

小澤の不等式の光子箱の思考実験への適用

小 杉 誠 司

(2006年9月21日受理)

要 約

光子箱の思考実験を、Heisenbergの不確定性関係を拡張した小澤の不等式に適用した細谷と石井の考察を検討した。彼らの設定では Δmc^2 は出ていった光子のエネルギーであって、エネルギーの不確定さではない。従って $\Delta m \rightarrow 0$ としても、光子のエネルギーを正確に測定したことになっていない。また彼らの設定では T はシャッターが開いている時間であり、 ΔT はその T に対する不確定さになっている。従って $\Delta T \rightarrow 0$ としても $T \rightarrow 0$ とはならないので、光子の発射時刻を正確に測定したことにはならない。バネの伸びから箱の静止質量を測定する際の精度 Δm が $k\sigma_q/g$ であることに気がつけば、Bohrの議論で曖昧であった点が明瞭になる。箱をつりあいの状態にするのに要する時間 T を充分大きくしたとき、 Δm を決定しているのは T ではなくバネ定数 k である。

キーワード 光子箱、不確定性原理、小澤の不等式、Bohr (ボーア)、運動量の擾乱

1 はじめに

1926年に量子力学の数学的形式が誕生したが、その物理的解釈については意見の対立があった。量子力学的記述では、古典物理学で成立していた連続性の原理に反し、また因果律も成立していないように見えた。そこから多くの論争が起きた。1927年にHeisenbergが最初に提唱した不確定性原理は、量子力学の最も重要な帰結の一つであり、量子力学における因果律の破綻を端的に示すものであった。それはまた、古典物理学と量子力学の相違を概念的に理解する際に、非常に重要な役割を果たした。

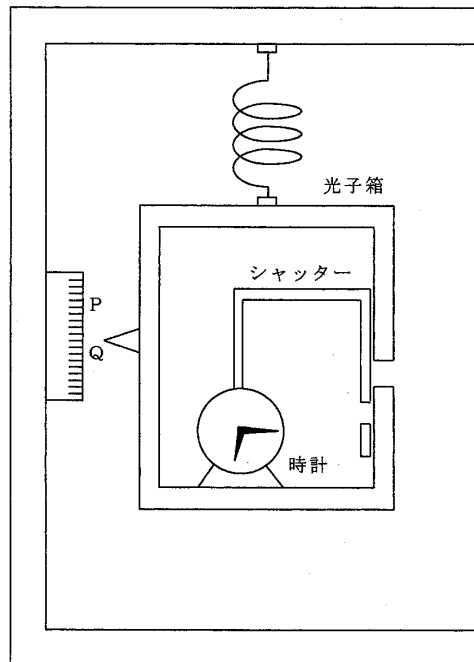
有名な γ 線顕微鏡の思考実験では、Heisenbergは最初に不確定性関係を、位置測定の精度とその測定によって引き起こされた運動量の擾乱の積に対する不等式として定式化した。その直後にKennardが粒子の位置のゆらぎ(標準偏差)と運動量のゆらぎの積に対する不等式を数学的に導いた。量子力学では一般に粒子の位置を測定すると、その測定結果は測定の際に変わり、測定値はある平均値のまわりに拡がりをもって分布する。運動量を測定した場合も同じである。この拡がり的大小を示す指

1

標が標準偏差である。このゆらぎは測定の精度や誤差とは異なる概念である。Kennard の不確定性関係が一般的に成立することは数学的に証明されている。20世紀の終わりに小澤がこれらの関係式を見直し、Heisenberg や Kennard の不確定性関係式を統合した、より一般的に成立する小澤の不等式を導いた^{1~5)}。

