View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Revistas de Investigación UGC (Universidad La Gran Colombia)

SOBRE LA LINEALIZACIÓN DEL ORDEN

Arnold Oostra
Profesor del Departamento de Matemáticas y
Estadística de la Universidad del Tolima.*

RESUMEN

Toda relación de orden está contenida en algún orden lineal sobre el mismo conjunto. Dos pruebas de este hecho conducen a tópicos fundamentales de la lógica clásica.

Palabras clave: Relación de orden; orden lineal; cálculo proposicional clásico; teorema de compacidad; axioma de elección.

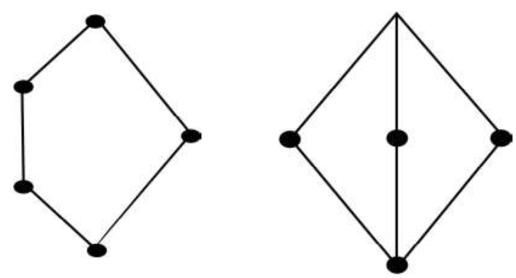
ABSTRACT

Any order relation is contained in some linear order on the same set. Two proofs of this fact lead to basic topics in classical logic.

Key words: Order relation; linear order; classical propositional calculus; compactness theorem; axiom of choice.

* Universidad del Tolima. AA 546 Ibagué, Tolima, COLOMBIA. Correo electrónico: oostra@telecom.com.co.

Cualquier conjunto ordenado puede "linealizarse", esto es, completar la relación a un orden lineal o total. Por ejemplo, el orden usual en los enteros positivos linealiza el orden de la divisibilidad. Por supuesto, no es el único orden lineal que contiene la relación de divisibilidad: otro es el que se obtiene del usual intercambiando el 2 y el 3, y así pueden imaginarse muchos más. El orden del retículo finito denotado N_5 puede linealizarse de tres maneras y el del retículo M_3, de seis.



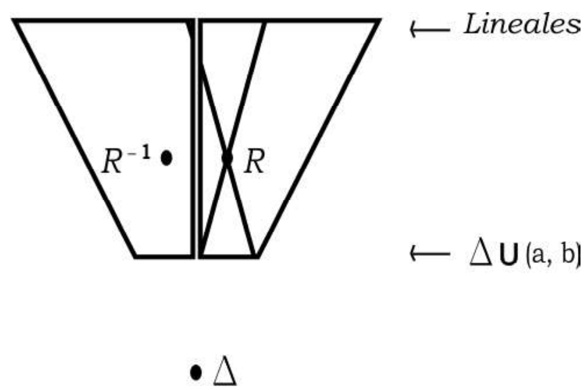
N_5 M_3

A continuación se presenta un enunciado preciso del resultado que se estudia en esta nota. Cabe advertir que las relaciones de orden se consideran como conjuntos de parejas ordenadas: en vez de escribir xRy se escribe $(x, y) \in R$ y las relaciones se comparan entre sí por la contenencia conjuntista.

Teorema (Teorema de Linealización del Orden)

Sea R una relación de orden sobre un conjunto X. Existe una relación de orden lineal T sobre X tal que $R \subseteq T$.

Este es uno de los hechos fundamentales en el estudio del retículo de todos los órdenes posibles sobre un conjunto fijo. En el segundo capítulo de la monografía [7] se llega a la descripción resumida en el diagrama siguiente.



El orden mínimo es el discreto Δ; los órdenes superminimales son los que relacionan sólo una pareja de elementos distintos; los órdenes maximales son los lineales —este último hecho se prueba en el apartado 1.2 abajo—. Cualquier orden no discreto R puede recuperarse por superminimales y por maximales, esto es, R es el extremo superior de los órdenes superminimales que contiene y es el extremo inferior de los órdenes maximales —la intersección de los lineales— que lo contienen.

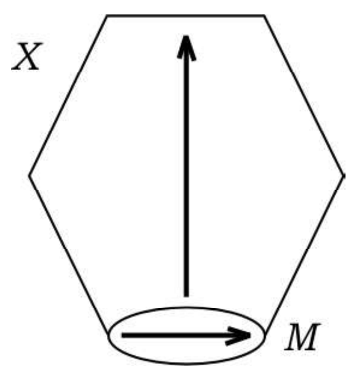
1 PRUEBAS DE LA LINEALIZACIÓN DEL ORDEN

En esta sección se describen tres demostraciones del teorema de linealización del orden. Una se refiere al caso finito, otra es algebraica y no tiene restricciones y la tercera es lógica pero presupone la validez del caso finito.

