura 1) fueron observadas por GOLDSCHIEDER [2] en ensayos triaxiales verdaderos en arenas. De estas observaciones se formuló el siguiente principio: *trayectorias proporcionales (es decir lineales) de deformación, iniciadas desde un estado (aproximadamente) libre de esfuerzos, están conectadas (relacionadas) con trayectorias proporcionales de esfuerzos. Si el estado inicial no está libre de esfuerzos, la trayectoria de esfuerzos se aproxima asintóticamente a la trayectoria de esfuerzos proporcional que parte del estado libre de esfuerzos.* (véase Figura 1).

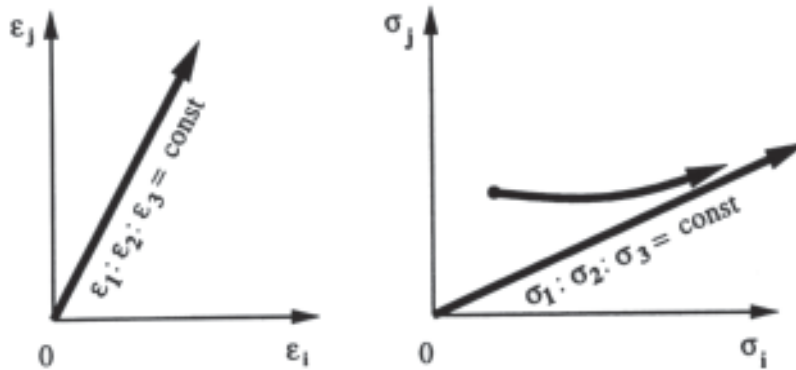


Figura 1: Trayectorias de deformaciones y de esfuerzos de acuerdo con el principio de GOLDSCHIEDER

De acuerdo con este principio, el diseño de la función  $\mathbf{h}()$  tenía que proseguir de acuerdo con el teorema de representación mencionada arriba y con algunas restricciones matemáticas generales como:

no lineal en  $\mathbf{D}$  y

homogeneidad en  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{T}$ ,

evitando completamente cualquier recurso a las nociones de la teoría de la elastoplasticidad tales como funciones de fluencia, descomposición de las deformaciones, etc.

Este experimento (toda teoría es, virtualmente, un experimento) tuvo más o menos éxito, en el sentido que me-

dante ensayo y error fue encontrada una función que puede describir muchos aspectos del comportamiento del suelo. De esta manera fue creada una nueva aproximación al modelado constitutivo de suelos. El nombre *ecuación hipoplástica* encaja muy bien, debido a que la relación entre la hipoplasticidad y la (elasto) plasticidad es igual a la que existe entre la hipoelasticidad y la elasticidad: las teorías con hipo no poseen potencial. Debe mencionarse que DAFALIAS [3] acuñó primero el término hipoplasticidad para algo que puede considerarse como un caso general de lo que aquí se designa como hipoplasticidad.

A continuación se presentan algunas ecuaciones hipoplásticas. La mayoría de ellas consisten de 4 términos tensoriales combinados con 4 parámetros del material como por ejemplo [4]:

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = C_1(\text{tr}\mathbf{T})\mathbf{D} + C_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{D})}{\text{tr}\mathbf{T}}\mathbf{T} + C_3 \frac{\mathbf{T}^2}{\text{tr}\mathbf{T}}\sqrt{\text{tr}\mathbf{D}^2} + C_4 \frac{\mathbf{T}^{*2}}{\text{tr}\mathbf{T}}\sqrt{\text{tr}\mathbf{D}^2}, \quad (3)$$

con el esfuerzo desviador definido como

$$\mathbf{T}^* := \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\text{tr}\mathbf{T})\mathbf{1}.$$

Una representación alternativa de la ecuación constitutiva hipoplástica puede hacerse agrupando los términos lineales en  $\mathbf{L}\mathbf{D}$ , siendo  $\mathbf{L}$  un operador lineal aplicado a  $\mathbf{D}$ , y los términos no lineales en  $\mathbf{N}|\mathbf{D}|$  con  $|\mathbf{D}| = \sqrt{\text{tr}\mathbf{D}^2}$ . Entonces la ecuación hipoplástica toma la forma general

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{L}\mathbf{T} + \mathbf{N}|\mathbf{D}| \quad (4)$$

o

$$T_{ij} = L_{ijkl} \overset{\circ}{D}_{kl} + N_{ij} |\mathbf{D}|.$$

Así mismo, otra expresión para relaciones constitutivas del tipo de la ecuación (4) es

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{H}\mathbf{D} \quad (5)$$

con

$$\mathbf{H} := \mathbf{L} + \mathbf{N} \otimes \mathbf{D}^0 = \mathbf{L} + \mathbf{N} \otimes \frac{\mathbf{D}}{|\mathbf{D}|}.$$

Como se dijo anteriormente, el experimento para describir el comportamiento del suelo con un tipo de ecuación hipoplástica, extendida para que incluyera términos que fueran no lineales aunque si homogéneo de primero grado en  $\mathbf{D}$ , tuvo éxito. De esa manera fue posible encontrar muchas ecuaciones [4,5,6,7] con sólo 4 parámetros de material que son capaces de describir

- El ensayo triaxial, caracterizado por una rigidez decreciente hasta cero en el estado límite y la curva de deformación volumétrica correspondiente, exhibiendo una contractancia inicial, seguida de una dilatancia.
- Comportamiento incremental no lineal, es decir, rigidez de descarga mucho mayor que la de carga
- Propiedades asintóticas realistas (con respecto a las trayectorias proporcionales).

