Mathematics meets physics

Studien zur Entwicklung von Mathematik und Physik in ihren Wechselwirkungen

Die Entwicklung von Mathematik und Physik ist durch zahlreiche Verknüpfungen und wechselseitige Beeinflussungen gekennzeichnet.

Die in dieser Reihe zusammengefassten Einzelbände behandeln vorrangig Probleme, die sich aus diesen Wechselwirkungen ergeben.

Dabei kann es sich sowohl um historische Darstellungen als auch um die Analyse aktueller Wissenschaftsprozesse handeln; die Untersuchungsgegenstände beziehen sich dabei auf die ganze Disziplin oder auf spezielle Teilgebiete daraus.

Karl-Heinz Schlote, Martina Schneider (eds.)

Mathematics meets physics

A contribution to their interaction in the 19th and the first half of the 20th century

Verlag
Harri
Deutsch

Die Untersuchung der Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik in Deutschland am Beispiel der mitteldeutschen Hochschulen ist ein Projekt im Rahmen des Vorhabens *Geschichte der Naturwissenschaften und Mathematik* der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig.

Das Vorhaben Geschichte der Naturwissenschaften und der Mathematik der Sächsischen Akademie der Wissenschaften wurde im Rahmen des Akademienprogramms von der Bundesrepublik Deutschland und dem Freistaat Sachsen gefördert.

Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH
Gräfstraße 47
60486 Frankfurt am Main
verlag@harri-deutsch.de
www.harri-deutsch.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN 978-3-8171-1844-1

Die Bilder auf der Umschlagseite zeigen den Physiker O. Wiener (links) und den Mathematiker B. L. van der Waerden (rechts) (Quelle: Universitätsarchiv Leipzig).

1. Auflage 2011

Druck: fgb – freiburger graphische betriebe <www.fgb.de>
Printed in Germany

Vorwort

In vielen Bereichen der Naturwissenschaften wird von mathematischer Durchdringung gesprochen, doch gibt es wohl kaum Gebiete, in denen die wechselseitige Beeinflussung stärker ist als zwischen Mathematik und Physik. Ihr Wechselverhältnis war wiederholt Gegenstand erkenntnistheoretischer und historischer Untersuchungen. Eine wichtige, nur selten im Zentrum der Betrachtungen stehende Frage ist dabei die nach der konkreten Ausgestaltung dieser Wechselbeziehungen, etwa an einer Universität, oder die nach prägenden Merkmalen in der Entwicklung dieser Beziehungen in einem historischen Zeitabschnitt.

Diesem Problemkreis widmete sich ein Projekt der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, das die Untersuchung der Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik an den mitteldeutschen Universitäten Leipzig, Halle-Wittenberg und Jena in der Zeit vom frühen 19. Jahrhundert bis zum Ende des Zweiten Weltkriegs zum Gegenstand hatte. Das Anliegen dieses Projektes war es, diese Wechselbeziehungen in ihren lokalen Realisierungen an den drei genannten Universitäten zu untersuchen und Schlussfolgerungen hinsichtlich der Entwicklung und Charakterisierung der Wechselbeziehungen abzuleiten. Die in dem Projekt vorgelegten Ergebnisse dokumentieren die große Variabilität in der Ausgestaltung dieser Wechselbeziehungen, die Vielzahl der dabei eine Rolle spielenden Einflussfaktoren sowie deren unterschiedliche Wirkung in Abhängigkeit von der jeweiligen historischen Situation.

Auf der internationalen wissenschaftshistorischen Fachtagung «Mathematics meets physics – General and local aspects», die vom 22. – 25. März 2010 in Leipzig stattfand, wurden die Ergebnisse dieser lokalen Detailstudien in einen breiteren Kontext eingebettet und mit einem Fachpublikum diskutiert. International anerkannte Wissenschaftshistoriker und Fachwissenschaftler präsentierten ihre Untersuchungsergebnisse zu den Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik, wobei sie in ihrer Schwerpunktsetzung die Rolle innerdisziplinärer Entwicklungen, einzelner Wissenschaftlerpersönlichkeiten bzw. wissenschaftlicher

Schulen oder institutioneller Veränderungen in den Mittelpunkt ihrer Analysen rückten und somit die in dem Akademieprojekt gewonnenen Erkenntnisse in vielerlei Hinsicht ergänzten. Außerdem versuchten einzelne Referenten von einem allgemeineren, philosophischen Standpunkt aus, das Wesen und die Entwicklungslinien der Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik durch einige Merkmale zu charakterisieren. Im Ergebnis lieferte die Konferenz einen guten Einblick einerseits in die aktuellen Forschungen zu den Beziehungen zwischen Mathematik und Physik mit all ihrer Diversität und andererseits in die auch in der abschließenden Podiumsdiskussion formulierte, wohl etwas überraschende Einsicht, dass die in früheren Darstellungen skizzierte kontinuierliche Entwicklung der Wechselbeziehungen einer deutlichen Revision und Spezifizierung bedarf.

Mit diesem Tagungsband werden die vorgetragenen Ergebnisse nun einer breiten wissenschaftlichen Öffentlichkeit vorgelegt. Dabei will der Band nicht nur Einblicke in die gegenwärtige Forschung gewähren, sondern zugleich neue Untersuchungen anregen. Er enthält 14 der insgesamt 18 präsentierten Vorträge in einer überarbeiteten Fassung. Vier der Tagungsteilnehmer haben aus unterschiedlichen Gründen ihr Referat leider nicht zur Publikation eingereicht. In einigen Fällen werden sie ihre Ergebnisse in ein größeres eigenes Werk einfließen lassen. Um dem Leser einen vollständigen Überblick über die vorgetragenen Themen zu geben, ist am Ende des Buches das Tagungsprogramm angefügt.

Die Konferenzsprachen waren Deutsch und Englisch. Wir haben als Herausgeber diesen zweisprachigen Charakter der Tagung bewusst für diesen Band übernommen und es den Autoren überlassen, die Ausarbeitung ihres Vortrags in Deutsch oder in Englisch zu präsentieren. In den meisten Fällen gab es sowohl gute Gründe für die Wahl der deutschen Sprache, als auch für die Wahl des Englischen.

In die Gestaltung der Artikel haben wir nur sehr vorsichtig und nur formale, keine inhaltlichen Aspekte betreffend eingegriffen. Neben der Anpassung an ein einheitliches Layout wurde jedem Artikel eine inhaltliche Übersicht vorangestellt, die wir aus der vom Autor vorgenommenen Gliederung seines Beitrags erzeugten. Aufgrund der individuellen Gewohnheiten ergaben sich dabei deutliche Unterschiede zwischen den einzelnen Artikeln, die wir als persönliche Note des Autors interpretiert haben und nicht versuchten zu beseitigen. Die Angaben zur

verwendeten Literatur und die Zitierweise wurde von uns ebenfalls nicht vereinheitlicht. Dennoch folgen sie im Wesentlichen einem einheitlichen Schema, indem die Verweise in den Fußnoten bei der Literatur durch Angabe des Autors und des Erscheinungsjahres bzw. bei Archivalien entsprechend der offiziellen Abkürzungen der Archive vorgenommen werden. Sind von einem Wissenschaftler mehrere Arbeiten aus einem Jahr aufgeführt worden, so wird an die Jahreszahl der Buchstabe a, b oder c entsprechend der Auflistung im Literaturverzeichnis angefügt. Die Auflösung der Kürzel wird im Literaturverzeichnis vorgenommen, das am Ende des jeweiligen Artikels steht. Während das Literatur- und Quellenverzeichnis bei dem jeweiligen Artikel belassen wurde, sind die Personennamen in einem gemeinsamen Personenverzeichnis am Ende des Buches zusammengestellt. Soweit bekannt bzw. ermittelbar wurden die Lebensdaten der Personen angefügt. Schließlich haben wir die Reihenfolge der Artikel aus inhaltlichen Gründen gegenüber der Vortragsfolge im Programm leicht abgeändert.

Die Durchführung der Tagung in dem geplanten Umfang wurde erst durch die finanzielle Unterstützung seitens der Deutschen Forschungsgemeinschaft möglich. Für diese Hilfe danken wir sehr herzlich. Ebenso danken wir der International Commission on the History of Mathematics, die die Tagung als förderungswürdig anerkannte und ihr eine größere, internationale Aufmerksamkeit verschaffte. Bei der Vorbereitung der Tagung stand uns die Kommission für Wissenschaftsgeschichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, insbesondere ihr Vorsitzender Herr Professor M. Folkerts, mit Rat und Tat zur Seite, wofür wir uns herzlich bedanken. Doch was wäre eine Tagung ohne die fleißigen Helfer im Hintergrund. Ein besonderer Dank gilt diesbezüglich mehreren Mitarbeitern in der Verwaltung der Akademie, von denen stellvertretend Frau E. Kotthoff und Herr A. Dill besonders genannt seien.

Bei der Drucklegung des Buches konnten wir wie gewohnt auf die gute Zusammenarbeit mit dem Verlag, speziell Herrn K. Horn, und dessen Kooperationspartner Herrn Dr. S. Naake bauen. Trotz des gegenüber vorangegangenen Publikationen deutlich größeren Aufwandes hat Herr Dr. Naake uns bei der Gestaltung des Buches sehr kompetent beraten sowie unsere Vorstellungen mit viel Geduld und großer Sorgfalt umgesetzt, beiden einen herzlichen Dank. Weiterhin möchten wir Frau

Dr. H. Kühn für ihre tatkräftige Unterstützung und die zahlreichen Hinweise bei der Vorbereitung des Buchmanuskripts und während der Fahnenkorrektur danken.

Die Tagung ist ein wichtiges Element des eingangs genannten Forschungsprojektes der Sächsischen Akademie im Rahmen des Akademievorhabens: «Geschichte der Naturwissenschaften und der Mathematik». Dem Bundesministerium für Bildung und Forschung sowie dem Sächsischen Staatsministerium für Wissenschaft und Kunst danken wir für die finanzielle Absicherung dieses Akademieunternehmens und somit auch des Druckes dieses Tagungsbandes. Der Band bildet die Abschlussveröffentlichung des Projektes und ist zugleich die letzte Publikation in dem in einem Monat auslaufenden Akademievorhaben.

Mainz/Leipzig, November 2010

Martina Schneider
Karl-Heinz Schlote

Inhaltsverzeichnis

Introduction

Karl-Heinz Schlote, Martina Schneider

Mathematics and physics have interacted in Western science for a very long time. Both disciplines have profited from this on-going process in many ways. To capture the dynamics of this long-lasting interaction is far from simple since a multitude of aspects has to be taken into account. Analytically one might distinguish between developments on different levels of this interrelationship: individual, local, institutional, disciplinary, global. Of course, the outcome of this interaction, i. e. theories and concepts, is part of the parcel.

On an individual level, questions about the training of a scientist (who were his or her teachers? which books were studied? which courses were attended?), about his or her contacts, collaboration or publications with other scientists may be asked. This might already reveal networks operating on a local, regional, national or international level.

On a local level one might also consider connections between different departments of a university or more generally with local learned societies that focus on mathematics and/or natural sciences, or with local industry. Of course, we should also investigate how the two disciplines were institutionalized and in particular, how mathematical and theoretical physics were institutionalized. Were there chairs especially designated to these fields? How and when were they created? Can we identify a local research group or even a research school with a research program drawing on mathematics and physics alike? If so, what about the training of junior researchers? Or do we find individuals who had a lasting influence on the development? What about the establishment of institutes for mathematical or theoretical physics? Here we touch upon questions of professionalization, institutionalization and the genesis and development of disciplines.

With regard to the last aspect certain subdisciplines or fields of knowledge – however difficult they are to distinguish – might attract special attention like mathematical and theoretical physics. However, as shown by the articles in the conference proceedings, interaction between mathematics and physics may also take place, perhaps unexpectedly, in other parts of the disciplines, like in experimental physics where experiments might be designed differently to meet the demands of mathematical-theoretical theory building and in pure mathematics in which certain developments are stimulated, advanced, or even triggered by this interplay. We can detect the co-evolution of knowledge, i. e. parallel, but separate developments in the two fields leading to similar concepts or theories, but also developments that are temporally and disciplinarily distinct. Sometimes both fields of knowledge are re-modelled by this interaction.

If a wider context than that of the two disciplines is considered, then their interaction can be studied from a philosophical, or rather epistemological point of view. This can also be done with regard to the various opinions on this subject held by the working scientists. Furthermore, the relations with the development of technology and with industry might be a fruitful perspective. But, of course, other social or cultural developments might be important for the shaping of knowledge in the field, e. g. the two World Wars or also a general public fascination for certain events or gadgets.

Finally, we might look for global dynamics of the interaction between mathematics and physics. This perspective still seems to be rather difficult when applied to the 19th and the first half of the 20th century since a general, global pattern is not clear, apart from the truism that there exists a growing tendency to mathematize not only physics, but also other branches of knowledge. The dynamics of the interrelationship is so diverse, driven by individuals and/or local research groups who followed often very different ideas, had different aims and used different methods. Instead of trying to unify these different approaches and dynamics, the conference proceedings aim at showing the wealth of forms in which the interrelationship between mathematics and physics manifested itself on the different levels during the 19th and the first half of the 20th century.

The interaction of mathematics and physics is often treated under the heading "the mathematization of physics". This mathematization does not usually consist of the simple, tool-like application of mathematics (or, to be more precise, of a mathematical theory or concept) to a field of physical knowledge, but rather in this meeting of mathematics and physics both fields undergo changes and modifications – varying in scale – in order to facilitate an input of mathematics into physics. With the mathematization extending to more and more branches of physics and with mathematics increasingly becoming the language of physics, these modifications might become less and less apparent. However, there were and still are some areas of physics, in which mathematics is not – maybe not yet, maybe never – of importance for the understanding of the field.

As numerous studies in the history of science have shown, the mathematization of physics takes different forms: There are publications dealing with axiomatization or formalization of existing physical theories. Quantification might play a central role. The elaboration of existing physical theories with regard to mathematical rigour, completeness, exactness and/or consistency is another form of mathematization. Sometimes physical theories are modified on mathematical grounds.

Apart from the obvious function to deepen the understanding of physics, mathematization is of particular use for clarifying the structure of a physical theory as well as its formal problems. Sometimes a mathematical concise description of phenomena is achieved. In addition to that, mathematization can contribute to the unification of formerly disjoint fields of physical knowledge, of some of their concepts or even of hitherto different phenomena. In some cases, a new theory is created by mathematization, entailing a new understanding of the phenomena in question. For some scientists, mathematical features, even such vague ones as mathematical simplicity or mathematical beauty, might act as a guide for physical theory-building.

If one studies the mathematical-technical side of this process and asks what kind of mathematics is 'applied', one is also faced with a great variety. On the one hand, well-established mathematical theories (one might call them 'old' theories) are drawn on to capture physical phenomena. Often, these mathematical theories or mathematized physical theories had been applied successfully in other fields of physics

before, like calculus or mechanics. On the other hand, also new concepts and new mathematical theories are applied or even created. Sometimes mathematical structures are rediscovered by physicists. The mathematical techniques can be found both on a local level, to solve a specific problem as well as on a more global level that affects larger parts of a theory.

Various arguments are given by the scientists to legitimize the mathematization of parts of physics, if this aspect is addressed at all. Scientists might refer to experiments, general experience, consistency with former theories etc. to explain their engagement in mathematization. They might also refer to philosophy to explain and support their practice or even build their own epistemological frameworks.

Other important aspects to be investigated are the publication and reception of attempts to mathematize physics. In which journals were the articles published? When did the first monographs and textbooks appear? Do we find joint publications by mathematicians and physicists? How, when and by whom was a certain approach taken up or discarded? Did the topics of mathematization reach the interest of the general public?

However, only looking at the mathematization of physics results in a distorted picture of the vast panorama of the interrelationship of mathematics and physics since the impact of physics on mathematical research is missing. One does not have to go as far as to speak of a "physicalization of mathematics" (A. Schirrmacher) to acknowledge the stimulation mathematics gets from the physical sciences. Physics is not only a source of ideas and inspiration for mathematical research. A lot of mathematics was created to solve physical problems. In this process, also physicists have come up with new mathematical entities and concepts worth studying from a mathematical point of view. They, at times, even take up tasks primarily ascribed to mathematics, doing truly mathematical research. Physics may also function to legitimize research in a certain mathematical area. One might even ask in which way the dynamics of mathematical research, e. g. the temporary blossoming of a mathematical field, is related to physical relevance. In general, this side of the interaction of mathematics and physics has not been studied so thoroughly as the mathematization of physics – which is also reflected

in the conference proceedings. In our opinion, however, this process needs further investigation.

A brief survey of the papers of the conference proceedings will now be given and some of the dynamics of the interaction between the two disciplines just mentioned will be pointed out. The first section deals with the interrelationship between mathematics and physics from a more general perspective. J. Lützen discusses in what way one could describe this interrelationship as an application of mathematics to physics. To capture its features Lützen introduces the following image: The application of mathematics to physics cannot be compared to the use of a stone for opening up an oyster, but rather to the use of a screwdriver on a screw. Just like a screw and a screwdriver, mathematics and physics can hardly be perceived independently of each other. To underpin this claim Lützen gives a series of examples: how central parts of Liouville's mathematics was inspired by and based on physical problems; how the development of non-Euclidean geometry can be seen as part of a physical investigation; how a geometrical form led Heinrich Hertz to the introduction of the concept of "Massetheilchen" into his mechanics; how Schwartz's work on the theory of distributions was inspired by physics.

J. Šebesta takes a different approach to the topic. From the perspective of a theoretical physicist, he points to the usefulness of mathematics for physics. He differentiates between two roles of mathematics with respect to theory-building in physics: mathematics as a tool and its epistemological role. He illustrates his scheme by sketching numerous examples ranging from the time of Galileo Galilei and Johannes Kepler to the 20th century and drawn from diverse physical fields. In doing so, he points to various shifts in the relationship between mathematics and physics with respect to the creation of physical theories, e. g. an increasing distance from the empirical basis or the resort to new, hitherto unused mathematical concepts and results. He suggests putting this down to a fundamental asymmetry between empirical and theoretical cognition.

The local level of the dynamics of the interaction between mathematics and physics is the focus of the second section, which consists of three papers, the first two paying special attention to the institutionalization of theoretical (and mathematical) physics and to the denomination policy. In the first paper, K.-H. Schlote and M. Schneider compare

the developments at three German universities (Jena, Halle-Wittenberg, Leipzig) during the period from 1815 to 1945. During the first half of the 19th century the philosophical foundation of the interrelationship was of central importance to Jakob Friedrich Fries in Jena. Later on questions of optics closely connected to the construction of instruments dominated the research of physicists in Jena. The later development has to be seen in the context of the local optical industry (Carl Zeiss, Otto Schott), since in Jena industry and university were closely linked with respect to finance and personnel. The development at Halle university from 1895 onwards illustrates how theoretical and experimental research were interwoven in the research of theoretical (and also experimental) physicists. In Leipzig one can witness the early establishment of a strong tradition in mathematical physics which delayed the institutionalization of theoretical physics. It was only in the 1920s that Leipzig succeeded in becoming one of the leading centres of quantum mechanics, atomic and molecular physics by appointing Peter Debye, Werner Heisenberg and Friedrich Hund. The mathematician Bartel Leendert van der Waerden took on the role of their mathematical advisor. Thus, a wealth of dynamics on various levels could be captured by this research.

In the second paper, K. Reich gives a survey of the development of theoretical physics at Hamburg university from the time of its foundation to 1959 when the plan for a particle accelerator (DESY) took shape. She concentrates on Wilhelm Lenz, who initiated a small research group, and some of his students and collaborators (Ernst Ising, Wolfgang Pauli, Werner Theis, Hans Jensen, Erwin David). With respect to the interrelation of mathematics and physics a couple of features are mentioned, e. g. the mathematicians' support (in particular that of Wilhelm Blaschke) in establishing a professorship for theoretical physics in 1921, their commitment to lecturing on relativity theory (Erich Hecke, Blaschke, Emil Artin) and Pauli's presence in Artin's lecture course on hyper-complex systems (algebras). Reich also points out developments related to the rule of the National Socialists and thus touches upon influences from the political context.

