

# ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS DE EDIFICIOS ALTOS.

Dr. Ing. Carlos A. Recarey Morfa\*, Msc. Ing. Nereyda Pupo Sintras\*\*

## RESUMEN

*Se formula un método de distribución de fuerzas horizontales en edificios, el cual incluye el caso de estructuras resistentes verticales con aporte espacial y se considera además el efecto del momento flexo-torsor, para las especificaciones de las estructuras resistentes verticales de sección abiertas (denominadas de paredes delgadas con sección abierta). Para lograr este último aspecto se aplicó consecuentemente la teoría de Vlasov. Se aplica el método de los desplazamientos en su forma matricial.*

## SUMMARY:

*A method of distribution of horizontal forces is formulated in buildings, in which it is included the case of vertical resistant structures with space contribution and it is also considered the effect of the moment flexo-torsor, in the opened vertical resistant structures of section (denominated of thin walls with open section). to achieve this last aspect it was applied the theory of Vlasov consequently. The method of the displacements its applied in its matricial form.*

## INTRODUCCIÓN

Para los ingenieros estructurales resulta indispensable conocer: la forma en que se distribuyen las fuerzas horizontales y la magnitud de los desplazamientos que se producen a medida que se incrementa la altura, para de esta forma concebir y predecir un adecuado comportamiento de los edificios altos frente a los efectos horizontales de viento y sismos. Los métodos de distribución de fuerzas horizontales publicados hasta el momento presentan diferentes enfoques y cada uno de ellos es válido en su campo de acción de acuerdo con las hipótesis asumidas. Con respecto a este tema se han desarrollado diversas investigaciones<sup>(1,2,7,8,9)</sup> las cuales posibilitaba realizar la

distribución de fuerzas horizontales en edificios con pórticos y tímpanos.

Uno de los métodos más generales, es precisamente el método PPG<sup>(7)</sup> debido a la gran cantidad de sistemas estructurales que resuelve (pórticos, diafragmas y estructura mixtas - pórticos y diafragmas interconectado). Sin embargo presenta algunas limitaciones como son:

1. Sólo considera el aporte de rigidez de las estructuras en una dirección.
2. No se considera el aporte espacial de las estructuras resistentes verticales.
3. No se toma en cuenta el efecto del bimomento en los rigidizadores que pueden

\* Universidad Central de Las Villas, Centro de Investigación y Desarrollo de las Estructuras y los Materiales (CIDEM). Santa Clara, Villa Clara, Cuba. UCLV. Facultad de Construcciones. CIDEM CP 54830 Santa Clara, Villa Clara Cuba. E-mail: [recarey@uclv.edu.cu](mailto:recarey@uclv.edu.cu) [recarey@cimne.upc.es](mailto:recarey@cimne.upc.es) Teléfono: 53 422 81561 Fax: 53 422 81539

\*\* Universidad de Camagüey, Facultad de Construcciones. Carretera de Circunvalación Norte K 5 ½ Teléfono : 262336 Fax : 262336 E-mail : [nere@reduc.cmw.edu.cu](mailto:nere@reduc.cmw.edu.cu)

denominarse de paredes delgadas y sección transversal abierta.

Con la óptica de logra una formulación más general en el proceso de la fundamentación teórica de un método de distribución de fuerzas laterales en edificios, podrían introducirse los aspectos señalados como limitaciones. Esto conduce, en esta oportunidad, a establecer una formulación más general, ampliándose el panorama de tipos de edificios que se analizarían por un mismo método. En este caso se tiene en cuenta el aporte espacial de los rigidizadores y la introducción y consideración del aporte de los diafragmas y tímpanos de secciones abiertas (alabeo de la sección transversal).

### DESARROLLO. HIPÓTESIS DEL MÉTODO.

Siempre que se desee dar solución a un problema estructural es necesario realizar una modelación de la geometría de los elementos y de la edificación en su conjunto, del comportamiento de los materiales y de las cargas o acción de los agentes externos, para así concebir y establecer el modelo más apropiado o de más fácil aplicación práctica. Está claro que al realizarse la modelación, se está llevando de la estructura real a un modelo ideal equivalente y este proceso implica asumir ciertas hipótesis como válidas que simplifican el fenómeno físico real.