1.1 EL CASO FINITO

Supóngase primero que el conjunto subyacente X es finito. En principio es posible elaborar un diagrama de Hasse del conjunto ordenado y enumerando los elementos por niveles se obtiene un orden lineal. Esta idea puede precisarse con facilidad mediante el argumento inductivo siguiente.

Si X tiene sólo un elemento, el único orden posible en X es lineal. Supóngase que el teorema es válido para conjuntos ordenados con menos de n elementos y sea (X, R) un conjunto ordenado con n elementos. Puesto que X es finito, este conjunto posee elementos minimales, sea $M = \{ x_1, x_2, \dots x_k \}$ el conjunto de todos los minimales.



Si $X - M$ es vacío, el orden original es discreto y está contenido en cualquier orden lineal que se quiera escoger en $X = M$. En caso contrario, como $X - M$ posee menos de n elementos, por la hipótesis inductiva existe un orden lineal $\check{T}$ sobre $X - M$ que contiene la restricción de R. Ahora se define la relación T sobre X como sigue —véase el diagrama de arriba—.

$\mathbf{(x_i, x_j)} \in T$ si $i = j$,
para cada i, j $(1 \leq i, j \leq k)$;
$\mathbf{(x_i, x)} \in T$, para cada i $(1 \leq i \leq k)$
y cada $x \in X - M$;
$\mathbf{(x, y)} \in T$ si $(x, y) \in \check{T}$,
para cada $x, y \in X - M$.

No es difícil verificar que T es un orden lineal sobre X que contiene a R.

1.2 UNA PRUEBA ALGEBRAICA

Cuando el conjunto X es infinito, el argumento del apartado anterior no puede aplicarse. La prueba que sigue, presentada antes en [7], es válida para un conjunto ordenado arbitrario, finito o infinito.

Dado un conjunto ordenado (X, R), para cada par de elementos $a, b \in X$ se define la relación R_{ab} como sigue.

$$R_{ab} = R \cup \{ (x, y) \mid (x, a) \in R, (b, y) \in R \}$$

Es un ejercicio de rutina probar los siguientes hechos.

- R_{ab} es una relación de orden sobre X siempre que $(b, a) \notin R$.
- R_{ab} contiene a R y a la pareja (a, b).
- Si S es una relación de orden sobre X que contiene a R y a (a, b) entonces S también contiene a R_{ab}.

En pocas palabras, si $(b, a) \notin R$ entonces R_{ab} es la mínima relación de orden sobre X que contiene a R y a la pareja (a, b). En particular, $R_{ab} = R$ si y solo si $(a, b) \in$ R.

Así pues, si el orden R no es lineal existen $a, b \in X$ tales que $(a, b) \notin R$ y $(b, a) \notin R$ luego puede construirse el orden R_{ab} sobre X que contiene estrictamente a R, de manera que R no es maximal en el retículo de relaciones de orden sobre X. Al revés, si R no es maximal sea S un orden que lo contiene estrictamente, esto es, $R \subseteq S$ pero existen $a, b \in X$ tales que $(a, b) \in S$ pero $(a, b) \notin R$. Esto implica $a \neq b$ luego $(b, a) \notin S$ y, puesto que S contiene a R, $(b, a) \notin R$. Así R no es un orden lineal.

Teorema

Una relación de orden sobre X es lineal si y solamente si es maximal en el retículo de las relaciones de orden sobre X, ordenadas por la relación de contenencia.

Si $\{ R_i \}_{i\in I}$ es cualquier cadena de relaciones de orden sobre X, su unión $\cup_{i\in I} R_i$ también es una relación de orden; si todas las R_i contienen a R entonces $\cup_{i\in I} R_i$ también la contiene. Luego el conjunto de relaciones de orden sobre X que contienen a R satisface la hipótesis del Lema de Zorn y posee algún maximal. Este maximal también es un maximal en el retículo de todas las relaciones de orden sobre X, luego es un orden lineal. Así, R está contenida en una relación de orden lineal.

1.3 UNA PRUEBA LÓGICA

En este apartado se presenta un argumento del todo distinto para probar el teorema de linealización del orden, argumento que aparece en el contexto del cálculo proposicional como solución a un ejercicio del libro [1].

Dado el conjunto ordenado (X, R), se considera el siguiente conjunto de variables proposicionales.

$$P = \{ m_{xy} \mid x, y \in X \}$$

Con estas variables se construye el siguiente conjunto de fórmulas.