Sin embargo, la relación de vacíos  $e$  no fue tenida en

cuenta y, por consiguiente, esos modelos constitutivos simples no eran capaces de describir la diferencia existente entre los ángulos de fricción y las rigideces de muestras densas y sueltas, o la disminución del ángulo de fricción pico a uno residual con el aumento de la deformación volumétrica (*softening*). Pero esto tampoco se esperaba de los modelos constitutivos simples. En más recientes versiones elaboradas en Karlsruhe [7,8,9,10,11] se multiplican varios términos tensoriales con factores escalares, con el fin de poder modelar la influencia de la densidad y del nivel de esfuerzos en el comportamiento del material y la transición al estado crítico. Por supuesto, la inclusión de estos factores hizo el modelo más complejo

Las relaciones constitutivas hipoplásticas son presentadas directamente, sin hacer referencia a alguna clase de superficies en el espacio. Sin embargo, varias superficies de las empleadas en la elastoplásticidad pueden ser derivadas a partir de la ecuación hipoplástica.

### 3. ENSAYOS ELEMENTALES

Mientras que las ecuaciones constitutivas relacionan esfuerzos con deformaciones, en el laboratorio solo podemos medir fuerzas y desplazamientos. En consecuencia, para verificar una relación constitutiva se requieren ensayos con una distribución homogénea (es decir, constante) de esfuerzos y deformaciones dentro de la muestra. Si la homogeneidad es garantizada, entonces se pueden obtener fácilmente los esfuerzos y las deformaciones a partir de las fuerzas y los desplazamientos en el contorno. Para muestras deformadas de manera no homogénea es necesario el conocimiento de la distribución de esfuerzos y de deformaciones dentro de la muestra. Esto, sin embargo, es imposible (excepto para ciertos ensayos altamente sofisticados con rayos X u otra clase de muestras transparentes) de realizar y solo se pueden calcular numéricamente el campo de esfuerzos y de deformaciones con la ecuación constitutiva que nosotros queremos verificar. Por lo tanto, las ecuaciones constitutivas tienen que estar basadas en ensayos elementales, es decir, ensayos con una deformación homogénea de la muestra. Estos ensayos están asociados con grandes dificultades experimentales.

A pesar de todos los esfuerzos realizados, los investigadores experimentales han admitido que en el trans-

curso de un ensayo la muestra comienza a deformarse de manera no homogénea a partir de un determinado punto, sin importar las medidas que se tomen para prevenir este tipo de deformación. En otras palabras, las deformaciones no homogéneas son inevitables. Este hecho le adhiere a la mecánica de suelos la misma dificultad que se presenta en la hidromecánica por la transición del flujo laminar a flujo turbulento. Con relación a los ensayos de laboratorio, que apuntan a ser un soporte para los modelos constitutivos, puede decirse entonces que (i) se deben hacer inversiones para lograr la deformación homogénea, (ii) así esta deformación sólo se presente en una parte del ensayo. En otras palabras, la naturaleza nos permite observar la deformación homogénea de una muestra sólo en una determinada "ventana de tiempo" de la deformación. Sin embargo, los límites de esta ventana no son conocidos exactamente. Desafortunadamente, una práctica común en la mecánica de suelos es ignorar la deformación no homogénea y evaluar los ensayos como si fueran homogéneos. Por supuesto esto conduce a resultados inútiles.

Cómo podemos obtener simulaciones de ensayos elementales de laboratorio usando una ecuación de cambio (es decir incrementos  $dx$  en un  $dt$ )?. Primero se comienza desde un estado en el cual los esfuerzos son conocidos. Si el ensayo a ser simulado tiene condiciones de borde cinemáticas, entonces la elongación  $\mathbf{D}$  es conocida (p.e. en el caso del ensayo oedométrico, con excepción de una sola componente, todas las demás componentes de  $\mathbf{D}$  son ceros). Conocidos  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{D}$  la

ecuación constitutiva  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$  permite evaluar  $\dot{\mathbf{T}}$ .