This thread also plays a prominent role in the third paper – J. Ritter's paper on Oswald Veblen, Luther P. Eisenhart and the Princeton School in the 1920s and early 1930s. Veblen's activity in military research during the First World War led not only to a re-orientation of his research to

differential geometry in order to integrate mathematics and physics in a new synthesis, but also to a re-organization of his research as a collective enterprise – both aiming at raising the US, and in particular Princeton, to a world-class scientific power. Ritter describes how mathematics and physics are re-modelled in this process by showing their essential unity and by drawing on lessons from the past to inspire new geometry and physics. The Princeton scientists who were part of the research group pursued different strategies of mathematization for different problems. They offered rigour and completeness to existing theories (Eisenhart working on Weyl's and Einstein's theories), modifying existing theories on the basis of mathematical demands (Tracy Y. Thomas on the same topic), and putting forward their own new physical theories (Veblen/Hoffmann on relativity). After the Second World War this unity between mathematics and physics for which the Princeton group strove was lost, ironically due to the work of Princeton geometers of the post-Veblen period. By focusing on Veblen and showing the links to work done outside Princeton as well as the contacts with scientists outside Princeton, by focusing on institutional as well as mathematical-technical aspects of the interaction of mathematics and physics, Ritter integrates various perspectives in his study and is able to give a very rich analysis.

The individual element of the interrelations between mathematics and physics is the focus of the articles of the third section. Each of them is centred on a prominent scientist whose work and impact is analysed with regard to those interrelations.

E. Scholz investigates what Weyl's research tells us about Weyl's varying conception of the interrelation between mathematics and physics. He identifies three forms of applying mathematics to physics in Weyl's research: firstly, mathematical contributions with a mainly speculative and a priori claim of recognition for physics, secondly, the analysis of concepts regarding the foundation of physics, and thirdly the use of mathematics in a structural function or rather as the essence of what Scholz calls "the symbolic construction of reality". These forms do not characterize different periods of Weyl's thought with one following the other, but rather can be found in varying degrees in Weyl's work – thus giving a complex picture of his conception of the interrelationship. At the same time Scholz's analysis shows the stimulating impact of physics on various fields of mathematical research. The general theory

of relativity, the rising quantum mechanics and unified field theories caused Hermann Weyl to engage in very different ways in theoretical physics. Although at times he was in close contact with physicists, discussing his ideas, he never became the founder of a school or a centre of research.

The reception of the special theory of relativity in France and the role of Henri Poincaré within this process in combination with a broader view on the state of theoretical physics in France at the turn to the 20th century form the core of S. Walter's contribution. Walter points to the striking differences in this reception between France, Germany and some other countries which is manifested by a quantitative analysis of publications. He then analyses Poincaré's activities in physics in the decades around 1900. This qualitative analysis shows not only Poincaré's intellectual and institutional dominant position in French science and his great impact on theoretical physics in France, but also reveals some of his controversial judgements on the studies of other physicists, which quickly turned out to be misjudgements. Poincaré launched his own theory of relativity mainly before 1905 and in 1912 he recognized the philosophical significance of the Einstein-Minkowski theory of relativity. The Einstein-Minkowski theory first received strong support from French physicists in their publications in 1911. The change to this theory is connected with the physicists Paul Langevin, who became Poincaré's successor, Jean Perrin and Ernest Maurice Lémeray as well as with mathematicians like Émile Borel and Élie Cartan, and thus to a generational change.

With the emergence of relativity and quantum theory in the first half of the 20th century the interrelationship of mathematics and physics entered a new phase. The problem of indeterminism was one aspect that was at the heart of this process in the 1920s. It entered physics especially in the work of James Clerk Maxwell and Ludwig Boltzmann on thermodynamics in the 19th century and gave rise to lively discussions especially among German physicists and mathematicians in the 1920s. In this context R. Siegmund-Schultze calls our attention to von Mises' contribution to the description of physical processes by applying probabilistic and statistical methods that was published in 1920 and is nearly forgotten today. He assesses the impact of von Mises' contribution as largely a methodological-philosophical one in the discussion of the

role of indeterminism in physics which weakened the postulate of determinism. In this connection, he also re-evaluated von Mises' role that P. Forman attributed to him in his well-known work which links the discussions about indeterminism with social conditions of the "Weimar" Republic. In his research, Richard von Mises touched upon some topics that only later became prominent with the further progress in quantum physics. This, in turn, had also some influence on his research in the late 1920s which includes his contributions to ergodic theory, the theory of stochastic processes, the statistical applications in physics, as well as his changing opinion on the problem of indeterminism. From a more general point of view, this analysis elucidates the difficulties arising from the description of complicated physical processes that consist of the movement of many separate particles.

C. Lehner puts special emphasis on the changes in theoretical physics which took place in the first third of the 20th century. They led to a new assessment of theoretical physics. Theoretical physicists became much more engaged with mathematics than before. Discussing the work of Pascual Jordan and his visionary program of a unified quantum field theory, Lehner tries to demonstrate that a new generation of physicists launched a new idea of theoretical physics. Comparing Jordan's approach to the research done by contemporaries like Erwin Schrödinger, Paul Dirac, and John von Neumann, he gives an impression of the richness in the theoretical variety that a study of this process offers. Lehner attempts not so much to sketch some features of the new stage of theoretical physics as to stress mainly the peculiarities of Jordan's situation. Formed by the unique Goettingen atmosphere of the 1920s, Jordan seems to have regarded mathematics and physics as essentially not distinct. Jordan went beyond what might be seen as the typical task of a mathematical physicist, "the precise elaboration of existent physical theories" and put forward far-reaching ideas about the foundations of quantum physics. He realized that new paths had to be taken and he worked on them in quantum field theory in particular. His contributions to this field were, however, not well received by his contemporaries. He never reached a solid mathematical ground and abandoned this line of research in 1929. Lehner points out that, taken from a wider perspective, the two characteristic features of modern theoretical physics, radical positivism and fundamental universalism, were at odds in Jordan's

research. With regard to the interplay of mathematical and theoretical physics, the changing roles of visualization and theoretical models elaborated in this context are also worth mentioning.

Many questions and problems regarding the interrelations between mathematics and physics that arose in the realm of individual research activities also emerged in the context of analysing the development of concepts and theories. These topics are treated from this broader point of view in the last section. The section partly deals with the same fields of physics as the papers sketched above.

J. Lacki looks in detail at the foundation of quantum mechanics. Sketching the historical situation in the mid 1920s, he points to the four different formalisms that existed in quantum mechanics: wave mechanics, matrix mechanics, q-numbers, and operator calculus. Each used different types of mathematical objects and followed a varying logical order of presentation. He is able to identify a common feature of the representatives of these four formalisms: mathematicians and physicists alike lacked both a geometrical intuition and an insight into the linear structure of their respective issues and problems. The decisive step taken to change this was initiated by the physicist Fritz London. Striving for a better understanding of the equivalence of matrix mechanics and wave mechanics, he studied the analogy between the transformations of variables which occur in solving the quantum mechanical problem and the classical canonical transformations of coordinates. London realized the linearity of the operations, stressed the importance of the linear structure and referred to the publications of mathematicians like Salvatore Pincherle and Paul Levy. Today these publications count as pillars in the early history of functional analysis. There followed an interesting interplay between quantum mechanics and functional analysis including the theory of linear spaces that found its first important outcome in von Neumann's foundation of quantum mechanics which was based on the theory of operators in Hilbert space. In addition to the intensive mutual influences between these fields, it is noteworthy that the essential impulse towards the structural property was given by a physicist.

Investigating the construction of the relativistic wave equation of the electron, H. Kragh gives an interesting instance of the interplay between mathematics and physics in the late 1920s. At that time the theory of the

electron that the physicists were searching for had to be compatible with both the new quantum mechanics and special relativity and, in addition to that, was also to include the spin of the electron. The solution to this task was a result of Dirac's work. His crucial step was the reduction of the physical problem to a mathematical one. Then Dirac got his results by "playing around with mathematics" and by disregarding physics. On the one hand, the introduction of Dirac's relativistic wave equation meant that physicists had to leave their path as far as the mathematical description of the problem was concerned. On the other hand, the objects introduced by Dirac, like special operators and matrices, stimulated a lot of new mathematical research on Clifford algebras and operator theory. Thus, both disciplines profited in this process. Dirac himself appreciated mathematics as a useful tool for physical research. Later on, Dirac pointed to the vague concept of mathematical beauty as a strong motivation for him. Kragh, however, claims that this concept did not influence Dirac's way of research on the relativistic wave equation.

One of Dirac's ideas, the famous delta-function, also forms a starting point of K.-H. Peters' article. Peters covers the use of the delta-function and other generalized functions in quantum mechanics as well as in quantum field theories later on and the establishment of a mathematical rigorous theory of these functions. He draws our attention to a new and unusual point of view, culminating in the hypothesis that mathematical and phenomenological rigour (mathematische und phänomenologische Strenge) are closely correlated. According to Peters, phenomenological rigour is the rule that the mathematical linking of (physical) facts has to be connected only with the facts themselves and not with any causes in the back. From this point of view, Peters interprets the process of the rigorization of mathematical concepts and methods used in a physical theory as a process that promotes a focusing on real observable facts. Hence, the installation of mathematical rigour removes imaginary magnitudes within the physical theory and makes it more realistic – a total reversal of the common interpretation of the interrelations between mathematics and physics. Nevertheless, further investigation has to sharpen the definition of the concept of "phenomenological rigour" and to test whether this hypothesis holds true in other contexts.

The genesis of concepts as well as their development including their transition into new physical fields form an important aspect of the

interrelations between mathematics and physics. A. Borrelli analyses in detail how the concept of angular momentum emerged in mechanics, electrodynamics, quantum mechanics, and quantum field theory as well as its adaptation from mechanics to quantum mechanics. Her analysis deals with the development in France, Great Britain and Germany in the period from 17th to the early 20th century. She explains why the various concepts of angular momentum which differ are nevertheless perceived as the "same" physical concept. Her research shows that there existed a close correlation between certain aspects of physical and mathematical practices. Borrelli does not stop here, but also embeds the development in wider, philosophical and technological contexts. The concept of angular momentum is shaped and constantly supported by ongoing interactions and unresolved tensions between these different fields. Like other such concepts, it emerged from a co-evolution of mathematics and physics.

As mentioned above, there exist some fields in physics, like the theories of electricity, magnetism, heat, or colour, that for a long time developed on an empirical-experimental basis without any connection with mathematics. A mathematization of these fields took place only in a late stage of their development. F. Steinle examines this process with respect to the genesis of the electromagnetic field theory in the works of Michael Faraday, William Thomson, and Maxwell. He starts by giving three common features which can be ascribed to such a process in general: Firstly, the mathematical analysis starts with a specific hypothesis about a hidden mechanism at a microscopic level and uses methods from other physical fields, especially from mechanics. These methods might have to be modified and adapted to the special case under investigation. Secondly, experiments are designed, specified and evaluated on the basis of these mechanical speculations. They serve either to correct and refine the hypothesis or to improve the data basis and to determine quantitative trends. Thirdly, the scientists who are engaged in this process are acquainted both with mathematics and physics and contribute to empirical as well as to mathematical research. Steinle then shows that this pattern does not apply to his case. In his case, the experimental investigations and the forming of qualitative concepts by Faraday was completely separated from the later proper mathematization done by Thomson and Maxwell. This mathematization

included the development of new mathematical concepts and methods and the difficult process of adjusting Faraday's more qualitative concepts to those ones. Although Faraday knew little about mathematics, some of his concepts were also of a mathematical character – so much so that Maxwell characterized him later as a "mathematician of very high order". Faraday tried to introduce an appropriate system of reference that was to handle the various dependencies. This system showed similarities with the geometry of position. Furthermore, Faraday's experiments did not have any relation to microphysical speculations and an explorative character. Steinle then shows how Thomson and Maxwell drew upon Faraday's results in their mathematization of electrodynamics, and why in Maxwell's view Faraday could be called a mathematician. Steinle's study opens up a new view on the relations between mathematics and experimental physics which introduces new facets of their interaction and points to the role of experimental physics in theory-building.

To sum up, the papers in the conference proceedings display the many different ways and circumstances how the two disciplines, mathematics and physics, and their practitioners come together, how they "meet" and how many different forms these "meetings" can take. The picture of the interaction which is drawn here is a multi-facetted one, a kind of mosaic. In order to understand this interaction more thoroughly, more research on the dynamics at all levels and in various contexts (philosophical, technological, social, economical, etc.) is required. This could give us a useful basis for a comparison with other processes of mathematization in other disciplines.

Part I

Allgemeine Entwicklungen | General developments

Examples and Reflections on the Interplay between Mathematics and Physics in the 19th and 20th Century

Jesper Lützen

1 Introduction

From the 17th century and till this day mathematics and physics have been closely linked. However, the nature of this link has been considered differently by different mathematicians, physicists and philosophers. I shall begin this paper with a discussion of the nature of the interaction between the two subjects and continue with some examples of such interactions from the 19th and 20th century. The examples will be taken from my earlier research on Joseph Liouville, Heinrich Hertz and the prehistory of the theory of distributions.

2 Application of mathematics to physics

The interaction between mathematics and physics is usually described as an application of mathematics to physics. This asymmetrical description of the relationship is justified in the sense that mathematics provides a precise and quantitative language to describe (understand) physical phenomena and even to predict new phenomena. And indeed, applications of mathematics to physics are more common than applications of physics to mathematics, although one can find examples of the latter.

Still, the relation between the two subjects is often misrepresented as an interaction between two independent fields similar to a Stone Age man's application of a stone to crack an oyster. Here the stone and the oyster have developed rather independently of each other and nothing would prevent the one from existing without the other. However, as I shall try to argue in this paper, the application of mathematics to physics is much more like the application of a screwdriver to a screw. Here the screw and the screwdriver have developed together and the one would be unthinkable without the other. Similarly, mathematics and physics have developed in close and continuous interaction and their present form is clearly marked by this close connection.

2.1 The nature and development of mathematics

Mathematics is often characterized as an a priori creation of the human intellect, untainted by external factors such as the behavior of nature. This view of mathematics is probably philosophically defendable, in particular if one adheres to a formalistic philosophy of mathematics

according to which mathematics is a game played within mathematical structures. In this game one starts from arbitrary (but hopefully consistent) axioms and then uses some (arbitrary) rules of inference to deduce theorems in a cumulative process. Such a view of mathematics has no need for external input. On the contrary, external input is more likely to be seen as potentially dangerous diverting factors that may lead the rigorous process astray.

Yet, during the last half century a growing number of philosophers have called attention to the unsatisfactory nature of the formalistic philosophy of mathematics. In particular it has been noticed, that this philosophy cannot account for the development of mathematics because it gives no idea of the forces driving the development. In order to understand the dynamics of the development of mathematics, philosophers have turned to history.

One of the first and probably the most famous of these historically inspired philosophers of mathematics is Imre Lakatos. In his *Proofs and Refutations*[1] he describes the development of mathematics as a dialectic process. It starts with a conjecture, continues with a proof that establishes the conjecture or a variation of it as a theorem. Then often follows a refutation mostly in the form of a counterexample leading to a new refined conjecture, after which the process can repeat itself. With this description of the development of mathematics Lakatos takes exception to the idea of a cumulative development of mathematics. Still, he describes the development as a highly internal affair. The original conjecture may be suggested by external facts, but the subsequent dialectic process is described as a purely mathematical one. The internal nature of the process is highlighted by the closed confines of the classroom which Lakatos has chosen as the scene of his rational reconstruction.

There are probably areas of very pure mathematics such as number theory (before RSA coding) that has developed according to a purely internal mathematical dynamics, but many (or most) of the mathematical theories that are useful in physics (much of analysis and geometry) have developed in close connection with physics. Of course there is also a great deal of purely internal mathematical dynamics in the development

[1] Lakatos 1976

of applicable mathematical theories, but even a few occasional pushes from outside may contribute decisively to the overall course of the development.

Thus the idea of a completely a priori field of mathematics that suddenly turns out to be applicable to the description of nature is often a myth.

2.2 The nature of physics

Similarly physics depends on mathematics. Of course it is reasonable to assume that nature exists independently of us and indeed there are physical phenomena that are describable without mathematics (e. g. phenomena of colors and Ørsted's experiment). But physics as it has developed in western civilizations is mostly a mathematical description of the world. Even the entities that the physicist tries to describe are for a great deal of a mathematical nature. Basic concepts such as time, space and mass may arguably be said to be non-mathematical in nature, but their quantification relies on simple arithmetic. And the formation of more complex entities has required more complex mathematics. Take for example the concept of velocity. Just the idea of the velocity $\Delta x/\Delta t$ of a uniform motion could only be formulated after one had overcome the Greek convention that only quantities of the same kind could have a ratio. And the precise formulation of the concept of an instantaneous velocity of a non-uniform motion developed hand in hand with differential calculus.

Similarly, energy was only conceptualized in the mid-19th century after it had been noticed that most forces of nature could be written as the gradient of a potential function, and after it had been noticed that if one changed the sign on this function it was a quantity similar to the vis viva $\sum \frac{1}{2}mv^2$. Indeed the sum of the two was often preserved (conservation of energy). Thus it required rather sophisticated mathematics to conceptualize the notion of energy that today we may consider a rather elementary physical notion.

So when we say that mathematics is the language that allows us to formulate the laws of nature, we must also admit that the concepts whose properties are described by these laws are often saturated with mathematics from the beginning. So the idea of a non-mathematical

realm of physics to which mathematics can be applied is likewise often a myth.

2.3 Encounters of mathematics and physics

So rather than talking about application of mathematics to physics it would be better to talk about encounters of the two subjects. A piece of mathematics meets a piece of physics; they interact and out comes a new mathematical description (model) of this piece of physics. In most cases the interaction also leads to a development of the ingoing piece of mathematics as well as the more general view of physics.

In the rest of this paper I shall give some examples from the 19th and 20th century of such meetings of mathematics and physics. In most of the cases I shall highlight the changes that mathematics underwent as a result of the meetings. Only in the case of Hertz's mechanics I shall discuss the more obvious change of physical theory.

3 The mathematics of Joseph Liouville. Early and mid-19th century

During the period 1770 – 1840 when Paris was the undisputed center of mathematical research the view of mathematics was generally highly applied. It is symptomatic that the highest mathematical education of the period was given at an engineering school: the École polytechnique. At this school Joseph Liouville got his basic training in mathematics and physics. In accordance with the philosophy of the school he later emphasized that the most interesting results of mathematics are indebted to physics and in particular to mechanics. In fact he contributed to many applied areas of mathematics and mathematical physics in particular to potential theory and mechanics, in which fields one still mentions several theorems named after him[2]. However, rather than discussing Liouville's contributions to applied mathematics I shall in this paper discuss some of his contributions to pure mathematics that were inspired by physics.

[2] For a discussion of these and other aspects of Liouville's mathematics and career see Lützen 1990.

3.1 Electro-statics and conformal mappings

In 1848 Liouville formulated a theorem which is now named after him: *Liouville's theorem:* Any conformal (i. e. angle preserving) map from space into space is composed of displacements and inversions in spheres.

An inversion in a sphere is a mapping that maps the inside of a sphere (with radius R) onto the outside and vise versa in such a way that a point at a distance r from the center is mapped into a point with a distance R^2/r from the center and on the same radial line.

Liouville had learned about this mapping from the young William Thomson (later enobled as Lord Kelvin) who visited Paris in 1845. While in Paris Thomson discussed electromagnetism with Liouville who asked him to write a paper on Michael Faraday's new electromagnetic discoveries. The aim was to find out if Faraday's field theory could be brought into line with André-Marie Ampère's mathematical theory. When they met Thomson also explained his idea of what he called electrical images to Liouville. His idea was to use an inversion in a sphere to transform one electrostatic problem into another one that could more easily be solved. When he returned to Cambridge Thomson committed his ideas to paper in a series of letters to Liouville who published them in his *Journal de mathématiques pures et appliqués* also called *Liouville's Journal.*[3] To these letters Liouville appended a lengthy note of his own in which he systematically studied the mathematical properties of inversions in spheres.[4] For example he explained how the important differential operators of physics transform under this mapping and he proved that the mapping is conformal. In a one page note of 1850 he finally announced that conversely all conformal mappings can be obtained as compositions of displacements and inversions in spheres[5]. He published the proof of the theorem in a note in his edition of Gaspard Monge's *Application de l'analyse à la géométrie*.[6]

In this way Thomson's research on electrostatics led Liouville to discover his celebrated purely geometric result about conformal mappings.

[3] Thomson 1845a,b, 1847
[4] Liouville 1847
[5] Liouville 1850a
[6] Liouville 1850b

Many of Liouville's other investigations in geometry was likewise inspired by physics in particular Hamilton-Jacobi mechanics. For example he found new properties of geodesics on various surfaces by considering them as trajectories of a point moving on the surface. In general his works on surface theory was strongly inspired by Carl Friedrich Gauss' *Disquisitiones generales circa superficies curvas*[7] which was in turn inspired by Gauss' work as a surveyor.