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{ll} m_{xy} & \text{para cada } (x, y) \in R \\ \neg (m_{xy} \wedge m_{yx}) & \text{para cada } x, y \in X \text{ distintos} \\ (m_{xy} \wedge m_{yz}) \rightarrow m_{xz} & \text{para todo } x, y, z \in X \\ m_{xy} \vee m_{yx} & \text{para cada } x, y \in X \text{ distintos} \end{array} \right\}$$

El segundo renglón expresa la antisimetría, el tercero la transitividad y el último la linealidad. En el cuarto podrían incluirse las fórmulas con $x = y$ pero eso representaría una redundancia porque para cada $x \in X$ se tiene $(x, x) \in R$ luego m_{xx} está en el primer grupo.

Si Σ_0 es un subconjunto finito de Σ, sea

$P_0 = \{ m_{xy} \in P \mid$ en alguna fórmula de Σ_0 aparece la variable $m_{xy} \}$

y sea

$X_0 = \{ x \in X \mid$ en alguna variable de P_0 aparece x como índice $\}$

Siendo Σ_0 finito, X_0 también es finito y, como se probó en el apartado 1.1, existe una relación de orden lineal $\check{T}$ sobre X_0 que contiene la restricción de R a X_0. Se define la función f: $P_0 \longrightarrow \{0,1\}$ como sigue.

$$f(m_{xy}) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \check{T} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Toda función de un conjunto de variables proposicionales en el conjunto {0, 1} puede extenderse de manera natural a cualquier fórmula empleando la estructura usual de álgebra booleana en el conjunto con dos elementos. En particular la extensión $f'\colon \Sigma \longrightarrow \{0, 1\}$ de f satisface $f'(\sigma) = 1$ para toda $\sigma \in \Sigma_0$, porque $\check{T}$ es un orden lineal que contiene la restricción de R luego todas las fórmulas indicadas arriba son "verdaderas".

Ahora basta invocar el siguiente resultado.

Teorema
(Teorema de Compacidad del Cálculo Proposicional)

Sea Σ un conjunto de fórmulas proposicionales cuyas variables pertenecen todas al conjunto P. Si para cada subconjunto finito Σ_0 de Σ existe una función f: { variables proposicionales de Σ_0 } $\longrightarrow$ {0, 1} tal que $f'(\sigma) = 1$ para toda $\sigma \in \Sigma_0$, entonces existe una función $F\colon \mathrm{P} \longrightarrow \{0, 1\}$ tal que $F'(\sigma) = 1$ para toda $\sigma \in \Sigma$.

Volviendo al caso particular, se define la relación T en X como sigue.

$$(x, y) \in T \quad \text{si} \quad F(m_{xy}) = 1$$

Por la elección de las fórmulas de Σ que ahora son "verdaderas" en T, esta es una relación de orden lineal que contiene a R.

2 ACERCA DEL TEOREMA DE COMPACIDAD DEL CÁLCULO PROPOSICIONAL

En esta sección se discute el papel del teorema de compacidad, se da una prueba topológica del mismo y se indaga sobre la relación del teorema de linealización del orden con el axioma de elección.

2.1 RELEVANCIA LÓGICA

El teorema de compacidad ocupa un lugar importante en el cálculo proposicional así como en el contexto más general de la lógica de primer orden. De estas lógicas se tienen en esencia dos presentaciones, designadas a veces con los nombres sintaxis y semántica.

La versión sintáctica del cálculo proposicional se construye alrededor de la relación de deducción formal, denotada $\vdash$. Si Σ es un conjunto de fórmulas proposicionales y σ es una fórmula entonces

$$\Sigma \vdash \varphi$$

significa que existe una sucesión finita de fórmulas $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n = \sigma$ que culmina en ö y cada una de las cuales satisface alguna de las tres condiciones siguientes: (a) $\varphi_i \in \Sigma$; (b) φ_i es un axioma; (c) φ_i se sigue de fórmulas anteriores en la sucesión por una regla. Hay distintos listados de axiomas y reglas para el cálculo proposicional, un sistema de 9 axiomas y 1 regla —*modus ponendo ponens*— puede encontrarse en el excelente texto introductorio [3]. Es claro que $\Sigma \vdash \varphi$ si y sólo si existe algún subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que $\Sigma_0 \vdash \varphi$. Las fórmulas que se deducen sin "premisas", es decir, tales que $\vdash \varphi$, son los llamados teoremas del cálculo proposicional.