Multiplicando  $\dot{\mathbf{T}}$  con un  $\Delta t$  suficientemente pequeño resulta  $\Delta \mathbf{T} \approx \dot{\mathbf{T}} \Delta t$ . El nuevo estado de esfuerzos es obtenido con  $\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}$ . Este procedimiento puede ser continuado y corresponde a una integración numérica de la ecuación de evolución  $\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$ . Este procedimiento se hace un poco más complicado si existen algunas condiciones de borde que no sean de tipo cinemático. En el caso de condiciones de borde estáticas (p.e.  $\sigma_2 = \sigma_3 = \text{const.}$  en ensayos triaxiales), la componente  $d_2$  de  $\mathbf{D}$  debe ser determinada resolviendo la ecuación algebraica  $\dot{\sigma}_2 d_2 = 0$ .

## 4. CALIBRACIÓN

Una relación constitutiva no tiene utilidad si los parámetros de material involucrados en ella no pueden ser adaptados a un material particular. Los valores de esos parámetros constituyen la tarjeta de identidad de ese material con respecto al modelo constitutivo particular. Por otra parte, un parámetro particular es inútil a menos que éste esté integrado dentro de un modelo constitutivo. El proceso de determinación de los valores de los parámetros de un modelo constitutivo es llamado *calibración o identificación de parámetros*. En la cantidad arrolladora de publicaciones sobre modelos constitutivos la calibración es sencillamente omitida en tanto no se le da ningún valor. En la mayoría de los modelos constitutivos esta es una tarea que puede tomar muchos meses de trabajo!. Con relación a la ecuación constitutiva hipoplástica, la calibración se realizó ajustando (*fitting*) la ecuación a los resultados de uno o muchos ensayos (p.e. triaxiales) [12]. Si los valores de los incrementos de esfuerzos y deformaciones son conocidos en un estado particular de esfuerzos de un experimento, las únicas incógnitas de la ecuación constitutiva son las constantes del material. De esta manera solo se tiene que resolver un sistema de cuatro ecuaciones lineales.

Un procedimiento posible para la calibración de la ecuación constitutiva (3) sobre la base de ensayos triaxiales (véase Figura 2) es como sigue:

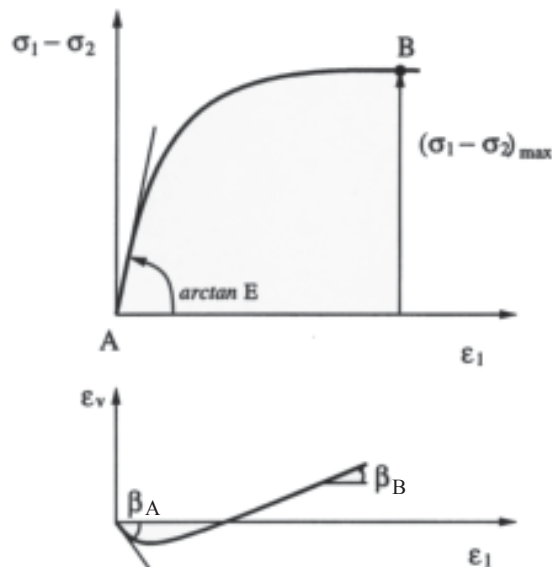


Figura 2: Resultados de un ensayo triaxial

Teniendo

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_3 \end{bmatrix}$$

y los valores  $E_A, \beta_A, \beta_B$ , y  $(\sigma_1 - \sigma_2)_{\max}$  de la Figura 2 se interpretan los siguientes términos de  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{D}$ :

$$\beta_A = \arctan \left[ \frac{\dot{\epsilon}_v}{\dot{\epsilon}_l} \right]_A = \arctan \left[ \frac{\dot{\epsilon}_1 + 2\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} \right]_A = \arctan \left[ 1 + 2 \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} \right]_A$$

$$\beta_B = \arctan \left[ \frac{\dot{\epsilon}_v}{\dot{\epsilon}_l} \right]_B = \arctan \left[ \frac{\dot{\epsilon}_1 + 2\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} \right]_B = \arctan \left[ 1 + 2 \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} \right]_B$$

Los subíndices  $A$  y  $B$  indican que las cantidades correspondientes son obtenidas en los puntos  $A$  y  $B$  de la Figura 2.

Debido a que el experimento considerado es un ensayo de compresión triaxial convencional, la componente  $\dot{\epsilon}_1$  debe ser negativa. El valor (norma) de  $\dot{\epsilon}_1$ , es decir  $|\dot{\epsilon}_1|$ , no es importante, en tanto que la ecuación constitutiva es independiente de la velocidad. Consecuentemente se puede hacer  $\dot{\epsilon}_1 = -1$ . De esto se sigue que

$$\dot{\epsilon}_2 = \frac{1}{2}(1 - \tan\beta),$$

lo cual permite evaluar el tensor  $\mathbf{D}$  en los puntos  $A$  y  $B$ :

$$\mathbf{D}_{A/B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 - \tan\beta_{A/B}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - \tan\beta_{A/B}) \end{pmatrix}.$$