3.2 Spectral theory of a class of integral operators

An even more remarkable but less celebrated theory that Liouville developed as a result of input from physics was a spectral theory of operators of the form

$$A(\varsigma)(x) = \iint\limits_S \frac{\zeta(x')}{|x - x'|} l(x')\, \mathrm{d}\omega',$$

where x and x' are points on a closed surface S in space, ζ is a function defined on this surface, and l is a given function on the surface representing the equilibrium distribution of charge on the surface. Liouville developed this theory during the years 1845 and 1846. Also in this case Thomson played a crucial role: He had brought a copy of George Green's now famous, but then completely unknown, *Essay*[8] with him to Paris and this inspired Liouville to take up some of his earlier potential theoretic ideas.

In particular he returned to some of the results he had obtained while working with equilibrium surfaces of rotating masses of fluids (rotating fluid planets). In this area Carl Gustav Jacob Jacobi had surprised the mathematical world in 1834 when he announced that in addition to the well known Maclaurin ellipsoids of revolution there also existed three axial ellipsoids that were in equilibrium. Liouville immediately proved the correctness of Jacobi's claim.[9]

Eight years later he undertook a more thorough investigation of the behavior of the equilibrium surfaces and published a note about their

[7] Gauss 1828
[8] Green 1828
[9] Liouville 1834

shape as a function of the angular momentum.[10] However this note only contained a small fraction of his results. In particular he investigated the stability of the equilibrium figure. He showed that if the angular momentum of the planet is so large that there exist both a Maclaurin and a Jacobi ellipsoid then the Jacobi ellipsoid is stable whereas the Maclaurin ellipsoid is unstable. This striking result was published in a short note in the *Comptes Rendus* but the proof was not published at the time.[11] However when he returned to potential theory in 1845 – 46 Liouville published some of his results about Lamé functions that had been instrumental in his proof.

He realized that these results would allow him to solve a variant of the Dirichlet problem for an ellipsoid, a problem he had encountered in Gauss's *Allgemeine Lehrsätze*.[12] He also discovered that the essential property of the Lamé functions was a certain integral identity that he could generalize to arbitrary closed surfaces. That is how he was led to the study of the eigenvalues of the operator mentioned above:

> "The functions ζ, mentioned above, are then defined by equations of the form
>
> $$\iint \frac{l'\zeta' \, \mathrm{d}\omega'}{\Delta} = m\zeta,$$
>
> where m is a constant that changes when one passes from one function to another. After having studied the matter I do not hesitate to regard the functions ζ as being of the utmost importance in analysis."[13]

Liouville argued for the existence of these eigenfunctions using a variational technique that was later called the Rayleigh-Ritz method and he proved many of their important properties. For example he proved that eigenfunctions corresponding to different eigenvalues are orthogonal in a certain sense, and he argued that an arbitrary function on the surface could be expanded in a "Fourier"-series expansion of eigenfunctions. These results anticipated many later developments by

[10] Liouville 1843a

[11] Liouville 1843b. A reconstruction of the argument based on Liouville's unpublished notes can be found in Lützen 1990, pp. 477 – 512.

[12] Gauss 1840

[13] Liouville 1845a

about 40 years. Still, though Liouville was convinced of the importance of these eigenfunctions, he did not publish his very remarkable investigations. Only one small note in which Liouville generalized some of his results to a larger class of symmetric operators were published at the time.[14]

3.3 Heat and Sturm-Liouville theory

Where Liouville's spectral theoretical results about integral operators remained unpublished his earlier results about spectral theory of differential operators have become famous. They were developed in the 1830s in collaboration with his friend Charles François Sturm. Their starting point was Joseph Fourier's and Siméon Denis Poisson's theories of heat conduction in homogeneous materials and the resulting mathematical theory of trigonometric series.[15] They wanted to generalize the theories to heterogeneous materials.

In the case of heat conduction in a bar they set up the corresponding partial differential equation and separated variables. This led them to an equation of the form

$$(k(x)V'(x))' + (g(x)r - l(x)) = 0$$

with the boundary conditions

$$\begin{aligned} k(x)V'(x) - hV(x) &= 0 \qquad \text{for} \quad x = \alpha \\ k(x)V'(x) + HV(x) &= 0 \qquad \text{for} \quad x = \beta \end{aligned}$$

where V represents the unknown temperature, k, g and l are arbitrary positive functions representing the physical properties of the bar and r is a numerical parameter.

Fourier had solved several special cases of these equations where, k, g and l had been explicitly given functions. In the general case considered by Sturm and Liouville, where k, g and l are arbitrary functions, they could not find an explicit expression for the solution. Still they (in

[14] Liouville 1845b. A reconstruction of Liouville's theory based on his unpublished notes can be found in Lützen 1990, pp. 601 – 629.

[15] Sturm also mentioned oscillatory motion of elastic solids and fluids as problems that lead to the equations of Sturm-Liouville theory (Sturm 1836).

particular Sturm) were able to deduce many properties of the solutions from the equation itself. For example Sturm could show that there are non-trivial solutions to the problem for a denumerable number of (eigen)values of r and he proved theorems concerning the number of zeroes and maxima and minima of these solutions (the oscillation and separation theorems).

Combining Sturm's results with those of his other friend Peter Gustav Lejeune Dirichlet concerning ordinary trigonometric Fourier series, Liouville was then able to prove that the "Fourier" series of eigenfunctions corresponding to a piecewise continuous piecewise monotonous function is convergent.[16] He also published a proof that the "Fourier" series converges to the expanded function but he later came to realize that this proof was flawed.[17]

Sturm-Liouville theory was innovative not only because of its new results, but mainly because of the nature of the results. Where earlier works on differential equations had primarily dealt with finding explicit expressions of the solutions, Sturm and Liouville focused on the qualitative behavior of the solutions. This novel orientation of the results was an important part of a general trend in mathematics of the 19th century away from formula based quantitative mathematics and towards more conceptual and qualitative theories. It is worth emphasizing that in the case of Sturm-Liouville theory it was the generality of the physical problem that forced Sturm and Liouville to make this fundamental change in the course of mathematics. And when the next great advance in the direction of a qualitative theory of differential equations was made by Henri Poincaré late in the 19th century it was also prompted by a physical problem namely the stability of the solar system.

3.4 Electrodynamics and differentiation of arbitrary order

As a last example of a theory developed by Liouville as a result of inspiration from physics I shall mention his theory of differentiation of arbitrary order. This theory deals with differential operators of the form

[16] Liouville 1837

[17] It was probably Dirichlet himself who called Liouville's attention to the insufficiency of the argument. For more information on this and Sturm's and Liouville's theories in general see Lützen 1990, pp. 423 – 475.

$(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)^\mu$ where μ is any complex number. The theory is particularly useful when μ is a fraction, and therefore the theory is today often called fractional calculus. Liouville seems to have developed this calculus in order to solve a fundamental problem in Laplacian physics. According to Pierre-Simon Laplace all phenomena of nature could and should be explained as the result of elementary infinitesimal forces between the smallest parts of matter and some imponderable fluids.[18] The question that Liouville wanted to solve was how to determine the infinitesimal fundamental force laws from empirical measurements of necessary finite interacting bodies.

He was introduced to this kind of problems in a series of lectures in 1826 – 1827 at the Collège de France where Ampère explained his newly developed electrodynamic theory. Ampère is often considered as an anti-Laplacian but his electrodynamics still shares many ideas with Laplace. In particular Ampère also wanted to explain all electric and magnetic phenomena as a result of infinitesimal fundamental interactions. But contrary to Laplace the forces did not act between particles but between directed elements of a conductor.

In connection with Ampère's lectures Liouville wrote lecture notes that were corrected by Ampère himself. He also added some remarks of his own, one of which was published as his first published paper.[19] By 1832 he had discovered that the problem of the determination of the infinitesimal fundamental force of Ampère's electrodynamics and more generally of Laplacian physics could be translated into integral equations and he had discovered that these integral equations could be reformulated as differential equations of fractional order. For example in his first paper about his new calculus[20] Liouville showed how Biot and Savart's law of attraction between an infinitesimal element mm' of a conductor and a magnetic pole P could be determined when the attraction $f(y)$ between P and an infinite linear conductor MM' is known for all values of the distance y between the pole P and the conductor (see Figure 1).

[18] Fox 1974
[19] Liouville 1829
[20] Liouville 1832, pp. 15 – 20

Liouville took it for granted that the attraction between P and mm' is of the form

$$\varphi(r)\sin\theta\,\mathrm{d}s$$

where $\mathrm{d}s$ is the length of mm', and θ is the angle made by MM' and the line, of length r, connecting P and the midpoint of the element.

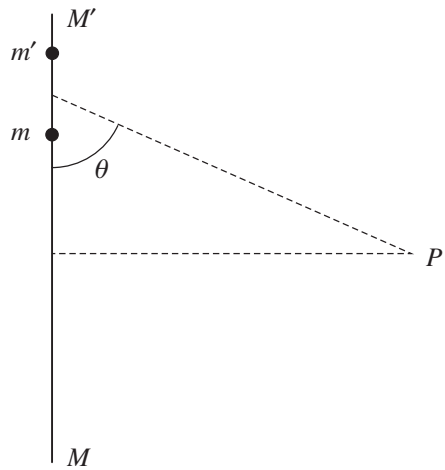


Figure 1
Interaction between a magnetic pole P and a conductor $M'M$

The problem is to determine φ. Integrating the expression $\varphi(r)\sin\theta\,\mathrm{d}s$ over the entire conductor MM' Liouville found the following expression for the total force

$$f(y) = 2y\int_0^\infty \frac{\varphi(\sqrt{s^2+y^2})}{\sqrt{s^2+y^2}}\,\mathrm{d}s.$$

This is an integral equation from which ϕ must be determined. Liouville transcribed the right hand side into a fractional integral, solved the resulting fractional differential equation and found

$$\varphi(r) = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}r\frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}}(f(r)/r)}{\mathrm{d}(r^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Jean-Baptiste Biot and Félix Savart had shown that $f(r) = k/r$ in which case the solution becomes $\varphi(r) = k/2r^2$ which gives the well known Biot and Savart's law.

Liouville also showed how his calculus of arbitrary order also allowed him to deduce Ampère's fundamental law between conducting elements and how one can determine the law of gravitation between point masses if one experimentally knows the gravitational attraction between different finite homogeneous bodies.

So here we see an example where a physical research program – in this case Laplacian physics – led to the development of a whole new mathematical theory – here Liouville's fractional calculus. The physical problem complex even determined some of the details of the mathematical theory. Indeed, there exist several types of fractional calculus, but the one developed by Liouville has the characteristic property that it only works for functions that fall off sufficiently fast at infinity. This property was dictated by the fact that Liouville designed his calculus to deal with forces and potentials that go to zero at infinity.

4 Heinrich Hertz's Principles of Mechanics. Late 19th century

4.1 Pure mathematics? Neo-humanism

Around 1840 Germany gradually overtook France as the leading mathematical nation. In contrast to the French polytechnic spirit mathematics in Germany was mostly considered as a part of a neo-humanistic movement. With the words attributed to Jacobi: "Mathematics exists solely for the honor of the human mind"[21]. Though the purity of mathematics became a more dominant feature in the self-understanding of the mathematicians of the time, some historians have tended to exaggerate the isolation of mathematics of the period.

As an example, let me mention the history of non-Euclidean geometry. Historians from the late 19th century and the early 20th century tended to tell this story as an internal mathematical story of the investigation of a system of axioms (the Euclidean axioms) and in particular of the dependence or independence of the parallel postulate. However, as recent historians of mathematics such as Jeremy Gray[22] have pointed

[21] Fuchs 1967
[22] Gray 1989

out, the main actors in the history such as Gauss, Nikolai Ivanovich Lobachevsky, Bernhard Riemann and Hermann von Helmholtz were not particularly interested in axiom systems. They were much more interested in the structure of space i. e. the physical space we live in and in which physics plays out. The strategy followed by Riemann and to some degree also by the other actors was to investigate first what are the mathematically possible structures of space and then to test empirically which of these possibilities we live in. In this way the development of non-Euclidean geometry was very much part of a physical investigation.

Moreover, when non-Euclidean geometries were finally generally accepted around 1870 they were immediately connected to mechanics. Thus Wilhelm Killing wrote about *Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen*[23] and Rudolf Lipschitz and Gaston Darboux geometrized ordinary mechanics. The idea of the two latter was to consider the motion of a conservative system of points as the motion of one point in a high dimensional configuration space. More precisely they showed how the trajectory of the system could be considered as a geodesic in this space equipped with a Riemannian metric formed from the potential energy of the system. In this way they revealed a beautiful connection between Hamilton-Jacobi theory in mechanics and some of Gauss's theorems concerning geometry of surfaces.[24] Their inclusion of the forces (via the potential) into the geometry can be viewed as an anticipation of an important aspect of Albert Einstein's general theory of relativity.

4.2 Heinrich Hertz's mechanics

Another way to get rid of forces in mechanics was suggested by Heinrich Hertz in his posthumously published *Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt*.[25] This book presented a remarkable conglomerate of interacting novelties in physics, mathematics and philosophy. I shall not enter into Hertz's celebrated philosophy of images but stick to the physical content of the book and the mathematical form it was expressed in.[26] The most characteristic feature of the physical content is

[23] Killing 1885
[24] Lützen 1995
[25] Hertz 1894
[26] For a more detailed analysis of all the novelties of the book see Lützen 2005.

its exclusion of force as a primary physical entity. Rather than including the forces into the geometry as Lipschitz and Darboux had done, Hertz described forces as resulting from a hidden system of masses (an ether) connected to the ordinary masses by rigid connections. He expressed his mechanics in a geometrical form in which he introduced a special (non-Euclidean) metric in configuration space.

According to Hertz himself the physical content and the mathematical form of his mechanics were independent of each other, although they were made to fit each other very well. When one studies the process of creation of Hertz's mechanics as it is revealed by his 5 surviving drafts of the book one can see that in many places the interaction between mathematics and physics was more intimate than Hertz's public statement suggests. I shall give two examples here.

4.3 Physics influences mathematics: Reduced components of a vector

In the *Prinzipien der Mechanik* a central role is played by what Hertz called "the reduced component of a vector quantity in a given direction", a concept corresponding to what is today called the covariant component of a vector. This concept is absent from the first shorter drafts and only appears towards the end of the first long draft[27]. In the beginning of that draft Hertz had operated with unreduced components that gave an unusual appearance to the laws of mechanics. However, when he had derived an unusual version of Hamilton's equations he introduced the reduced components so that the equations got the more familiar form.[28]

This example shows that Hertz was inspired by the mechanical formalism to introduce an important geometric concept namely the covariant component of a vector. The next example will show how conversely the mathematical formalism led to important physical concepts in his mechanics.

4.4 Mathematics influences physics: Massenteilchen

In Hertz's mechanical image of the physical world all matter, ordinary as well as hidden, is made up of infinitely many identical infinitely small

[27] Deutsches Museum, Heinrich Hertz Nachlass, HS 2845, p. 51

[28] For more information see Lützen 2005, pp. 181 – 185.

Massenteilchen (small mass parts). These Massenteilchen have enjoyed some fame because Ludwig Wittgenstein according to Gerd Grasshoff modeled his idea of simple objects on them.[29] When one reads Hertz's book the Massenteilchen seem to be introduced in order to give a simple image of matter. In particular Hertz defined the mass of a material particle as a number proportional to the number of Massenteilchen in it.

However Hertz's drafts of the book show rather clearly that the Massenteilchen were in fact originally introduced by Hertz in order to make the line element of the geometry work. In the published book Hertz defined the length ds of an infinitesimal displacement of a system of masses by the formula

$$m\,\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu=1}^{3n} m_\mu\,\mathrm{d}x_\mu^2, \tag{1}$$

where m is the total mass of the system, m_μ is the mass of one of the particles of the system and $\mathrm{d}x_\mu$ is the change of one of its rectangular coordinates. However, in the first drafts Hertz had not worked with this weighted quadratic mean value but with the unweighted quadratic mean value

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu=1}^{3n} \mathrm{d}x^2. \tag{2}$$

In the first long draft Hertz also first defined the length of the displacement as follows:

> "The magnitude of the displacement of a system of material points will be measured [by the quadratic mean value of the displacements of the masses of the system]."[30]

However he immediately crossed out the bracketed end of this sentence and replaced it with the following: "by the quadratic mean value of the displacement of all the Massenteilchen of the system".

At the same time he seems to have returned to the definition of mass on p. 1 of the draft and intercalated a definition of the Massenteilchen and a statement of the definition of mass of a material point as proportional to

[29] Grasshoff 1998

[30] Deutsches Museum, Heinrich Hertz Nachlass, HS 2845, p. 2

the number of the Massenteilchen it is made up of. With this definition at hand Hertz could then deduce the formula (1) of the magnitude of the displacement from the quadratic mean value of the Massenteilchen.

So it seems as though Hertz had become aware of the superiority of the weighted line element (1) over the Euclidean one (2). For example this allowed him to define the energy of the system by the usual formula $E = \frac{1}{2}m(\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)^2$. Moreover he seems to have preferred to define the length of the displacement as a (Euclidean) quadratic mean value. And he seems to have discovered that a way out would be to introduce the Massenteilchen.[31]

If this reconstruction of Hertz's road to the Massenteilchen is correct, it was the geometric form (the line element) that led Hertz to introduce the central physical concept of Massenteilchen into his mechanics.

So in the development of Hertz's mechanics we find examples of mathematics influencing physics as well as physics influencing mathematics.

5 The theory of distributions. Early and mid-20th century

5.1 Mathematical autonomy and structures

Before the end of the 19th century most philosophers connected mathematics to the real world. For Plato mathematics dealt with ideal reality and for Aristotle it was an abstract description of the real world. According to Immanuel Kant mathematics was an a priori construction in intuition but it was synthetic and a necessary precondition for our ordering of sense perceptions. From around 1870 mathematics gradually lost its philosophical tie to the real world and Non-Euclidean geometry was partly responsible for this change. Non-Euclidean geometries were shown to be just as consistent as Euclidean geometry. And even though only one geometry might turn out to describe physical space mathematicians decided that all geometries were worthy of study. In principle reality had no longer any say over which axioms mathematicians could chose to base their theories on. Axioms became in

[31] For a more complete analysis see Lützen 2005, pp. 146 – 158.

principle arbitrary (but hopefully consistent) points of departure of our reasoning and mathematics became (in the view of the Bourbakists) a study of mathematical structures. In this formalist view of mathematics, the applicability of mathematics to the real world became unreasonable in Eugene Wigner's words[32].

However, as explained in the introduction physics continued to influence many areas of mathematics. As an example I shall consider the development of the theory of distributions.

5.2 Distributions: a functional analytic generalization of functions

In the period 1945 – 1950 Laurent Schwartz developed a generalization of the concept of function.[33] He defined a distribution as a continuous linear functional on the space $C_c^\infty$of infinitely often differentiable functions with compact support on the real axis. An ordinary (locally integrable) function f defines a distribution

$$\varphi \to \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

But it is not all distributions that are defined in this way from a function. For example one can define the so-called δ-distribution as the functional that maps a test function in C_c^∞ into its value at 0: $\delta(\varphi) = \varphi(0)$. However there is no ordinary function $\delta(x)$ that satisfies

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(0) \tag{3}$$

for all test functions φ. In this sense distributions can be considered generalized functions.

Schwartz's definition of distributions and the theory of these objects relied in an essential way on the 20th century abstract mathematical structures more specifically on functional analysis. And Schwartz himself was a member of the Bourbaki group who wrote the series of books *Élements de Mathématiques* that epitomized the new structural view of mathematics.

[32] Wigner 1960
[33] Schwartz 1950 – 51

5.3 Early δ-functions

Yet, the inspiration for the new theory of distributions came from physics. In fact distributions, in particular the δ-function had turned up more than a century earlier in connection with various physical theories. In Fourier's theory of heat conduction (1822) the δ-function appeared in connection with the corresponding trigonometric series. For example Fourier deduced the identity

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\alpha) \left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \cos i(x-\alpha) \right) \mathrm{d}\alpha.$$

This intuitively means that $\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \cos i(x-\alpha)\right)$ must represent $\delta(x-\alpha)$. However, in his edition of Fourier's collected works Darboux, in conformity with the rigorous classical ideas of his time, declared that this series is divergent and thus does not make any sense.[34]

Still, around the same time the δ-function was used by Gustav Kirchhoff in connection with electrostatics and the Greens function.[35] He defined it as a function that is zero for every finite value of x but such that

$$\int \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

In Oliver Heaviside's operational calculus that was designed to solve problems of telegraphy the δ-function played a central role. Heaviside defined it as the derivative of the Heaviside step function which is 0 on the negative real axis and 1 on the positive real axis. Also its higher derivatives were used by Heaviside.[36]

However, the δ-function only received its name and its great fame when Paul Dirac used it in 1926 in his new formalism of quantum mechanics.[37] He defined it similarly to Kirchhoff and remarked that it must have the property (3).