La versión semántica del cálculo proposicional gira en torno a la relación de consecuencia tautológica, denotada $\models$. Si de nuevo Σ es un conjunto de fórmulas y ö es una fórmula entonces

$$\Sigma \models \varphi$$

significa que para cualquier función $f: P \longrightarrow \{0, 1\}$ —donde P es un conjunto de variables proposicionales que contiene todas las que aparecen en Σ y en φ—, si $f'(\sigma) = 1$ para cada $\sigma \in \Sigma$ entonces también $f'(\varphi) = 1$. Es claro que si interviene solo una cantidad finita de variables —por ejemplo, si Σ es finito— entonces la relación $\models$ puede decidirse por el algoritmo de las "tablas de verdad". Esto sucede en particular si Σ es vacío, caso en el cual la definición se reduce a: $\models \varphi$ si para cualquier función $f: P \longrightarrow \{0, 1\}$ es $f'(\varphi) = 1$. Estas fórmulas se llaman tautologías del cálculo proposicional.

El teorema central del cálculo proposicional establece la igualdad de las dos relaciones presentadas arriba. La implicación *si* $\Sigma \vdash \varphi$ *entonces* $\Sigma \models \varphi$, conocida como teorema de validez, es comparativamente fácil de demostrar pues basta verificar que cada axioma es una tautología y que las reglas son consecuencias tautológicas. La implicación *si* $\Sigma \models \varphi$ *entonces* $\Sigma \vdash \varphi$, conocida como teorema de completez, de inmediato aparece mucho más difícil porque ¿cómo producir una deducción, o al menos garantizar que existe?

Una bella demostración de que toda tautología del cálculo proposicional es teorema fue presentada por Alfred Tarski en 1935, de hecho esta prueba inició la lógica algebraica moderna [2]. Puesto que la álgebra booleana {0, 1} genera de manera muy precisa todas las álgebras booleanas, no es difícil verificar que las tautologías del cálculo proposicional son las fórmulas que "valen"' 1 al ser "leídas" en cualquier álgebra booleana. Ahora bien, la idea de Tarski consiste en observar que el conjunto de todas las fórmulas en cierto conjunto fijo de variables, partido por la relación de equivalencia de mutua deducción, es una álgebra booleana cuyo máximo es la clase de todos los teoremas —hoy en día esa estructura se conoce con el nombre de *álgebra de Lindenbaum*–. En consecuencia, al "leer" cualquier tautología en esta álgebra ella "vale" 1, lo cual significa que pertenece a la clase de los teoremas.

Con la ayuda del teorema de deducción —*si* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *entonces* $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$— la versión sin premisas del teorema de completez se extiende sin dificultad al caso en el cual el conjunto Σ es finito. El eslabón faltante para asegurar el resultado general puede expresarse como sigue.

Teorema

Si $\Sigma \models \varphi$ *entonces existe un subconjunto finito* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ *tal que* $\Sigma_0 \models \varphi$.

Pero si se mira con cuidado, este enunciado es el mismo teorema de compacidad del cálculo proposicional. En una dirección, si $\Sigma \models \varphi$ entonces no existe ninguna función f: $P \longrightarrow \{0, 1\}$ con $f'(\psi) = 1$ para cada $\psi \in \Sigma \cup \{ \neg\varphi \}$ y por el teorema de compacidad existe algún subconjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ tal que en $\Sigma_0 \cup \{ \neg\varphi \}$ sucede lo mismo, es decir, $\Sigma_0 \models \varphi$. La otra dirección es igual.

De esta manera el teorema de compacidad es un ingrediente fundamental del teorema de completez y en consecuencia del cálculo proposicional. Un desarrollo similar se hace en la lógica de primer orden —también llamada cálculo de predicados— y allí el papel del teorema de compacidad resulta absolutamente esencial. Pues un célebre teorema debido a Lindström asegura que la lógica de primer orden es la única lógica —con determinadas características— donde valen de manera simultánea el teorema de compacidad y los teoremas de Löwenheim y Skolem [5]. De manera que, en cierta medida, el teorema de compacidad caracteriza la lógica de primer orden.

2.2 UNA PRUEBA TOPOLÓGICA

La versión del teorema de compacidad citada en el apartado 1.3 puede demostrarse como sigue.

Partiendo del espacio $\{0, 1\}$ con la topología discreta, se construye el espacio topológico producto $E = \{0, 1\}^P$ Se nota que por el teorema de Tychonoff, E es compacto porque cada factor lo es. Dada ahora una fórmula proposicional φ cuyas variables pertenecen todas a P, sea $V(\varphi)$ el siguiente subconjunto de E.

$$V(\varphi) = \{ f\colon P \longrightarrow \{0, 1\} \mid f'(\varphi) = 1 \}$$

Se observa que para cualquier fórmula proposicional ö con las letras en P, $V(\varphi)$ es un cerrado —y abierto— en E.