El tensor  $\mathbf{T}$  también puede ser conocido en los puntos  $A$  y  $B$ : con  $\sigma_{1B} = \sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)_{\max}$  se obtiene

$$\mathbf{T}_A = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_B = \begin{pmatrix} \sigma_{1B} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente se conoce la tasa de esfuerzos  $\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}$  en los puntos  $A$  y  $B$ . Con  $\dot{\sigma}_1 = E\dot{\epsilon}_1$  se tiene

$$\dot{\mathbf{T}}_A = \begin{pmatrix} -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{T}}_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para determinar las constantes del material  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  se escriben las siguientes componentes escalares de la ecuación constitutiva (3)

$$\dot{\sigma}_1(A) = -E; \quad \dot{\sigma}_2(A) = 0; \quad \dot{\sigma}_1(B) = 0; \quad \dot{\sigma}_2(B) = 0,$$

obteniéndose un sistema de cuatro ecuaciones algebraicas para las incógnitas  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$ . Este sistema puede ser resuelto numéricamente. Debido a que  $\sigma_{1B}$  esta relacionado con el ángulo de fricción  $\varphi$  mediante

$$\frac{\sigma_{1B}}{\sigma_2} = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi},$$

se puede decir que el procedimiento anterior de calibración es un método para obtener los parámetros de material  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  de los valores medidos  $E_A, \beta_A, \beta_B$ , y  $\varphi$ . Recientemente han sido propuestos otros métodos de calibración para versiones más avanzadas de la ecuación constitutiva hipoplástica (véase sección 9).

## 5. ESFUERZO INICIAL

La ecuación 3 es un ecuación de cambio, es decir esta es una ecuación de evolución que permite calcular los cambios de esfuerzos debidos a un incremento dado de la deformación. El esfuerzo inicial debe ser conocido o supuesto. En consecuencia, el problema de determinar el esfuerzo puede ser únicamente de pasos regresivos pero no puede ser resuelto enteramente por medio de ecuaciones de cambio. Este hecho, por supuesto, no es muy agradable, pero no hay ningún medio para poderlo evitar. Lo único que se puede esperar es que la influencia del estado inicial se debilite a medida que transcurre la historia. Exceptuando esta situación, existen algunos casos (p.e. consolidación unimensional después de la sedimentación) en donde se pueden determinar el esfuerzo inicial mediante razonamientos.

El problema de la determinación del esfuerzo inicial es tradicionalmente ocultado en la elastoplasticidad, donde se supone tácitamente que el esfuerzo inicial resulta de la teoría de elasticidad. Esto último es aplicado a una deformación que comienza desde un estado libre de esfuerzos: la gravedad es 'encendida' y la transición al estado deformado se considera como elástica. Esta simplificación, que se encuentra en casi todos los códigos de elemento finitos existentes, no es realista para los suelos.

## 6. DILATANCIA Y PRESIÓN DE POROS

La tendencia de los suelos a contraerse o dilatarse durante el proceso de corte es conocida como una característica peculiar de materiales granulares. Algunas personas creen que la dilatancia puede ser modelada, incluso en un material lineal-elástico, escogiendo una relación de POISSON apropiada. Sin embargo, esto no es cierto, puesto que en materiales lineales-elásticos el esfuerzo hidrostático y el desviador, así como las deformaciones están completamente desacopladas. Es en ese acople donde reside la dilatancia, pues esto significa que la deformación volumétrica es afectada por el esfuerzo desviador y viceversa. En el transcurso de un ensayo triaxial convencional con arena densa, una contractancia inicial (o dilatancia negativa) es seguida por una dilatancia. La contractancia inicial es frecuentemente atribuida a la compresibilidad, puesto que la disminución volumétrica esta acompañada por un incremento del esfuerzo hidrostático. Sin embargo, la disminución de volumen ocurre también en ensayos con esfuerzo hidrostático constante, de modo que "contractancia" parece ser un nombre razonable.

A menudo se hace referencia al ángulo de dilatancia como si este fuera único. Sin embargo, este ángulo de ningún modo es una constante del material. Es más, su valor depende del modo de deformación y de la densidad y del nivel de esfuerzos. Debemos librarnos de la preocupación que el ángulo de dilatancia (así como el ángulo del fricción) es una constante del material.

Consideremos ahora la supresión de la dilatancia (o la contractancia) en los casos de las deformaciones no drenadas de suelos saturados. Una expresión citada a menudo es: "el suelo quiere disminuir su volumen pero no puede; consecuentemente el esfuerzo hidrostático efectivo disminuye". Por supuesto, una explicación de este tipo no es muy satisfactoria. Una aproximación mucho mejor es considerar que el agua de los poros impone la fuerza interna de incompresibilidad. Entonces, la presión del agua de los poros  $p$  esta constitutivamente indeterminada y sólo puede determinarse de las condiciones de borde estáticas. La ecuación constitutiva se modifica de la siguiente manera:

$$\mathbf{T} = \mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D}) - p\mathbf{1}$$

En esta ecuación  $\mathbf{T}$  debe entenderse como el esfuerzo efectivo. De esta manera, la presión de poros generada durante el transcurso de los ensayos no drenados puede ser modelada con facilidad y de forma realista por medio de la hipoplasticidad.