Cuando se establece un modelo es necesario asumir una serie de hipótesis simplificadoras que en este caso quedan delimitadas por:

- Se supone que el material es elástico, homogéneo e isótropo.
- Los desplazamientos son pequeños comparados con las dimensiones de la estructura de modo que puede plantearse el equilibrio en la estructura sin desplazar.
- Los pisos (entrepisos o forjados) son infinitamente rígidos en su plano, e infinitamente flexibles en la dirección normal al mismo. Se suponen conocidas las cargas actuantes de viento y/o sismo; así como otro tipo de cargas laterales.

La solución será dada sobre la base del Método de los Desplazamientos en su enfoque matricial. Al suponerse los entrepisos infinitamente rígidos y emplearse el método de los desplazamientos, los desplazamientos son las incógnitas y vienen dados por tres componentes: dos lineales ortogonales y una angular (figura 1).

### EXPOSICIÓN GENERAL DEL MÉTODO.

En este método de análisis de estructuras de edificios es necesario identificar el sistema de rigidizadores verticales que componen el sistema estructural, que son los encargados de soportan las cargas laterales. Después de haber precisado lo anterior se define qué método de análisis se utilizará y posteriormente se asume el sistema base.

### OBTENCIÓN DEL SISTEMA BASE.

Para concebir el sistema base se emplea el concepto de subestructuración y se realiza un cuerpo libre independiente de cada una de las estructuras resistentes verticales (figura 2). Además de lo anterior se realiza de forma similar un cuerpo libre de cada una de las plantas (entrepisos o forjados) que conforman el edificio (figura 1). En los dos subsistemas bases se toma en consideración el aporte en términos de rigidez a flexión y cortante en las direcciones ortogonales y además en los caso de estructuras resistentes verticales con comportamiento espacial se toma en consideración la torsión y flexo-torsión (en el caso de secciones abiertas). En el subsistema base de cada nivel (forjado o entrepiso), la modelación se hará planteando tres ligaduras en cada piso, dos ligaduras lineales ortogonales y una angular (Figura 1).

### DESARROLLO DEL MÉTODO.

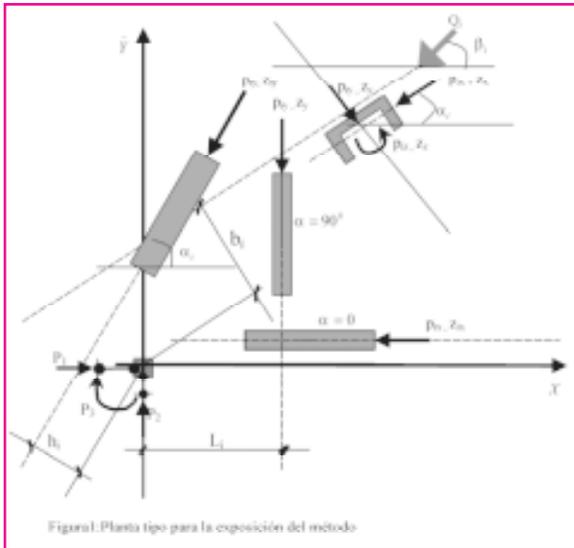
Se sabe que la ecuación matricial del método de los desplazamientos es

$$P = K.Z \dots\dots\dots (1)$$

donde :

$\underline{P}$ : Vector de las fuerzas en las ligaduras.  
 $\underline{K}$ : Matriz rigidez global de la edificación.  
 $\underline{Z}$ : Vector de los desplazamientos de los pisos en la dirección de las ligaduras.

Las fuerzas  $\underline{P}$  se calculan por estática, como se puede apreciar en la figura 1 para una planta de un piso cualquiera.



**Figura 1:** Planta tipo para la exposición del método  
 Este procedimiento es el mismo en todos los niveles de la estructura objeto de estudio.

