

# LA COSMOLOGÍA Y EINSTEIN

ARBOR Ciencia, Pensamiento y Cultura

CLXXXIII 728 noviembre-diciembre (2007) 869-876 ISSN: 0210-1963

Alberto Galindo Tixaire\*

Real Academia de Ciencias  
Departamento de Física Teórica.  
Facultad de Ciencias Físicas.  
Universidad Complutense.  
28040 MADRID. España.

## I. DEL COSMOS ESTOICO AL UNIVERSO EPICÚREO

En la segunda edición de sus PRINCIPIA (Londres 1713), en el Libro III dedicado al Sistema del Mundo, Newton afirma en el Corolario 2 al Teorema XIV que *las estrellas fijas, al estar homogéneamente esparcidas por todas las partes del cielo, cancelan sus acciones mutuas por atracciones opuestas, de acuerdo con la Proposición LXX del Libro I.*<sup>1</sup> La inclusión de ese corolario, que no aparece en la primera edición, es consecuencia de los contactos entre Newton y un joven teólogo, Richard Bentley, que acudió al autor de los Principia en busca de argumentos físicos que apoyaran la existencia de Dios.

Newton escribió cuatro cartas a Bentley, que bien pueden considerarse como la primera aproximación científica al Cosmos. En la primera de ellas, escrita en diciembre de 1692, dice que un universo finito en materia pero infinito en espacio, como sostenían los estoicos, sería inestable, ya que esa materia *would fall down into the middle of the whole space, and there compose one great spherical mass.* Por contra, esto no ocurriría en un universo infinito, lleno de materia, es decir, un cosmos epicúreo: *But if the matter was evenly disposed throughout an infinite space ... some of it would convene into one mass and some into another ... And thus might the sun and the fixt stars be formed.*

Newton, pues, se inclina por un espacio infinito, lleno de materia homogéneamente dispuesta, y cuasi-estático.

## II. CONTRA UN COSMOS "ESTÁTICO"

Graves inconvenientes acechan a la propuesta de los cosmos newtoniano infinito, homogéneo y estático.

1. El más simple de ellos proviene del principio de con-

servación de la energía: ¿Pueden las estrellas lucir eternamente? ¿Acaso existen fuentes inagotables de energía?

2. Imaginemos ahora una cavidad esférica vacía en medio de ese universo. ¿Qué vale el campo gravitatorio en su interior? Su cálculo directo produce divergencias. Si nos olvidamos de estas y lo calculamos mediante sucesivas capas esféricas concéntricas con la cavidad, el resultado es bien conocido: el campo de fuerzas gravitatorias en el interior es nulo. Por tanto al reponer la materia en la cavidad, esa materia estará únicamente sometida a su auto-interacción gravitatoria y, si está inicialmente en reposo, colapsará. Para contrarrestar esto, hay que modificar la ley newtoniana de la gravitación.

Newcomb (1896) propuso una sencilla solución: cambiar el potencial gravitatorio fundamental  $-G_N M/r$  por otro apantallado de la forma  $-G_N M e^{-r\sqrt{\lambda}}/r$ , con  $\lambda > 0$ . De este modo la materia circundante a la cavidad crea en el interior de esta un campo centrífugo de fuerzas que justamente equilibran las interiores que propiciarían el colapso. El cambio sugerido por Newcomb equivale a cambiar la ecuación de Poisson  $\Delta\phi = 4\pi G_N \rho$  por esta otra modificada:<sup>2</sup>

$$\Delta\phi - \lambda\phi = 4\pi G_N \rho. \quad (1)$$

Ahora la nueva ecuación admite la solución constante  $\phi = -4\pi G_N \rho/\lambda$  cuando la densidad de materia  $\rho$  es homogénea, y por tanto es nula la fuerza gravitatoria en cada punto.

3. Finalmente, otra dificultad que asediaba al sistema del mundo de Newton tiene que ver con el hecho patente de la oscuridad nocturna del cielo. Es la llamada paradoja de Olbers (1823), aunque su origen se remonta al siglo XVI (Digges, 1576), y cuenta con nombres, algunos muy notables como Kepler<sup>3</sup> (1610) y Halley (1720), y otros (Chéseaux, 1744).

Al mirar en cualquier dirección en un universo homogéneamente poblado de estrellas, necesariamente

\*Texto base de una conferencia de igual título, pronunciada en la Residencia de Estudiantes el día 2 de junio de 2005, dentro del ciclo "100 Años de las Teorías de Albert Einstein: Presente y Perspectivas de Futuro".

<sup>1</sup> La Proposición LXX es la misma de la primera edición (1687), y dice: *Si hacia cada punto de una superficie esférica tienden fuerzas centrípetas que decrecen con el cuadrado de la distancia a esos puntos, afirmo que un corpúsculo en el interior de esa superficie no será de ningún modo atraído por esas fuerzas.*

<sup>2</sup> La analogía entre este cambio y el que veinte años después sugeriría Einstein con su término cosmológico es patente, como veremos luego.