## 7. BAROTROPÍA Y PICNOTROPÍA

Estas palabras de origen griego son introducidas para expresar el hecho que el comportamiento del suelo depende del nivel de esfuerzos y de la densidad [13]. Contrariamente a la suposición válida principalmente en la mecánica de arcillas normalmente consolidadas, las curvas esfuerzo-deformación normalizadas de ensayos en arenas no coinciden. La observación experimental que el ángulo de fricción y de dilatación decrecen gradualmente a medida que incrementa el nivel de esfuerzos, apunta al hecho que la función  $\mathbf{h}(\mathbf{T}, \mathbf{D})$  no es precisamente homogénea con respecto a  $\mathbf{T}$ . Debido a esto, la arena es un material que no puede modelarse con ensayos sobre modelos físicos a escalas geoméricamente reducidas, es decir el material no es similar así mismo.

La picnotropía proviene del hecho evidente que el comportamiento de materiales granulares depende de la densidad. Es un hecho muy asombroso que los materiales granulares (contrariamente a otros materiales atómicos como los gases) no tienen una relación única entre la densidad y el nivel de esfuerzos. Más aún, en el mismo nivel de esfuerzos la relación de vacíos puede oscilar entre dos límites. Como lo ha señalado GUDENUS [8], estos límites deben ser dependientes del nivel de esfuerzos.

## 8. CARGAS CÍCLICAS

Las cargas cíclicas son uno de los aspectos de mayor dificultad en la mecánica de suelos. Desde un punto de vista matemático es muy difícil modelar la transición del comportamiento plástico al cuasi-elástico. La elastoplasticidad y la hipoplasticidad presentan algunas deficiencias inherentes que se hacen más manifiestas en el caso de cargas cíclicas. En el marco de la elastoplasticidad clásica todos los ciclos de descarga-recarga son completamente elásticos, una característica de esta teoría que no es realista. Por otro lado, en (las versiones iniciales de) hipoplasticidad el ciclo inicial descarga-recarga y los subsiguientes eran idénticos al de carga-descarga de la rama virgen. Esta limitación que es conocida como efecto *ratcheting* y es debido al hecho que en la hipoplasticidad simple el esfuerzo es el único parámetro de memoria

En realidad se presenta o una transición gradual del comportamiento plástico al elástico (conocido como *shake-down*) o incrementos ilimitados de las deformaciones con el número de ciclos (conocido como colapso incremental). Con respecto al *shake-down*, la diná-

mica de suelos muestra que el comportamiento de suelos nunca llega a ser completamente elástico, puesto que cada ciclo está conectado con disipación de energía, un hecho que es modelado por un amortiguamiento viscoso ficticio.

La calidad de la modelación del comportamiento cíclico depende de sí las amplitudes de esfuerzos son pequeñas o grandes. Si la descarga se extiende hacia la parte de extensión (es decir, el esfuerzo desviador cambia de signo), entonces los modelos hipoplásticos trabajan satisfactoriamente. Además, la incorporación apropiada de la barotropía y la picnotropía en los modelos hipoplásticos avanzados, permiten que cargas cíclicas con magnitud constante conduzcan gradualmente a una densidad alta (baja relación de vacíos) la cual no puede ser excedida por ciclos adicionales.

Una representación más general del comportamiento cíclico con hipoplasticidad requiere una variable de estado adicional tal como el tensor estructural [14], el cual involucra la historia reciente de deformación. Una 'función de memoria' [15] o una 'deformación intergranular' [16] han sido propuestas para este propósito.

## 9. DESARROLLO DE ECUACIONES HIPOPLÁSTICAS - UNA REVISIÓN

La primera ecuación hipoplástica que satisfizo los requerimientos presentados en la primera parte de este artículo fue publicada en 1985 [17]

$$\dot{\mathbf{T}} = C_1 + \frac{1}{2}(\mathbf{T}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{T}) + C_2 \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{D})\mathbf{1} + \left[ C_3 \mathbf{T} + C_4 \frac{\mathbf{T}^2}{\text{tr}\mathbf{T}} \right] |\mathbf{D}|$$

Para eliminar algunas deficiencias Wu Wei [6] modificó los términos tensoriales, obteniendo la relación mencionada anteriormente:

$$\dot{\mathbf{T}} = C_1 (\text{tr}\mathbf{T})\mathbf{D} + C_2 \frac{\text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{D})}{\text{tr}\mathbf{T}} \mathbf{T} + C_3 \frac{\mathbf{T}^2}{\text{tr}\mathbf{T}} \sqrt{\text{tr}\mathbf{D}^2} + C_4 \frac{\mathbf{T}^{*2}}{\text{tr}\mathbf{T}} \sqrt{\text{tr}\mathbf{D}^2}$$

Seguidamente él multiplicó los términos no lineales (es decir los dos últimos) por el factor  $I_e$  el cual depende de la relación de vacíos  $e$  siendo igual a 1 en el caso en que  $e = e_{crit}$ :

$$I_e = (1 - a) \frac{e - e_{min}}{e_{crit} - e_{min}} + a$$

Las constantes del material  $C_p$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  pueden ser determinadas del estado crítico, el cual puede ser alcan-

zado en el transcurso de un corte monótonico. De esta manera él modeló con éxito la picnotropía. Es más, teniendo en cuenta que la relación de vacíos crítica  $e_{crit}$  depende del nivel de esfuerzos, él también pudo controlar la barotropía con el modelo [10].

