Caracterización de prácticas asociadas con la predicción en el enfrentamiento ante lo errático: un estudio socioepistemológico

Characterization of practices related with prediction facing the erratic: a socioepistemological study

M. Sc. Jesús Enrique Hernández Zavaleta
jesus.hernandez@cinvestav.mx

Dr. Ricardo Cantoral Uriza
rcantor@cinvestav.mx

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México

Hernández Zavaleta es candidato a doctor y estudiante de doctorado en el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México y miembro del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). Es Integrante del Proyecto Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas de la Subsecretaria de Educación Media Superior de México. Docente-Tutor-Investigador de la academia de Matemáticas del Instituto de Educación Media Superior de la Ciudad de México. **Cantoral Uriza**, Doctor en Ciencias, investigador 3D del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Miembro del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). Investigador nacional del Sistema Nacional de Investigadores SNI III en México y miembro regular de la Academia Mexicana de Ciencias. Director General de la Unidad de Educación Media Superior Tecnológica Industrial y de Servicios de la Subsecretaria de Educación Media Superior de México.

RESUMEN

Este escrito muestra los resultados de un análisis histórico-epistemológico que se pregunta sobre las prácticas que realizan Poincaré (1890), Lorenz (1963) y May (1974) en su encuentro con dinámicas caóticas, nos interesan sus argumentaciones ante lo errático (aparición de *eventos inesperados)* dados en el tránsito entre lo predecible e impredecible; asumimos que la manera de actuar ante este tipo de situaciones indica una forma de *construir conocimiento matemático especializado.* Desde el marco teórico socioepistemológico se aplicaron métodos que permitieron indagar *las prácticas* que acompañan a los conceptos matemáticos: recurrencia temporal, sensibilidad a condiciones iniciales y gráfica de parámetros. Los resultados de este estudio muestran que *la búsqueda de lo circular*, *la comparación de soluciones* en el tiempo y *la clasificación de comportamientos* son prácticas que dotan de significado a este tipo de situaciones y son un *a priori* que aporta elementos para la caracterización de una forma de pensamiento variacional ante *lo inesperado*. Este estudio aporta elementos para la construcción de una situación que presente casos inesperados, que servirá para estudiar casos de actuaciones de jóvenes preuniversitarios y dará guía para la creación de ejemplos específicos que permitan su desarrollo en la escuela.

Palabras clave: Matemática educativa, historia de la enseñanza de las ciencias, predicción, conocimiento, estudios sociales, historia, conceptos matemáticos.

ABSTRACT

This paper shows the results of a historical-epistemological analysis that points out the practices performed by Poincaré (1890), Lorenz (1963) and May (1974) in their encounter with chaotic dynamics, we are interested in their argumentations against the erratic (coming from unexpected events), in the transit between the predictable and unpredictable; we assume that the way to act in this kind of situations indicates a way to build specialized mathematical knowledge. Socioepistemological approach methods were applied to search the practices associated with mathematical concepts processing: temporal recurrence, sensitivity to initial conditions and parameter graphics. The findings show that searching the circular, comparing solutions over time and classifying behaviors are practices that give meaning to this kind of situations and are part of an a priori analysis that provides elements for the characterization of a form of variational thinking to face the unexpected. This study provides elements for the construction of a situation that presents unexpected cases, facilitates to study cases of actions in pre-university students and will serve as a guide for the creation of specific examples that allow their integration at school.

Keywords: mathematics instruction, educational sciences history, prediction, knowledge, social studies, mathematical concepts.

La imposibilidad humana de manipular el tiempo propone a *la predicción* como una estrategia emergente para la adaptación al entorno, se considera que proviene de la evolución en las interacciones del colectivo social y está asociada a la acción de anticipar un estado o valor luego de realizar un análisis de estados previos (Cantoral, 2001; 2016). Por otro lado, Cantoral (2016) advierte que *las prácticas* se configuran en una iteración dinámica que va desde las acciones que realiza el sujeto que conoce con su medio, hasta configurar formas de explicación compartidas que gradualmente se transforman en discursos social y culturalmente normados. *Lo errático* está ligado, en un principio, al movimiento de cuerpos celestes que "no se comportan como es debido", dicho de otro modo, que son impredecibles o se mueven sin rumbo fijo en un cosmos aristotélico (Feynman, 2008), esta investigación considera su aparición en fenómenos de cambio, como la predicción climática o la ecología de poblaciones, que transitan de estados predecibles a no predecibles, dichos fenómenos se encuentran asociados a sistemas dinámicos que exhiben comportamientos caóticos.