Si  $\underline{Q}$  es el vector de las cargas laterales externas (figura 1) el equilibrio será:

$$\underline{P}_i = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_i \cos \beta_i \\ Q_i \sin \beta_i \\ Q_i b_i \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

y el vector general  $\underline{P}$  para toda la edificación, queda expresado por:

$$\underline{P} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ - \\ P_2 \\ - \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{3n} \\ - \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{3n} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

al cual corresponde un vector desplazamiento  $\underline{Z}$  dado por:

$$\underline{Z} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_{3n} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (4)$$

La matriz rigidez  $\underline{K}$  es cuadrada y su tamaño es  $3n \times 3n$ , (donde  $n$  es el número de pisos o niveles que tiene la edificación). La obtención de esta matriz es fundamental siempre que se aplica el Método de los Desplazamientos.

Para comenzar el cálculo de  $\underline{K}$ , se plantea la ecuación:

$$\underline{p} = \underline{k} \cdot \underline{z} \dots\dots\dots (5)$$

donde:

$\underline{P}$ : vector de las acciones de los rigidizadores sobre los pisos.

$\underline{z}$ : vector de los desplazamientos en las direcciones de  $\underline{P}$ .

$k$ : matriz rigidez ordenada por piso.

El cálculo de la matriz K se hace de forma indirecta (Figura 2), por lo complejo que resulta obtenerla directamente en este caso. Este proceso es relativamente sencillo y fácil de computarizar, para ello es necesario la aplicación del Principio del Contragradiante<sup>(7)</sup> que implica que:

$$\underline{P} = C^t \underline{p} \quad (6)$$

La matriz C se denomina matriz conexión y C<sup>t</sup> matriz conexión transpuesta.

**CÁLCULO DE LA MATRIZ RIGIDEZ DE LA EDIFICACIÓN APLICANDO EL MÉTODO INDIRECTO.**

Haciendo abstracción de las cargas Q (ya que se está calculando una rigidez y la misma es independiente de las cargas externas), se tiene para el caso general (figura 1):

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ h & L & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_{ix} \\ p_{iy} \\ p_{iz} \end{Bmatrix}$$

Para el caso de una estructura resistente vertical plana se expresa de la siguiente manera:

- Si su aporte es en el eje x:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

- Si su aporte es en el eje y:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix}$$

- Si su aporte es en X y Y , sin aporte en Z

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ h & L & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

De forma general para el sistema de estructuras resistentes verticales en su conjunto pertenecientes al nivel i de la edificación se tiene:

$$P_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 & \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 & 0 & \dots & \cos \alpha_n & \sin \alpha_n & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & \dots & \sin \alpha_n & \cos \alpha_n & 0 \\ h_1 & L_1 & 1 & h_2 & L_2 & 1 & \dots & h_n & L_n & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{Bmatrix} \quad (7)$$

donde :

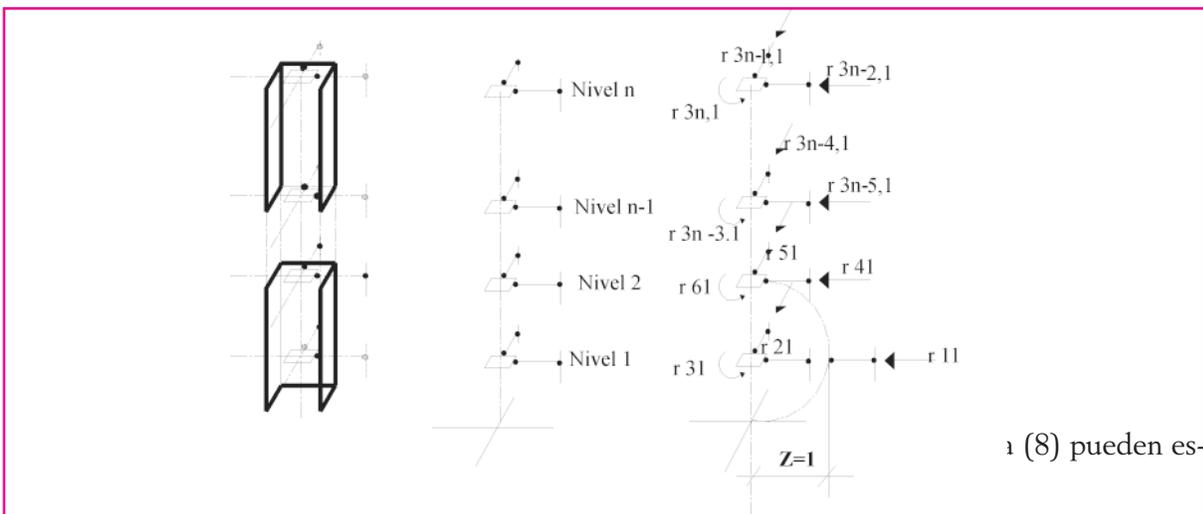
n: número de estructuras resistentes verticales que inciden en ese nivel o planta.