<sup>3</sup> A Kepler le horrorizaba el infinito epicúreo de Lucrecio, y prefería un universo con un número finito de estrellas y con noches oscuras, a un universo epicúreo en el que el cielo nos cegaría con el mismo resplandor que el Sol.

nuestra visual debe encontrarse con la superficie de alguna de ellas. Suponiendo que en media son estas como nuestro Sol, veríamos por tanto el resplandor de éste en cualquier dirección. Luego el flujo luminoso que incidiría sobre la Tierra equivaldría al procedente de un "sol" que cubriese todo el firmamento, es decir, unas 185,000 veces el flujo de nuestro Sol. Con esto, el agua de los océanos se evaporaría en cuestión de minutos.<sup>4</sup>

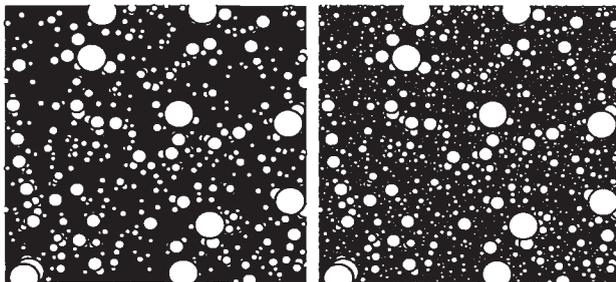


Figura 1 Aspecto del firmamento con cinco (veinte) capas de estrellas.

Es evidente que un universo de edad finita o un universo en expansión suficientemente rápida evita el problema de Olbers: 1/ Si es de edad finita, porque no ha habido tiempo desde la creación del universo de que llegue a nosotros la luz de todas sus estrellas. 2/ Y si se expande muy deprisa, porque el desplazamiento cosmológico al rojo puede debilitar lo suficiente la luminosidad aparente de las fuentes de luz lejanas haciendo que la luminosidad suma de todas sea finita y compatible con la observación de un cielo oscuro.

### III. EL COSMOS DE EINSTEIN

Albert Einstein (AE) propone en 1917 el primer modelo cosmológico relativista.<sup>5</sup> Los físicos todavía creían entonces que el universo a gran escala era isótropo, homogéneo, y estático. Aún no se había descubierto el universo extragaláctico y por tanto tampoco el flujo Hubble global de las galaxias en recesión. Con estas premisas, y bajo el influjo del principio de Mach, AE se ve obligado a retocar levemente sus ecuaciones de campo añadiéndoles un término nuevo, conocido como *término cosmológico*, que simule una repulsión cósmica que impida el colapso gravitacional de su universo finito, y con ellas llega a un sorprendente modelo de universo: finito, sin borde, y estático. Concretamente, el espacio tiempo (ET) de su cosmos es de la forma  $ET = S^3 \times \mathbb{R}$ . Excluye Einstein la infinitud porque con ella no logra imponer condiciones

de contorno sobre el tensor métrico  $g$  a grandes distancias que respeten el principio de Mach, según el cual la inercia de los cuerpos es relativa a otras masas, y debe desaparecer en ausencia de estas.

#### A. Las ecuaciones de Einstein con término cosmológico

Las ecuaciones básicas de AE para el campo gravitatorio son las presentadas el 25 de noviembre de 1915 ante la Academia Prusiana de Ciencias:<sup>6</sup>

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \kappa := 8\pi G_N/c^4, \quad (2)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein, definido a través del tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$  y de la curvatura escalar  $R$  para la métrica  $g$  y a la conexión de Levi-Civita asociada;  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía-tensiones. En adelante, para simplificar las expresiones, usaremos unidades geometrizadas o de Planck:  $G_N = \hbar = c = k_B = 1$ ; en ellas  $\kappa = 8\pi$ .

Para ETs homogéneos e isotropos, la métrica puede escribirse localmente en la siguiente forma (Robertson, Walker 1935):

$$\begin{aligned} ds^2 &= \\ &= dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (3) \\ &= dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + s^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \end{aligned}$$

donde la longitud  $a(t) > 0$  es el *factor de escala* del universo), y  $k$  es un *índice de curvatura* con valores  $k = -1, 0, +1$ . Las hipersuperficies de simultaneidad cósmica  $t = \text{const.}$  son de curvatura (espacial) constante  $k/a^2$ . La variable  $r$  tiene como recorrido  $0 \rightarrow 1 \rightarrow 0$  si  $k = +1$ , y  $[0, \infty)$  en los otros dos casos. Las variables  $r$  y  $\chi$  están relacionadas por  $r = s(\chi)$ , y  $s = \text{sh, id, sen}$  según que  $k = -1, 0, +1$ .

Asimismo, de la homogeneidad e isotropía del universo a gran escala se infiere que la materia/energía del universo es como la de un fluido perfecto:

$$T_{\mu\nu} = -p(t)g_{\mu\nu} + [\rho(t) + p(t)]u_\mu u_\nu, \quad (4)$$

donde  $\rho(t)$  es la densidad propia de energía de ese fluido,  $p(t)$  su presión, y  $u = \partial_t$  es la cuadrivelocidad del fluido galáctico medio.

Bajo estas condiciones, las ecuaciones (2) equivalen a

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= \frac{1}{3}8\pi\rho a^2 - k, \\ \ddot{a} &= -\frac{1}{3}4\pi(\rho + 3p)a, \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $\dot{a} := \partial_t a$ ,  $\ddot{a} := \partial_t^2 a$ .

<sup>4</sup> E. Harrison, *COSMOLOGY*, Cambridge 2000.

<sup>5</sup> A. Einstein, *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitzungsberichte der Preussischen Akad. d. Wissenschaften, 1917.