不確定性原理をめぐる議論として、Bohr と Einstein の論争が有名である^{6,7)}。それは Einstein が不確定性原理を破る思考実験を次々と提案し、それを Bohr が反論するという形式でおこなわれた。二人の論争は、1930年の Solvay 会議で Einstein が光子箱の思考実験を提出したことで、一つの頂点を迎えた。Einstein は理想的な反射壁をもち輻射で満たされた一つの箱を考えた。箱の中には時計とそれに連動して開閉するシャッターが入っている。時計はある選ばれた時刻に、非常に短い時間間隔だけシャッターを開けるように設定されていて、その間に一つの光子が箱から出ていくものと仮定した。光子が飛び出していく前後に箱の重さを測ることによって、相対性理論の質量とエネルギーの関係式 $E = mc^2$ から、出ていった光子のエネルギーを正確に測定することができる。一方シャッターが開く時刻は箱の中にある時計がコントロールしているから、出ていった光子の発射時刻を正確に知ることができる。このことは時間とエネルギーの不確定性関係が成立しないことを意味していると、Einstein は主張した。それに対する Bohr の反論は意表を突くものであった。Einstein の一般相対性理論によれば、時計の進み方は重力場によって影響を受け、重力が大きい処では小さい処より時計の進行が遅れる。Bohr はこのことから、光子が飛び出していく前に箱の重量測定をすれば、そのことによって時計の進行が影響を受けることを指摘し、時間とエネルギーの不確定性関係が成立することを示した。

図1 光子箱の実験装置



二人の論争を Heisenberg の不等式ではなく、小澤の不等式が成立するという視点から再検討したらどうなるか。このような観点から細谷⁸⁾と石井⁹⁾が光子箱の思考実験と EPR のパラドックスについて検討している。

本論文では、まず細谷が小澤の不等式を光子箱の思考実験に適用した論文を考察する。細谷の論文の内容とほとんど同じであるが、石井の議論についても考察する。次に小澤の不等式とは無関係であるが、de la Torre 等が光子箱の思考実験における Bohr の Einstein への反論を批判しているので¹⁰⁾、それを紹介する。彼らの批判を読むと、この思考実験の難しさと陥りやすい過ちがどこにあるのかがわかる。次に光子箱の思考実験に対する筆者の解答を述べる。最後にまとめと考察をおこなう。

2 小澤の不等式の光子箱の思考実験への適用

細谷はまず Heisenberg の不確定性関係は、位置測定の誤差 $\epsilon(q)$ と運動量の擾乱 $\eta(p)$ に対する不確定性関係

$$\epsilon(q)\eta(p) \geq \hbar/2 \quad (1)$$

であるというところから出発する^{8), 注1)}。

一方、エルミート演算子である位置演算子 \hat{q} と運動量演算子 \hat{p} が交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ を満たすことから、 \hat{q} と \hat{p} の標準偏差

$$\sigma_q = \langle (\hat{q} - \bar{q})^2 \rangle^{1/2}, \quad \sigma_p = \langle (\hat{p} - \bar{p})^2 \rangle^{1/2}, \quad (2)$$

の間に Kennard の不等式

$$\sigma_q \sigma_p \geq \hbar/2 \quad (3)$$

が成立する。ここで、 \bar{q} と \bar{p} は、それぞれ位置座標と運動量の平均値であり、 $\langle \hat{A} \rangle$ は演算子 \hat{A} についての平均値を表す。この式に対して、細谷は「これも不確定性関係と呼ばれるが、まったくの数学的な関係であり、上に述べた観測に関わるものとは別ものである」と述べている。

そして小澤が一般的な観測過程を考慮して導出した不等式^{3~5)}

$$\epsilon(q)\eta(p) + \sigma_q \eta(p) + \epsilon(q)\sigma_p \geq \hbar/2 \quad (4)$$

を、観測に対しては用いるべきであるという。ここで小澤の定義では、位置測定の誤差 $\epsilon(q)$ は測定対象の粒子（細谷の設定では光子箱）の位置演算子 $\hat{q}(0)$ と測定装置