El interés por los *sistemas dinámicos caóticos* en la educación tiene varios matices y han sido tratados desde diferentes perspectivas. Nemirovsky (1993) explora actuaciones de estudiantes de bachillerato para discriminar tipos de movimiento en la máquina física conocida como la rueda de Lorenz, ésta presenta comportamientos erráticos, su análisis considera la transición de estados regulares a irregulares y las formas en que la predicción aparece en los argumentos de los estudiantes desde el marco teórico de la intuición propuesto por Fishbein (1987). Utilizando la perspectiva de la Etnomatemática, Eglash

Transformación, ISSN: 2077-2955, RNPS: 2098, mayo-agosto 2018, 14 (2), 177-189

(1997) estudia una forma de adivinación en un grupo étnico africano, interpreta las formas de contar y hacer líneas en la arena como un generador determinista binario que pasado el tiempo genera series de símbolos aleatorias es decir caóticas, estos resultados los utiliza para producir situaciones de aprendizaje en la comunidad donde realizó el estudio.

Investigaciones como la de Maldelbrot y Frame (2002) han argumentado que objetos matemáticos generados por dinámicas caóticas, como los fractales, son propicios para ser enseñados en el aula debido a sus propiedades geométricas y sus formas de visualización, según argumentan llaman la atención a los estudiantes y son una oportunidad de acercarles "nuevas" matemáticas. Por otro lado, existen esfuerzos de diseño de cuadernillos que proponen estrategias para llevar conceptos como el caos y sistemas de funciones iteradas (IFS por sus siglas en inglés) a las aulas de estudios preuniversitarios mediante actividades guiadas (Peitgen, Jürgens, & Saupe, 1991; Devaney & Choate, 2000), sin embargo, carecen de un marco en investigación educativa que los sustente.

Desde una visión Socioepistemológica López y Alatorre (2008) *problematizan* la evolución de la predicción desde la física aristotélica hasta Beinot Mandelbrot, proponiendo un punto ruptura entre la predicción determinista y la no determinista, la primera relacionada con la física clásica y la segunda concluye, posiciona a los fractales como herramientas predictivas. En años más recientes, Ghys (2015) menciona que las ideas detrás de la teoría del caos han sido de las más diseminadas en la sociedad, sin embargo, la comunicación de estas ideas no ha sido adecuada por parte de los matemáticos y maestros que la han tratado; dicho esto, propone que la educación de futuros maestros de matemáticas y matemáticos incluya entrenamiento específico para comunicar estas ideas fuera de una comunidad especializada.

A diferencia de las investigaciones y propuestas descritas anteriormente este trabajo tiene como hipótesis la existencia de una forma de pensamiento basada en *prácticas*, actualmente fuera de niveles de educación que atienden estudiantes entre los 15 y 18 años, que incide en el desarrollo de habilidades y comportamientos científicos de los estudiantes ante el cambio y su cuantificación. Se pregunta sobre cuáles son los usos de la variación presentes en el encuentro con *lo inesperado* inherente al comportamiento dinámico de un fenómeno, es decir, cuando lo estable (bien comportado) se vuelve errático o inestable; fijándose en las *acciones y argumentaciones* realizadas al estudiar este tipo de fenómenos. La Fig. 1 ejemplifica una dinámica que comienza en el tiempo t_0 y es predecible hasta un tiempo t_i (punto) en donde aparece *el evento inesperado*, este momento de transición es de principal interés para esta investigación, puesto que nos interesan *las prácticas* que se ponen en juego en ese momento.

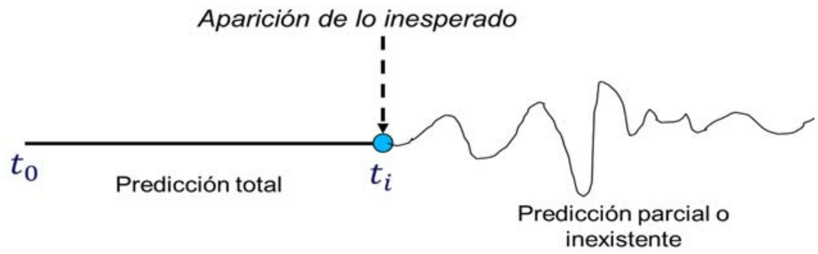

Fig. 1. El interés de esta investigación se encuentra en el punto de transición t_i de la predicción total a la parcial o inexistente

De acuerdo con la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME) la ruta metodológica exige de la *problematización del saber matemático,* en esta investigación se expresa mediante el análisis de obras originales en las que aparecen *eventos inesperados* que impiden la predicción; nos enfocamos en tres eventos de la *génesis histórica* de la teoría del caos: el error de H. Poincaré en su memoria sobre la estabilidad del sistema solar (Poincaré, 2002), la duda de E. Lorenz ante cambios pequeños en las condiciones iniciales en la modelación del clima (Lorenz, 1963) y el acierto de R. May al proponer formas de estudiar comportamientos erráticos provenientes de sistemas dinámicos deterministas mediante métodos provenientes de la probabilidad y la estadística (May, 1976). Este escrito muestra una caracterización de las *prácticas* involucradas en estos tres eventos y las propone como partes de una forma de pensar ante el cambio y su variación en dichas circunstancias.