y

$$C_i^t = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 & \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 & 0 & \dots & \cos \alpha_n & \sin \alpha_n & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & \dots & \sin \alpha_n & \cos \alpha_n & 0 \\ h_1 & L_1 & 1 & h_2 & L_2 & 1 & \dots & h_n & L_n & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

siendo:

$$\underline{P} = C^t \cdot \underline{p}$$



(8) pueden es-

Figura 2: Cálculo de la matriz rigidez de forma indirecta en una estructura resistente vertical.





$$r_i = \begin{bmatrix} \text{nivel1} & \begin{bmatrix} 1 & r_{11} & 0 & 0 & r_{14} & 0 & 0 & \dots & r_{1,n-2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & r_{22} & 0 & 0 & r_{25} & 0 & \dots & 0 & r_{2,n-1} & 0 \\ 3 & 0 & 0 & r_{33(t+ft)} & 0 & 0 & r_{36(t+ft)} & \dots & 0 & 0 & r_{3,n(t+ft)} \end{bmatrix} \\ \text{nivel2} & \begin{bmatrix} 1 & r_{41} & 0 & 0 & r_{44} & 0 & 0 & \dots & r_{4,n-2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & r_{52} & 0 & 0 & r_{55} & 0 & \dots & 0 & r_{5,n-1} & 0 \\ 3 & 0 & 0 & r_{63(t+ft)} & 0 & 0 & r_{66(t+ft)} & \dots & 0 & 0 & r_{6n(t+ft)} \end{bmatrix} \\ \dots & \dots \\ \text{niveln} & \begin{bmatrix} 1 & r_{n-2,1} & 0 & 0 & r_{n-2,4} & 0 & 0 & \dots & r_{n-2,n-2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & r_{n-1,2} & 0 & 0 & r_{n-1,5} & 0 & \dots & 0 & r_{n-1,n-1} & 0 \\ 3 & 0 & 0 & r_{n,3(t+ft)} & 0 & 0 & r_{n,6(t+ft)} & \dots & 0 & 0 & r_{n,n(t+ft)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

**ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ RIGIDEZ GENERAL DEL SISTEMA.**

Una vez obtenida las submatrices  $r_i$  se pasa a ensamblar la matriz  $r$  que no es mas que la matriz rigidez total de todo el edificio y como los cálculos se realizan independientemente para cada rigidizador vertical, la matriz  $r$  de toda la estructura se escribe simplemente por:

$$r = \begin{bmatrix} r_1 & & & & \\ & r_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & r_n \end{bmatrix} \dots \dots \dots (13)$$

donde:  
 n: número total de rigidizadores.  
 $r_i$ : submatriz rigidez de cada rigidizador.

A partir de la matriz  $r$  se calcula la matriz rigidez de la edificación (K). Ahora sólo falta calcular  $k$  en función de  $r$ . Para ello se aprovecha que los vectores  $\underline{y}$  y  $\underline{z}$  están compuestos por

los desplazamientos, solo que ordenados de forma distinta. En efecto, ya se expreso anteriormente que los  $\underline{z}$  están ordenados por pisos, y los  $\underline{y}$  por rigidizadores verticales. Entonces se comprende que pueda escribirse la ecuación matricial:

$$\underline{y} = A \cdot \underline{z} \dots \dots \dots (14)$$

donde:

A: Matriz que se denominará incidencia, y que como es lógico, esta compuesta sólo por unos y ceros.