(細谷の設定では出て行った光子) の位置演算子 $\hat{Q}(t)$ を用いて、

$$\epsilon(q) = \langle (\hat{Q}(t) - \hat{q}(0))^2 \rangle^{1/2}, \quad (5)$$

位置測定が粒子に与えた運動量の擾乱 $\eta(p)$ は粒子の運動量演算子 $\hat{p}(t)$ と $\hat{p}(0)$ を用いて、

$$\eta(p) = \langle (\hat{p}(t) - \hat{p}(0))^2 \rangle^{1/2}, \quad (6)$$

である。ここで時刻 0 は測定前の時刻を、 t は測定後の時刻を示す。

文献 (8) の図 1 の説明で、細谷は光子箱の思考実験を次のように設定している：「光子箱の中の時計がある時刻を指すと、時間 T だけ小さなシャッターが開いて、光子が発射されるようになっている^{註2)}。

一方、箱全体はバネでつるさされていて、箱の位置は台に固定された目盛りから読みとれる。光子の持ち去るエネルギーは、箱の質量の減少 Δm の c^2 倍である。」

このような設定のもとで式 (4) に Bohr の議論を修正したものを代入することを考えている。まず細谷は光子が出ていくことによって箱は上向きに動き出すが、箱に働くこの力積 ΔmgT が $\eta(p)$ より大きいと指摘している：

$$\Delta mgT > \eta(p) \quad (7)$$

さらに、重力場の違いによって生じる時計の進行の不確定さ

$$\Delta T = \frac{gT\epsilon(q)}{c^2} \quad (8)$$

が、位置測定の誤差 $\epsilon(q)$ に対してもそのまま Bohr の議論と同じように成立するとしている。しかしシャッターを開くまで時計は箱の中で時を刻んでおり、そのとき σ_q による時間の進行の不確定さもある。 $\sigma_q \ll \epsilon(q)$ の場合を除くとこれを無視することはできないが、細谷はこの ΔT を無視している。

上の二つの式 (7) と (8) を小澤の不等式 (4) に代入して、

$$4 \quad \frac{\Delta T c^2}{gT} \sigma_p + \Delta mgT \sigma_q + \Delta mc^2 \Delta T \geq \hbar/2 \quad (9)$$

を得る。

Bohr の議論では、(9) 式の左辺は第 3 項だけである。しかし第 2 項があるので、光子の発射時刻を正確に ($\Delta T = 0$) 測定しても、光子のエネルギーの不確定さは

$$\Delta E = \Delta mc^2 \geq \frac{\hbar c^2}{2gT\sigma_q} \quad (10)$$

となり、Bohr の議論の場合のように、必ずしも無限大にならないと細谷は指摘している。

ここで細谷は ΔE を光子のエネルギーの不確定さであると述べているが、細谷の設定では $\Delta E = \Delta mc^2$ は出ていった光子のエネルギーそのものであり、この量を光子箱の位置測定から導出した光子のエネルギーの不確定さとすることはできない。また細谷の光子箱の設定では、 $\Delta T = 0$ としても光子の発射時間を正確に測定したことにはなっていない。 ΔT は式 (8) からシャッターが開いている時間 T に対する不確定さである。細谷の設定ではシャッターは時間 T だけ開いているから、光子の発射時刻を正確にするためには $T \rightarrow 0$ としなければならない。しかしこのとき上の式から $\Delta E \rightarrow \infty$ となってしまう。

次に細谷は、式 (9) には第 1 項があるので、質量を正確に ($\Delta m = 0$) 測定しても、光子の発射時刻が無限に不確定になることはなく、

$$\Delta T \geq \frac{gT\hbar}{\sigma_p c^2} \quad (11)$$

であると述べている。しかし ΔE は Bohr と Einstein の討論では、出ていった光子のエネルギーの不確定さであるが、細谷の設定では出ていった光子のエネルギー自体を ΔE としている。従って $\Delta m \rightarrow 0$ としても、これは単に出ていった光子のエネルギーを 0 にしただけであり、光子箱の質量を正確に測定したことにはなっていない。(後で明らかになるように、光子箱の質量を正確に測定するためには、光子箱の運動量の不確定さ σ_p を 0 にしなければならないが、このとき $\Delta T \rightarrow \infty$ となってしまう。)