Métodos

Sobre la selección de los eventos

Los eventos, en la génesis histórica de la teoría del caos, analizados fueron elegidos de acuerdo con su importancia en la evolución de la noción de caos determinista; cronistas de la ciencia moderna (Ford, 1986; Diacu & Holmes, 1999; Stewart, 2001; Gleick, 2012) incluyen en sus narraciones el error de Poincaré, el encuentro de Lorenz con la sensibilidad a las condiciones iniciales y el análisis del mapeo logístico propuesto por May, como ejemplos fundamentales que explican características de los comportamientos caóticos; si bien la brecha en años desde el descubrimiento por serendipia de Poincaré y los otros dos es amplia, los conceptos teóricos que ejemplifican solo pudieron ser entendidos en su totalidad hasta los años 60 debido a la aparición de computadoras que simplificaban los cálculos y proveían elementos para la visualización gráfica de esos comportamientos.

Por otro lado, los textos con intención didáctica sobre sistemas dinámicos y de ecuaciones diferenciales con este enfoque, para nivel superior, utilizan el sistema de Lorenz para estudiar la sensibilidad de las condiciones iniciales y proponen el mapeo de retorno de Poincaré como una herramienta útil para su análisis y concluir su comportamiento errático llegado a evidenciar propiedades fractales de la trayectoria solución. Por otro lado, el ejemplo discreto más usado es el mapeo logístico, debido a que es posible conocer, por completo, todos sus estados estables, así como los inestables en la iteración del sistema, eligiendo libremente las condiciones iniciales (Guckenheimer & Holmes, 1983; Tabor, 1989; Hale

& Kocak, 1991; Peitgen, Jürgens, & Dietmar, 1992; Blanchard, Devaney, & Hall, 1999; Wiggins, 2003; Shuster, 2005).

La evolución conceptual de las dinámicas caóticas lleva a propuestas de caracterización del caos determinista después del estudio de los ejemplos característicos; por ejemplo, para Devaney (1992) las tres propiedades que debe cumplir un sistema caótico son: 1) la sensibilidad a condiciones iniciales, 2) la transitividad topológica y 3) la propiedad de mezclado o de ergodicidad. La primera se refiere a que el comportamiento de las soluciones que provienen de condiciones iniciales cercanas diverge conforme pasa el tiempo, la segunda dice, dados dos intervalos cualesquiera, en el dominio, se puede dar una trayectoria que los toque y; la última se refiere a que los órdenes de periodicidad son densos en la dinámica del sistema, es decir, en la dinámica se encuentran periodos de todos los órdenes.

Constructos teóricos para análisis de los eventos

El análisis de las obras originales que refieren a los eventos, mencionados en secciones anteriores, requiere de la caracterización de *argumentaciones y acciones* que hacen los autores sobre su objeto de estudio. Por argumento se entienden las expresiones narrativas, icónicas, tabulares, simbólicas o de origen corpóreo que afirman, justifican, infieren y/o concluyen sobre el cambio y su variación (Caballero, 2012; Carrasco, Díaz, & Buendía, 2014); las acciones están relacionadas con *el modelo de anidación de prácticas* de la Socioepistemología (Cantoral, Montiel, & Reyes-Gasperini, 2015; Cantoral, 2016) que se constituye como una forma de organizar la construcción social de conocimiento. Así las *acciones* pueden tener categoría de *actividad* o *práctica*, dependiendo del contexto social y cultural en que se encuentre situado un estudio.

En este modelo *las acciones* son la base del desarrollo del conocimiento, el sujeto las ejecuta sobre algún objeto y se producen significados contextualizados, en este nivel no se es consciente de lo que se hace, es decir, es una forma encarnada de conocer. El conjunto de acciones, con sus interacciones, dan lugar a *la actividad* que es una forma de construir argumentos y defenderlos ante otros, además de aceptar la diversidad de puntos de vista, es necesario escuchar y reconocerse en el otro, es aquí donde se evidencia la construcción de conocimiento en colectivo. En el nivel de *práctica*, las argumentaciones producen discursos socialmente compartidos, aquí las acciones son iterativas y reguladas por el contexto y el quehacer del sujeto está definido y es intencionado.