Para calcular la matriz A basta hacer:

$$A_{ij} = 1 \text{ si } y_i = z_j \\ A_{ij} = 0 \text{ en caso contrario.}$$

De la expresión (13) se deduce por el principio del contragradiente<sup>7</sup>:

$$\underline{p} = A^t \cdot \underline{q} \dots \dots \dots (15)$$

Combinando las expresiones (15), (11) y (14) se obtiene:

$$\underline{p} = A^t \cdot r \cdot A \cdot \underline{z} \dots\dots\dots (16)$$

y comparando (5) y (16) se observa que:

$$k = A^t \cdot r \cdot A \dots\dots\dots 17)$$

De esta forma queda calculada k en función de r, basta ahora sustituir la expresión (14) en (10) para obtener la matriz K deseada:

$$K = C^t \cdot A^t \cdot r \cdot A \cdot C \dots\dots\dots (18)$$

Conocida la matriz rigidez global de edificio (18) solo falta resolver el sistema de ecuaciones que caracterizan al método de los desplazamientos:

$$K \cdot Z = P \dots\dots\dots (19)$$

donde :

K: matriz rigidez de toda la edificación, que se determina por (18).

Z: desplazamientos de cada nivel (incógnitas).

P: vector de fuerzas externas que se determina por (2) y (3).

Con la solución del sistema de ecuaciones (19) se obtienen los desplazamientos Z de cada nivel o piso y con estos los z de cada estructura resistente vertical:

$$\underline{z} = C \underline{Z}$$

donde:

$\underline{Z}$ : desplazamiento de las estructuras resistentes verticales.

C: matriz conexión.

$\underline{Z}$ : desplazamiento de cada nivel o piso.

En función de los desplazamientos  $\underline{z}$  se pueden determinar las fuerzas que toma cada es-

tructura resistente vertical, empleando la expresión:

$$\underline{p} = k \underline{z} \dots\dots\dots (20)$$

Después de determinar las  $\underline{P}$  a modo de comprobación de los cálculos se puede verificar el equilibrio del sistema por:

$$\underline{T} = C^t \cdot \underline{p} \dots\dots\dots (21)$$

y conocido  $\underline{T}$  :

$$\underline{P} - \underline{T} = 0 \dots\dots\dots (22)$$

**CONVENIO DE SIGNOS.**

- Se introduce un sistema de ejes ortogonales O,X,Y haciendo coincidir el origen con el punto de intersección de las ligaduras lineales en la planta.
- Para un rigidizador genérico i se obtiene la posición del centro de gravedad (G) y la de los ejes principales GA<sub>1</sub> y GA<sub>2</sub> de su sección transversal. En el caso de estructuras resistentes verticales de paredes delgadas y de sección abierta la posición de la misma se obtienen con respecto al centro de cortante.
- Se obtiene el ángulo a medido en sentido antihorario entre el sistema de ejes OXY y uno de los ejes principales de la sección de modo que se verifique que:  
0 ≤ a ≤ 90°.
- Se definen los sentidos de los ejes GA<sub>1</sub>, GA<sub>2</sub> de modo que el sistema de ejes A<sub>2</sub>GA<sub>1</sub>, se obtenga rotando el sistema YOX un ángulo a en sentido antihorario.
- Las cargas Q<sub>i</sub> se consideraran positivas si están en sentido contrario a la dirección positiva de los ejes X y Y.
- Los ángulos b<sub>i</sub> se miden en sentido antihorario entre el eje OX y la dirección de la carga, deberá cumplirse :  
0 ≤ b<sub>i</sub> ≤ 180°.

- El signo del producto  $Q_i b_i$  se considera positivo si el momento de  $Q_i$  con respecto a  $O$  gira en el mismo sentido de  $P_{3n}$ .
- En el caso de las fuerzas  $p_i$  el convenio es igual que el de las  $Q_i$ .
- El producto  $p_{ix} L$  y  $p_{iy} H$  es positivo si se cumple lo enunciado para el producto  $Q_i b_i$ . Este convenio determina los signos de  $H$  y  $L$ .

### EJEMPLO DE CÁLCULO.

A modo de ejemplificar las potencialidades de la formulación realizada se realiza un ejemplo numérico. En este caso se parte de un ejemplo completamente arbitrario pero que es lo más general posible ya que presenta los siguientes aspectos:

- Estructuras resistentes verticales no monótonas en altura.
- Tímpanos en esviaje y con secciones de paredes delgadas y abiertas.