細谷が光子を測定装置とするというとき、それはスリットからでた光子を外にあるフィルム等に当てて箱の位置を測定することを意味しているのであろう^{註3)}。このような設定では、 $\Delta m \rightarrow 0$ としなくても光子箱の質量を正確に測定することはできる。出た瞬間の箱の位置を正確に測定できればよいからである。光子が出たあと、光子箱は軽くなり上方に移動するであろうが、そのことは光子箱の質量の測定には関係しない。

石井も光子箱の思考実験に小澤の不等式を適用している⁹⁾。石井の議論は細谷の論文を参考にしているので、内容はほとんど細谷と同じであるが、相違点が 2 つある。一つは、光子が飛び出していったことよって光子箱が上方に移動するが、この距離を位置測定の誤差 $\epsilon(q)$ としていることである。(細谷は誤差が具体的にどのような量になるのか述べていない。) しかし小澤の誤差の定義式(5)から考えて、 $\epsilon(q)$ をこのように光子箱が動いた距離とすることはできない。二つ目は、石井は $\eta(p) = \Delta mgT$ としていることである。細谷の場合は $\Delta mgT > \eta(p)$ であった。どちらが正しいと

しても、上の議論の結論には影響しないが、シャッターが開いている時間 T のいずれかの時刻に光子は飛び出していくのであるから、細谷の方が正しいと思う。

3 De la Torre 等による批判

De la Torre 等も光子箱の思考実験について考察し、Bohr の回答は 2 つの点で間違っていると主張している¹⁰⁾。彼らは小澤の不等式との関連で光子箱の思考実験について述べていないが、彼らの Bohr に対する批判をここで検討する。

彼らが指摘した最初の Bohr の間違いは、 ΔT に関するものである。Einstein の問題提起では ΔT は光子が箱から飛び出していく時刻の不確定さであったが、Bohr の回答では、それは箱の重量測定のためにつりあいの状態にするのに要する時間 T に対する不確定さになっている。彼らはこれら 2 つの不確定さは同じではないという。しかし彼らのほうが間違っている。箱の中にある時計はある時刻になるとシャッターが開くように設定されている。出ていった光子のエネルギーを測定するためには、箱の質量を測定する必要がある。そのために箱を T 秒かけてつりあいの位置に設定すると、箱の位置には不確定さ σ_q があるため、箱の中にある時計の進行には式 (8) (但し $\epsilon(q)$ に σ_q を代入したもの) で与えられる不確定さが生じてしまう。そのためシャッターが開く時刻がこの量だけ不確定になってしまう。このように Bohr が導出した ΔT は、光子が飛び出していった時刻を予測する際の不確定さになっているので、Einstein の意味している ΔT と同じである。

しかし、話はもう少し複雑である。出ていった光子のエネルギーを測定するためには、2 回箱の重量測定をする必要がある。最初の箱の重量測定で、中にある時計の進行は重力場による擾乱を受け、最初に設定した時刻にはシャッターを開かないであろう。しかしシャッターが開き光子が出ていったあと、2 回目の重量測定をおこなわないで中にある時計と箱の外にある標準の時計の時刻を比較すれば、シャッターが開いた時刻を正確に決定することができる。しかしこのときには中に残っていた光子は出ていってしまうから、出ていった光子のエネルギーを決定することはできない。他方で、出ていった光子のエネルギーを予測するために箱を開かずに 2 回目の重量測定をすれば、もう一度時計の進行は重力場の影響を受ける。このためシャッターが開いた時刻を正確に予測することができない。

6 次に彼らが問題にしたのは、不等式 (7) に関するものである。ただし彼らは式 (7) を、運動量の擾乱 $\eta(p)$ のところを箱の運動量の標準偏差 σ_p で置き換えたものとして解釈している：

$$\Delta mgT > \sigma_p \quad (12)$$

Bohr はこの式が成立することは明らかであると述べているが、彼らはこの不等式の

成立は全く明らかではないという。彼らは光子箱の思考実験についての多くの文献に当たり、この不等式の記述の箇所を検討した結果、このような結論に至ったという。Bohrによるこの不等式の導出には曖昧な点があることを、前論文¹³⁾において筆者も指摘している。