En 1995 KOLYMBAS, HERLE y VON WOLFFERDERFF [9] propusieron una ecuación constitutiva hipoplástica en la cual la influencia de los esfuerzos y de la relación de vacíos es incorporada dentro de una variable  $\mathbf{S}$  denominada *back stress*

$$\dot{\mathbf{T}} = C_1 [\text{tr}(\mathbf{T} + \mathbf{S})] \mathbf{D} + C_2 \frac{\text{tr}[(\mathbf{T} + \mathbf{S})\mathbf{D}]}{\text{tr}(\mathbf{T} + \mathbf{S})} (\mathbf{T} + \mathbf{S}) + \left[ C_3 \frac{\mathbf{T}^2}{\text{tr}\mathbf{T}} + C_4 \frac{\mathbf{T}^{*2}}{\text{tr}\mathbf{T}} + C_5 \frac{\mathbf{T}^3}{\text{tr}\mathbf{T}^2} + C_6 \frac{\mathbf{T}^{*3}}{\text{tr}\mathbf{T}^2} \right] \sqrt{\text{tr}\mathbf{D}^2}$$

con

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(e, \text{tr}\mathbf{T}) := s_0 \left[ 1 - \frac{1}{\left( \frac{\text{tr}\mathbf{T}_r}{p_0} \right)^v \ln \frac{1 + e_{crit}}{1 + e_0}} \left( \frac{\text{tr}\mathbf{T}}{p_0} \right)^v \ln \frac{1 + e}{1 + e_0} \right] \left( \frac{\text{tr}\mathbf{T}}{p_0} \right)^\alpha$$

La investigación posterior tuvo dos objetivos:

- mejorar el desempeño (es decir la capacidad predictiva) de la ecuación para direcciones desviadoras diferentes a las de los ensayos triaxiales convencionales y
- hacer la calibración más fácil. GUDEHUS plantea que la determinación de los parámetros del material debe ser realizada hasta donde sea posible sobre la base de propiedades granulométricas del suelo.

Otro logro reciente es la selección de 4 términos tensoriales y de las constantes que los relacionan entre sí, siguiendo algunos requisitos generales, como por ejemplo, que el estado crítico obtenido coincida con los que prescriben algunas curvas de la literatura [7,18,19].

En cuanto al desempeño desviador del modelo hipoplástico, BAUER [7,18] y WOLFFERSDORFF [19] establecieron relaciones entre las constantes del material, ajustando la curva desviadora de fluencia a algunas curvas de fluencia de la literatura que han sido probadas satisfactoriamente (p.e. la propuesta por MATSUOKA-NAKAI). Con las constantes  $C_1, C_2, C_3 = C_4$  dependiendo de  $e$  y de  $\mathbf{T}$ , e introduciendo la abreviación

$$\hat{\mathbf{T}} := \frac{\mathbf{T}}{\text{tr}\mathbf{T}}$$

la ecuación hipoplástica más reciente tiene la forma

$$\dot{\mathbf{T}} = f_b f_e \frac{1}{\text{tr}\hat{\mathbf{T}}^2} \left[ F^2 \mathbf{D} + a^2 \hat{\mathbf{T}} \text{tr}(\hat{\mathbf{T}} \mathbf{D}) + f_d a F (\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{T}}^*) \sqrt{\text{tr}\mathbf{D}^2} \right] \quad (6)$$

con

$$a := \frac{\sqrt{3}(3 - \sin \varphi_c)}{2\sqrt{2}\sin \varphi_c}$$

$$F := \sqrt{\frac{1}{8} \tan^2(\psi) + \frac{2 - \tan^2(\psi)}{2 + \sqrt{2}\tan(\psi)\cos 3\vartheta}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan(\psi)$$

$$\tan \psi = \sqrt{3 \text{tr}\hat{\mathbf{T}}^{*2}} \quad , \quad \cos 3\vartheta = -\sqrt{6} \frac{\text{tr}\hat{\mathbf{T}}^{*3}}{[\text{tr}\hat{\mathbf{T}}^{*2}]^{3/2}}$$



$$f_d := \left( \frac{e - e_d}{e_c - e_d} \right)^\alpha, \quad f_e := \left( \frac{e_c}{e} \right)^\beta$$

$$f_b := \frac{h_s}{n} \left( \frac{e_{i0}}{e_{c0}} \right)^\beta \frac{1 - e_i}{e_i} \left( \frac{3p_s}{h_s} \right)^{1-n} \left[ 3 + a^2 - a\sqrt{3} \left( \frac{e_{i0} - e_{d0}}{e_{c0} - e_{d0}} \right)^\alpha \right]^{-1}$$