[34] See Fourier 1888, p. 234 and the footnote on that page. For a more thorough discussion of the prehistory of the theory of distributions see Lützen 1982. The early use of the δ-function is discussed on pp. 110–143.

[35] Kirchhoff 1882

[36] Heaviside 1899

[37] Dirac 1926

Despite the great efficiency and elegance of Dirac's formalism his use of the δ-function was criticized by John von Neumann. Von Neumann pointed out that there does not exist a proper function with the properties that the δ-function was supposed to have, and so he made his own alternative foundation of quantum mechanics based on an abstract Hilbert space.[38]

The appearance of improper functions like the δ-function was only one of the sources of inspiration for Laurent Schwartz's invention of the theory of distributions.

5.4 Generalized solutions of partial differential equations

The most direct inspiration for Schwartz was the attempts to give meaning to generalized solutions of partial differential equations. This problem went back several hundred years to the discussions in the middle of the 18th century about the vibrating string. Here Jean le Rond d'Alembert had shown that if f is an arbitrary function, $f(x-t)$ would satisfy the wave equation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Classically one must require that f is twice differentiable but from the point of view of physics waves with corners are entirely feasible. This had already made Leonhard Euler claim that physics will force us to reconsider the concept of function and the concept of a solution to a partial differential equation. However, with the advent of rigorous analysis of the 19th century Euler's call for generalization was mostly overheard by mathematicians. Only at the beginning of the 20th century several mathematicians developed different concepts of a generalized solution of a partial differential equation. In most of these theories $f(x-t)$ is a generalized solution of the wave equation also when f is not differentiable.

Laurent Schwartz also began his approach to distribution theory by developing a concept of generalized solutions of partial differential equations. But he was not entirely satisfied with his approach because it did not make sense of the derivatives on the right hand and left hand

[38] Von Neumann 1927

side of the wave equation separately. Schwartz wanted a theory where the derivative f' made sense also for non differentiable functions.

In 1945 he found the answer. First he developed a theory of what he called convolution operators and some months later he simplified the theory and defined a generalized function as a functional, as described above.[39] In fact Schwartz had been anticipated by Sergei Sobolev in 1936, but Sobolev had not developed the theory as far as Schwartz did.[40]

5.5 Generalized Fourier transform

Another problem-complex that also inspired Schwartz in his approach to distributions was the generalization of the Fourier transform. This transform was of great utility in the theory of differential equations but its scope was limited by the fact that its classical version only applies to functions that decrease sufficiently fast at infinity. During the period 1925 – 1927 Hans Hahn, Norbert Wiener (who used it to rigorize Heaviside's operational calculus) and Salomon Bochner developed different generalizations of the Fourier transform that overcame this limitation. Schwartz realized how the theory of distributions could generalize their approach even further and make it much more elegant and symmetric.[41]

5.6 Distributions between structuralism and applications

Thus the theory of distributions was developed as a remedy of problems that had arisen in connection with physical applications of mathematics, either directly as in the case of the improper δ-function or indirectly as in connection with the attempts to generalize the notion of a solution of a differential equation and the Fourier transform, attempts that were in turn made necessary by physical applications. But the solution of the problems was found in the highly structural field of functional analysis.

[39] A more extensive account of the development of generalized solutions of partial differential equations can be found in Lützen 1982, pp. 13 – 72. Schwartz's road to the theory of distributions is described on pp. 148 – 158 of the same book and in Schwartz's autobiography: Schwartz 1997.

[40] Sobolev 1936

[41] This aspect in the prehistory of distributions is discussed in more detail in Lützen 1982, pp. 73 – 91.

When distributions had been created they in turn led to further developments in functional analysis. In particular Jean Dieudonné suggested to Schwartz that the concept of convergence of a series of distributions ought to be derived from a suitable topology on the space of distributions. Schwartz and Dieudonné in collaboration then invented this topology, the first example of a so-called LF-topology.[42]

6 Conclusion

In this paper I have given a number of examples of interactions between mathematics and physics. In particular I have shown that physics often influences mathematics both by suggesting problems to be solved and by pointing to ways to solve them. I have shown that such interactions have taken place all through the 19th and 20th century although the philosophical ideas about the relation between the two fields have changed dramatically during this period. Finally, I have tried to argue that this physical influence on mathematics is partly responsible for the effectiveness of mathematics in the description of physical phenomena.

7 Bibliography

Dieudonné, Jean and Schwartz, Laurent [1949]: La dualité dans les éspaces (F) et (LF), Annales de l'Institut Fourier **1**, 61 – 101.

Dirac, Paul A. M. [1926]: The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics, Proceedings of the Royal Society, A **113**, 621 – 641.

Fourier, Joseph [1888]: Théorie analytique de la chaleur (1822). Oeuvres de Fourier (ed. Darboux, Gaston) vol. **1**, Gauthier-Villars, Paris.

Fox, Robert [1974]: The Rise and Fall of Laplacian Physics, Historical Studies in the Physical Sciences **4**, 89 – 136.

Fuchs, Walter R. [1967]: Mathematics for the Modern Mind, MacMillan Co., New York.

Gauss, Carl Friedrich [1828]: Disquisitiones generales circa superficies curvas, Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis recentiores, **6**, math. Classe, 99 – 146, *Werke* **4**, 217 – 258.

[42] Dieudonné and Schwartz 1949

Gauss, Carl Friedrich [1840]: Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839 (4), Weidmannsche Buchhandlung, Leipzig, 1840.

Grasshoff, Gerd [1998]: Hertz's philosophy of nature in Wittgenstein's Tractatus, in Baird, D., Huges, R. and Nordmann, A. (eds.): Heinrich Hertz: Classical Physicist, Modern Philosopher, Kluwer, Dordrecht, 243 – 268.

Gray, Jeremy [1989]: Ideas of space. Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic, Clarendon Press, Oxford; Oxford University Press, New York.

Green, George [1828]: Essay on the Application of Mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism, Wheelhouse Nottingham; also in: Journal für die reine und angewandte Mathematik **39** (1850), 73 – 89, **44** (1852), 356 – 374, **47** (1854), 161 – 221; *Mathematical Papers*, 3 – 115.

Heaviside, Oliver [1899]: Electromagnetic Theory, vol. **2**, The Electrician Printing and Publishing Company, Ltd, London

Hertz, Heinrich [1894]: Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt, Barth, Leipzig.

Killing, Wilhelm [1885]: Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen, Journal für die reine und angewandte Mathematik **98**, 1 – 48.

Kirchhoff, Gustav [1882]: Zur Theorie der Lichtstrahlen, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1882), 641 – 669.

Lakatos, Imre [1976]: Proofs and Refutations, Cambridge University Press, Cambridge.

Liouville, Joseph [1829]: Démonstration d'un théorème d'électricité dynamique, Annales de Chimie et Physique **41**, 415 – 421.

Liouville, Joseph [1832]: Sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions, Journal de l'École polytechnique, **13** (21. cahier), 1 – 69.

Liouville, Joseph [1834]: Note sur la figure d'une masse fluide homogène, en équilibre, et douée d'un movement de rotation, Journal de l'École polytechnique, **14** (23. cahier), 289 – 296.

Liouville, Joseph [1837]: Troisième mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries, dont les divers termes sont assujettis

à satisfaire à une meme équation différentielle du second ordre, contenant un parameter variable, Journal de mathématiques pures et appliqués, **2**, 418 – 437.

Liouville, Joseph [1843a]: Sur les figures ellipsoïdales à trios axes inégaux, qui peuvent convener à l'équilibre d'une masse liquide homogène, douée d'un mouvement de rotation, Comptes rendus de l'Académie des sciences, **16**, 216 – 218; Connaissance des temps pour 1846, (1843), 85 – 96.

Liouville, Joseph [1843b]: Recherche sur la stabilité de l'équilibre des fluids, Comptes rendus de l'Académie des sciences, **16**, 363.

Liouville, Joseph [1845a]: Solution d'un problème relative à l'ellipsoïde, Comptes rendus de l'Académie des sciences, **20**, 1609 – 1612.

Liouville, Joseph [1845b]: Sur une propriété générale d'une classe de fonctions, Journal de mathématiques pures et appliqués, **10**, 327 – 328.

Liouville, Joseph [1847]: Note sur deux letters de M. Thomson relative à l'emploi d'un système nouveau de coordinées orthogonales dans quelques problèmes des theories de la chaleur et de l'électricité, et au problème de la distribution d'électricité sur le segment d'une couche sphérique infiniment mince, Journal de mathématiques pures et appliqués, **12**, 265 – 290.

Liouville, Joseph [1850a]: Théorème sur l'équation $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \lambda(\mathrm{d}\alpha^2 + \mathrm{d}\beta^2 + \mathrm{d}\gamma^2)$, Journal de mathématiques pures et appliqués, **15**, 103.

Liouville, Joseph [1850b]: Extension au cas de trios dimensions de la question du trace géographique, Note VI in Monge, Gaspard: Application de l'analyse à la géométrie, 5. ed. (ed. Liouville), Bachelier, Paris.

Lützen, Jesper [1982]: The Prehistory of the Theory of Distributions, Springer, New York [et al.].

Lützen, Jesper [1990]: Joseph Liouville 1809 – 1882: Master of Pure and Applied Mathematics, Springer, New York [et al.].

Lützen, Jesper [1995]: Interactions between Mechanics and Differential Geometry in the 19th Century, Archive for History of Exact Sciences, **49**, 1 – 72.

Lützen, Jesper [2005]: Mechanical Images in Geometric form: Heinrich Hertz's Principles of Mechanics, Oxford University Press, Oxford.

Von Neumann, John [1927]: Mathematische Begründung der Quantenmechanik, Nachrichten von der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, 1 – 57.

Schwartz, Laurent [1950 – 51]: Théorie des distributions, Vol. 1 (1950), Vol. 2 (1951), Hermann, Paris.

Schwartz, Laurent [1997]: Un mathématicien aux prises avec le siècle, Odile Jacob, Paris. English translation: A mathematician grappling with his century, Birkhäuser, Basel, 2001.

Sobolev, Sergei [1936]: Méthode nouvelle à resoudre le problème de Cauchy pour les équations linéaires hyperboliques normales, Matematicheskij Sbornik **1** (43), 39 – 71.

Sturm, Charles François [1836]: Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre, Journal de mathématiques pures et appliqués, **1**, 106 – 186.

Thomson, William [1845a]: Démonstration d'un théorème d'analyse, Journal de mathématiques pures et appliqués, **10**, 137 – 147.

Thomson, William [1845b]: Extrait d'une letter de M. William Thomson à M. Liouville, Journal de mathématiques pures et appliqués, **10**, 364 – 367.

Thomson, William [1847]: Extraits de deux letters adressées à M. Liouville, Journal de mathématiques pures et appliqués, **12**, 256 – 264.

Wigner, Eugene [1960]: The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, Communications in Pure and Applied Mathematics, **13**, 1 – 14.

Mathematics as one of the basic Pillars of physical Theory: a historical and epistemological Survey

Juraj Šebesta

1 Introduction

In this paper I would like to elucidate the role of mathematics in the creation of physical theories – both from the historical and epistemological point of view. First of all let me begin with speaking about the motivation for this issue.

2 Physical theory as the essence of physical knowledge

A very interesting problem is discussed very often: what is the ground of physical knowledge – experiment or theory? Usually, experience is the starting point only, but it is not the ground of knowledge. Physical theory is the ground of physical knowledge. Why is that? Firstly, a historical analysis of knowledge development shows that there is an asymmetry between empirical and theoretical cognition: namely, there is not pure empirical cognition, almost always it is accompanied by theoretical cognition because human beings are thinking beings. Theoretical cognition very often starts from empiricism, but it becomes autonomous at a certain stage of its development. Moreover, thanks to abstractions, formal logic and mathematics, it is able to penetrate reality far more deeply than empiric cognition and to acquire new findings. Secondly, theory is not only a system of knowledge but it also provides a method how to acquire findings, how to systematize and explain it. It is mathematics and a system of concepts that carry out such a function in physics. Thirdly, last but not least, only a theoretical form of knowledge is able to provide the explanation of phenomena and it is known that explanation is the main objective of any cognition. Therefore, physical theory is the central point of physical knowledge.

3 The four basic pillars of physical theory

It follows from the analysis of the history of physics that any physical theory rests on four pillars: physical ideas about the mechanism of phenomena, adequate mathematical description, philosophical and methodological bases, and the physical world-view. A short comment

has to be made: one can say that the philosophical and methodological base is sometimes explicitly formulated, sometimes it is not evident, but it is always present. Speaking about the physical world view we have in mind a professional one – it means a complex of ideas, concepts, models, laws, methods of cognition etc. which a certain physicist has acquired during his study and professional work. Every physicist is influenced by his world view when he chooses the theme of his research, his methods of investigation, an interpretation of the results, a way to create a theory etc. We focus hereafter on the mathematical aspect of physical theories, on the role of mathematics in the development of physics. However, we touch philosophical and methodological aspects too, because it very strongly influenced the usage of a concrete mathematical method very often.

4 Mathematics as a tool for the construction of a physical theory – a historical survey

The relationship between mathematics and physics in the process of creating physical theories has been changing. We will demonstrate how mathematics was used in the creation and development of the main physical theories.

4.1 Classical mechanics

Classical mechanics originated as a system of physical ideas, concepts and laws described and explained by geometrical language. Galileo Galilei insisted that physics should be mathematical. He set up the mechanics of a terrestrial body's motion. To describe the most simple phenomena – free fall, horizontal and inclined throw etc. – he used Euclidian geometry. Johannes Kepler acted analogically when he set up celestial mechanics. In addition, he used a method which could be called geometrical integration.

Isaac Newton summarized, systemized, developed, and set forth results of previous development of mechanics mathematically. Nevertheless, he did not use his method of fluxions in his main work on mechanics *Principia mathematica*[1] but he used a geometrical method as

[1] Newton 1687

Galileo did. So one can say, that the relationship between mathematics and physics in Newton's theory is more or less discrepant. Firstly, in the *Principia*, he used a mathematical procedure: as it was common in works on geometry he formulated definitions, hereafter axioms and lastly he solved deductively several mechanical problems. Secondly, he created a method of fluxions and his setting in the *Principia* is very close to the method of infinitesimal quantities. On the other hand he solved all mechanical problems by a geometrical method – by means of abscissas, curves, tangents and angles. Why did Newton not use the method of fluxions in his *Principia*? In our opinion the most relevant view is the following: he became a victim of his conviction that what really exists is veracious only. At that time he could not say that the issues of his mathematical investigations were real. Because of this reason these researches were absolutely independent from his mechanical studies.

The next step was made by Leonhard Euler. He reformulated Newton's mechanics by means of the language of Leibniz's differential and integral calculus; Euler rewrote Newton's second law of motion in the form of a second order differential equation. Strictly speaking, only from this moment onwards Newton's second law can be called an equation of motion. Later Euler projected vector lines of forces onto axes of a cartesian coordinate system and obtained the equations of motion in the modern form. Therefore, Newton's second law in analytic form became a ground for Euler's mechanics. Thereafter, by means of a new equation, Euler studied various motions of a free point mass, of a constrained point mass, of point mass systems etc. A new mathematical apparatus was used by Euler for the description of the motion of rigid bodies too. So one can say, that Leonhard Euler built a very strong foundation of analytical mechanics. Its development was completed by Joseph Louis Lagrange.

Lagrange formulated the principle of virtual displacements (Lagrange's principle) which became the ground of statics. Thereafter he chose a combination of his principle and d'Alembert's principle as the ground of dynamics. Starting from these two principles he derived the general equation of mechanics. In addition, he introduced generalized coordinates to gain a number of equations equal to the degree of freedom what is the mathematical requirement. By means of generalized coordinates he derived the so called Lagrange equations of

the second kind for a special function later called Lagrange function. He applied a general equation of mechanics also for solving a problem when the reaction forces of constraint had to be found out. By means of the so called Lagrange multipliers one can derive the Lagrange equations of the first kind from the general equation. All mentioned results were published by Lagrange in his *Analytical mechanics*[2]. We can say that in this book mathematics and physics are tools of equal value.

William Rowan Hamilton's works were the next stage in the mathematical improvement of classical mechanics. In 1828 Hamilton published a paper entitled *Theory of systems of rays*[3]. He constructed the mathematical apparatus of geometrical optics based on the so called principal function. It was applied to the description of light propagation regardless of the concrete notion of the nature of light. In 1834 – 35 W. R. Hamilton extended the theory of optic phenomena also to mechanics in the essay *On a General Method in a Dynamics*[4] based on the principle of varying action. The equations of motion derived by him in this paper are equivalent to Lagrange's equations. So they represent a culmination of classical mechanics. Moreover, Hamilton's canonical equations transcended the frame of mechanics because they were lawful also in optics and later in physics generally. Soon Carl Gustav Jacobi formulated the so called Hamilton-Jacobi equation. This method was applied by Josiah Willard Gibbs for creating statistical mechanics. Hamilton's analogy between optics and mechanics was used in the 1920s by Erwin Schrödinger then he was developing the wave variant of quantum mechanics.

4.2 The theory of the electromagnetic field

The constitution of the theory of the electromagnetic field was analogical in a certain sense to the origin of classical mechanics. Firstly, the experimental ground was created by Michael Faraday and after that a theory was formulated by James Clerk Maxwell. Maxwell learned in detail results and ideas of the great experimenter and he understood that Faraday's method of description and interpretation of phenomena is a mathematical one in spite of the fact that it is not expressed by means of

[2] Lagrange 1788
[3] Hamilton 1828
[4] Hamilton 1834

mathematics. So he aimed at translating Faraday's ideas, notions and results into the language of mathematics.

In the first paper *On Faraday's lines of force* (1856)[5] Maxwell applied the mathematical apparatus of hydrodynamics for describing the lines of force and tubes of force, for describing the electric current and magnetic phenomena using the analogy with the flow of a hypothetical non-compressible liquid. In such a way he found out the mathematical transcription of Faraday's ideas. In a second paper *On physical lines of force* (1861)[6] he predicted electromagnetic waves by means of mathematics. He also proved that the wave velocity is equal to the velocity of light. Maxwell's theory was completed in the paper *A dynamical theory of the electromagnetic field* (1864)[7]. Here he defined 20 field quantities (six vectors and two scalars) and formulated 20 equations using the quaternion calculus of W. R. Hamilton. Later vector calculus was developed from the quaternion one and Maxwell's equations were reformulated by means of vectors thanks to the effort of O. Heaviside, J. W. Gibbs and H. Hertz, and Maxwell's equations acquired the modern form – as four equations for the field vectors E, B.

4.3 The theory of relativity

The special theory of relativity was created in two steps. Firstly, A. Einstein set up a physical variant of the theory in 1905. For our purposes the second step was very important, a step made by Hermann Minkowski. In 1908 he introduced a four-dimensional formalism, in which originally autonomous quantities, such as space and time, momentum and energy, the intensity of an electric and the induction of a magnetic field were put together into four-vectors and four-tensors of the second degree. In such a way the original equations were transformed into equations between four-dimensional quantities. The behavior of four-vectors and four-tensors under the Lorentz transformation induced that the covariance of equations was provided automatically, so the validity of Einstein's principle of relativity was also guaranteed automatically. The position of each body in a certain state was represented by a world-point – a point in a four-dimensional pseudo-Euclidian space called world, and

[5] Maxwell 1856
[6] Maxwell 1861
[7] Maxwell 1864

the time evolution of states was represented by a world line – a curve in such a space.

The development from special to general relativity was very interesting. Shortly after completing the special theory, Einstein established the physical ground of general theory of relativity in 1907 – 12. Nevertheless, he did not have at his disposal the mathematical tools to create a consistent and complete theory of gravity. Therefore he asked his friend and classmate Marcel Grossmann for help. Grossmann found out that the non-Euclidian geometry developed by Bolyai, Lobachevsky and primarily Riemann could become the proper tool for building the new theory. In a joint paper published in 1913 the laws of physics' covariance towards non-linear transformation was postulated, and the formula for the space-time interval was generalized to be valid also in the case of body motion in a gravitational field. Einstein and Grossmann derived the equations of motion of a mass point and the arbitrary mass distribution affected by gravity. In the new theory a world line became a geodetic line in non-Euclidian space-time. A mass point moves along geodetics in a curved four-dimensional pseudo-Riemannian space. In 1915 Einstein completed the equation of the gravitational field and found the solution of it.