Dicho lo anterior, las situaciones que nos interesa analizar (la aparición de un evento inesperado) provienen, en primera instancia, de formas de predicción ligadas al determinismo newtoniano, Cantoral (1990; 2016) propone dos constructos característicos de esta forma de pensamiento la *búsqueda del carácter estable* y *los niveles de constantificación.* El primero se expresa en las acciones que permiten elaborar formas de predicción relacionadas con la introducción de variaciones pequeñas; por ejemplo, la idea que le permite a Newton desarrollar sus *Principia* (1871) es la introducción de cantidades infinitamente pequeñas mediante las razones últimas o evanescentes que permiten el desarrollo de la noción de límite y derivada. El segundo son dos niveles que permiten articular las variables del fenómeno con el análisis sobre su comportamiento; en el primero se realizan la selección de las variables de interés y en el segundo se elige el orden de variación que permite elaborar predicciones sobre el comportamiento de las variables.

En el análisis, que se presenta en este escrito, interesa describir las condiciones en que *la búsqueda del carácter estable del cambio* se expresa y cómo se transformación en la transición a estados no predecibles, en las explicaciones se buscarán las acciones, expresadas en verbos, que acompañan a la evolución conceptual de los conceptos.

El error de Poincaré

El primer evento es el error y corrección de Poincaré, en su memoria sobre el problema de los tres cuerpos publicada en el Acta Matemática a cargo de Gösta Mittag-Leffler (Poincaré, 1890), en otras palabras, describir, las trayectorias de tres cuerpos que tienen una atracción gravitacional mutua. Según Barrow-Green (1997) el error de Poincaré se presenta en los diferentes casos que considera el teorema de recurrencia que aparece en la página 69 de esta memoria (Poincaré, 1890). *La búsqueda del carácter estable del cambio,* en este teorema, se expresa en los argumentos que da Poincaré sobre el retorno de las órbitas solución y su estabilidad dinámica; en las explicaciones sobre ésta, recurre a la estabilidad de Possion que se refiere a que una solución es estable cuando su trayectoria pasa *infinitamente cerca de su condición inicial,* en la región conocida como el mapeo de Poincaré; hoy considerada una técnica que ayuda a la reducción de dimensión, para el estudio de dinámicas globales y la clarificación de conceptos como el de órbitas periódicas (Wiggins, 2003). En este teorema se pone atención en la búsqueda de soluciones periódicas o cerradas que permitirán hacer las predicciones sobre las trayectorias que sigue el planeta de masa más pequeña.

De acuerdo con Barrow-Green (1997) el volumen 13 del Acta Matemática en 1890 tuvo que ser reimpreso debido al error que Poincaré advirtió de forma tardía en un apartado sobre el teorema de recurrencia, en la Tabla 1 se presentan las dos versiones del Teorema III de la sección 8 que trata sobre el uso de las integrales invariantes (Poincaré, 1890).

Teorema III (versión 1) Si una curva invariante C es cuasi-cerrada de tal forma que la distancia entre los puntos de cierre A y B es *tan pequeña como de orden enésimo* y existe una integral positivamente invariante, la distancia desde el punto A a su iterado A_1 y de B a su iterado B_1 son muy pequeñas de orden enésimo (Barrow-Green, 1997).	**Teorema III (versión 2)** Sean A_1AMB_1B una curva invariante, de tal forma que A_1 y B_1 son iteraciones de A y B. Supongamos que los arcos AA_1 y BB_1 son muy pequeños (es decir, tienden a cero junto con μ), pero su curvatura es finita. Supongamos que la curva invariante y la posición de los puntos A y B dependen de μ de acuerdo con alguna regla, y existe una integral positivamente invariante. Si la distancia *AB es muy pequeña* (de orden enésimo) y la distancia AA_1 no lo es tanto, como de ese orden entonces el arco AA_1 interseca al BB_1 (ver Figura 2).

Tabla 1. A la izquierda la primera versión que se retiró de su distribución y a la derecha la que prevalece publicada

Transformación, ISSN: 2077-2955, RNPS: 2098, mayo-agosto 2018, 14 (2), 177-189

En la primera versión se tiene como corolario que si la distancia entre *A* y su iteración es de orden *n-1 enésimo* entonces la curva es cerrada. Esta es una forma de referirse a la estabilidad del sistema; sin embargo, lo que él no exploró es que existía la posibilidad de que la curva no fuera cerrada, sino que se auto intersecaba, de esta forma se cumplía la conservación del área (energía) en el sistema planteado. Es importante destacar una forma de pensamiento circular al buscar trayectorias cerradas que conservaran áreas y previeran la existencia de una integral invariante.