Las relaciones de vacíos  $e_i$  y  $e_d$  dependientes de la presión, limitan los estados admisibles en el plano  $e$  vs.  $p_s = \text{tr}\mathbf{T}/3$  y dependen (junto con la relación de vacíos crítica  $e_c$ ) de  $p_s$  de acuerdo con la relación

$$\frac{e_i}{e_{i0}} = \frac{e_c}{e_{c0}} = \frac{e_d}{e_{d0}} = \exp \left[ - \left( \frac{3p_s}{h_s} \right)^n \right].$$

La ecuación hipoplástica (6) contiene 8 constantes. Estas constantes pueden ser determinadas fácilmente de ensayos simples de índices y/o de ensayos elementales [20]. Las constantes son independientes del estado de esfuerzos, por lo menos en un rango particular de presiones, haciendo posible la aplicación de la ecuación hipoplástica a problemas de contorno con variación de presión y de densidad. El ángulo de fricción crítico  $\varphi_c$  puede ser estimado del ángulo de reposo;  $e_{d0} \approx e_{\min}$ ,  $e_{c0} \approx e_{\max}$ , y  $e_{i0} \approx 1.2 e_{\max}$ . El exponente  $n$  puede ser calculado de los resultados de un ensayo oedométrico con una muestra inicialmente suelta en el rango de presiones entre  $p_{s1}$  y  $p_{s2}$  usando

$$n = \ln \left( \frac{e_1 \lambda_2}{e_2 \lambda_1} \right) / \ln \left( \frac{p_{s2}}{p_{s1}} \right),$$

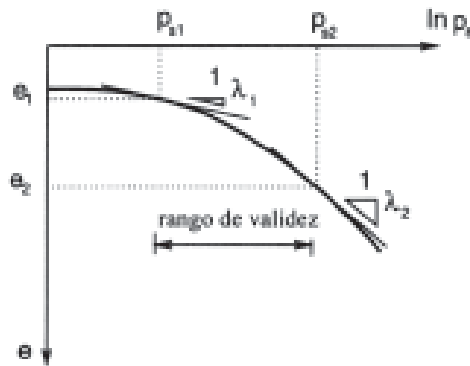


Figura 3: Determinación de  $n$  a partir de un ensayo oedométrico con una muestra de arena inicialmente suelta

(véase Figura 3), con  $\lambda = \Delta e / \Delta \ln(p_s/p_{s0})$ . La dureza del material  $h_s$  puede obtenerse entonces con  $n$  y algún valor de  $\lambda$  comprendido entre  $p_{s1} \leq p_s \leq p_{s2}$ :

$$h_s = 3p_s \left( \frac{n e}{\lambda} \right)^{1/n}.$$

El rango de validez de  $h_s$  y de  $n$  está entonces limitado por el rango de presión experimental. No deben aplicarse presiones que puedan causar una rotura pronunciada de los granos (por ejemplo  $p_s > 1$  MPa), pues esto requeriría una modificación de la ecuación constitutiva. Evaluando muchos ensayos oedométricos, realizados con diferentes tipos de arenas, puede encontrarse una relación diferente entre  $n$ , el coeficiente  $U = d_{60}/d_{10}$  y el diámetro promedio  $d_{50}$ .

El exponente  $\alpha$  puede ser determinado del ángulo de fricción pico  $\varphi_c$  de un ensayo triaxial drenado estándar, realizado con una muestra de arena inicialmente densa. Para una relación conocida  $r_e = (e - e_d)/(e_c - e_d)$  en el pico,  $\alpha$  puede ser calculado de la ecuación constitutiva.  $\varphi_p$  puede ser estimado también de diferentes correlaciones.

El exponente  $\beta$  puede ser calculado a partir del coeficiente de compresión de una muestra inicialmente densa, realizando un ensayo oedométrico adicional. Un análisis de ensayos de laboratorio con varias arenas y un estudio numérico muestran que  $\beta \approx 1$ .

Los parámetros para un tipo de arena son resumidos en la Tabla 1.

TABLA No. 1: PARÁMETROS HIPOPLÁSTICOS DE ARENA DE LAUSITZ

$\varphi_c$ [°]	$h_s$ [MPa]	$n$	$e_{d0}$	$e_{c0}$	$e_{i0}$	$\alpha$	$\beta$
33	1600	0.19	0.44	0.85	1.0	0.25	1.0

## 10. RELACIÓN DE LA HIPOPLASTICIDAD CON OTRAS TEORÍAS

La hipoplasticidad no es el único esfuerzo por superar el formalismo clásico de la elastoplasticidad. Hay otras teorías con objetivos similares y con bastante similitudes a la hipoplasticidad: la teoría de la longitud de arco de ILYUSHIN, RIVLIN y PIPKIN, la teoría endocrónica de VALANIS [21] y los diferentes modelos creados en Grenoble por DARVE y CHAMBON y otros.