さらに彼らは箱の運動が調和振動子の最小波束で与えられると仮定して、式 (12) の不等号が逆になる場合があることを示し、不等式 (12) が成立しないことを証明しているが、この証明には次に示すように間違いがある。彼らはこのことを次の3つの式から導出している。まず次の式で定義される α が $\alpha \rightarrow 0$ とできることから、

$$\|\alpha\| \equiv \Delta E / (\hbar\omega) < \left(\frac{c^2}{gT}\right) \left(\frac{m}{2\hbar\omega}\right)^{1/2}. \quad (13)$$

さらに、

$$\sigma_p = (\hbar m\omega/2)^{1/2}, \quad \Delta E = \Delta mc^2, \quad (14)$$

である。式 (13) の ΔE はエネルギーの標準偏差であり、このエネルギーは箱の運動エネルギーと弾性エネルギーの和である。これに対して式 (14) の Δm はバネの伸びの測定値から箱の静止質量を測定するときの精度であるから、同じエネルギーの不確定さであっても、式 (13) の ΔE と式 (14) の ΔE を同じと置くことはできない。

4 筆者の解答

De la Torre 等が指摘しているように、Bohr の解答に曖昧な点があることは確かである。まず箱の重量測定の具体的な方法が曖昧である。それに関連して、 ΔmgT の物理的な意味が曖昧であるため、考察しているのが不等式 (7) なのか、あるいは不等式 (12) なのかははっきりしない。また不等式が成立する理由が曖昧である。普通に考えると、これは Δm の物質が時間 T の間に箱から出ていったときの力積か（これがまさに細谷と石井の考えである）、あるいは指針の目盛りを零点に合わせるために、 Δm の物質を T 秒間かけて載せていったときに、箱に与える力積である。

一方で、Bohr は T は箱をつりあいの状態にするのに要する時間であると明確に述べている。そうであるならば、 ΔmgT は位置測定とは関係ない量になるので、これを細谷や石井のように位置測定によって生じた運動量の擾乱と関連づけることは難しい。この量を測定によって生じた運動量の擾乱と関連づけるべきではない。

光子箱の思考実験についての筆者の考えは、既に論文に発表しているが¹³⁾、ここで筆者の考えを簡単に述べる。箱をつりあいの状態にするために、箱の底を手で支えながら、時間 T をかけて、バネの自然長の位置 P 点からゆっくりと一様の速さ V で箱を降ろす。つりあいの位置 Q 点まで来たときに箱は手から離れて単振動をおこなう

であろう。PQ間の距離を q とすると $V = q/T$ である。いつ箱が手から離れるか予測できないから、1回の指針の位置測定によって、つりあいの位置を決定するときの不確定さ Δq は単振動の振幅 A になる^{注4)}。 $A = V/\omega$ であるから、 k をバネ定数として、 $\Delta mgT \approx kAT = \omega TP_0 > P_0$ である。ここで P_0 はQ点での箱の運動量である。また T は単振動の周期($\sim 1/\omega$)より十分大きくとらなければならないので、 $\omega T > 1$ である。

古典論では十分に時間をかけて($T \rightarrow \infty$)箱をつりあいの位置までもっていくと、 $A \rightarrow 0, P_0 \rightarrow 0$ とできるが、量子論では、 P_0 を σ_p より小さくすることはできない。従って不等式(12)が成立する。もちろん、最初から量子論を使って不等式(12)を証明することもできる。単振動の量子論では、 $\sigma_q = (\hbar/2M\omega)^{1/2}, \sigma_p = (M\omega\hbar/2)^{1/2}$ であるから、これを $\Delta mgT = k\sigma_q T$ に代入すれば、不等式(12)が導出できる。ここで明らかになったように、 ΔmgT と関連しているのは測定による運動量の擾乱 $\eta(p)$ ではなく、箱の運動量の標準偏差 σ_p である。