En la segunda versión (Tabla 1 derecha) incluye un caso en el que las áreas se conservan evadiendo el caso en que la trayectoria se cierra. En realidad, la trayectoria se enreda y se auto interseca, similar al caso en la Fig. 2. Ese caso no fue dibujado por Poincaré, era un caso novedoso que no se había reportado hasta el momento (Barrow-Green, 1997). Este caso da inicio al estudio de trayectorias homoclínicas que llevan al caos hamiltoniano; Poincaré mostró que existía una infinidad de casos en donde se enredaban las trayectorias periódicas, así concluye la memoria, estas trayectorias dependían de un parámetro μ que hace que la naturaleza del sistema cambie y por lo tanto la forma de las curvas solución.

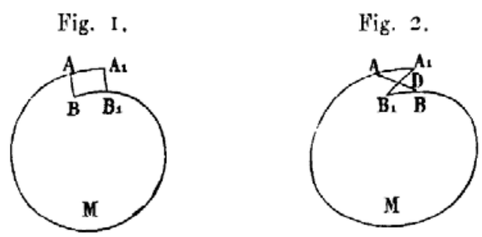

Fig. 2. Se muestran las trayectorias que Poincaré propone en la corrección de su memoria

En este evento se advierten dos cosas, la primera que los argumentos de Poincaré *en la búsqueda del carácter estable del cambio* están en la *búsqueda de lo circular (trayectorias cerradas),* es decir lo que se repite, esto debido a un *relativismo epistemológico* propio del paradigma científico determinista; sin embargo, su búsqueda se ve cuartada por la aparición inesperada de una trayectoria que se enredaba en sí misma, impidiéndole hacer predicciones a largo plazo sobre la trayectoria de los cuerpos. La segunda es que la inclusión del parámetro μ hace que *la naturaleza del sistema* cambie y le permita indagar sobre más casos evidenciando procesos de inestabilidad dinámica en presencia de cantidades infinitamente pequeñas, esto permitió el desarrollo de otros conceptos en la teoría del caos.

La duda de Lorenz

Los documentos que se utilizaron en el evento que concierne a Lorenz son su artículo *Deterministic Nonperiodic Flow* (1963) y su libro *The Essence of Chaos* (1993) en el que narra su encuentro con el caos. Su trabajo se centra en la búsqueda de un modelo matemático que describa las condiciones climáticas de tal forma que sus soluciones pongan a prueba los modelos lineales y estadísticos de pronósticos climáticos; consideraba un sistema de tres ecuaciones diferenciales no lineales (un caso típicamente determinista) que producía soluciones a-periódicas, es decir, que las condiciones de repetición se quebrantan en algún momento. Pudo imprimir los datos de tal manera que podía ver de forma cualitativa el comportamiento de las soluciones, *lo inesperado del caso* es que al comparar dos soluciones con condiciones iniciales muy cercanas entre sí (por ejemplo, con una milésima de diferencia) su comportamiento diverge después de algún tiempo. De esta forma, concluye que los resultados concernientes a la estabilidad del flujo no periódico indican que la predicción de un *futuro distante* (pueden ser días o siglos) es imposible a menos que las condiciones de inicio sean conocidas de forma exacta, es decir, estamos en la presencia de un sistema determinista que genera soluciones aleatorias. Su conclusión propone que la respuesta a qué tan distante es este lapso solo se podrá responder *comparando en el tiempo pares de soluciones numéricas con condiciones iniciales cercanas* (Lorenz, 1963, p. 141).

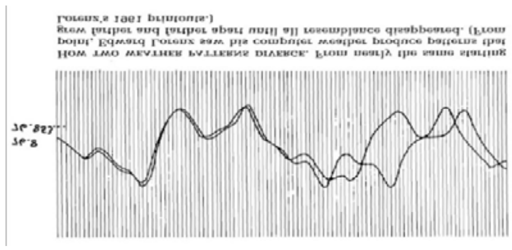

Fig. 3. Dos patrones del clima que divergen

En la Fig. 3 se muestran las soluciones impresas por Lorenz que difieren por dos decimales, leyendo a la derecha, en un principio su comportamiento es parecido, pero después de cierto tiempo se separan, esto hace que el *carácter estable del cambio* se limite a ciertos estados temporales, aquí la pequeña variación se expresa en las condiciones iniciales cercanas, este evento nos permite evidenciar una *práctica de comparación* que incide en la búsqueda de la predicción.