I would like to present a very interesting and instructive example of how the mathematical formulation of a theory can be influenced by a philosophical and methodological assumption. I mean the introduction of Einstein's lambda-term. After completing general relativity Einstein tried to apply it to the description of the Universe. He supposed that the Universe could be represented by a closed three-dimensional space (three-dimensional sphere) with finite volume and that the Universe does not change in time. But such an assumption was in contradiction with Einstein's original equation. To provide equivalence between the stationary model of the Universe and the equation of the gravitational field Einstein added a new term into the equation, the so called lambda-term. Fortunately, it came to light very soon that Einstein's model of the Universe was wrong. The Russian mathematician Alexander Friedman demonstrated the possibility of a non-stationary universe and he found out three solutions of Einstein's equation which represented three scenarios of the Universe evolution (1922 – 1923). Several years

later Edwin Hubble discovered that the redshift increased with distance (1929). This discovery led to the idea of an expansion of the Universe.

4.4 Quantum mechanics

Quantum mechanics originated as a result of the effort to solve several different problems: black-body radiation, the line form of spectra, the stability of atoms, the structure of light, and the interaction between radiation and matter. It took a quarter of a century while physics evolved from Planck's quantum hypothesis (1900) to quantum mechanics (1925).

At first Bohr's model came to existence. According to it, electrons circulate around the nucleus along circular orbits permitted partly by Bohr's postulates and partly by Bohr's quantum conditions. As it became clear very soon that such a model is not able to describe more complicated atoms Arnold Sommerfeld and William Wilson generalized Bohr's theory for orbits with arbitrary form. Unfortunately, it was not sufficient, so Karl Schwarzschild and independently Paul Epstein suggested using the idea of multiple periodical systems – their motion was not exactly periodical but it can be decomposed into a complex of harmonic oscillations with frequencies which are linear combinations of several basic frequencies.

As it became known that the traditional picture of orbital motion is not suitable for the description of the behavior of electrons and atoms it was necessary to search for new characteristics of the micro-objects. The successful research of Werner Heisenberg was inspired by the observability principle insisted upon by Ernst Mach and Albert Einstein. At that time frequencies of spectral lines and corresponding intensities were observable only. For that reason Heisenberg decided to take as the ground of the new kinematics angular frequencies ω_{mn} and amplitudes A_{mn} of radiation absorbed or emitted by an atom transiting from a state with energy E_m to a state with energy E_n. By means of these quantities he created a two-component expressions with variables m and n. Fourier's series consisted of such terms that Heisenberg considered as the analog of the classical coordinate $x(t)$. Later he derived an expression for $(x(t))^2 = x(t) \cdot x(t)$. He also created the product $x(t) \cdot y(t)$ and he found out that such a product is not commutative. As he was interested in the quantization of the energy of an inharmonic oscillator, this problem was not so important for him and was ignored by him. The quantity $x(t)$

and its derivatives were replaced in the equation for the inharmonic oscillator by the previously introduced quantities. Lastly Heisenberg calculated the energy levels of the oscillator.

Later Max Born realized that Heisenberg's two-component quantities are matrices. He and Pascual Jordan rewrote Heisenberg's formula and equations in the language of matrix calculus. As a result the non-commutativity of products was explained. The matrix variant of quantum mechanics was completed in a joint paper by Max Born, Werner Heisenberg and Pascual Jordan (1926), known as *Dreimännerarbeit*[8] in the history of physics.

Louis de Broglie used a completely different approach to solve the same problem (1923 – 24). He started from Einstein's hypothesis of the light quantum and he ascribed wave character not only to light but also to particles with non-zero rest mass. After that Erwin Schrödinger elaborated wave mechanics based on classical differential equations and moreover he proved that his wave form of quantum mechanics and Heisenberg's matrix variant are equivalent from the mathematical point of view.

The physical interpretation of quantum mechanics was found out only when its mathematical apparatus was completed. Max Born suggested a probabilistic interpretation of the wave function (1925). In 1927 Werner Heisenberg formulated the uncertainty principle and the uncertainty relationships for canonically associated quantum mechanical quantities. At that time Niels Bohr stated the complementarity principle. In such a way the functioning of the mathematical apparatus of quantum mechanics was justified. Later Paul A. M. Dirac elaborated the theory of operators and their representations; thereby the non-relativistic quantum mechanics was completed.

5 The epistemological role of mathematics in physics

Now I summarize the presented information on the role of mathematics in the creation of physical theories and on the changes of this role.

[8] Born et al. 1926

5.1 A new mathematical apparatus

First of all we have to observe one very important circumstance: each new physical theory was formulated by means of a new mathematical language. Such language was known in mathematics before but in physics it was not used. For example, classical mechanics was formulated by geometric language originally but step by step it was reformulated in the language of Leibniz's infinitesimal calculus in the works of Euler and Lagrange. Lastly, Hamilton used the variation calculus elaborated by Johann Bernoulli and Jacob Bernoulli two centuries before. James Clerk Maxwell made use of Hamilton's quaternions to derive the equations of the electromagnetic field. Maxwell's equations were reformulated by means of vector calculus in the works of Oliver Heaviside, Heinrich Hertz and Jossiah Willard Gibbs. Statistical methods and abstract phase space were applied in statistical mechanics. H. Minkowski reformulated physical ideas of A. Einstein by means of the language of four-dimensional pseudo-Euclidian space-time, four-vectors and four-tensors. In general relativity methods of non-Euclidian geometry were used at first, although J. Bolyai, N. Lobachevski and especially B. Riemann had elaborated the new geometry in the first half of the 19th century. Matrix calculus, operator theory and the theory of vectors in Hilbert space were applied in quantum mechanics.

The utilizing of a new mathematical apparatus was not a coincidence or an autotelic event. It gave the chance to describe and explain many new phenomena and moreover it allowed to gain new findings which caused many far-reaching consequences. For example, the methods of analytical mechanics based on differential and integral calculus permitted to find the solution for all sorts of mechanical problems. The description of terrestrial and celestial phenomena was unified. The new apparatus of the theory of the electromagnetic field enabled J. Clerk Maxwell to predict electromagnetic waves and to calculate the velocity of their propagation. He found out that it is identical to the velocity of light. In such a way the description of electric, magnetic and optic phenomena was unified. It was the second great unification in the history of physics. Statistical methods applied in statistical mechanics resulted in the finding that the laws of physics are probabilistic in principle and

that deterministic laws are only a special case of statistical laws when the probability is equal to one.

This aspect was generalized in quantum mechanics because it became clear that the probabilistic nature of physics is not connected to big sets of a great number of systems only, but it is valid for any phenomenon even for the isolated atom. There is only one difference: the reason for the probabilistic nature of laws. In quantum mechanics it is caused by the fact that the energy and momentum transferred in the process of measurement are comparable with the energy and momentum of the measured micro-object. The matrix calculus used in quantum mechanics indicated non-commutativety of the canonically associated physical quantities – momentum and position vector, energy and time. It means in physical language that the mentioned quantities could not be measured by means of the same experiment or measuring instrument.

In special relativity the formalism of Minkowski gave the chance to establish a more evident interrelation between certain physical quantities (coordinates and time, wave vector and angle frequency, momentum and energy etc.). It also pointed out that space and time are not separable because the coordinates and time (multiplied by the velocity of light) became the components of the same four-vector. Analogically, it was demonstrated that it does not make sense to consider the electric and magnetic fields separately, but that there is only an electromagnetic field. Moreover, in the formulation of Minkowski it became clear that not only the magnetic field could be considered as a relativistic effect of an electric field, but it is valid vice versa too, so there is a symmetry between both fields. In general relativity it emerged that the features of space are not a priori given, but that they are connected to the density of mass distributed in space. The prediction of the three variants of how the Universe could evolve (Friedman's solutions of Einstein's equations) were mentioned by us before.

5.2 The ratio of mathematics and physics in the creation of physical theories

The ratio of physics and mathematics was not equal in classical mechanics. At first, Isaac Newton built a theory which was formulated by means of geometry and thereafter the new theory was reformulated –

essentially, from the view of mathematics – in the works of L. Euler, J. L. Lagrange and W. R. Hamilton. On the other hand a new mathematical apparatus, namely the quaternion calculus, was used by J. C. Maxwell from the very beginning. For this reason he completed the theory of electromagnetic field in such a mathematical form that the modifications made by O. Heaviside, H. Hertz and J. W. Gibbs were more or less formal. So mathematics and physics were equal tools for the creation of the theory. Maybe, the situation in statistical mechanics was the most complicated one. The single components of the new mathematical apparatus (for example, thermodynamic potentials and expressions of thermo-dynamical quantities as derivatives of such potentials, abstract space and geometrical methods – in thermodynamics, statistical methods – in kinetic theory of gases, methods of phase space – in statistical mechanics) were introduced in different fields, in a different time and by different scholars. All methods were lastly unified and fully used by J. W. Gibbs in the final variant of the theory. The state of affairs in special relativity was very close to the development of classical mechanics – the physical variant of Einstein was reformulated by Minkowski. In general relativity Einstein built the physical ground of the theory and therefore he and Grossmann found out the proper mathematical apparatus and expressed physical ideas by means of the new mathematics – non-Euclidian geometry. A great change set in when quantum mechanics was created. One can say that the ratio of mathematics and physics became inverse. Firstly, the mathematical apparatus emerged and only after that physicists started to search for a physical interpretation of the mathematical description and of the results of mathematical calculations.

The fact that the creation of the formal and mathematical apparatus of a theory is forerunning the physical interpretation of its formalism, which is so evident in quantum mechanics, will apparently be a more and more striking feature of physical theories. This is connected to the circumstance that the physical cognition is penetrating more and more inward matter, to little areas and dimensions or contrary – to big areas and dimensions (in cosmology), to high and higher velocities, to very high temperatures and pressures. So we can say physics is moving away from the human common experience and as a result our findings connected to objects and their characteristics are more

and more mediated. For this reason also the ratio between empiricism as a starting point of the theory and the physical theory as such is more mediated. Why is this the case? Our concepts, notions and ideas are less and less concrete and they become more and more abstract. Therefore the graphical notions and concepts connected to them are failing; they do not yet fulfill a heuristic function so this function is more and more fulfilled by mathematical methods, mathematical models and non-graphical notions – various mathematical constructs. In our opinion it is the evident manifestation of the asymmetry between the empirical and the theoretical cognition, namely that empiricism does not exist without a theoretical cognition, whereas the theoretical cognition can develop autonomously. Physics is catching up with the situation, in which mathematics has existed for several centuries: today hardly any mathematician realizes that in the forepast history there was a very close connection between mathematics and common reality.

We would like to mention another important root of the intensive mathematisation of physics. For physics it is a characteristic effort to reach maximal universality, so as much as possible to simplify the system of knowledge according to the principle insisted by I. Newton and A. Einstein: to explain as much as possible the physical phenomena by means of a minimal amount of principles. But ... to simplify the system of knowledge means to use more and more complicated mathematical language. For example, in special relativity mechanics and electrodynamics were unified from the point of view of covariance of the fundamental equations of both theories towards Lorentz transformations. In general relativity the principle of relativity was generalized and it was valid in non-inertial systems too. However, both processes were accompanied by essentially more complicated mathematical apparatus.

5.3 The axiomatisation of theories

Gradual axiomatisation of physical theories is a very important feature of their development – especially from the point of view of the theme of our contribution. We have in mind, for example, the reformulation of classical mechanics in Hamiltonian-Lagrangean form, the world of Minkowski in special relativity, the reformulation of thermodynamics in the works of Carathéodory and Afanaseva, von Neumann's mathemati-

cally correct formulation of quantum mechanics. Generally speaking, axiomatisation means a theory transformation from a form originally completed by induction into a deductive form. A theory grounded on several postulates (principles or axioms), which resulted from an analysis of experiments (but they were not derived from experiments!) and which are based on common physical or epistemological laws and methods, is used as the starting point. Such a theoretical system is equipped only by the necessary mathematical language. Thereafter the concepts and mathematical apparatus corresponding to the original theory are enlarged and revised, the equation of motion is derived (for example, the equation of motion in classical mechanics, Schrödinger's "equation of motion" for the wave function), eventually Lagrange's function is constructed and the equation of motion is derived from it. Lastly, the consequences for special events or causes are deduced. Later such predictions are verified by experiments, thereby a theory is either confirmed or refuted. In the last case it is necessary to create a new theoretical system in order to explain such phenomena.

Axiomatisation could be understood as a manifestation of the following fact: physical theories tend to develop into a stage when axiomatic, deductive, formal logical and mathematical methods and procedures can be applied fully. The aim is a state of affairs when the logical and formal apparatus can be as much as possible autonomous and extricated from the original substantiality and "physicality". In such a way the laws of the liberated development of form can be enforced fully and new findings can be acquired. We meet here once more the manifestation of the asymmetry between the empirical and theoretical cognition: the empirical cannot exist without the theoretical but the theoretical is able to develop itself although it often starts from empirical knowledge.

There are several aspects of axiomatisation: logical, historical and genetic, heuristic, educational and so to speak erlangenisational. Now the last one will be discussed in detail.

5.4 "Erlangenisation" of physics

What does erlangenisation mean? We have in mind an effort that is in analogy with the Erlangen program of the great German mathematician Felix Klein. In the second half of the 19th century he intended to unify

all known geometries on the base provided by the formalism of group theory. Each kind of geometry had to be constructed as a theory of invariants of some group of transformations. Very interesting and important expectations became the motivation for the erlangenisation of physics: such approach could be heuristic. But in what sense? One could try to construct the formalism of a new theory as various extensions of the fundamental group of the previous theory. It has to be said that some results were hopeful, however the original intention was not realized.

I can ask the question: why was this effort not a success? Why is it not possible to construct new physical theories as extensions of some transformation group which was specific and essential for the old theory? In our opinion the failure of such tendencies in physics is no accidental event. We can illustrate this claim by the following example.

In the lecture entitled *Space and time*[9] and presented at the Congress of German naturalists in 1908 Hermann Minkowski mourned:

> «Bei dieser Sachlage, und da G_c mathematisch verständlicher ist als G_∞ hätte wohl ein Mathematiker in freier Phantasie auf den Gedanken verfallen können, daß am Ende die Naturerscheinungen tatsächlich eine Invarianz nicht bei der Gruppe G_∞ sondern vielmehr bei einer Gruppe G_c mit bestimmtem endlichen, nur in den gewöhnlichen Maßeinheiten äußerst großen c besitzen. Eine solche Ahnung wäre ein außerordentlicher Triumph der reinen Mathematik gewesen. Nun, da die Mathematik hier nur mehr Treppenwitz bekundet bleibt ...»[10]

We believe the lack of wit was not the problem. The essence of the issue lies in more depth. H. Minkowski expressed his idea when it was clear thanks to Albert Einstein that the velocity of light c is a limit for the velocity of any signal and that this velocity of light is a parameter of the new group. So before mathematicians could find out the axiomatic form of the physical theory (namely special relativity), physicists – in cooperation with mathematicians – had to establish the physical content of this theory.

However, the idea that physical content precedes axiomatisation cannot be, of course, generalized. Under certain circumstances the development of formal aspects in a theory can precede its content. For

[9] Minkowski 1909
[10] Minkowski 1909, p. 78

example, in last decades we noticed that the ratio between physical hypotheses and mathematical models was changed. Gradually, the analogy with the formal and mathematical description of phenomena is accented and the analogy with the physical mechanism of phenomena is weakened. Moreover, trying to find out a meaningful, useful, and adequate theory, which could function as a base of all sub-nuclear physics, physicists are constructing various mathematical constructs and models. Only thereafter they are seeking a physical interpretation of them. No wonder that this is a job more for mathematical physicists or even pure mathematicians than for theoretical physicists. The causes of that situation were discussed above.

6 Conclusion

The finding of the role of mathematics in the creation of physical theories resulted from an analysis of the historical development of physics roughly to the end of the 1930s. It is very probable that an analysis of the development after the 1930s will bring new and different information. We intimated something in this presentation but only intuitive insights. To make serious conclusions a serious analysis has to be made. This is a task for the future.

This investigation was done in the frame of the grant VEGA 1/0453/09 registered at the Faculty of Mathematics, Physics, and Computer Science, Comenius University.

7 Bibliography

Born, Max; Heisenberg, Werner; Jordan, Paul [1926]: Zur Quantenmechanik II. Zeitschrift für Physik **35**: 557 – 615.

Hamilton, William Rowan [1828]: Theory of systems of rays. In: L. S. Polak. Variacionnyje principy mechaniki. Gosudarstvennoje izdatel'stvo fiz.-mat. literatury, Moskva 1959.

Hamilton, William Rowan [1834]: On a General Method in a Dynamics. In: L. S. Polak. Variacionnyje principy mechaniki. Gosudarstvennoje izdatel'stvo fiz.-mat. literatury, Moskva 1959.

Lagrange, Joseph Louis [1788]: Analitičeskaja mechanika. GTTI Moskva, Leningrad, 1950.

Maxwell, James Clerk [1856]: On Faraday's lines of force. Royal Society Transactions, Vol. CLV.

Maxwell, James Clerk [1861]: On physical lines of force. Philosophical Magazines. Fourth series. March 1861.

Maxwell, James Clerk [1864]: A dynamical theory of the electromagnetic field. Philosophical Transactions of the Royal Society of London **155**: 459 – 5.

Minkowski, Hermann [1909]: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **18**: 75 – 88.

Newton, Isaac [1687]: Philosophiae naturalis principia mathematica. In: Isaaci Newtoni opera quae extant omnia, vol. II, Samuel Hosley (ed.), J. Nichols, London 1779.

Part II

Lokale Kontexte | Local contexts

The Interrelation between Mathematics and Physics at the Universities Jena, Halle-Wittenberg and Leipzig – a Comparison

Karl-Heinz Schlote, Martina Schneider

1 Introduction to the project

The study of the interrelationship between mathematics and physics at the neighbouring universities of Halle-Wittenberg, Jena and Leipzig in the centre of Germany has been the topic of a project of the Saxon Academy of Sciences in Leipzig since 2000. It focuses on how these interrelations developed at each of these universities during the 19th and the first half of the 20th century, and on how this fits in with more general ideas, firstly on the formation of theoretical physics, secondly on the changes in mathematical physics and, thirdly, regarding the mathematization of physics.[1] Due to their different status in Germany's university system and very different regional conditions – Jena and Leipzig universities were the only ones in Thuringia[2] and Saxony respectively, whereas Halle-Wittenberg was one of many universities in Prussia (after the redistribution of area following the Congress of Vienna in 1815) – the selection of the universities ensured that a wealth of impact factors and reactions could be studied. The results, presented in numerous publications[3], have confirmed these expectations. The large amount of detailed evidence obtained verifies the great variation in the development of the interrelation between mathematics and physics.

1.1 The focal points of the study

In analysing the interrelation, the following four focal points were studied for each university and for each of the two disciplines, i. e. mathematics and physics: the changes in personnel, the research carried out by the university teachers, the extent of their lecturing and finally their

[1] Cf. [Jungnickel/McCormmach 1986] for an overview on the formation of theoretical physics in Germany.

[2] Until the formation of Thuringia in 1920, Thuringia consisted of several dukedoms. However, not all of the Thuringian dukedoms were involved in running the University of Jena. From 1826 until 1920, the supporting dukedoms were Sachsen-Weimar-Eisenach, Sachsen-Gotha, Sachsen-Altenburg and Sachsen-Meiningen. When using the term "Thuringian dukedoms" in the following text we always mean these four dukedoms.

[3] Schlote 2004; Schlote 2008, Schlote/Schneider 2009a, Schlote/Schneider 2009b; Schlote/Schneider 2011. A planed second publication on the University of Jena containing an analysis of the interrelations between mathematics and physics during the period from 1900 to 1945 could not be realised during the course of the project.

activities in local scholarly societies. Depending on regional peculiarities, activities in neighbouring disciplines like astronomy, geophysics and physical chemistry were also included in the investigation – but only for a shorter period of time.

The first focal point deals with the appointment of university teachers for mathematics and physics as well as institutional changes. Since the state was ultimately responsible for appointing university posts, we can see to what extent it supported the faculties' or the universities' efforts to obtain certain scientists. At the same time we can see whether the university's various bodies or the state recognized the general tendencies in scientific development and acted accordingly or whether and to what extent other interests – varying from regional to subjective – influenced the development of the discipline. Our research focuses in particular on the following questions: How was mathematics used to understand physical connections? What kind of theorizing was chosen in physics? In how far did these interdisciplinary problems give new impulses to mathematics and physics? An analysis of the courses of lectures which were offered reveals how the process of interaction found its expression in the teaching of the two fields. This also includes the question for which parts of physics was a theoretical foundation offered in the teaching, and when and how a complete lecture course in theoretical respectively mathematical physics extending over several terms was developed. This kind of analysis turned out to be rather difficult since the exact content of the lecture is not usually known. Finally, the study of the local scholarly societies reveals to what extent the scientists could use regional structures of communication to shape the interrelation between the two disciplines.