箱の位置測定から求めた箱のエネルギーの不確定さは式(12)を用いて、

$$\Delta E = \Delta mc^2 > \frac{c^2}{gT} \sigma_p \quad (15)$$

である。また時計の重力方向の位置の不確定さ σ_q による時計の進み方の不確定さ ΔT は、

$$\Delta T = \frac{gT}{c^2} \sigma_q \quad (16)$$

である。ここで細谷による式(8)では位置測定の誤差 $\epsilon(q)$ による時間の不確定さ ΔT を考えていたが、ここでは、本来光子箱がもっている位置の不確定さ σ_q による時間の不確定さ ΔT を考えていることに注意して欲しい。筆者の設定では、箱の指針の位置測定は σ_q より小さい誤差でおこなわれるとしている。そのときその測定によって箱は運動量の擾乱を受けるが、そのことは箱のエネルギーの測定精度 ΔE や光子が発射された時刻の精度 ΔT には全く影響しない。

量子論では出ていった光子のエネルギーを正確に予測するためには、 $\sigma_p \rightarrow 0$ としなければならない。他方で、出ていった光子の発射時刻を正確に予測するためには、 $\sigma_q \rightarrow 0$ としなければならない。不確定性関係式(3)が成立していて、 σ_p と σ_q の両方を同時に0にすることはできないから、出ていった光子のエネルギーの不確定さと出ていった時刻の不確定さの両方を同時に0にすることはできない。細谷は式(3)の不確定性関係は測定に関わるものとは別ものであるといているが、これまでの議論から、光子箱の位置測定から出ていった光子のエネルギーや出ていった時刻を予測する際には、それらの不確定さは式(3)によって制限されていることがわかる。

式(15)と(16)から

$$\Delta E \Delta T \geq \hbar/2 \quad (17)$$

が導出される。細谷は Bohr と Einstein が問題にしていた不確定性関係 (17) は、式 (1) から導出されたと述べて、式 (1) を拡張した小澤の不等式 (4) に基づいて光子箱の思考実験を再吟味した。筆者は、時間とエネルギーの不確定性関係 (17) を式 (3) から導出した。式 (3) は式 (1) と違って常に成立しているから、式 (1) を拡張した小澤の不等式を考慮する必要はない。

読者のなかには、 $\Delta m = k\Delta q/g = k\sigma_q/g$ であるから、 $\sigma_q \rightarrow 0$ とすれば、 $\Delta E = \Delta mc^2$ も ΔT も 0 に近づけることができると考える人がいるかもしれないが、単振動の量子論では $\sigma_q = (\hbar/2M\omega)^{1/2}$ であって、 σ_q はバネ定数 k の関数であるからそうならない。 $k = M\omega^2$ と $\sigma_p = (M\omega\hbar/2)^{1/2}$ を用いると、

$$\Delta E = \Delta mc^2 = \frac{k}{g}\sigma_q c^2 = \left(\frac{2}{\hbar}\right)\left(\frac{c^2}{Mg}\right)\sigma_p^3 \quad (18)$$

$\sigma_q = (\hbar/2M\omega)^{1/2}$ を用いると、

$$\Delta T = \frac{gT}{c^2}\sigma_q = \frac{g}{c^2}(\omega T)\frac{\sigma_q}{\omega} > \left(\frac{2}{\hbar}\right)\left(\frac{Mg}{c^2}\right)\sigma_q^3 \quad (19)$$

である。もちろん、式 (18) と (19) を用いても、式 (17) が導出される。また $\Delta E \rightarrow 0$ とするためには $\sigma_p \rightarrow 0$ ($k \rightarrow 0$)、 $\Delta T \rightarrow 0$ とするためには $\sigma_q \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) としなければならないことがわかる。

5 まとめと考察

小澤によって Heisenberg の不確定性関係の新しい定式化がおこなわれ、細谷と石井がその新しい不等式が正しいという観点から、光子箱の思考実験についての Bohr の議論を再吟味した。本論文では細谷と石井の議論を考察し、次のような間違いがあることを指摘した。