<sup>6</sup> A. Einstein, *Die Feldgleichungen der Gravitation*. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber. 2, (1915) 844-847.

Por tanto, si el universo es de tipo polvo, es decir, de materia en reposo (esto es,  $\rho(t) > 0, p(t) = 0$ ), la segunda de las ecuaciones anteriores impide que sea estático.

La segunda ecuación en (5) indica que, siempre que el fluido medio de materia/energía del universo satisfaga la llamada *condición fuerte sobre la energía* ( $\rho(t) + p(t) \geq 0, \rho(t) + 3p(t) \geq 0$ ), el factor de escala será una función cóncava de  $t$ . Esta condición la cumple evidentemente la materia ordinaria, tanto no relativista (NR) como extremadamente relativista (ER), y en particular, la radiación electromagnética (EM).

Con el fin de salvar la presunta inmutabilidad de los cielos a gran escala, Einstein retoca sus ecuaciones, reemplazándolas por

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (6)$$

donde  $\Lambda$  es una constante positiva, responsable de una repulsión cósmica que garantice la estabilidad.

En el límite de campos gravitatorios débiles y estáticos, (6) implica

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) + \Lambda \approx 4\pi(\rho(\mathbf{r}) + 3p(\mathbf{r})), \quad (7)$$

donde  $\phi \approx \frac{1}{2}(g_{tt} - 1)$ . La similitud de (6,7) con (1) es notoria.

Las ecuaciones (5) pasan a ser

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= \frac{1}{3}8\pi\rho a^2 + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k, \\ \ddot{a} &= -\frac{1}{3}4\pi(\rho + 3p)a + \frac{1}{3}\Lambda a, \end{aligned} \quad (8)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \dot{a}^2 &= \frac{1}{3}8\pi\rho a^2 + \frac{1}{3}\Lambda a^2 - k, \\ \frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{d}{dt}a^3 &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

siendo la segunda en (9) una expresión de la ley de continuidad covariante del tensor fuente (4).

La aparición de la presión como fuente de gravitación en (7) y de curvatura en (8) es un distintivo de la gravitación einsteiniana.

### B. El universo "cilíndrico" de Einstein

La presencia de  $\Lambda$  en (8,9) permite obtener una solución estática, siempre que los parámetros satisfagan

$$k = 4\pi a^2(\rho + p), \quad \Lambda = 4\pi(\rho + 3p). \quad (10)$$

Con materia ordinaria y/o radiación esto exige que  $k$  sea positivo (y por tanto  $k = +1$ ), por lo que llegamos a la solución propuesta por Einstein: un universo estático con secciones espaciales de curvatura positiva y constante  $1/a^2$ , con constante cosmológica  $\Lambda > 0$ , y una densidad y presión constantes<sup>7</sup> tales que

$$\rho + p = 1/4\pi a^2, \quad \rho + 3p = \Lambda/4\pi. \quad (11)$$

<sup>7</sup> AE consideró solo el caso  $p = 0$ .

Las variedades 3D riemannianas geodésicamente completas, simétricas, y de curvatura positiva y constante, son la esfera  $S^3$  (simplemente conexa, y elección de Einstein) y el espacio proyectivo real  $\mathbb{P}^3 := S^3/\mathbb{Z}_2$ .<sup>8</sup>

En carta a Besso ese mismo año 1917 AE estima para  $a$ , a partir datos astronómicos, un valor de  $10^7$  años luz,<sup>9</sup> y atribuye  $10^4$  al tamaño visible del universo. También ese mismo año Freundlich y Klein, independientemente, le indican a Einstein que el universo también podría ser "elíptico (esto es, esférico con antípodas identificados, o si se prefiere, el espacio real proyectivo 3D  $\mathbb{P}^3$ ) en lugar de "esférico ( $S^3$ ); AE acepta la afirmación, y les replica que la relación entre densidad y radio sería la misma.

El universo de AE es por tanto cilíndrico, de la forma  $ET = S^3 \times \mathbb{R}$ . Sus secciones de simultaneidad son esferas  $S^3$ , y por tanto un rayo de luz que parta de un punto cualquiera podrá volver, si no tropieza con nada, al mismo (aunque en otro instante de tiempo cósmico) tras recorrer un círculo máximo. El tiempo de circunvalación es

$$\tau_{\text{circ}} = 2\pi a = \sqrt{\pi/\rho} \approx 2(\rho/g \text{ cm}^{-3})^{-1/2} \text{ horas.} \quad (12)$$

Tomando, para ilustración, una densidad como la actual de materia NR del Universo ( $\rho \approx 2.6 \times 10^{-30} \text{ g/cm}^3$ ), obtendríamos  $a \approx 6.5 \text{ Gpc}$ ,  $\Lambda \approx 43 \text{ Gpc}^{-2}$ ,  $\tau_{\text{circ}} \approx 13 \text{ Ga}$ .<sup>10</sup>

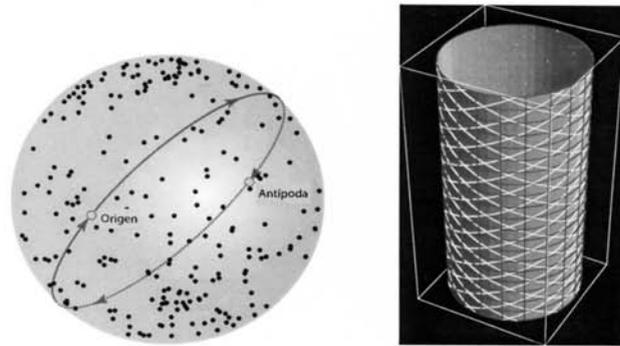


Figura 2 Espacio del modelo de Einstein (con una dimensión menos), con un círculo máximo pasando por puntos antípodas. A la derecha, universo cilíndrico. Cada punto es una  $S^2$ . El tiempo fluye verticalmente. Las líneas rojas son líneas de universo de los observadores fundamentales (polvo en reposo), las azules son secciones de tiempo constante, y las líneas blancas forman los dos sistemas de rayos de luz.