In evaluating the teaching and the research of the individual scientists we were faced with a fundamental problem which we were unable to solve satisfactorily, namely that of a reliable characterization of mathematical and theoretical physics at a given time (and place/country). Physicists and mathematicians have characterized these concepts very differently at different times. It was not without good reason that Ludwig Boltzmann stated in 1895 that determining the concept of theoretical physics was "not without difficulty".[4] C. Neumann pointed out that "the

[4] Boltzmann 1925, p. 94

most excellent works of theoretical physics have a definite *constructive* character in that a small number of simple and explicitly stated premises are at the basis of the investigations from which the phenomena of the field in question are constructed with mathematical consequence, or at least are attempted to be constructed."[5] To him, the most critical step in this procedure was the choice of appropriate simple premises on which the theory should be based. Moreover, according to Carl Neumann, papers of descriptive character appeared ever so often, which should be seen as "preparatory efforts" with respect to the theories first mentioned.[6] Neumann himself realized this constructive approach in particular in his contributions to electrodynamics by using methods from the field of potential theory. Albert Einstein, too, regarded the constructive theories as the most important part of theoretical physics, but put the "Prinzip-Theorien" on par. The starting point of the "Prinzip-Theorien" were "empirically found general properties of the processes of nature (principles) from which mathematically formulated criterions follow, which the individual process or rather their theoretical concepts have to satisfy".[7] In particular he considered the relativity theory such a "Prinzip-Theorie". In 1923, Eduard Study, a mathematician and expert in invariant theory, methodologically differentiated between three essential parts of physics: (pure) mathematics with a deductive method, experimental physics with an incomplete inductive method and an area that borders on the two parts ("Grenzgebiet") using idealization as its method. This last part "extends into [the other two parts] and relates them to each other". Study continued: "Together with mathematical theory this border area ["Grenzgebiet"] is usually (and appropriately so)

[5] «die am meisten hervorragenden Werke der theoretischen Physik, [...] einen entschiedenen *constructiven* Charakter besitzen, indem der jedesmaligen Betrachtung eine geringe Anzahl einfacher und deutlich ausgesprochener Prämissen zu Grunde liegt, von denen aus die Erscheinungen des betreffenden Gebietes mit mathematischer Consequenz construirt, oder wenigstens zu construiren versucht werden.» Neumann 1896, p. III

[6] «Die *descriptiven* Werke hingegen dürften anzusehen sein als vorbereitende Bemühungen [...]» Neumann 1896, p. IV

[7] «Ausgangspunkt und Basis bilden nicht hypothetische Konstruktionselemente sondern empirisch gefundene allgemeine Eigenschaften der Naturvorgänge (Principe), aus denen dann mathematisch formulierte Kriterien folgen, denen die einzelnen Vorgänge bezw. deren theoretische Bilder zu genügen haben.» Einstein 1919, p. 206

summed up as theoretical physics"[8] Thus, according to Study's point of view, mathematical physics was subsumed under theoretical physics. In 1938, Werner Heisenberg was of the opinion that from the start no difference could be made between experimental and theoretical physics with respect to their aims.[9]

Compared with these different attempts to characterize theoretical physics, little was undertaken to give a more precise meaning to the concept of mathematical physics. For some physicists, the function of mathematical physics was mainly to aid physics. For example Max Wien expressed this as follows in 1915: "Mathematical physics consists [...] in the development of the mathematical aids necessary for the enhancement of theoretical physics."[10] Some mathematicians emphasized the mutual influence the two fields had on each other. For example, Leon Lichtenstein said in his inaugural lecture at Leipzig in 1923: "The work of the mathematician is [...] of fundamental importance to the physicist. On the other hand, new fields open up for the mathematician from the stimulation that physics provides."[11] One possible reason why such few attempts were made to define mathematical physics was probably because at that time mathematical physics was already well established as a part of mathematics.

1.2 The institutionalization of mathematical and theoretical physics at the universities of Central Germany

Before describing some of the characteristic features of the development at the universities of Jena, Halle-Wittenberg and Leipzig we would like

[8] «Dazwischen schaltet sich ein Grenzgebiet ein, das in beide [Bestandteile] übergreift und sie zueinander in Beziehung setzt. Dieses Grenzgebiet wird üblicher-(und zweckmäßiger-)weise mit der mathematischen Theorie als *theoretische Physik* zusammengefaßt.» Study 1923, p. 24 f.

[9] Heisenberg 1938, p. 61

[10] «Die mathematische Physik besteht [...] in der Ausbildung der für die Weiterbildung der theoretischen Physik erforderlichen mathematischen Hilfsmittel.» Wien 1915, p. 242

[11] «Die Arbeit des Mathematikers ist [...] für den Physiker von grundlegender Bedeutung. Auf der anderen Seite erwachsen wiederum dem Mathematiker aus den Anregungen, die ihm die Physik bietet, reiche Aufgaben.» Lichtenstein 1923, p. 148

to give a brief outline of the institutionalization of mathematical and theoretical physics at these universities:

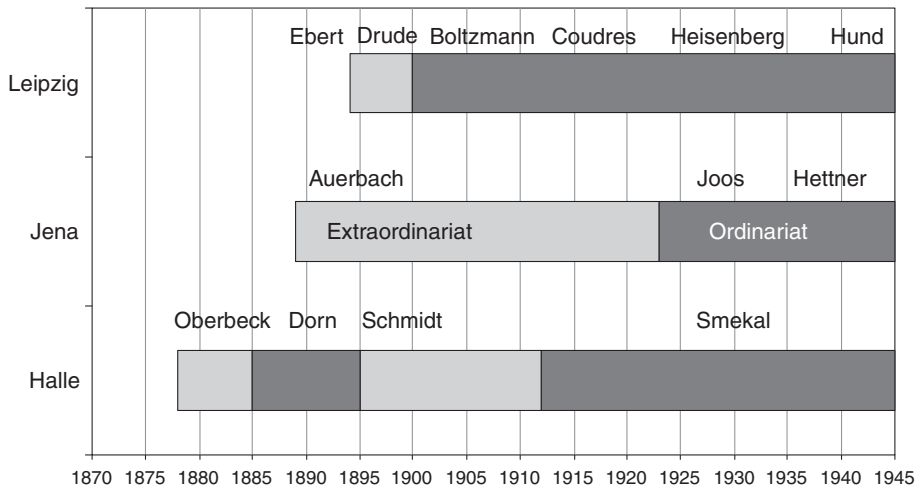


Figure 1
Institutionalization of theoretical physics

The diagram alone makes it clear that there were significant differences in the establishing of theoretical physics at the three universities. The creation of an associate professorship (Extraordinariat) of theoretical physics in Leipzig took place considerably later than at other German universities, in particular later than at the other two universities studied here. But on the other hand the physicists in Leipzig quickly managed to create a permanent chair.

Let us now turn to the development of mathematical physics at the three universities. Unlike theoretical physics, its development did not usually manifest itself in the creation of a professorship. It was only in Leipzig University that a professorship for mathematical physics was created – however only temporarily (and also in different departments). Karl von der Mühll held this associate professorship (Extraordinariat) in the maths department from 1872 to 1889. When a division of mathematical physics was set up within the theoretical-physical institute, George Jaffé was appointed associate professor (Extraordinarius) for mathematical physics in 1924. He was succeeded by Gregor Wentzel in 1926 and later, in 1929, by Friedrich Hund. It might

seem surprising that there were hardly any professorships especially designated to mathematical physics, but most professorships were designated to larger fields like analysis, higher analysis, geometry or pure mathematics or the professorship was not specified despite the fact that it was indeed dedicated to mathematical physics. As soon as mathematics was represented by two professorships, the teaching and research areas, too, were split up among the lecturers. This can clearly be seen in the reports concerning the faculty's proposals for professorships (Denominationsberichte). However, this did not result in any specification of the professorships in question.

2 Jena – between philosophy and technology

After this rough outline, we will continue with the development at the University of Jena. One of the special features of the representation of mathematics and physics at the University of Jena is that, until the beginning of the 1880s, both disciplines were represented by only one joint chair. The main reason for this were financial restrictions. As the only university of the small and financially relatively weak dukedoms of Thuringia, Jena had only a small budget at its disposal. Although the proportion of the dukedoms' total budget allocated to the university was higher than that of other German states running a university, in particular higher than in Prussia, the University of Jena had far less resources than the universities in Halle, Bonn, Marburg, Gießen and Freiburg. Thus it was not so easy for Jena to create, for example, a chair for a new science discipline. In view of the great advances made in science during the 19th century, in particular in the natural sciences, and of the limited financial means at its disposal, the university was faced with serious problems, as the 1854 general report of the university's curator Moritz Seebeck shows.[12]

The limited financial resources was the main reason why in 1802, after the death of the physics professor (Ordinarius) Laurenz Johann Daniel Succow, the faculty of philosophy proposed the conversion of his chair to one of finance (Kameralistik) and a combination of the chair

[12] Thüringisches Staatsarchiv Altenburg, Geheimes Ministerium Nr. 1522, unpaginated, Generalbericht des Kurators vom 7. März 1854

of physics with that of mathematics, thereby securing the representation of economics and finance in a chair. This request was supported by the university's senate and curator, and approved by the Thuringian states. Physics was then assigned to Johann Heinrich Voigt who was professor (Ordinarius) of mathematics. This combination of mathematics and physics in one chair was not unusual during the first half of the 19th century, since in the tradition of the 18th century, the treatment of a lot of physical questions was seen as a part of applied mathematics.

2.1 The philosophical foundation of the interrelationship

However, one special feature of the development in Jena was the additional combination of the two disciplines with philosophy which occurred when Jakob Friedrich Fries succeeded Voigt to the chair in 1824. Fries had received his habilitation at Jena with a work on philosophy in 1801. In 1805 he was assigned the chair (Ordinariat) of philosophy and mathematics at the University of Heidelberg, where, in 1813, he was awarded the chair (Ordinariat) of physics. After an unsuccessful call to Berlin University Fries returned to the chair (Ordinariat) of metaphysics and logic at Jena in 1816. Three years later, as a result of the passing of the Karlsbad Decrees[13], the Grand Duke Carl August of Weimar was forced to suspend him from teaching (although he continued to pay his salary[14]). Fries' appointment to the chair of mathematics and physics allowed him an active return to university life in 1824. At that time the faculty did not discuss the question of a separation of the joint chair of mathematics and physics.

Fries dealt intensively with epistemological questions concerning the gaining of knowledge in the natural sciences and the role of mathematics in the formation of scientific theories. In a critical way he took up ideas developed in Immanuel Kant's monograph *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*. Mathematics was for him one of the fundamental pillars of the natural sciences (Naturlehren). It imposed on all of them "with necessity the principal laws of motion and the basic forces through

[13] Cf. [Eggeling 1878] and [Gäbe 1971] for a biography of Fries. Through a malicious interpretation of some private letters found on arrested students Fries was drawn into the investigations concerning the killing of August Koetzebue.

[14] Kreiser 2001, p. 70

which everything is caused as well as the highest forms of all processes under which the material substances interact".[15] This mathematical knowledge of nature "should give us the laws of possible hypotheses about the nature of bodies, should determine which prerequisites are admissible, which are to be regarded as the most simple of all and which mathematical consequences each such single hypotheses involves."[16]

With respect mainly to physics Fries noted: There is "no theory at all, no explanation of phenomena by general laws that is not, at least indirectly, determined by mathematical knowledge".[17] According to him, throughout all parts of the natural sciences, it is mathematics that tells us how to construct the tools, only by means of which exact observation can succeed. Mathematics follows observation with precise measurement and calculation, and aims at predicting the course of phenomena by general laws on the basis of observation by means of calculation.[18]

Taking this general philosophical viewpoint as his starting point Fries developed a systematic and coherent overview of mathematics. In particular, his reflections on the probability theory deserve mentioning.[19] In his monographs, Fries gave the interrelation between mathematics and physics[20] a careful philosophical foundation, an analysis which turned out to be forward-looking. In great detail, Fries described the interplay of exact observations including precise measurements, physical abstractions and mathematical methods in the theoretical permeation of individual problems and fields. The focal points were in accordance

[15] «Reine Mathematik schreibt allen Naturlehren mit Nothwendigkeit die obersten Gesetze der Bewegung und der Grundkräfte, durch welche alles bewirkt wird, so wie die obersten Formen aller Processe, unter denen die körperlichen Stoffe in Wechselwirkung kommen, vor.» Fries 1822, p. 32

[16] «Sie [die ganze mathematische Naturphilosophie] soll uns die Gesetze möglicher Hypothesen über die Natur der Körper angeben; bestimmen, welche Voraussetzungen zulässig seyen, welche als die einfachsten von allen anzusehen und welche mathematisch bestimmbaren Folgen jede einzelne solche Hypothese mit sich führe.» Fries 1822, p. 30

[17] «[...] die Mathematik selbst ist die Grundfeste für die ganze Physik, denn es gibt überhaupt keine Theorie, keine Erklärung der Erscheinungen aus allgemeinen Gesetzen, welche nicht wenigstens mittelbar durch die mathematische Erkenntniß bestimmt würde.» Fries 1826, p. 25

[18] Fries 1826, p. 25

[19] Fries 1842

[20] Cf. [Schlote/Schneider 2011], section 5.1.2 for a more detailed account.

with the very programme which came to fruition in the founding of the seminar on mathematical physics at Königsberg and which led to the founding of the successful and influential school of mathematical physics.[21] In his publications Fries integrated the latest physical results, as his references to Ørsted's discovery of the deflection of a magnetic needle by a current-carrying conductor and to Fechner's *Lehrbuch der Experimentalphysik* show. However, he failed to illustrate his theories with detailed concrete examples. This might be seen as a short-coming, but Fries' exposition is quite complete in itself. The lecturers (Privatdozenten) and scientists Carl Temler, Ernst Mirbt, Ernst Friedrich Apelt, Gustav Suckow and Ernst Erhard Schmid taught alongside Fries, some of whom were his students and well acquainted with his ideas. They, too, chose not to illustrate or apply Fries' theory by working out a concrete example.

In their search for Fries' successor in 1843, the faculty adhered to the combination of mathematics and physics in one chair and, with Karl Snell's appointment to the chair, the connection with philosophy continued.[22] However, Snell failed to give any sustainable new insight with regard to this relation with philosophy. And, as at that time the combination of mathematics and physics in one chair no longer met the current requirements with regard to teaching duties and to an appropriate representation of both disciplines in research, the development of both disciplines at Jena fell behind the general level in Germany in those decades.

2.2 Theorizing with regard to technology

In the second half of the 19th century, Jena became a centre for the construction of optical instruments. Industry and the university cooperated very closely in terms of personnel, money and research. Carl Zeiss, the founder of the optical industry, and Ernst Abbe, a lecturer at Jena University, were the initiators of this close cooperation. They were later joined by Otto Schott together with his glass works, which had been co-founded by Abbe and Zeiss, Abbe became the co-director at Zeiss'

[21] The history of the foundation of the seminar on mathematical physics at Königsberg and the formation of the Königsberg school was analysed by K. Olesko in great detail. Olesko 1991

[22] Cf. [Schlote/Schneider 2011], section 3.4 for details on Snell's appointment.

and founded the Carl-Zeiss-Stiftung, a foundation trust with social and scientific ambitions.[23]

Such trusts (Stiftungen) were essential for the development of research and teaching at Jena University. The Reichenbach-Stiftung enabled the separation of the joint chair of mathematics and physics in 1879 and 1882 respectively. The Carl-Zeiss-Stiftung enabled the creation of an associate professorship (Extraordinariat) for theoretical physics in 1889. Both foundations supported improvements in the facilities for mathematical and physical research and for teaching in Jena, e. g. they paid for a new building for the physical institute, equipped it with instruments and purchased books and models etc. for the mathematical seminar.

Towards the end of the 19th century, the research carried out by the physicists at Jena was increasingly geared towards questions that were of interest to the local optical industry and (increasingly) also towards their technical implementation.[24]

It was the university lecturer (Privatdozent) Ernst Abbe who initiated this development. In 1864, Abbe was recruited as a scientific collaborator by Zeiss. Abbe realized that an improvement of microscopes could be achieved by a profound mathematical-theoretical analysis of the system of lenses and of the opening angle of the objectives. Joseph Fraunhofer, Joseph Petzval and Carl August von Steinheil had already thought along these lines. But it was Abbe who realized that the wave nature of light should be taken into account because of the tiny size of the objects studied under the microscope. He thus established a refraction theory for microscopic images. Abbe determined the so-called sinus-condition and the resolution of objectives. He studied the consequences of the central and non-central illumination of objects and the use of immersion substances. He also derived a formula for the smallest distance possible for distinguishing objects for a given microscope. In Abbe's research constructive-technical, experimental and theoretical aspects blended together. The laws of dioptrics enhanced by physical ideas were the mathematical-theoretical basis for his investigations.

[23] Cf. [Schomerus 1955] for the foundation of the Carl-Zeiss-Stiftung. See also [Stolz/Wittig 1993] for some aspects of Abbe's ans Zeiss' work.

[24] Cf. [Schlote/Schneider 2011], section 5.2 for a detailed exposition as well as for the bibliographic references concerning the results mentioned here

The experimental physicist Leonhard Sohncke, appointed in 1882, as well as his successor Adolph Winkelmann, appointed four years later, took up research concerning optics and also the properties of glass. Sohncke published papers on the theory of Newtonian rings, on diffraction patterns created by wedge-shaped particles as well as papers on the rotation of the polarization-plane of natural light under the influence of electromagnetic forces. Winkelmann studied the properties of different kinds of glass, which he got from Schott's glass factory, with respect to refraction, elasticity, resistance to tension and pressure as well as thermal resistance. Moreover, Winkelmann and Straubel explored the diffraction of X-rays by metal-prisms. The studies of Sohncke and Winkelmann were mainly of experimental character. Felix Auerbach, associate professor (Extraordinarius) of theoretical physics, who was appointed in 1889, also supported – at least indirectly – research in optics with his theory of hardness. In cooperation with Schott's glass works he determined the different degrees of hardness of various kinds of glass. Furthermore, he constructed measuring instruments.

While Sohncke, Winkelmann and Auerbach were also engaged in other research topics, Rudolf Straubel who had received most of his training in Jena concentrated exclusively on the construction of instruments. He habilitated in Jena in 1893, was appointed associate professor (Extraordinarius) five years later and, another five years later, became a member of the Zeiss management. In Abbe's tradition he tried to improve instruments by giving a more exact mathematical version of the theory. But he also engaged in the determination of number and modulus of the elasticity of different kinds of glass.

While Jena physicists were concerned with questions of optics and the technical implementation or utilization of their results, there was no such activity going on among the Jena mathematicians at that time. What can be found in the papers of Frege, Piltz and Thomae, are remarks in which they point to the possibility of utilizing their results in physics – however vaguely and generally they are expressed.[25] Otherwise – apart from one exception – topics of mathematical physics did not play any role in their research. The exception is an article by Frege published in 1891 in which Frege demonstrated how he would like to apply the principles

[25] Cf. [Schlote/Schneider 2011], section 5.3 for a treatment of the mathematical contributions.

of the *Begriffsschrift* to physics.[26] Discussing the wording of the law of inertia he gave a thorough criticism of the definition of a so called inertial system introduced by Ludwig Lange five years ago. However, Frege could not solve the problem either, he also made a mistake and anyway it seems that the physicists took no notice of Frege's article. Neither a remark nor an article could be found that referred to Frege's contribution. Hence one should doubt that Frege's ideas and contributions to a logical exact foundation of arithmetic had an impact on the theory-forming process done by physicists.

Thus, with the exception of Fries' philosophical foundation of the interrelation between mathematics and physics there was no significant interaction between the two disciplines in Jena during the first half of the 19th century. The turn towards theoretical physics in Jena took place in close relation with technological questions right from the outset.

3 Halle – 'normal' science

There are two features that are characteristic of the interaction between mathematics and physics at the University of Halle-Wittenberg during 1890 and the end of the Second World War. On the one hand, one notices that mathematicians showed little interest in engaging in questions related to physics, on the other hand, the scientists appointed to a chair of theoretical physics undertook experimental investigations. With the exception of Gustav Mie, the physicists and mathematicians at Halle did not contribute to the latest physical theories, i. e. relativity theory and quantum mechanics, in their research. The focus of their research lay in other fields. Their methods of research were in a certain sense traditional. Therefore, it seems appropriate to characterize the research done at Halle by using the term 'normal' science.