①細谷と石井は $\Delta E = \Delta mc^2$ を出ていった光子のエネルギーの不確定さであるといっているが、彼らの設定では Δmc^2 は出ていった光子のエネルギーであって、エネルギーの不確定さではない。従って $\Delta m \rightarrow 0$ としても、光子のエネルギーを正確に測定したことになっていない。

②細谷と石井の設定では T はシャッターが開いている時間であり、 ΔT はその T に対する不確定さになっている。従って $\Delta T \rightarrow 0$ としても $T \rightarrow 0$ とはならないので、光子の発射時刻を正確に測定したことにはならない。シャッターが開いている時間 T のどの時刻に光子が発射したのかわからないからである。

③細谷と石井は位置測定の誤差 $\epsilon(Q)$ から生ずる ΔT のみを考慮しているが、箱の位置のゆらぎ σ_q による ΔT も当然考慮しなければならない。彼らはこれを無視しているが、これを無視してよいのは $\sigma_q \ll \epsilon(q)$ の場合だけである。

細谷と石井のように光子を測定装置とするのではなく、箱の指針の位置を他のなんらかの方法で測定し、その結果を小澤の不等式に代入するという事も考えられる。しかしこのときには、 T は箱をつりあいの状態にするために必要な時間であるので、指針の位置測定が箱の運動量に及ぼす擾乱 $\eta(p)$ が $\Delta mgT > \eta(p)$ となることの説明がつかないであろう。

Bohr 自身が自分の反論に満足していなかったことはよく知られている。Heisenberg の不確定性関係が間違っていて小澤の不等式が正しいとすると、Heisenberg の不確定性関係に基づいている Bohr の反論は正しくないので、Bohr が自分の反論に納得していなかったの無理のないことであったと、石井はいつている。また Bohr の反論が不十分で、むしろ Einstein は $\Delta E = 0, \Delta T = 0$ を与える思考実験を提示することに成功したと細谷は述べている。しかし細谷と石井の議論では、光子が飛び出したことを光子箱の位置測定としていることや T をシャッターが開いている時間としていることなど、Bohr と Einstein の設定とは違っている。また同じ記号 Δm や ΔE を使用していても、それらの意味が Bohr と Einstein のそれとは違っているから、これらの指摘には説得力はない。

不確定性関係は量子力学の最も重要な帰結の一つであり、一つでもこの関係式を破る例を Einstein が探し出せば量子力学が否定されるということを前提として、Bohr と Einstein は議論をおこなっている。細谷と石井は Bohr と Einstein の議論の出発点になっていた不確定性関係が式 (1) であるという解釈であるので、その式 (1) を拡張した小澤の不等式をもとに光子箱の思考実験を考察している。しかし筆者の見解では、二人の議論の出発点になっているのは不確定性関係 (3) である。

De la Torre 等が、式 (12) の不等式が成立する理由が Bohr の議論では明らかになっていないと指摘しているのは正しい。しかし式 (12) の不等号が逆になる場合があるという彼らの証明では、光子箱の力学的エネルギーの標準偏差と Δmc^2 (Δm は箱の静止質量の測定精度) という2つの異なる意味の ΔE を混同して、同じとしているので正しくない。

この思考実験に対する筆者の解答は、細谷や石井と違って、Kennard の不等式 (3) から出発した。Heisenberg が最初に不確定性原理を提唱したとき、Heisenberg の真意は式 (1) の方ではなく、式 (3) にあったと思う。まず十分な時間 T をかけて、箱をつりあいの状態に置く。古典論では $T \rightarrow \infty$ とすれば、箱の振動の振幅 A も運動量とともに0にすることができる。しかし量子論では十分に時間をかけても、位置のゆらぎ σ_q より A を小さくすることはできないし、 σ_q と運動量のゆらぎ σ_p を同時に0にすることはできない。