El universo de Einstein es un cosmos ¡con materia sin movimiento!. En 1930 Eddington demostró que el ET de

<sup>8</sup>  $\mathbb{P}^3$ , por ser de dimensión impar, es orientable, por lo que la paridad es globalmente definible en él.

<sup>9</sup> Usaremos el acrónimo "a" para indicar año, y "al" para año luz.

<sup>10</sup> Notación: a = año, Ga :=  $10^9$  a.

AE era inestable bajo perturbaciones pequeñas y arbitrarias de su radio de curvatura. La razón es clara: si en un momento determinado disminuyera  $a$ , la densidad  $\rho$  aumentaría; como  $\Lambda$  es una constante, dejaría de contrarrestar el exceso subsiguiente de atracción gravitacional, y el colapso sería irremediable. Al revés si  $a$  aumentase; el universo entonces se expandiría indefinidamente.

#### IV. OTROS MODELOS COSMOLÓGICOS

En el mismo año 1917 el astrónomo holandés Wilhelm de Sitter propuso un modelo de cosmos sin materia, estático, y con constante cosmológica repulsiva  $\Lambda > 0$ . Fué muy criticado por Einstein, para quien no tenía sentido un mundo sin materia. Se trata de un espaciotiempo geodésicamente incompleto. Pero un afortunado cambio de variables lo transforma en parte de un espaciotiempo dinámico: el ET “hiperbólico” de de Sitter, difeomorfo a  $S^3 \times \mathbb{R}$ , y por tanto al ET de Einstein, y de curvatura espaciotemporal constante y positiva. Tal ET “hiperbólico” es un universo en contracción seguida de expansión (¡movimiento sin materia!), y su ritmo de expansión es proporcional a la distancia (Weyl 1923). Presenta un grupo maximal de isometrías  $SO(4,1)$ , bajo el cual es transitivo, con lo que todos sus sucesos son físicamente equivalentes.

##### A. Universo de Einstein-De Sitter

Descubierta por Hubble la expansión del Universo en 1929, AE renuncia a la estaticidad. Ya no necesita, por tanto, del término cosmológico, y, con de Sitter, propone en 1932 el modelo más simple de universo en expansión:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 [dr^2 + r^2 d\Omega^2], \quad (13)$$

$$a(t) = a_0(t/t_0)^{2/3}.$$

Corresponde a un cosmos sin constante cosmológica y con materia NR, de densidad  $\rho(t) := 1/6\pi t^2$ . Topológicamente:  $ET = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$ .

Está en expansión indefinida y crítica, pues su densidad satisface

$$\rho(t) = \rho_c(t) := 3H^2(t)/8\pi, \quad (14)$$

donde  $H(t) := \dot{a}(t)/a(t) = 2/3t$  es el parámetro de Hubble que mide el ritmo relativo de expansión, y  $\rho_c(t)$  es la llamada densidad crítica en el instante  $t$ . Análogamente, su parámetro de desaceleración o parámetro de Sandage es muy simple:

$$q(t) := -a(t)\ddot{a}(t)/\dot{a}(t)^2 = \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Las secciones de simultaneidad cósmica son planas. Finalmente, la curvatura de este espacio-tiempo es  $K(t) = 1/9t^2$ .

##### B. Expansión del espacio y su dinámica

- Aleksandr Friedmann 1921: Sin el prejuicio de la estaticidad, es el primero en obtener de la RG las ecuaciones para el factor de escala del universo, supuesto este isótropo y homogéneo, con materia, y sin constante cosmológica. Considera espacios tanto de curvatura positiva como negativa.
- Georges Lemaître 1927, “padre de la cosmología del BB”: reobtiene los resultados de Friedman, e incluye la constante cosmológica en su análisis.
- H.P. Robertson, A.G. Walker 1935: prueban independientemente que la geometría utilizada por Friedmann y Lemaître es la más general para universos homogéneos e isótropos.

##### 1. Ecuaciones de Friedmann-Lemaître

Sea la métrica de Robertson-Walker

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$$

$$= dt^2 - a(t)^2 [d\chi^2 + s_k^2(\chi)(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2)], \quad (16)$$

donde  $s_k = \text{sh}, \text{id}, \text{sen}$ , según que el índice de curvatura  $k = -1, 0, +1$ .