El acierto de May

El trabajo de R. May sobre los ciclos coexistentes de dinámicas poblacionales, provenientes de mapeos discretos unidimensionales, se revisó utilizando dos artículos complementarios (May, 1974; 1976). En el resumen de su artículo *Simple mathematical models with very complicated dynamics* (May, 1976) menciona que estos mapeos pueden producir comportamientos que van desde ciclos estables, jerarquías entre ciclos hasta fluctuaciones aparentemente erráticas, así su expresión de lo variacional está en dar respuesta a las preguntas *¿qué se repite? ¿cómo se repite? ¿cómo justifico que se repite?* Su preocupación se centra en *la clasificación del número de ciclos* que éstas producen y utiliza la *comparación entre soluciones con condiciones iniciales cercanas* como lo propone E. Lorenz, sin embargo, va un paso más lejos al identificar el valor umbral en los que aparecen ciclos de todos los órdenes y que cataloga como fluctuaciones aleatorias o erráticas que exhiben un comportamiento ergódico (la trayectoria solución llena densamente todo el espacio que la acota). De esta forma propone que la identificación y trato de estas órbitas sea utilizando un histograma de frecuencias contando las veces que pasa por cada zona en el espacio y estimar la existencia de una cantidad que no cambie (medida invariante) al transcurrir el tiempo. Sus contemporáneos encontraron que su propuesta era una aportación importante para el desarrollo del análisis de los sistemas dinámicos.

El diagrama de bifurcaciones de la ecuación logística (ver Fig. 4), en realidad es un espacio que permite *clasificar los tipos de comportamientos* en las soluciones y da claridad sobre los parámetros del sistema que hacen posible la predicción determinista. La práctica que se hace evidente en la *búsqueda del carácter estable del cambio es la clasificación de comportamientos,* éstos cambian en vecindades pequeñas, alrededor de puntos en el diagrama.

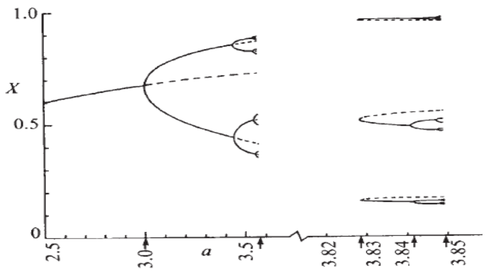

Fig. 4. Diagrama de bifurcaciones de R. May, clasificación de comportamientos

Resultados

De acuerdo con la aproximación socioepistemológica se hacen evidentes las prácticas que acompañan a los objetos o conceptos matemáticos, en este sentido el análisis de los tres eventos permitió el encuentro de tres *prácticas* en la *búsqueda del carácter estable del cambio* en situaciones de la aparición de *un evento inesperado* que impide la predicción. En la

Figura 2 se muestra el resultado del análisis de los tres eventos descritos en la sección anterior, en la parte superior se muestran los conceptos que hoy caracterizan al caos determinista (Devaney, 1992; Wiggins, 2003; Shuster, 2005); Poincaré propone el teorema de recurrencia para averiguar aspectos de estabilidad en las soluciones, Lorenz se encuentra con la sensibilidad a las condiciones iniciales y May propone elaborar un espacio de parámetros para identificar los tipos de comportamientos de la ecuación logística, la propuesta es que las prácticas que acompañan a estos conceptos lograran dotarlos de significados para los que se enfrenten a eventos similares; en el mismo orden las prácticas que se hacen evidentes son: la búsqueda de lo circular o lo que se repite, la comparación de soluciones en el tiempo y la clasificación de comportamientos, en su conjunto forman parte de una forma de actuar ante lo errático (la aparición de eventos inesperados).

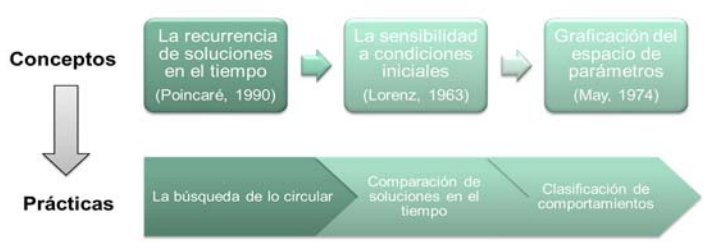

Figura 2. De los conceptos a las prácticas en la aparición de lo errático

De manera puntual, *Buscar lo circular* se refiere a la búsqueda de periodicidades que se reflejan en trayectorias cerradas o comportamientos repetitivos y, su interpretación y representación está sujeta a la práctica de referencia en la que se localiza [ver Barrow-Green (1997, pág. 91), sobre el Teorema de recurrencia de Poincaré y el desarrollo de la teoría de soluciones periódicas (Poincaré, 1892)]. *Comparar estados en el tiempo:* se refiere a la comparación puntual y global de dos comportamientos que comienzan con condiciones iniciales cercanas (del orden de milésimas) [ver Lorenz (1963, pág. 141), May (1974) sobre la comparación de series temporales]. Por último, *Clasificar comportamientos* se refiere a la configuración de *códigos y argumentos y prácticas* que permitan dar cuenta de la diversidad de comportamientos que existen en un sistema dinámico al cambiar su naturaleza mediante sus parámetros [Ver May (1976, pág. 466) acerca de los tipos de comportamientos, Hale y Koçak (1991) en el capítulo 2 sobre las bifurcaciones elementales]