The characteristic features mentioned will be explored in the following two sections, starting with the close connection between theory and experiment in the research of the theoretical physicists at Halle.

[26] Frege 1891

3.1 The close connection between experiment and theory

The close connection between experiment and theory can well be seen in the unusual way that professors in Halle were appointed.[27] In this period theoretical physics was represented at Halle by physicists who included applied and technical physics in their field of research. In 1895 the Hallensian lecturer (Privatdozent) Karl E. Schmidt succeeded his colleague Ernst Dorn who took over the Hallensian chair (Ordinariat) of experimental physics from Hermann Knoblauch. At the same time, the chair (Ordinariat) of theoretical physics was downgraded to an associate professorship (Extraordinariat). This did not become a professorship again until 1912, and then only one to last for Schmidt's lifetime (persönliches Ordinariat). After Schmidt's retirement in 1927, Adolf Smekal was appointed Schmidt's successor and also director of the newly established department of theoretical physics. Against the opposition of the experimental physicist Gerhard Hoffmann, Smekal managed in the end to completely separate the departments of experimental and theoretical physics. Both Schmidt and Smekal allowed a lot of scope for experimentation.

When Schmidt was appointed, he had already done research in optics, on animal tissue as an electric conductor and on photography. During the following years he widened his fields of interest to include investigations on high frequency physics and wireless telegraphy. To this purpose at the beginning of the 20th century, he set up two experimental laboratories with his own money in Halle and allowed his PhD-students to carry out their research there. When he closed down these laboratories in 1910, he initiated the establishment of a university laboratory of theoretical physics, equipping it with instruments again at his own expense. Schmidt's experimental investigations were so extensive that at times his chair was referred to as one of "theoretical and applied physics".[28]

When the experimental physicist Dorn died in 1916, Schmidt would have liked to become his successor. The faculty rejected this out of finan-

[27] Cf. [Schlote/Schneider 2009b], chapter 4 for a detailed description of the appointments made at the Physics' department at Halle.

[28] «theoretische und angewandte Physik» Geheimes Staatsarchiv Preußischer Kulturbesitz Berlin, Rep. 76, Va, Sekt. 8, Tit. IV, Nr. 48, Vol. VI, p. 383

cial-institutional considerations, because then the chair (persönliches Ordinariat) would have been transformed into an associate professorship (Extraordinariat) again. The faculty pursued a different strategy. They wanted a professor (Ordinarius) of experimental physics who was also versed in theoretical physics. And they found the very person: Gustav Mie. So the situation in Halle was indeed quite paradoxical: the physicist appointed for theoretical physics devoted most of his research to experimental investigations closely connected with technology, whereas the experimentalist was expected to cover theoretical physics, too. In a certain sense there was no change in this situation under Mie's successors – Gustav Hertz, Hoffmann and Wilhelm Kast – and Schmidt's successor – Smekal. The faculty's attempt to create a chair of technical physics, as in Göttingen and Jena, thereby solving the structural problem, repeatedly failed because of opposition from the Prussian ministry. Schmidt devoted himself increasingly to questions of application and in the 1920s studied ways of how to preserve fodder.[29]

In 1927 the faculty looked for a theoretical physicist who was also acquainted with technology as Schmidt's successor. Smekal was appointed professor (Ordinarius) of theoretical physics and director of the institute of theoretical physics. Smekal had already pointed out in the negotiations concerning his appointment that apart from theoretical physics he was also doing experimental research. Relations between Smekal and the professor (Ordinarius) for experimental physics Hoffmann and later Kast were often strained – partly for this very reason.

One of the consequences of this policy on appointments was that little research was done which dealt exclusively with theory-formation in physics.[30] The research of the theoretical and experimental physicists had both a theoretical and experimental component. Most of the time, the physicists were concerned with the elaboration of existing theories. For example, in 1898 Schmidt proved the deflection of cathode rays under the influence of electric forces, more precisely under electromagnetic waves. This result was based on many experiments. He thus discovered a "new" form of deflection besides those known by magnetic and electrostatic fields. He embedded his result in a wider context, saying e. g.: "Each

[29] Cf. [Schlote/Schneider 2009b], sections 7.2 – 7.4 with respect to Schmidt's research.

[30] An analysis of the research done at the physics department is given in [Schlote/Schneider 2009b], chapter 7.

change of state in a field caused by magnetic or electric forces changes the path of cathode rays passing through the field."[31] In addition to that, he determined a fundamental law of deflection.

Schmidt's successor Smekal also combined a theoretical with an experimental investigation of a specific problem. He developed new approaches particularly in the field of fracture mechanics and thus made an important contribution to solid-state physics. In the 1930s, among other things, Smekal analysed fractures, in particular the formation of fractures, and provided a theoretical description. He introduced the concept of molecular tensile strength (molekulare Zerreißfestigkeit) and derived an improved formula for tensile strength (Zugfestigkeit). He also explored the dependencies of fractures on various kinds of properties, like the state of the surface or temperature. Extensive series of experiments on crystals and glass-like substances facilitated and accompanied his research on fracture theory. In the broader context of the elucidation of the properties of materials, let us also mention his explanation of so-called structure-sensitive properties of solid materials by the introduction of "loose building blocks" (Lockerbausteine) as deviations from the ideal structure of the crystal. Among other things, this helped to explain ion conduction. Finally, it should be mentioned that Halle's experimental physicists also developed new theoretical concepts. For example, Hoffmann contributed to an explanation of cosmic radiation by introducing a concept known today as "Hoffmann'sche Stöße", which was developed and tested by experiments conducted over a long period of time in Halle.

We believe that the research in physics done at Halle University was, to a certain extent, typical of the time and of small and middle-sized German universities. This kind of research can be characterized by a close connection between theory and experiment as well as by a lot of contributions to the consolidation of existing theories and by a few outstanding papers published every now and again. This is the reason why we characterize this research as 'normal' or 'ordinary' science.

[31] «Jede durch magnetische oder elektrische Kräfte hervorgerufene Zustandsänderung in einem Felde ändert den Gang der das Feld durchlaufenden Kathodenstrahlen.» Schmidt 1896, p. 174

3.2 Mathematical research without any contact to physics or application

As to the interaction between mathematics and physics, the mathematical formulation of relations did play a certain role in the research of the physicists, but not an outstanding one. However, physical problems were hardly of any importance to Hallensian mathematicians from the mid 1920s onwards. With the appointments of Heinrich Jung in 1920, Helmut Hasse in 1925 and Hasse's successor Heinrich Brandt in 1930, algebra and number theory became the new focal points of research at Halle. Along with them came the methods of "modern" algebra to Halle. Jung pursued the arithmetization of algebraic geometry. Hasse published his famous "Klassenkörper-Bericht" in 1926. Brandt introduced the so-called "Brandt's gruppoid" with a system of axioms. He also developed an arithmetic of algebras. In the early 1930s, he invited Emmy Noether to lecture in Halle.[32]

With the exception of Heinrich Behmann who mainly did research in logic, the research carried out by Hallensian private lecturers (Privatdozenten) and associate professors (Extraordinarien) went in the same direction. Reinhold Baer studied different systems of axioms of topology. Erhard Tornier introduced a system of axioms for probability calculus. Their research did not bear any relation to applications nor to questions of mathematical physics.

However, the appointment of Heinrich Grell as a private lecturer in 1934 seemed to change the situation. The lecture he gave on the occasion of his "Umhabilitierung" from Jena to Halle was entitled *The significance of hyper-complex systems for quantum mechanics*.[33] Algebras first emerged in quantum mechanics in Wolfgang Pauli's paper on spin in 1926 and in Paul Dirac's paper on the relativistic wave equation of the electron. In 1934 Pascual Jordan, John von Neumann and Eugene Wigner studied them systematically in the context of an improved mathematization of the quantum mechanical formalism. Grell's lecture on the mathematical foundations of quantum mechanics that he announced for the summer

[32] Cf. [Schlote/Schneider 2009b], sections 3.3 and 3.4 concerning their appointments and sections 6.5 and 6.1 concerning their research.

[33] «Die Bedeutung von hyperkomplexen Systemen für die Quantenmechanik» He gave the talk in February 1935. Universitätsarchiv Halle, PA 6887

term of 1935 had to be cancelled, because Grell was arrested on the charge of homosexuality in April. In 1936, he was replaced by William Threlfall. Thus, the mathematicians' only attempt at that time to engage in modern physical theories from a mathematical perspective came to an abrupt end.

This brief outline of mathematics at Halle in the 20s, 30s and 40s of the last century does not mean that there was no research in applied mathematics and mathematical physics at Halle before that time. In this respect we would like to mention Albert Wangerin's and Ernst Neumann's research in potential theory, Friedrich Pfeiffer's and Richard Grammel's papers on aero- and hydrodynamics and Gustav Doetsch's pioneering contributions to Laplace-transformations.[34] However, for various reasons, they did not have a lasting influence on the research in Halle. The mathematicians tried to ensure the representation of applied mathematics in teaching. From the beginning of the 20th century onwards they tried to create an associate professorship (Extraordinariat) of applied mathematics, but did not succeed until 1939. With the appointment of Behmann who had been teaching applied mathematics in Halle since 1925, the chair was occupied by a logician who hardly did any research in applied mathematics.

Halle's concentration of mathematical research on algebra and number theory, i. e. a specialization on areas of pure mathematics, was not planned but was simply a result of the lecturers that were appointed. It helped to establish and consolidate "modern" algebra.

4 Leipzig – at the forefront of research

Let us now turn to the development at the University of Leipzig. At the period in question, the University of Leipzig was one of the universities in Germany with the highest numbers of students, even taking first place until the end of the 1870s, then to be overtaken by the universities of Berlin and Munich by the end of the century. One of the outstanding features of the development of mathematics and physics in Leipzig

[34] Cf. [Schlote/Schneider 2009b], sections 6.2 and 6.4 as well as [Schlote/Schneider 2009a], section 7.5.

during the 19th and 20th century was the almost uninterrupted tradition of mathematical physics, with such famous names as August Ferdinand Möbius, Carl Neumann, Karl von der Mühll, Gustav Herglotz, Leon Lichtenstein and Herbert Beckert.

4.1 The predominance of mathematical physics during the 19th century

After there had been the chance, for a short time and as a result of the work of Wilhelm Weber and Gustav Theodor Fechner in the 1840s, of Leipzig taking up a leading position on par with the seminar on mathematical physics at Königsberg, the representation of mathematical physics was surprisingly strengthened in 1868 by a generational change in appointments to the chairs of mathematics.[35] When Moritz Wilhelm Drobisch changed to philosophy and Möbius died, their positions went to Wilhelm Scheibner and Carl Neumann respectively.[36] The latter's appointment was surprising in that he only came third on a par with Richard Baltzer in the faculty's report to the ministry, and thus was by no means the candidate preferred by the faculty of philosophy. Alfred Clebsch, the candidate placed first, did not consider coming to Leipzig because he had just been appointed to Göttingen. The Saxonian ministry at Dresden then appointed the 36-years old Carl Neumann as professor (Ordinarius) passing over Hermann Hankel who was second on the list.

Neumann stemmed from the Königsberg school of mathematical physics and had already produced remarkable contributions to mathematical physics.[37] He had also started to develop his own ideas about the relation between mathematics and physics which he made more precise, modified and put into practice in Leipzig. To him the aim of mathematical physics was to provide a strictly logical structure of physical theory which was as simple as possible and rested on a few fundamental ideas which could not be explained any further.[38]

[35] Cf. [Schlote 2004] for an overview.

[36] Cf. [Schlote 2004], section 4.4.2 concerning the appointment of Neumann.

[37] Cf. [Schlote 2005] as well as [Schlote 2004], sections 6.8 and 11.8 for details on Neumann's contributions to potential theory and mathematical physics.

[38] Neumann 1865, Neumann 1870

Since two scientists, the private lecturer (Privatdozent) of mathematical physics von der Mühll and Adolph Mayer, who were also interested in questions concerning physics, worked alongside Neumann at Leipzig, mathematical physics became a focal point of research and teaching at Leipzig in the following decades. Neumann shaped this process by his strongly mathematically oriented view on the treatment of physical questions. He repeatedly demonstrated this view with respect to the foundation of electrodynamics. By doing this in a form which was not very appropriate for physicists he, indirectly, increased at the same time the awareness of the distinction between mathematical and theoretical physics.

Another outcome of the Leipzig emphasis on mathematical physics was the fact that lecture courses on theoretical physics were mainly given by mathematicians and that the physicists hardly contributed to teaching them. Neither did the Leipzig physicist participate in the rise of theoretical physics that took place during these decades. In 1894, Leipzig was one of the last universities in Germany to establish an associate professorship (Extraordinariat) of theoretical physics. The physicists at Leipzig, however, caught up with the institutionalization and representation of theoretical physics rather quickly, without specializing in any particular field.

4.2 A centre of quantum mechanics under Heisenberg

At the end of the 1920s, a historical coincidence, namely the need to appoint two professors (Ordinariate) of physics and an associate professor (Extraordinarius) in mathematical physics within one and a half years, made it possible to create a centre of theoretical physics at Leipzig.[39] In spring 1926, the advocates of the latest trends in theoretical physics succeeded in obtaining the associate professorship (Extraordinariat) of mathematical physics that had been established at the physical institute in 1923. The position was to be given to a younger representative of theoretical physics, to someone who wanted "to engage actively in the elaboration of the modern theory of quanta

[39] Cf. [Schlote 2008], sections 3.2, 3.3 and 7.2 for a more detailed analysis of the situation at the Leipzig Physical Institute and the course of events which led to a new profil of research.

and relativity".[40] After Werner Heisenberg and Wolfgang Pauli refused to take the position, it was given to Gregor Wentzel. Shortly afterwards, the two scientists who held the chairs (Ordinariate) in physics at Leipzig died: Theodor Des Coudres, who held the chair of theoretical physics, in October 1926 and Otto Wiener, who held that of experimental physics, in January 1927. Thus, the path to a new orientation of research in physics was opened that previously had been blocked by Wiener in particular. The chair of experimental physics was given to Peter Debye. Werner Heisenberg was appointed professor (Ordinarius) of theoretical physics. Both took up their positions at the beginning of the winter term 1927/28.

Within a few months the situation at Leipzig had changed completely. The directors of the physical and the theoretical-physical institute were two young outstanding scientists. The programme of research was given a new profile and was oriented towards modern theoretical physics, in particular towards quantum mechanics and its application to atomic and nuclear physics as well as physics of solid bodies.[41] Heisenberg and Debye attracted a lot of students and young physicists and successfully established research teams. Leipzig soon became one of the leading centres of theoretical research in physics and many colleagues from other universities sent their students to Leipzig to study and work with Heisenberg's team. From summer 1928 onwards, Debye organized the well-known Leipzig lecture weeks («Leipziger Vortragswochen») that were a kind of summer school. Lots of physicists met there to exchange ideas and Debye invited leading specialists like Paul Dirac and Enrico Fermi as lecturers.[42]

Between the autumn of 1927 and the summer term of 1930 the number of physics students in Leipzig tripled. In the 1930s, the

[40] «Bei ihrer Wahl hat sich die Fakultät von dem Wunsche leiten lassen, daß der jüngere Vertreter der theoretischen Physik an unserer Universität an dem Ausbau der modernen Theorie der Quanten und Relativität aktiv beteiligt sein möchte, [...]» Universitätsarchiv Leipzig, PA 1051, p. 6

[41] Cf. [Schlote 2008], sections 9.1 – 9.4. for research at the Physical Institute. For a detailed description of the bloom of physics in Leipzig and in particular Heisenberg's leading role cf. [Cassidy 1992], chapters 13 – 16; [Kleint/Wiemers 1993] and [Kleint/Rechenberg/Wiemers 2005].

[42] The talks were edited by Hans Falkenhagen and Debye as conference's proceedings in the series «Leipziger Vorträge».

number of PhD-theses in physics rose significantly and at times made up for more than a third of the PhDs of the mathematical-scientific (mathematisch-naturwissenschaftliche) department of the philosophical faculty. When Wentzel left for the ETH Zürich in October 1928, it had little effect on this development. The appointment of Friedrich Hund as his successor in summer 1929 was an additional boost to the Leipzig institute as a centre of atomic physics because of his research related to molecular structure and also because of his close personal relation to Heisenberg. Another positive factor was the appointment of the mathematician Bartel Leendert van der Waerden as successor to Otto Hölder in 1931. One of his reasons for accepting the call to Leipzig was the prospect of working with Heisenberg and his team. Van der Waerden was not only an excellent algebraist and geometer, but he was also interested in modern quantum theory.[43] He participated in Heisenberg's and Hund's seminars and contributed to the mathematical elaboration on quantum mechanical questions.

This blooming of theoretical physics in Leipzig lasted until the mid 1930s. By then the Leipzig institute had become one of the leading centres, if not the leading centre of theoretical physics in Germany. One of the reasons for this was that the scientists responsible for the rise, i. e. Heisenberg, Debye and Hund, were quick to identify new lines of research and integrated them into their research. They also succeeded in continuing the direction of their research despite opposition from representatives of technical physics. From the mid 1930s onwards, the damage inflicted by the dictatorship of the Nazis was getting more serious and a couple of years later, in the late 1930s, very little was left of Heisenberg's school.

To round off the picture let us note that Leon Lichtenstein, too, was very successful in mathematical physics at the same time as the Leipzig physicists' research bloomed. However, with the hostilities against Lichtenstein during the first months of the Nazi's regime and his sudden death in August 1933, this development came to an abrupt end.[44]

[43] Cf. [Schneider 2011] for van der Waerden's early contributions to physics.
[44] Cf. [Schlote 2008], sections 6.5 and 9.6 as well as [Beckert 1981].

5 Concluding remarks

The above account of the three universities shows a remarkable diversity in the shaping of the interaction between mathematics and physics. This variety is the result of many factors. It depends not only on the position of a university within Germany's system of universities, but also on its traditions, on local and regional contexts and, last but not least, on the individual scientist. These factors blend together in very different ways leading to different, but sometimes also similar results.

Leipzig stands out because of its contributions to research in mathematical physics and later also to "modern" theories of physics. For longer periods of time it was one of the centres of these research fields. In Jena, the immense, not only financial support of the university by local industry, in particular by Abbe and the Carl-Zeiss-Stiftung, should be emphasized. The close connection between physical research in Jena, which was geared towards technological application, and the interests and needs of the two enterprises Zeiss and Schott – that could have been motivated by this financial arrangement – was unique in Germany at that time. In contrast, the development of the interaction in Halle, a small provincial university, proceeded without any heights. Mathematical and theoretical physics was not specially supported there, no traditions developed in these fields and only a few outstanding papers emerged. Theoretical physics or rather the research done by scientists appointed as theoretical physicists at Halle was not purely of theoretical character, but intimately linked with experiments and technical aspects. We have used the term 'normal' science to describe this, because we believe that this kind of development could probably be found at many small and middle-sized universities in Germany at that time and is thus quite typical.

Acknowledgement

We would like to thank Jacqueline Brack-Schneider for her help with the English language.

6 Bibliography

Beckert, Herbert [1981]: Leon Lichtenstein. In: Beckert, Herbert; Schumann, Horst (eds.): 100 Jahre Mathematisches Seminar der Karl-Marx-Universität Leipzig. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1981, pp. 207 – 217.

Boltzmann, Ludwig [1925]: Josef Stefan. In: Boltzmann, Ludwig: Populäre Schriften. Barth, Leipzig, 3rd edition, 1925, pp. 92 – 103.

Cassidy, David C. [1995]: Uncertainty. The life and science of Werner Heisenberg. Freeman, New York 1992.

Eggeling [1878]: Fries, Jakob Friedrich. In: Allgemeine Deutsche Biographie, vol. 7, pp. 73 – 81.

Einstein, Albert [1919]: What is the theory of relativity? In: Janssen, Michel; Buchwald, Diana Kormos (eds.): The Berlin years: writings 1918 – 1921. Princeton University Press, Princeton NJ et al. 2002, pp. 206 – 209 (The collected papers of Albert Einstein, 7).

Frege, Gottlob [1891]: Über das Trägheitsgesetz. Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik 98 (1891), pp. 145 – 161.

Fries, Jakob Friedrich [1822]: Die mathematische Naturphilosophie nach philosophischer Methode bearbeitet. Ein Versuch. Mohr und Winter, Heidelberg 1822.