Las supuestas isotropía y homogeneidad llevan a esta forma general para el tensor fuente de energías-tensiones:<sup>11</sup>

$$T = [\rho(t) + p(t)]dt \otimes dt - p(t)g. \quad (17)$$

Las ecuaciones (6) de Einstein llevan a las siguientes ecuaciones llamadas de Friedmann-Lemaître:

$$\dot{a}^2/a^2 = \frac{1}{3}8\pi\rho + \frac{1}{3}\Lambda - k/a^2, \quad (18)$$

$$\ddot{a}/a = -\frac{1}{3}4\pi(\rho + 3p) + \frac{1}{3}\Lambda,$$

o equivalentemente

$$\dot{a}^2/a^2 = \frac{1}{3}8\pi\rho + \frac{1}{3}\Lambda - k/a^2, \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) + p \frac{d}{dt}a^3 = 0.$$

Su integración requiere el conocimiento de la ecuación de estado  $p = P(\rho)$ . Estas son algunas ecuaciones de estado importantes:

- Polvo o materia no relativista (NR) (tanto bariónica como exótica):  $p = 0$ .
- Radiación o materia extremadamente relativista (ER):  $p = \rho/3$ .
- Energía de vacío (energía oscura):  $p = -\rho$ .
- Energía fantasma:  $p = w\rho, w < -1$ .

<sup>11</sup> Se conoce también esta expresión como postulado o forma de Weyl.

**C. Modelo del estado estacionario**

El principio cosmológico (PC, Milne 1935) afirma que todos los observadores fundamentales (aquellos que “cabalgan” sobre el fluido galáctico medio) ven la misma cosmohistoria. En breve, afirma la irrelevancia cosmológica de la “geografía”. Si este PC se refuerza, negando asimismo la relevancia cosmológica de la “historia”, resulta el principio cosmológico perfecto (PCP), base del modelo del estado estacionario (1948) de Bondi y Gold, y de Hoyle: según este modelo, el Universo a gran escala ha sido siempre el mismo, y por tanto, sus parámetros cosmológicos son constantes en el tiempo. Favorito en la década de los 50, por hacer innecesaria la cosmogénesis, se vería obligado a desaparecer como modelo realista de nuestro Universo tras el descubrimiento del fondo cósmico de microondas (FCM).

La métrica de este modelo es

$$ds^2 = dt^2 - a_0^2 e^{2t/a_0} [d\chi^2 + \chi^2 d\Omega^2] \quad (20)$$

donde  $a_0 > 0$ . Nótese que las superficies de simultaneidad son métricamente planas: el índice de curvatura  $k = 0$ . Topológicamente  $ET = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ .

Estas son sus características:

- Su factor de escala se expande exponencialmente:  $a(t) = a_0 e^{t/a_0}$ , pero a ritmo relativo constante  $H = 1/a_0$ .
- Índice de curvatura deber ser nulo  $k = 0$  (para que la curvatura espacial  $k/a^2(t)$  sea constante en el tiempo).
- El parámetro de desaceleración es también constante:  $q = -1$ . Su valor negativo indica una expansión acelerada ( $\ddot{a}(t) > 0$ ).
- Para el substrato hay dos opciones destacadas:
  - 1/ Vacío con constante cosmológica  $\Lambda = 3/a_0^2$ .
  - 2/ Materia NR más un proceso de creación continua (campo escalar  $C$  de Hoyle-Narlikar (1963), de densidad de energía negativa):

$$T = T_{\text{materia}} + T_{\text{creación}}, \quad (21)$$

de modo que  $T = \Lambda g$ .

**D. Universo de Gödel**

Con motivo del 70 cumpleaños de AE, Gödel<sup>12</sup> presentó un modelo cosmológico homogéneo, anisótropo, estacionario y rotante. El universo de Gödel carece de tiempo cósmico, y es famoso por ser el primero en el que aparecen curvas de género tiempo cerradas (CTCs). Para

hacer posible estas características, Gödel llena su universo de materia NR con densidad constante, y le añade una constante cosmológica atractiva.

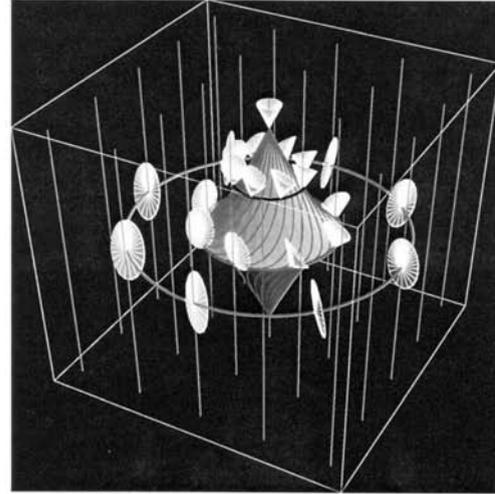


Figura 3 Universo de Gödel.

Este es su métrica, en coordenadas convenientes:

$$ds^2 = 4a^2 [dt^2 - dr^2 - dz^2 + (\text{sh}^4 r - \text{sh}^2 r) d\phi^2 + 2\sqrt{2} \text{sh}^2 r d\phi dt]. \quad (22)$$

La densidad viene dada por  $1/a^2 = 8\pi G_N \rho$ , y la constante cosmológica vale  $\Lambda = -1/2a^2 = -4\pi G_N \rho$ . Este universo rota, con  $\omega = \sqrt{-\Lambda}$ .