Conclusiones

Asumimos que la matemática del cambio y la variación ante fenómenos de inestabilidad dinámica configura una *práctica que se comparte socialmente* y que exige de formas de pensamiento diversas; por un lado, del pensamiento predictivo que sigue una tradición newtoniana y por otro aquel fruto del enfrentamiento con lo errático. Esta hipótesis se desprende de una postura en educación que destaca la importancia educativa de escenarios que actualmente no forman parte de lo escolar; desde la TSME partimos del supuesto que educación no es sinónimo de escolarización, sino sólo un aspecto de ésta sumándonos a la propuesta hecha por Rodríguez y Rosas (2013) sobre promover la indagación de escenarios y actividades más allá de la escuela que sin duda educan y forman a los sujetos. De esta forma, esta propuesta aporta al estudio de procesos que intervienen *en la construcción social de conocimiento matemático,* descentrándose del objeto matemático y asumiendo que sus significados se construyen y reconstruyen en su uso atendido por prácticas que acompañan al objeto en cuestión.

Las prácticas propuestas se perfilan como la configuración de una forma particular de pensamiento que trata con el cambio y la variación y que se encuentra vinculada a los usos que se le da en prácticas predictivas ante lo errático, es decir, la confirmación empírica de lo aquí presentado, dará paso a la caracterización de un *principio*, que hemos comenzando a llamar genéricamente *principio estrella*, articulador de lo que se conoce con lo nuevo y que tiene como base un razonamiento que activa la creación y cambio de hipótesis para elaborar conjeturas cada vez más cercanas a la predicción, esta formas de creación de hipótesis las relacionamos con la forma de *razonamiento abductivo* propuesta por Charles S. Peirce (1878) y que adicionalmente considera el trato con pequeñas variaciones.

La importancia de esta investigación radica en la caracterización de una forma de pensamiento ante lo que varía que hoy está fuera del contexto escolar; se espera que el contraste de las prácticas aquí presentadas con una investigación empírica, es decir, la construcción y aplicación de una situación que presente casos inesperados con estudiantes preuniversitarios dará guía para la creación de ejemplos específicos que permitan su desarrollo en el aula.

Recibido: enero de 2018
Aprobado: febrero de 2018

Bibliografía

Barrow-Green, J. (1997). *Poincaré and the three body problem.* USA: American Mathematical Society.

Blanchard, P., Devaney, R., & Hall, G. (1999). *Ecuaciones diferenciales.* México: Thomson Editores.

Caballero, M. (2012). *Un estudio de las dificultades en el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional en profesores de bachillerato.* Tesis de Maestría. México: CINVESTAV.

Cantoral, R. (1990). *Categorías Relativas a la apropiación de una base de significaciones para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las Funciones Analíticas. Simbiosis y Predación entre las nociones de "el Prædiciere y lo Analítico".* Tesis de Doctorado. México: CINVESTAV.

Cantoral, R. (2001). Sobre la construcción social del conocimiento matemático avanzado. En J. Domínguez, & M. Sierra, *Tendencias actuales de las matemáticas, su história y su enseñanza* (págs. 97-110). Salamanca: Univerisdad de Salamanca.

Cantoral, R. (2016). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento matemático* (Segunda ed.) México: Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G., & Reyes-Gasperini, D. (2015). Análisis del discurso Matemático Escolar en los libros de texto, una mirada desde la Teoría Socioepistemológica. *AIEM- Avances de Investigación en Educación Matemática*(28), 9-28. Recuperado el 13 de enero de 2017 de https://www.google.com.cu/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjk_OylisnZAhWBulMKHfP9DioQFgglMAA&url=https%3A%2F%2Fdialnet.unirioja.es%2Fdescarga%2Farticulo%2F5672145.pdf&usg=AOvVaw310evAWtwv2Fh3Z14VAQmX

Carrasco, E., Díaz, L. & Buendía, G. (2014). Figuración de lo que varía. *Enseñanza de las ciencias, 32*(3), 365-384. Recuperado el 21 de noviembre d 2017 de http://ensciencias.uab.es/article/view/v32-n3-carrasco-diaz-moreno-buendia/pdf-es

Devaney, R. (1992). *A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiments.* USA: Addison-Wesley.

Devaney, R., & Choate, J. (2000). *Chaos: a tool kit of Dynamics Activities.* California: Key Curriculum Press.

Diacu, F., & Holmes, P. (1999). *Celestial Encounters: The Origins of Chaos and Stability.* New Jersey: Princeton Science Lybrary.