Además de esto, la hipoplasticidad ha sido comparada con muchas teorías elastoplásticas. Tres competencias internacionales en Montreal, Grenoble y Cleveland han sido dedicadas al esfuerzo de encontrar cual teoría es superior a las otras. Una serie de datos experimentales fueron comunicados a los participantes para permitirles la calibración de sus modelos. Basado en esto, los participantes fueron invitados a predecir otros ensayos, cuyos resultados fueron mantenidos en secreto en esos momentos.

Tales competencias parecen razonables, sin embargo ninguna de ella fue concluyente. La razón de esto es que no existe ninguna medida objetiva de la calidad de las predicciones. Más aún, no hay ninguna medida para valorar el esfuerzo de la calibración versus la calidad de los resultados, confirmado lo encontrado por algunos filósofos hace ya mucho tiempo con respecto a que el valor de una teoría no puede ser mediada por medios teóricos.

## 11. REFERENCIAS

- 1 D. Kolymbas. Computer-aided design of constitutive laws. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 15, 593-604, 1991
- 2 M. Goldscheider. Condición límite y regla de flujo en arenas (en Alemán). *Mech. Res. Comm.* 3, 462-468, 1976
- 3 Y.F. Dafalias. Bounding surface plasticity. I: Mathematical foundation and hypoplasticity. *J. Eng. Mech. ASCE*, Vol. 112, 966-987, 1986
- 4 W. Wu, D. Kolymbas. Numerical testing of the stability criterion for hypoplastic constitutive equations. *Mechanics of Materials*, 9:245-253, 1990
- 5 D. Kolymbas. A novel constitutive law for soils. *Second. Int. Conf. On Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications*, Tucson, Arizona, January 1987, Elsevier, 1987
- 6 W. Wu. Hipoplasticidad como modelo matemático para el comportamiento mecánico de materiales granulares (en Alemán). *Publ. Series of Institute for Soil Mechanics and Rock Mechanics, Karlsruhe University, Karlsruhe*, Vol. 129, 1992
- 7 E. Bauer. Calibration of a comprehensive hypoplastic model for granular materials. *Soils and Foundations* 36(1): 13-26, 1996
- 8 G. Gudehus. A comprehensive constitutive equation for granular materials. *Soils and Foundations* 36(1): 1-12, 1996
- 9 D. Kolymbas, I. Herle, P.-A. v. Wolfersdorff. Hypoplastic constitutive equation with back stress. *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 19(6) 415-446, 1995

- 10 W. Wu, E. Bauer. A hypoplastic model for barotropy and pyknotropy of granular soils. In: *Modern Approaches to Plasticity*, D. Kolymbas, Editor, 225-245. Elsevier 1993
- 11 W. Wu, E. Bauer, D. Kolymbas. Hypoplastic constitutive model with critical state for granular materials. *Mechanics of Materials*, 23:45-69, 1996
- 12 D. Kolymbas. Generalized Generalized hypoelastic constitutive equation. In Saada and Bianchini editors, *Constitutive equations for granular non-cohesive soils*, p. 349-366. Balkema, 1988
- 13 D. Kolymbas. An outline of hypoplasticity. *Archive of Applied Mechanics*, 61:143-151, 1991
- 14 D. Kolymbas. Una teoría constitutiva para suelos y otros materiales granulares (en Alemán). . Series of Institute for Soil Mechanics and Rock Mechanic, Karlsruhe University, Karlsruhe, Vol. 109, 1988.
- 15 E. Bauer and W. Wu. A hypoplastic model for granular soils under cyclic loading. In: *Modern Approaches to Plasticity*, D. Kolymbas, Editor, 247-258. Elsevier 1993
- 16 A. Niemunis, I. Herle. Hypoplastic model for cohesionless soils with elastic range. *Mechanic of cohesive-frictional Materials*. Vol 2 179-299, 1977
- 17 D. Kolymbas. A generalized hypoelastic constitutive law. En Proc. XI Int. Conf. Soil Mechanic and Foundation Engineering, Volume 5, p. 2626, San Francisco, 1985
- 18 E. Bauer. Constitutive modelling of critical state in hypoplasticity. Proceedings of the Fifth International Symposium on Numerical Models in Geomechanics, NUMOG V, Davos, Switzerland, 15-20, 1995
- 19 P.-A. von Wolffersdorff. A hypoplastic relation for granular materials with a predefined limit state surface. *Mechanic of cohesive-frictional Materials* 1:251-271, 1996
- 20 I. Herle. Hipoplasticidad y granulometría de esqueletos granulares (en Alemán). Publ. Series of Institute for Soil Mechanics and Rock Mechanic, Karlsruhe University, Karlsruhe, Vol. 142, 1997
- 21 K.C. Valanis. An emdochronic geomechanical model for soils. IUTAM Conference on Deformation and Failure of Granular Material, Balkema, 159-165, 1982