En este modelo las líneas de universo de los observadores fundamentales son abiertas. Para  $R > \log(1 + \sqrt{2})$ , y por tanto  $\text{sh}^4 R > \text{sh}^2 R$ , el círculo  $r = R, z = 0, t = 0$  es de género tiempo. No es difícil ver que dados dos instantes  $A$  y  $B$  de un observador fundamental, con  $A$  anterior a  $B$  en la trayectoria fundamental, es posible hallar una trayectoria continua de género tiempo que parta de  $B$  orientada hacia el futuro de  $B$  y llegue hasta  $A$ . Einstein reconocía que esta posibilidad *disturbed me already at the time of the building up of the general theory of relativity, without my having succeeded in clarifying it. It will be interesting to weigh whether these [cosmological solutions] are not to be excluded on physical grounds.*<sup>13</sup>

**V. AE Y LA CONSTANTE COSMOLÓGICA**

- 1917. La introduce AE en su primer trabajo sobre cosmología. La llama “constante universal”.

<sup>12</sup> Gödel, K. 1949. *An example of a new type of cosmological solution of Einstein's field equations of gravitation*. Rev. Mod. Phys. 21 447-450.

<sup>13</sup> A. Einstein, en ALBERT EINSTEIN: PHILOSOPHERSCIENTIST, Vol. II, pp 687-688, P. Schilpp, ed. (Harper, New York, 1958).

- 1919. Para el campo electromagnético, la traza  $T = 0$ , y por tanto  $R = 4\Lambda$ . AE piensa que esto indica una conexión entre el electromagnetismo y la gravitación (primer idea de unificación).
- 1923. AE, al conocer por Weyl y Eddington que en el modelo de De Sitter las partículas prueba se alejan entre sí escribe a Weyl: “Si no hay un universo cuasiestático, entonces fuera con el término cosmológico”.
- 1931. Los resultados de Friedmann, y de Hubble, hacen que AE abandone el término cosmológico, “que es, en cualquier caso, insatisfactorio”.
- 1932. Aparece el nombre de constante cosmológica en su trabajo con de Sitter.
- 1954. En carta a Pirani: *Von dem Machschen Prinzip sollten man eigentlich überhaupt nicht mehr sprechen*.

## VI. REGRESO DE LA CONSTANTE COSMOLÓGICA

Parece ser una ironía del destino que para explicar de modo elemental la aceleración en la expansión del Universo observada por primera vez en 1998 a través del brillo de varias decenas de supernovas de tipo Ia, se haya reintroducido en la cosmología una energía de vacío o constante cosmológica, con densidad equivalente de energía

$$\begin{aligned} \rho_{\text{vac}} &= 0.73 \rho_{c,0} = 0.7 \times 10^{-29} \text{ g/cm}^3 \\ &= 0.73 h^2 (3.000 \text{ meV})^4 \end{aligned} \quad (23)$$

donde  $\rho_{c,0}$  es la densidad crítica, y  $h$  el factor de “ignorancia” en el parámetro actual de Hubble:  $H_0 = 100 h$  km/s/Mpc. Hoy se acepta el valor extraído de los datos de la sonda WMPA:  $h = 0.71^{+4}_{-3}$ .

### A. Estimaciones y cotas sobre la constante cosmológica

- La constante cosmológica puede proceder de diversas fuentes.<sup>14</sup> Aparte de una posible constante desnuda  $\Lambda_0$ , se espera que cada grado de libertad interno de un campo cuántico arbitrario contribuya a la densidad de energía del vacío estimable en

$$\rho_{\text{vac}} \sim E_{\text{máx}}^4, \quad (24)$$

donde  $E_{\text{máx}}$  es un corte ultravioleta que indica hasta qué energías pensamos que nuestra descripción del microcosmos es correcta. Generalmente se toma  $E_{\text{máx}} \sim M_{\text{Planck}}$ , pero podría ser menor.

<sup>14</sup> S.M. Carroll, *The Cosmological Constant*, astro-ph/0004075. También en [www.livingreviews.org](http://www.livingreviews.org), 2001.

Además puede haber también posibles contribuciones a través de los saltos de energía potencial entre los vacíos de las fases de simetría no rota y rota en las diversas transiciones de fase que tuvieron lugar al irse enfriando el Universo en su expansión. Tales sumandos son también de la forma anterior, sustituyendo  $E_{\text{máx}}$  por la energía  $E_{\text{fase}}$  a la que tuvo lugar la rotura espontánea de la simetría correspondiente. Por ejemplo, para la rotura electrodébil  $E_{\text{ED}} \sim M_Z$ .

Luego, formalmente, uno esperaría

$$\rho_{\text{vac}} \sim \rho_{\Lambda_0} \uplus M_{\text{Planck}}^4 \uplus \sum_j M_{\text{fase}_j}^4. \quad (25)$$

donde por  $\uplus$  entendemos que en la suma puede ser coeficientes negativos que favorezcan cancelaciones.