Feynman, R. (2008). *La conferencia perdida de Feynman: el movimiento de los planetas alrededor del sol.* Barcelona: TusQuets.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and mathematics: an educational approach.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Ford, J. (1986). Chaos: Solving the Unsolvable, Predicting the Unpredictable. En Barnsley, M. & Demko, S. *Chaotic Dynamics and Fractals.* Orlando Florida: Academic Press.

Ghys, É. (2015). The Butterfly Effect. En Cho, S. J. *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (págs. 19-39). Oxford: Springer.

Gleick, J. (2012). *Chaos.* España: Drakontos.

Guckenheimer, J., & Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.* New York: Springer.

Hale, J., & Kocak, H. (1991). *Dynamics and Bifurcations.* New York: Springer.

López, I. C., & Alatorre, H. (2008). El carácter evolutivo de las prácticas sociales: el caso de la predicción. (P. Lestón, Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*(21), 940-950.

Lorenz, E. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* (20), 130-141. Recuperado el 13 de enero de 2017 de https://journals.ametsoc.org/doi/pdf/10.1175/1520-0469%281963%29020%3C0130%3ADNF%3E2.0.CO%3B2

Lorenz, E. (1993). *The Essence of Chaos.* Uniten States of America: Washington.

Madelbrot, B., & Frame, M. (2002). Some Reason for the Effectiveness of Fractals in Mathematics Education. En su *Fractals, Graphics, & Mathematics Education* (págs. 3- 9). Whashington D.C. : Mathematical Association of America.

May, R. (1974). Biological populations with Nonoverlapping Generations: Stable Points, Stable Cycles, and Chaos. *Science, new series, 186*(4164), 645-647. Recuperado el 13 de enero de 2017 de http://www.pbx-brasil.com/Disciplinas/FisicaContemporanea/Notas/mecanicaClassica/caos/referencias/may1974.pdf

May, R. (1976). Simple Mathematics Models with very complicated Dynamics. *Nature*(261), 459-467. Recuperado el 13 de enero de 2017 de http://abel.harvard.edu/archive/118r_spring_05/docs/may.pdf

Nemirovsky, R. (1993). Studets Making Sense of Chaotic Behavior. *Interactive Learning Enviroments, 3*(3), 151-175. Recuperado el 15 de enero de 2018 de https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/1049482930030301

Newton, I. (1871). *Philophiae Naturalis Principia Mathematica.* (R. MacLehose, Ed.) Glasgow, Reino Unido: James MacLehose.

Peirce, C. S. (1878). Deducción, Inducción e Hipótesis. En Ruiz-Werner, J. M. *Deducción, inducción e hipótesis,* (págs. 65-90). Buenos Aires: Aguilar.

Peitgen, H.-O., Jürgens, H., & Dietmar, S. (1992). *Chaos and Fractals New Frontiers Of Science.* New York: Springer-Verlag.

Peitgen, H.-O., Jürgens, H., & Saupe, D. (1991). *Fractals for the classroom.* California: Springer-Verlag.

Transformación, ISSN: 2077-2955, RNPS: 2098, mayo-agosto 2018, 14 (2), 177-189

Poincaré, H. (1890). Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica, 3*(5), 1-270. Recuperado el 15 de enero de 2018 de http://henripoincarepapers.univ-lorraine.fr/bibliohp/?a=on&jo=Acta+mathematica&action=go

Poincaré, H. (1892). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste.* Paris : Gauthier - Villars et fils, de l'école polytechnique.

Poincaré, H. (2002). *Sur la stabilité du systéme solaire de 1898*. Scientific Opportunism L'Opportunisme scientifique. Publications des Archives Henri-Poincaré (Textes et Travaux, Approches Philosophiques en Logique, Mathématiques et Physique autour de 1900. Recuperado el 15 de enero de 2018 de https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-0348-8112-8

Rodríguez, L. M., & Rosas, P. (2013). *El entramado cognitivo: una propuesta epistemológica para el estudio de la estructuración matemática del mundo*. Recuperado el 15 de enero de 2018 de https://www.researchgate.net/publication/288335574_EL_ENTRAMADO_COGNITIVO_UNA_PROPUESTA_EPISTEMOLOGICA_PARA_EL_ESTUDIO_DE_LA_ESTRUCTURACION_MATEMATICA_DEL_MUNDO

Shuster, H. G. (23 de Agosto de 2005). *Deterministic Chaos: an introduction.* Recuperado el 4 de octubre de 2014 de http://onlinelibrary.wiley.com/book/10.1002/3527604804

Stewart, I. (2001). *¿Juega dios a los dados?* Barcelona: Planeta.

Tabor, M. (1989). *Chaos and integrability in nonlinear dynamics: an introduction.* USA: John Wiley & Sons, Inc.

Wiggins, S. (2003). *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* New York: Springer.