En efecto, el valor de $f'(\varphi)$ está determinado por el valor de f en las variables que intervienen en φ. Al considerar cierta asignación de valores de verdad a estas variables, el conjunto de todas las posibles funciones f que extienden esta asignación es un producto con $\{0\}$ o $\{1\}$ en esas —finitas— variables y $\{0, 1\}$ en todas las demás, lo cual es un cerrado abierto de la topología producto. Puesto que solo hay una cantidad finita de posibles asignaciones de verdad a las variables en φ, el conjunto $V(\varphi)$ es una unión finita de cerrados abiertos y por tanto también es cerrado abierto.

Sea ahora $V(\Sigma) = \{ \mathrm{V}(\sigma) \mid \sigma \in \Sigma \}$. Dado un subconjunto finito F de $V(\Sigma)$,

$$\mathrm{F} = \{ V(\sigma_1), V(\sigma_2), \ldots, V(\sigma_n) \},$$

por hipótesis existe una función f: $P_0 \longrightarrow \{0, 1\}$ tal que $f'(\sigma_i) = 1$ para cada i $(1 \leq i \leq n)$, siendo P_0 el conjunto de variables proposicionales que intervienen en $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$. No es difícil extender f a una función g: $P \longrightarrow \{0, 1\}$ tal que $g'(\sigma_i) = 1$ para cada i $(1 \leq i \leq n)$, es decir,

$$g \in V(\sigma_1) \cap V(\sigma_2) \cap \ldots \cap V(\sigma_n) = \cap \mathrm{F}$$

de manera que $\cap \mathrm{F} \neq \varnothing$.

Así $V(\Sigma)$ tiene la "propiedad de las intersecciones finitas" lo cual, siendo este un conjunto de cerrados de un espacio compacto, implica $\cap V(\Sigma) \neq \varnothing$.

Sea pues $F \in \cap V(\Sigma)$, esto significa que $F'(\sigma) = 1$ para toda fórmula $\sigma \in \Sigma$.

2.3 ORDEN, COMPACIDAD Y ELECCIÓN

En ambas pruebas generales del teorema de linealización del orden se empleó una forma del axioma de elección: en el apartado 1.2 se invocó el lema de Zorn, equivalente al axioma de elección [6]; en el apartado 1.3 se usó el teorema de compacidad del cálculo proposicional, cuya prueba presentada en el apartado 2.2 emplea el teorema de Tychonoff, también equivalente al axioma de elección [8].

Sin embargo, el teorema de linealización del orden *no* implica el axioma de elección. Pues en el apartado 1.3 se mostró cómo se deriva del teorema de compacidad del cálculo proposicional, que puede verse como un caso particular del teorema de compacidad de la lógica de primer orden; a su vez esta versión más general del teorema de compacidad es equivalente al principio de existencia de ultrafiltros: *Todo filtro en una álgebra booleana puede extenderse a un ultrafiltro* [1]. Puesto que toda álgebra booleana es subálgebra de una álgebra de subconjuntos, no es difícil convencerse de que el principio de existencia de ultrafiltros también puede formularse como sigue: *Todo filtro sobre un conjunto puede extenderse a un ultrafiltro*.

Ahora bien, se sabe que el principio de existencia de ultrafiltros no implica el axioma de elección [1, 4]. Se plantea entonces la inquietud siguiente.

Pregunta

¿El teorema de linealización del orden implica el principio de existencia de ultrafiltros?

BIBLIOGRAFÍA

[1] BELL, John L. and SLOMSON, Alan B. *Models and Ultraproducts: An Introduction*. Amsterdam: North-Holland, 1971.

[2] BLOK, Willem J. and PIGOZZI, Don. *Algebraizable Logics*. Memoirs of the American Mathematical Society 369. Providence (Rhode Island): American Mathematical Society, 1989.

[3] CAICEDO, Xavier. *Elementos de Lógica y Calculabilidad*. Bogotá: Una Empresa Docente, 1990.

[4] CAICEDO, Xavier y ENCISO, Germán. "El teorema de Hahn-Banach como principio de elección". *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* 28 (106): 11–20, 2004. http://www.accefyn.org.co/PubliAcad/Periodicas/Volumen28/106/11-20.pdf. Consultado el 22 de julio de 2005.

[5] EBBINGAUS, Heinz-Dieter, FLUM, Jörg and THOMAS, Wolfgang. *Mathematical Logic*. Second edition. New York: Springer-Verlag, 1994.

[6] MUÑOZ, José María. *Introducción a la Teoría de Conjuntos*. Cuarta edición. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2002.

[7] OOSTRA, Arnold. *Temas de Conjuntos Ordenados*. X Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 1993.

[8] WILLARD, Stephen. *General Topology*. Reading (Massachusetts): Addison-Wesley, 1970.