バネの伸びから箱の静止質量を測定する際の精度 Δm は $k\sigma_q/g$ であるということ

に気がつけば、de la Torre らがその成立を疑問視した不等式 (12) を導出することができる。不等式 (12) が導出できれば、式 (16) を用いてエネルギーと時間の不確定性関係を導出することは簡単である。 T を充分大きくすると量子論の適用領域に入るが、そこで Δm を決定しているのは T ではなくバネ定数 k である。筆者の計算では、出ていった光子のエネルギーを予測する際の不確定さ ΔE は、式 (18) から σ_p^3 に比例し、出ていった時刻を予測する際の不確定さ ΔT は、式 (19) から σ_q^3 に比例した値より大きくなる。これより $\Delta E \rightarrow 0$ とするためには $\sigma_p \rightarrow 0$ ($k \rightarrow 0$)、 $\Delta T \rightarrow 0$ とするためには $\sigma_q \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) としなければならないことがわかる。

注

- 1) Bohr と Einstein の議論もこの関係式に基づいていると細谷は述べているが、後で明らかになるように筆者の考えではこれは間違いである。
- 2) 本来は時間 T はシャッターが開いている時間ではない。「the whole interval T of the balancing procedure」と Bohr は述べている。すなわち光子箱をつりあいの状態に設定するのに必要な時間である。この箇所を山本義隆¹¹⁾は「重量測定に要する全時間間隔 T 」と意識しているが、これは誤解を招く訳である。井上健¹²⁾はこの箇所を「この釣り合わせる過程の時間間隔 T 」と正しく訳している。
- 3) 細谷の設定では、光子を3回放出しているのであろうか。1回目と3回目は箱の位置を測定するための光子の放出、2回目はエネルギーと到着時間を予測する対象としての光子の放出である。このように考えると、光子の放出で $\Delta m \rightarrow 0$ としなければ、出ていった光子のエネルギーを正確に予測できないという細谷の主張を理解できる。しかし1回目と3回目の光子の放出で $\Delta m \rightarrow 0$ としても、そうするだけでは出ていった光子のエネルギーを正確に求めることはできない。
- 4) 古典論では測定による運動量の擾乱をコントロールできるから、1回ではなく何回か位置測定をおこなえば、つりあいの位置 Q 点を不確定さ 0 で求めることができる。しかし量子論では運動量の擾乱をコントロールすることができないから、1回の測定で得た結果から Q 点の位置を予測しなければならない。

参考文献

- 1) Masanao Ozawa "Measurement Breaking the Standard Quantum Limit for Free-Mass Position" Phys. Rev. Lett. 60, 1988, p.385-388.
- 2) Masanao Ozawa "Position measuring interactions and the Heisenberg uncertainty principle" Phys. Lett. A299, 2002, p.1-7.
- 3) Masanao Ozawa "Physical content of Heisenberg's uncertainty relation : limitation and reformulation" Phys. Lett. A318, 2003, p.21-29.
- 4) Masanao Ozawa "Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance" Phys. Rev. A67, 2003, 042105.
- 5) Masanao Ozawa "Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements" Ann. Phys. 311, 2004, p.350-416.

- 6) N.Bohr "Discussion with Einstein on epistemological problems in atomic physics
Albert Einstein : Philosopher-Scientist" The Library of Living Philosophers, Vol.
7, 1949, p.199.
- 7) N.Bohr 井上健訳『原子理論と自然記述』みすず書房, 1990, p.186-245.
- 8) 細谷暁夫「量子力学をめぐるアインシュタインとボーアの論争」『数理科学』No.484,
2003, p.46-51.
- 9) 石井茂『ハイゼンベルグの顕微鏡 : 不確定性原理は超えられるか』日経 BP 社, 2006.
- 10) A.C. de la Torre, et al "The Photon-Box Bohr-Einstein Debate Demythologized" Eur.
J. Phys. 21, 2000, p.253-260. e-preprint (quant-ph/9910040)
- 11) N.Bohr 山本義隆訳『ニールス・ボーア論文集 1 / 因果性と相補性』岩波書店, 1999,
p.249.
- 12) N.Bohr 前掲書 7) p.223.
- 13) 小杉誠司「光子箱の思考実験」『淑徳短期大学研究紀要』第35号, 1996, p.9-17.