En el ejemplo numérico no se contempla todas las potencialidades de la formulación realizada y a diferencia con otros métodos este posibilita resolver los casos siguientes:

- Estructuras resistentes verticales de diferentes tipos (pórticos, tímpanos o diafragmas, mixtas, tubulares, etc).
- Edificios donde las estructuras resistentes verticales estén en esviaje.
- Estructuras resistentes verticales que no sean monótonas en toda la altura del edificio.

Las plantas de la edificación son las representadas en la figura 3. La estructura que se muestra (figura 3) está compuesta por dos niveles y presenta tres rigidizadores dispuestos asimétricamente en cada planta.

Los datos y propiedades de cada una de estas estructuras resistentes verticales se resumen a continuación:

### DATOS DEL PROBLEMA.

Propiedades de los materiales.

$$R'_{bk} = 21 \text{ MPa}$$

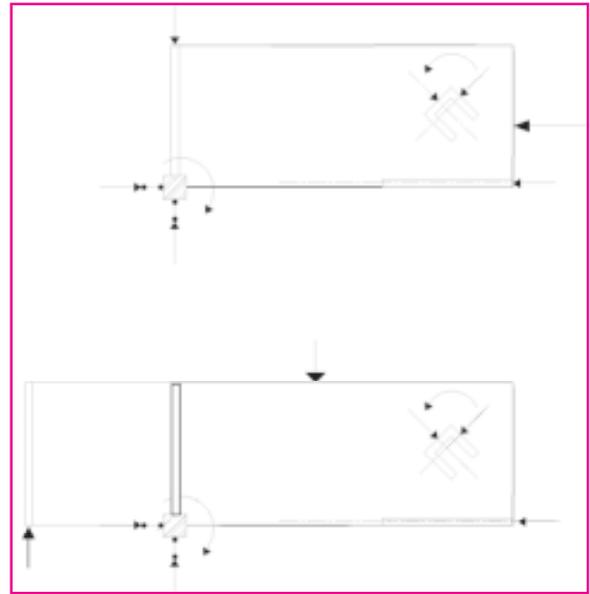


Figura 3: Planta de la Edificación. Ejemplo Numérico.

$$E b = 21996363.3 \text{ MPa}$$

$$m = 0.17$$

Los valores de las cargas actuantes son:

$$Q_1 = 10 \text{ Kn} \quad b_1 = 3\text{m}$$

$$Q_2 = 15 \text{ Kn} \quad b_2 = 5\text{m}$$

Características geométricas de los rigidizadores.

Rigidizador 1 y 4

$$I_{x1} = bh^3/12 = 3.6\text{m}^4 = I_{x4}$$

$$I_{y1} = 0.004\text{m}^4 = I_{y4}$$

Rigidizador 2

$$I_{x2} = 0.13\text{m}^4$$

$$I_{y2} = 0.0013 \text{ m}^4$$

Rigidizador de sección canal 3

Espesor(d) = 0.2m

Longitud del contorno(s) = 3.2m

Altura (h) = 3,6m

$$I_{x3} = 0.45\text{m}^4 \quad I_w = 0.0858\text{m}^6$$

$$I_{y3} = 0.133\text{m}^4 \quad I_t = 0.012\text{m}^4$$

La estructura resistente vertical No. 3 se puede considerar de sección abierta y de paredes delgadas si se toma en cuenta sus dimensiones y el tipo de sección transversal.

Los parámetros geométricos de los rigidizadores verticales resistentes se ilustran en la tabla siguiente:

Rig. vertical	ao	cosa	sena	H(m)	L(m)
1	90°	0	0	0	-
2	0	1	0	0	-
3	30°	0,87	0,5	-2	4
4	90°	0	1	3	-

Siguiendo el procedimiento se obtiene la matriz  $r$  de todas las estructuras resistentes verticales por el procedimiento descrito (figura 2).