- Límite superior impuesto por consideraciones de nuestro Sistema Solar:

$$\frac{\Delta T(r)}{T(r)} \approx \frac{\rho_{\text{vac}}}{\bar{\rho}_{\odot}(r)} \quad (26)$$

donde  $T(r)$  es el período de giro en torno al Sol a distancia  $r$  del mismo, y  $\bar{\rho}_{\odot}(r)$  la densidad resultante de difuminar la masa del Sol homogéneamente por toda la bola de radio  $r$ .<sup>15</sup> Datos sobre la distancia Sol-Neptuno independientes de la 3ª ley de Kepler, obtenidos por el Voyager, implican

$$\Delta T(r_{\text{Neptuno}})/T(r_{\text{Neptuno}}) = (1 \pm 1) \times 10^{-6} \quad (27)$$

y de aquí

$$\rho_{\text{vac}} < 2 \times 10^{-17} \text{ g/cm}^3 \sim (3 \text{ eV})^4. \quad (28)$$

- Cota superior suministrada por los datos sobre avances de perihelio. La energía del vacío produce un avance del perihelio por órbita dado por

$$\Delta_{\text{vac}} \phi \approx \pi \frac{\Lambda}{M_{\odot}} L^3 = 6\pi \frac{\rho_{\text{vac}}}{\bar{\rho}_{\odot}(L)} \quad (29)$$

donde:  $M_{\odot}$  es la masa del Sol,  $L = a(1 - \varepsilon^2)$  es el *semilatus rectum* de la órbita,  $a$  el semieje de esta, y  $\varepsilon$  su excentricidad.<sup>16,17</sup>

<sup>15</sup> Simple consecuencia de la ley 1-2-3 y de tener en cuenta que la constante cosmológica actúa como una densidad efectiva  $\rho_{\text{vac}} + 3p_{\text{vac}} = -2\rho_{\text{vac}}$  que se añade a  $\bar{\rho}_{\odot}(r)$ .

<sup>16</sup> E. L. Wright, *Interplanetary Measures Can Not Bound the Cosmological Constant*, Report No. UCLA-ASTRO-ELW-98-01, arXiv:astro-ph/9805292 v1.

<sup>17</sup> T. Wickramasinghe, *Perihelion Advance of Mercury and the Cosmological Constant*, 1998, International Symposium on Astrophysics Research and Science Education, Vatican Observatory Foundation, Ed: C. Impey, pp. 312-315 (1999).

En consecuencia,

$$\frac{\Delta_{\text{vac}}\phi}{\Delta_{\text{R.G.}}\phi} \approx 2 \frac{\rho_{\text{vac}}}{\bar{\rho}_{\text{O}}(L)} \frac{L}{R_{\text{O,S}}}, \quad (30)$$

donde  $\Delta_{\text{R.G.}}\phi = 3\pi R_{\text{O,S}}/L$  es el resultado clásico de Einstein para el avance por órbita en ausencia de constante cosmológica, siendo  $R_{\text{O,S}} := 2M_{\text{O}}$  el radio de Schwarzschild para el Sol.

Como la precisión con que se conoce el avance del perihelio de Mercurio es de 0."1 por siglo, esto es, un error relativo de  $2 \times 10^{-3}$ , podemos imponer para este planeta que

$$\Delta_{\text{vac}}\phi \lesssim 2 \times 10^{-3} \Delta_{\text{R.G.}}\phi \quad (31)$$

de donde resulta

$$\rho_{\text{vac}} < 2 \times 10^{-16} \text{ g/cm}^3 \sim (5 \text{ eV})^4, \quad (32)$$

que es una cota más débil que la anterior. Pero el efecto de la constante cosmológica sobre el perihelio aumenta con el tamaño de la órbita, y de los datos sobre Marte se infiere el siguiente límite:

$$\rho_{\text{vac}} < 2 \times 10^{-19} \text{ g/cm}^3 \sim (1 \text{ eV})^4. \quad (33)$$

- Límite superior extraído de consideraciones sobre nuestra Galaxia. De

$$\frac{\Delta T(r)}{T(r)} = \frac{\rho_{\text{vac}}}{\bar{\rho}_{\text{Gx}}(r)} \quad (34)$$

donde ahora  $T(r)$  es el periodo del Sol a distancia  $r$  del centro de la Galaxia, y  $\bar{\rho}_{\text{Gx}}(r)$  la densidad que habría en ese punto si la masa del bulbo galáctico estuviera difuminada por toda la bola de radio  $r$ . Imponiendo  $\Delta T(r) < T(r)$  como condición para que el Sol siga girando en torno al núcleo galáctico, obtenemos

$$\rho_{\text{vac}} < 3 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3 \sim (0.06 \text{ eV})^4, \quad (35)$$

estimando  $\bar{\rho}_{\text{Gx}}(r)$  a través de la velocidad orbital del Sol (220 km/s) en torno al núcleo galáctico y la distancia (8.5 kpc) al mismo.

Vemos, por tanto, que las cotas van mejorando a medida que aumenta la escala, y que en cualquier caso siguen estando muy alejadas del valor (23) que proporciona el Universo como un todo.

## B. El problema de la constante cosmológica

Los datos anteriores (23) indican que

$$\rho_{\text{vac}} = (2.34 \text{ meV})^4. \quad (36)$$

Por tanto

$$\rho_{\text{vac}}/M_{\text{Planck}}^4 \sim 10^{-123}, \quad \rho_{\text{vac}}/M_{\text{Z}}^4 \sim 10^{-55}. \quad (37)$$

Luego el valor presente de la energía de vacío es una fracción espectacularmente pequeña de algunos de los términos en (25) de los que algo puede decir la física actual, y que cabría esperar a través de las fluctuaciones cuánticas del vacío, tomando la masa de Planck como corte último de las energías, y de las transiciones de fase como la electrodébil.<sup>18</sup>

Una explicación convincente de esta impresionante pequeñez de  $\Lambda$  comparada con sus valores naturales, y que parece exigir una sutil y precisa cancelación entre los distintos sumandos de (25), sigue eludiendo a los físicos. Como dice Weinberg, estamos ante *the worst failure of an order-of-magnitude estimate in the history of science*.