La matriz  $C^T$  queda definida por:

$$C^T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^T_2 = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Realizando los pasos necesarios se llega a la obtención de la matriz  $K$  del sistema (de toda la edificación):

$$K = \begin{bmatrix} 1.72 \cdot 10^6 & 8.2 \cdot 10^5 & -1.171 \cdot 10^6 & -1.90 \cdot 10^7 & 2.68 \cdot 10^5 & 7.97 \cdot 10^5 \\ 8.2 \cdot 10^5 & 2.68 \cdot 10^6 & 6.435 \cdot 10^5 & -2.592 \cdot 10^5 & -2.389 \cdot 10^5 & -1.96 \cdot 10^5 \\ -1.171 \cdot 10^6 & 6.435 \cdot 10^5 & 1.448 \cdot 10^7 & 3.715 \cdot 10^5 & -1.894 \cdot 10^5 & -4.667 \cdot 10^6 \\ -1.90 \cdot 10^7 & -2.592 \cdot 10^5 & 3.715 \cdot 10^5 & 2.373 \cdot 10^5 & 1.109 \cdot 10^5 & -1.703 \cdot 10^5 \\ 2.68 \cdot 10^5 & -2.389 \cdot 10^5 & -1.894 \cdot 10^5 & 1.109 \cdot 10^5 & 8.01 \cdot 10^6 & -5.66 \cdot 10^6 \\ 7.97 \cdot 10^5 & -1.96 \cdot 10^5 & -4.667 \cdot 10^6 & -1.703 \cdot 10^5 & -5.66 \cdot 10^6 & 1.923 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

Adicionalmente para completar el sistema de ecuaciones es necesario formular el vector de fuerzas y de desplazamientos respectivamente:

Establecidos los vectores de las acciones de fuerzas externas, de los desplazamientos de cada nivel y la matriz rigidez de la edificación se procede a solucionar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$P = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ -30 \\ 0 \\ 15 \\ 75 \end{Bmatrix} \text{ Vector de acciones externas.}$$

$$[K] \cdot \{Z\} = \{P\}$$

entonces

$$\{Z\} = \frac{\{P\}}{[K]} = [K]^{-1} \cdot \{P\}$$

$$P = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{Bmatrix} \text{ Vector de los desplazamientos.}$$

De la solución del sistema de ecuaciones se obtiene:

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} 9.378 \cdot 10^{-7} \text{ m} \\ 2.193 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ 2.834 \cdot 10^{-5} \text{ grad} \\ 3.022 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ 2.566 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 8.649 \cdot 10^{-5} \text{ grad} \end{Bmatrix}$$

Que no es más que el vector que representa los desplazamientos en cada nivel

Conocido estos desplazamientos globales de cada entrepiso se tienen los desplazamientos de las diferentes estructuras resistentes verticales :

$$z = \begin{Bmatrix} 2.193 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ 9.378 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ -4.491 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ 1.329 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 2.834 \cdot 10^{-5} \text{ grad} \\ -3.022 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ -4.729 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ 5.651 \cdot 10^{-4} \text{ m} \\ 8.649 \cdot 10^{-5} \text{ grad} \\ 2.888 \cdot 10^{-6} \text{ m} \end{Bmatrix}$$

Determinados los desplazamientos de cada estructura resistente se procede a determinar la fuerza que toman los rigidizadores en función de su rigidez y posición en planta.

$$p = \begin{Bmatrix} 41.875 \text{ kN} \\ 57.014 \text{ kN} \\ -38.38 \text{ kN} \\ 25.49 \text{ kN} \\ -6.86 \text{ kN} \\ -17.77 \text{ kN} \\ 10.264 \text{ kN} \\ 17.88 \text{ kN} \\ 7.437 \text{ kN} \\ -5.515 \text{ kN} \end{Bmatrix}$$

A modo de comprobación se verifica el equilibrio del sistema . Para realizar este proceso es necesario partir de:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 10 \text{ kN} \\ 0 \\ -30 \text{ kN} - m \\ 0 \\ 15 \text{ kN} \\ 75 \text{ kN} - m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

Esta verificación se realiza empleando la siguiente igualdad:

$$\{T\} = [C^T] \cdot \{p\} = \{P\}$$

De lo que resulta:

$$\{T\} = \{P\} = \begin{Bmatrix} 10 \text{ kN} \\ 0 \\ -30 \text{ kN} - m \\ 0 \\ 15 \text{ kN} \\ 75 \text{ kN} - m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{Bmatrix}$$

De la realización de esta comprobación se evidencia el equilibrio del sistema y la veracidad de la formulación realizada.

## CONCLUSIONES

La formulación de este sencillo método permite arribar a las siguientes conclusiones:

- Los métodos de análisis de distribución de fuerzas horizontales para edificios altos son muy variables y responden a la diversidad de las tipologías y disposición en planta de las estructuras resistentes verticales. La inmensa mayoría, en especial los métodos más refinados generan una alta complejidad matemática que es amortiguada con el empleo de los medios de cómputo..
- El métodos de distribución de fuerzas horizontales formulado, presenta un mayor grado de generalidad, pues cubre un amplio espectro de soluciones de rigidización vertical que no tenían respuesta con la utilización de los métodos que le precedieron. El

haber tomado en consideración el aporte espacial de las estructuras verticales resistentes y como caso particular se introduce el efecto del momento flexo-torsor en aquellos rigidizadores que por sus características geométricas responden a estructuras de paredes delgadas y de sección abierta le posibilita a esta formulación tener un carácter general.

- Se establece el procedimiento de cálculo detallado para la aplicación del método, haciendo énfasis en el cálculo de los términos  $r_{ij}$  que toman en cuenta el efecto de torsión y flexo-torsión en ciertos tipos de rigidizadores.
- La introducción de los nuevos elementos en los métodos de distribución de fuerzas laterales en edificios, conducen a análisis más eficientes y refinados, al permitir realizar un análisis espacial del comportamiento de las estructuras verticales resistentes, además de tomar en cuenta el efectos de la flexo-torsión, detectándose de esta forma estados tensiones no precisados por las ecuaciones de la estática

## RECOMENDACIONES

- El resultado de esta investigación sienta las bases para la realización de un programa de computación donde se encuentre implementada la nueva formulación del método y se introduzcan los efectos de análisis espacial y las consideraciones del aporte a torsión flexo torsión respectivamente en el caso de rigidizadores de paredes delgadas
- Se sugiere continuar la investigación introduciendo en el mismo el efecto de flexibilidad de forjado o entrepiso.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Baykov, V.N. y E.E. Sigalov. Estructuras de hormigón armado, 2da. ed. Moscú: Editorial Mir, 198
2. Feodosiev, V. I. Resistencia de materiales tomo I. Editorial y asociación de estudiantes de tecnología. Publicaciones 1965.
3. Fernández Alvarez, Ricardo A. Método de análisis de edificios sometidos a cargas laterales considerando la deformación del forjado/Ricardo A. Fernández Alvarez TGC, ISPJAE. 88-89. 110 p.
4. González, J.M. "Aplicación del método de la matriz transferencia al análisis de tímpanos con huecos", Ingeniería Estructural y Vial, Ciudad de La Habana, septiembre, 1981.
5. González, J.M. y Trinh V. C. "Programa de computación para analizar tímpanos con huecos", Ingeniería Estructural y Vial. Ciudad de La Habana, enero, 1985.
6. Gutiérrez M, P. Flexión y torsión de perfiles de paredes delgadas de sección abierta. Ingeniería Civil No. 1 vol. XV, enero 1964. pp 3-73.
7. Hernández Pérez, J. E. Método de distribución de fuerzas horizontales en edificios con pórticos y tímpanos. Ingeniería Estructural y Vial (Ciudad Habana) (2): 34-45:1994.
8. Hernández Pérez, J. E. Fuerzas laterales en edificios con tímpanos. Ingeniería Civil (La Habana) (11-12): 1972.
9. Hernández Pérez, J. E. Fuerzas laterales en edificios con tímpanos Ingeniería Civil (La Habana) (12): 1967.
10. Llanes Burón, C. Algunos criterios sobre el diseño de edificios altos. Ingeniería Civil (La Habana) (1): 16-28:1984.
11. Llanes Burón, C. Análisis tridimensional de estructuras. Primera Parte Ingeniería Estructural (Ciudad Habana) – (2): 5-12: 1983.
12. Ruiz Alejo S. Deformaciones laterales en edificaciones. Ingeniería Estructural (Ciudad Habana) (1): 1985.
13. Ruiz A. S. Efecto del momento flexo torsor en los diafragmas de sección I. Ingeniería Civil (C. Habana) (6): 61-67:1975.