## VII. LA NUEVA COSMOLOGÍA

En la actualidad describimos el Universo con un modelo cosmológico adaptado a los valores de los parámetros cosmológicos extraídos de las modernas observaciones de la expansión acelerada del Universo, de las anisotropías del fondo cósmico de microondas, y de la estructuración a gran escala. Para resolver ciertos problemas (horizontes, planitud, ausencia de reliquias pesadas, ...) y explicar la formación primigenia de las semillas de las grandes estructuras astrofísicas, se acude a la idea de una fase inflacionaria cuando el Universo acababa de salir de su fase cuántica. Con todos estos ingredientes se confecciona un sencillo modelo de concordancia que, asombrosamente, acomoda las observaciones conocidas y nos permite hilvanar un relato consistente del Cosmos desde la Gran Explosión.<sup>19</sup>

La fuente que mueve este Universo tiene varios componentes, que se describen como fluidos perfectos: materia no relativista (luminosa, bariónica), y energía (electromagnética, oscura). Los valores actuales  $\Omega_{X,0} := \rho_{X,0}/\rho_{c,0}$  de sus densidades referidas a la densidad crítica en el momento actual  $\rho_{c,0} := 3H_0^2/8\pi$ , y el valor total  $\Omega_0 := \rho_0/\rho_{c,0}$ , refinados por el análisis de datos suministrados por la sonda WMAP y otras sondas, así como por el estudio de la estructuración a gran escala, son:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{um},0} &= 0.004 \pm 0.0015, \\ \Omega_{\text{B},0} &= 0.044 \pm 0.004, \\ \Omega_{\text{M},0} &= 0.27 \pm 0.04, \\ \Omega_{\gamma,0} &\approx (4.9 \pm 0.5) \times 10^{-5}, \\ \Omega_{\text{osc},0} &= 0.73 \pm 0.04, \\ \Omega_0 &= 1.02 \pm 0.02. \end{aligned} \quad (38)$$

<sup>18</sup> En comparación, la densidad de vacío (campo inflatónico) en la inflación fue del orden de  $(10^{14} \text{ GeV})^4$ , valor éste que frente al natural de Planck es  $(10^{14}/10^{19})^4 \sim 10^{-20}$ .

<sup>19</sup> Ver, por ejemplo, A. Galindo, *La Nueva Cosmología*, Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Vol. 99, no. 1, 113-159, año 2005, V Programa de la Cultura Científica y Tecnológica, y referencias allí incluidas.

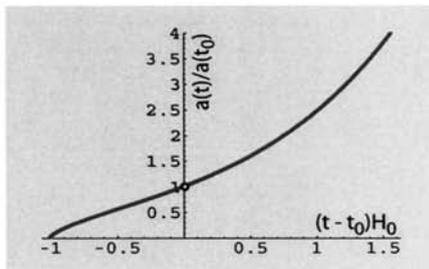


Figura 4 Factor de escala  $a(t)$  para los datos arriba señalados.

Con los parámetros cosmológicos  $\Omega_{M,0}, \Omega_{\gamma,0}, \Omega_{osc,0}, \Omega_0$ , y la dinámica dada por las ecuaciones de Friedmann-Lemaître (8), podemos estudiar fácilmente la evolución del factor de escala  $a(t)$ , suponiendo que la energía oscura es de tipo vacío,<sup>20</sup> asociada a una constante cosmológica  $\Lambda$  ( $\Omega_{osc,0} = \Omega_{\Lambda,0}$ ), y que no hay trasvase apreciable de energía entre los dos fluidos (materia y energía oscura). Resulta así la Fig. 4, en la que el origen de abscisas indica el instante actual. Sin embargo, no sabemos cuál será su tendencia a tiempos muy grandes, pues desconocemos el comportamiento futuro de la energía oscura.

Los nuevos cosmólogos, que tantos éxitos han cosechado en las últimas décadas, se enfrentan a grandes retos, como, por ejemplo:

- Averiguar la naturaleza de la materia oscura.
- Explicar porqué la densidad de energía oscura es del mismo orden de magnitud que la densidad actual de materia oscura, o si se prefiere, descifrar el valor de la constante cosmológica.
- Encontrar *el* modelo de inflación entre los posibles.
- Determinar la topología global de las secciones espaciales.
- “Penetrar” en la fase de Planck, y dar cuenta de la posterior emergencia del espacio y del tiempo.
- ...

En esta apasionante aventura la figura de Einstein estará siempre presente, no solo por habernos dejado su lección maravillosa de cómo se dinamiza la geometría del Universo, sino también por habernos mostrado que tras los grandes problemas se esconde siempre un tesoro insospechado al alcance de los espíritus más imaginativos.

<sup>20</sup> Sólo se sabe, por el momento, que para la energía oscura el factor de proporcionalidad  $w$  entre la presión y la densidad satisface  $w < -0.76$ . Para nuestra discusión, tomaremos el valor favorito  $w = -1$ .