Fries, Jakob Friedrich [1826]: Lehrbuch der Naturlehre. Zum Gebrauch bey akademischen Vorlesungen. Erster Theil: Experimentalphysik. Cröcker, Jena 1826.

Fries, Jakob Friedrich [1842]: Versuch einer Kritik der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Vieweg, Braunschweig 1842.

Gäbe, Lüder [1971]: Fries, Jakob Friedrich. In: Neue Deutsche Biographie, vol. 5, pp. 608 – 609.

Heisenberg, Werner [1938]: Die gegenwärtigen Aufgaben der theoretischen Physik. Scientia, 3rd ser., 63 (1938), pp. 61 – 69.

Jungnickel, Christa; McCormmach, Russell [1986]: Intellectual mastery of nature. Theoretical physics from Ohm to Einstein. 2 vols. University of Chicago Press, Chicago et al. 1986.

Kleint, Christian; Rechenberg, Helmut; Wiemers, Gerald (eds.) [2005]: Werner Heisenberg 1901 – 1976. Beiträge, Berichte, Briefe. Festschrift zu seinem 100. Geburtstag. (Abhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, vol. 62, 2005.

Kleint, Christian; Wiemers, Gerald (eds.) [1993]: Werner Heisenberg in Leipzig 1927 – 1945. Abhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, vol. 58, number 2, 1993.

Kreiser, Lothar [2001]: Gottlob Frege. Leben – Werk – Zeit. Meiner, Hamburg 2001.

Lichtenstein, Leon [1923]: Astronomie und Mathematik in ihrer Wechselwirkung. Mathematische Probleme in der Theorie der Figur der Himmelskörper. Hirzel, Leipzig 1923. In: Beckert, Herbert; Purkert, Walter (eds.): Leipziger mathematische Antrittsvorlesungen. Auswahl aus den Jahren 1869 – 1922. Teubner, Leipzig 1987, pp. 147 – 185 (Teubner-Archiv zur Mathematik, 8).

Neumann, Carl [1865]: Der gegenwärtige Standpunct der mathematischen Physik. Akademische Antrittsrede. Laupp & Siebeck, Tübingen 1868.

Neumann, Carl [1870]: Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie. Akademische Antrittsrede. Teubner, Leipzig 1870 (also in: Beckert, Herbert; Purkert, Walter (eds.): Leipziger mathematische Antrittsvorlesungen. Auswahl aus den Jahren 1869 – 1922. Teubner, Leipzig 1987, pp. 7 – 37 (Teubner-Archiv zur Mathematik, 8)).

Neumann, Carl [1896]: Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen mit besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen. Teubner, Leipzig 1896.

Olesko, Kathryn M. [1991]: Physics as a calling. Discipline and practice in the Königsberg Seminar for Physics. Cornell University Press, Ithaca, London 1991 (Cornell history of science series).

Schlote, Karl-Heinz [2004]: Zu den Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik an der Universität Leipzig in der Zeit von 1830 bis 1904/05. Hirzel, Stuttgart, Leipzig 2004 (Abhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse, vol. 63, number 1).

Schlote, Karl-Heinz [2005]: Carl Neumann's contribution to potential theory and electrodynamics. In: Wieslaw, Witold (eds.): European mathematics in the last centuries. Wroclaw 2005, pp. 123 – 140.

Schlote, Karl-Heinz [2008]: Von geordneten Mengen bis zur Uranmaschine. Zu den Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik an der Universität Leipzig in der Zeit von 1905 bis 1945. Deutsch, Frankfurt am

Main 2008 (Studien zur Entwicklung von Mathematik und Physik in ihren Wechselwirkungen).

Schlote, Karl-Heinz; Schneider, Martina [2009a]: Von Schweiggers erstem Galvanometer bis zu Cantors Mengenlehre. Zu den Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik an der Universität Halle-Wittenberg in der Zeit von 1817 bis 1890. Deutsch, Frankfurt am Main 2009 (Studien zur Entwicklung der Mathematik und Physik in ihren Wechselwirkungen).

Schlote, Karl-Heinz; Schneider, Martina [2009b]: Funktechnik, Höhenstrahlung, Flüssigkristalle und algebraische Strukturen. Zu den Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik an der Universität Halle-Wittenberg in der Zeit von 1890 bis 1945. Deutsch, Frankfurt am Main 2009 (Studien zur Entwicklung der Mathematik und Physik in ihren Wechselwirkungen).

Schlote, Karl-Heinz; Schneider, Martina [2011]: Mathematische Naturphilosophie, Optik und Begriffsschrift. Zu den Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik an der Universität Jena in der Zeit von 1816 bis 1900. Deutsch, Frankfurt am Main 2011 (Studien zur Entwicklung der Mathematik und Physik in ihren Wechselwirkungen).

Schmidt, Karl [1896]: Über die Ablenkung der Kathodenstrahlen durch elektrische Schwingungen. Mitteilung 1. Abhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Halle, 21 (1896 – 1898), pp. 161 – 169; Mitteilung 2: Grundgesetz für die Ablenkung der Strahlen. Ibid., pp. 171 – 191; Mitteilung 3: ibid., pp. 227 – 231.

Schneider, Martina [2011]: Zwischen zwei Disziplinen – B. L. van der Waerden und die Entwicklung der Quantenmechanik. Springer, Berlin et al. 2011 (Mathematik im Kontext). (in preparation).

Schomerus, Friedrich [1955]: Werden und Wesen der Carl-Zeiss-Stiftung. An der Hand von Briefen und Dokumenten aus der Gründungszeit (1886 – 1896). 2nd revised edition, Fischer, Stuttgart 1955.

Stolz, Rüdiger; Wittig, Joachim (eds.) [1993]: Carl Zeiss und Ernst Abbe. Leben, Wirken und Bedeutung. Wissenschaftshistorische Abhandlung. Universitätsverlag, Jena 1993.

Study, Eduard [1923]: Mathematik und Physik. Eine erkenntnistheoretische Untersuchung. Vieweg, Braunschweig 1923.

Wien, Wilhelm [1915]: Ziele und Methoden der theoretischen Physik. Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik 12 (1915), pp. 241 – 259.

Der erste Professor für Theoretische Physik an der Universität Hamburg: Wilhelm Lenz

Karin Reich

1 Die Anfänge der Physik in Hamburg

Schon lange vor der Gründung der Universität in Hamburg im Jahre 1919 war dort die Physik institutionalisiert worden: 1885 nämlich wurde das sog. «Physikalische Staatslaboratorium» gegründet. Als erster Direktor fungierte Carl August Voller, der dieses Amt bis zur Gründung der Universität innehatte; er konnte sogar erreichen, dass diese Institution 1892 einen Neubau beziehen konnte.[1] Im Staatslaboratorium wurde vor allem die Experimentalphysik gepflegt, die theoretische Physik hielt man nicht für so wichtig. Man war der Meinung, dass es genügen würde, diese, wenn überhaupt, einem fest angestellten wissenschaftlichen Beamten übertragen zu können. Aber selbst dazu kam es nicht.

So blieb es bei der Experimentalphysik, und dies auch, als die Universität ins Leben gerufen worden war. Aus dem «Physikalischen Staatslaboratorium» wurde nunmehr das «Physikalische Staatsinstitut», dem, nachdem die Berufung von Johannes Stark gescheitert war, seit September 1919 der Röntgenschüler Peter Paul Koch vorstand.[2]

Sicherlich hatte der Erfolg der Relativitätstheorie Anteil daran, dass man alsbald nach der Gründung der Universität Hamburg das Fehlen einer Professur für theoretische Physik mehr als schmerzlich empfand. Einen ersten Antrag zur Schaffung einer neuen Professur unterzeichneten am 15. Oktober 1919 der Experimentalphysiker Koch sowie die ebenfalls neu berufenen Mathematiker Wilhelm Blaschke und Erich Hecke. Vor allem Blaschke stand der theoretischen Physik nahe, gehörten doch die theoretische Mechanik sowie die Relativitätstheorie in Verbindung mit der Differentialgeometrie zu seinen Forschungsgebieten. Doch diese und viele weitere Bemühungen blieben zunächst erfolglos, die Schaffung weiterer fester Stellen für die junge Universität sollte aus Kostengründen tunlichst vermieden werden.

2 Einsteins Vortrag in Hamburg am 17. Juli 1920

Da kam der Mathematiker Wilhelm Blaschke auf eine besondere Idee, um der neu zu schaffenden Professur für theoretische Physik das

[1] Witte 1985, S. 9 – 12.
[2] Ebenda, S. 12 – 15.

entsprechende Gewicht zu verleihen. Er lud Albert Einstein zu einem Vortrag über Relativitätstheorie nach Hamburg ein.[3] Einstein kam, sein Vortrag fand am Sonnabend, dem 17. Juli, um 18 Uhr statt.

Sonnabend war sicher der geeignetste Tag der Woche, an diesem Wochentag durfte man ein Maximum an Zuhörern erwarten. Man konnte sicher sein, dass dieser Vortrag eine Resonanz sondergleichen erzeugen würde; das war genau das Ereignis, das für maximale Aufmerksamkeit sorgen würde. Kein einziger Physiker stand damals nur annähernd so im Rampenlicht wie Albert Einstein. Dieser hatte den Zweck seines Vortrages richtig eingeschätzt, verfolgte aber eigene Berufungswünsche, denn zwei Tage später, am 19. Juli 1920, ließ er Paul Ehrenfest wissen: «Ich war gestern und vorgestern dort [in Hamburg], um den lange versprochenen Vortrag zu halten. Es musste für die theoretische Physik Reklame gemacht werden, damit Epstein[4] dorthin berufen werden kann. Es besteht wirklich Aussicht. Die Mathematiker Hecke und Blaschke sind auch dort, sodass es für Epstein schön wäre.»[5]

Es gibt mehrere Berichte über dieses in Hamburg so spektakuläre Ereignis, einer stammt von Werner von Melle. Dieser war 1914 zweiter Bürgermeister in Hamburg geworden und hatte ganz maßgeblichen Anteil an der Gründung der Universität; mit anderen Worten, er war der Mann, der Macht hatte. In seinem Rückblick bzw. seinen Erinnerungen referierte von Melle detailliert die näheren Umstände von Einsteins Vortrag; dieser hatte annähernd zwei Stunden gedauert und fand seinen krönenden Abschluss in einer Nachsitzung im Restaurant Jalant. Einstein saß hier zwischen von Melle und Koch.[6]

Es muss eine weitere Nachsitzung gegeben haben, auf der Fragen gestellt werden konnten, und zwar im Hause des Philosophen Ernst Cassirer. Darüber berichtet Toni Cassirer in ihrem 1981 erschienenen Werk *Mein Leben mit Ernst Cassirer*. Zwar täuschte sie sich, was das Datum des Ereignisses anbelangt, Einstein trug nicht im Winter 1921 vor, sondern bereits im Juli 1920, aber das tut der Authentizität ihres Berichtes eigentlich keinen Abbruch:

---

[3] Einstein, Collected Papers 9, S. 616.

[4] Paul Epstein war bis 1921 Privatdozent für Physik an der Universität Zürich und wurde im Anschluss daran Assistent an der Universität in Leiden.

[5] Einstein, Collected Papers 10, S. 337.

[6] Reich 2000, S. 60 f.

> «Im Winter 1921 hielt Albert Einstein einen populären Vortrag über seine Relativitätstheorie in Hamburg. Ernst hatte gerade seine kleine Schrift über die philosophischen Grundlagen dieser Theorie beendet,[7] und Einsteins Anwesenheit beeindruckte ihn sehr. Nach dem Vortrag hatten Wissenschaftler verschiedener Fakultäten den Wunsch geäußert, Einstein einige Fragen vorlegen zu dürfen, die ihnen noch nicht völlig geklärt schienen, und Einstein erklärte sich sofort bereit, Auskunft zu geben. Als Treffpunkt wurde unser Haus in der Blumenstraße bestimmt. [...] Jeder der Anwesenden hatte seine Frage wohl vorbereitet, und Einstein beantwortete alle bereitwillig. Kaum war die Frage von dem jeweiligen Notizzettelchen abgelesen, erfolgte die klare Antwort, als wäre sie ebenfalls auf einem Zettelchen zur Benützung in einer Schublade bereitgelegt worden, aus der Einstein sie mühelos herausholen konnte. Ernst sah ihn die ganze Zeit voller Bewunderung an und half Unklarheiten der Fragestellungen zu korrigieren. Als letzter stellte der Mathematiker Hecke seine Frage – deren Inhalt ich vergessen habe, die aber ein leichtes Stirnrunzeln Einsteins zur Folge hatte. Erst antwortete er gar nicht; dann sagte er zögernd ein paar Worte und brach plötzlich und unvermittelt in ein helles Lachen aus. Dann fuhr er fort: ‹Darüber kann ich Ihnen noch nichts sagen, Herr Hecke – ich habe nämlich noch gar nicht darüber nachgedacht›.»[8]

Von Paul Riebesell wiederum, der ab WS 1919/20 an der neu gegründeten Universität Hamburg Vorlesungen hielt und von 1921 bis 1934 eine außerordentliche Professur für «Praktische Mathematik und Versicherungsmathematik» bekleidete,[9] stammt ein ausführlicher Bericht über die Inhalte von Einsteins Vortrag, der nur einen Tag später, nämlich am Sonntag, dem 18. Juli 1920, in den *Hamburger Nachrichten* erschien. Hier erfuhr der Leser in verständlicher Sprache die wesentlichen Inhalte der so heiß diskutierten allgemeinen Relativitätstheorie; es wurden vor allem die physikalischen Ideen und deren Hintergründe samt Ausblicken eingehend vorgestellt.[10]

---

[7] Cassirer 1920/1.

[8] Cassirer 1981, S. 135.

[9] 1934 wurde Riebesell zum Präsidenten des Reichsverbandes der öffentlich-rechtlichen Versicherungen ernannt.

[10] Reich 2000, S. 65 – 68.

3 Die Berufung von Wilhelm Lenz im Jahre 1921

Einsteins Vortrag war es schließlich zu verdanken, dass alsbald das Eis der Hamburger Behörden dahin schmolz, die Professur für theoretische Physik wurde schon kurze Zeit später genehmigt. Am 15. Dezember 1920 wurde der Berufungsausschuss einberufen, ihm gehörten der Astronom Richard Schorr, Koch, Hecke und Blaschke an. Letzterer wandte sich am 23. Dezember 1920 an Einstein und fragte, welcher von den folgenden Kandidaten der Beste sei, Max von Laue, Wilhelm Lenz, Erwin Schrödinger, Ludwig Flamm und Hans Thirring.[11] Bemerkenswerter Weise waren drei der Kandidaten, wie auch Blaschke selbst, Österreicher; der von Einstein favorisierte Paul Epstein gehörte nicht zu den Wunschkandidaten. In seinem Antwortschreiben vom 29. Dezember 1920 ließ Einstein Blaschke wissen: «Eine Aeusserung über Laue erübrigt sich. Von den sonst in Betracht kommenden scheinen mir die Leistungen von Epstein die aller Anderen weit zu überragen. Lenz, Schrödinger, Thirring und Flamm sind lauter tüchtige Theoretiker, von denen jeder Einzelne wirklich empfehlenswert ist. Von diesen möchte ich Lenz und Schrödinger voranstellen, ohne dass ich sagen könnte, welchen von diesen beiden ich höher stelle.»[12] Im Januar 1921 kommentierte Einstein in einem Brief an Edgar Meyer die Lage in Hamburg wie folgt:

> «Lenz war ursprünglich Debyes einziger Candidat für seine Nachfolge in Zürich [...]. Auch in Nauheim hat Debye[13] Lenz für das Hamburger Ordinariat auf Anfrage von Koch an erster und einziger Stelle vorgeschlagen. Es ist aber wahrscheinlich, dass nach Hamburg Laue berufen wird. Lenz ist nicht in Kiel sondern als (schlecht besoldeter) Extraordinarius in Rostock. Ich schätze Lenz ebenso wie Debye ein u. halte besonders seine letzten, vorerst nur sehr unvollständig publicirten Arbeiten über Bandspektren und Magnetismus[14] für äusserst wichtig.»[15]

Auf Platz 1 der Liste in Hamburg stand schließlich Max von Laue, der zwar zunächst sein Kommen in Aussicht gestellt hatte, aber dennoch

[11] Einstein, Collected Papers 10, S. 613.
[12] Ebenda, S. 547.
[13] Peter Debye war Professor der Physik an der ETH Zürich.
[14] Lenz 1919 und 1920b; Lenz 1920a.
[15] Dieser Brief Einsteins wurde bislang nicht publiziert, ich verdanke Karl von Meyenn eine Kopie des Briefes.

zu guter Letzt absagte, Nr. 2 war Wilhelm Lenz und Nr. 3 der damals noch nicht ganz so berühmte Erwin Schrödinger. Dieser konnte im darauf folgenden Jahr eine Physikprofessur an der Universität Zürich übernehmen.

Wer war nun dieser Wilhelm Lenz, der 1921 auf die neu geschaffene Professur für Theoretische Physik an die Universität Hamburg berufen worden war?

4 Die Karriere von Wilhelm Lenz

Der Name Lenz fehlt im *Dictionary of Scientific Biography* und auch im Lexikon *Die grossen Physiker* sucht man diesen Namen vergeblich.[16] Aber man spricht heute vom «Runge-Lenz-Vektor» und das «Lenz-Ising-Modell» ist in vieler Munde.

4.1 Sommerfeldschüler

Lenz war Sommerfeldschüler, allein diese Tatsache ist nicht nur eine Feststellung, sondern geradezu eine Auszeichnung. Schließlich galt das Münchner Institut Sommerfelds als eine der ersten und besten Schulen der Welt, als die «Pflanzstätte für theoretische Physik» schlechthin.[17]

Lenz, am 8. Februar 1888 in Frankfurt am Main geboren, hatte zwar sein Studium 1906 in Göttingen begonnen, er wechselte aber 1908 an die Universität München. Dort promovierte er am 2. März 1911 bei Arnold Sommerfeld mit einer 88 Seiten umfassenden Arbeit «Über das elektromagnetische Wechselfeld der Spulen und deren Wechselstromwiderstand, Selbstinduktion und Kapazität», die 1912 mit verändertem Titel und in veränderter Form veröffentlicht wurde.[18] Lenz knüpfte hier vor allem an zwei Arbeiten von Sommerfeld aus den Jahren 1904 und 1907 an,[19] in denen dieser den Wechselstromwiderstand von Spulen behandelt hatte. Sommerfeld erwähnte in seinem sehr lobenden Gutachten, dass den experimentellen Teil ein anderer Doktorand, es war Wilhelm Hüter, übernommen hätte. Ferner führte Sommerfeld aus,

[16] Meyenn 1997.
[17] Eckert 1993, S. 201 – 204.
[18] Lenz 1912.
[19] Sommerfeld 1904 und 1907.

dass Lenz hier ein schwieriges Problem der rechnenden Elektrodynamik mit erfreulicher Gründlichkeit und unter Beherrschung aller in Betracht kommenden mathematischen Hilfsmittel gelöst hätte. Ganz neu war hier vor allem die Definition der «Capazität».[20]

Assistent bei Sommerfeld

Als Sommerfelds Assistent Peter Debye 1911 an die Universität Zürich wechselte, wurde Lenz sein Nachfolger und blieb bis 1920 Assistent bei Sommerfeld. Wie angetan Sommerfeld von seinem neuen Assistenten war, zeigt ein Brief, den er im August/September 1911 an Paul Ehrenfest schrieb: «Mein jetziger Assistent, der ein wirklicher und voller Nachfolger Debyes zu werden verspricht, soll sich durchaus habilitiren; er ist wirklicher Physiker mit experimenteller Ader, die mir zu meinem großen Leidwesen ganz abgeht.»[21]

Zunächst plante Lenz, in Zukunft über Thermodynamik zu arbeiten. Im April 1913 stellte Sommerfeld Lenz' diesbezügliche Ergebnisse über die Behandlung der einatomigen Gase nach der Quantentheorie anlässlich eines von der Wolfskehlstiftung in Göttingen veranstalteten Vortragszyklus, den Erich Hecke organisiert hatte, vor.[22] Doch Lenz änderte alsbald seine Absichten und kehrte wieder zur theoretischen Elektrodynamik zurück.

Habilitation

Im SS 1914 erlebte die Sommerfeld-Schule eine der produktivsten Phasen ihrer Geschichte, diese fand ihren Niederschlag in einer Reihe von Kolloquiumsvorträgen und gipfelte in einem Besuch Niels Bohrs in München am 15. Juli.[23]

Und Lenz trug seinen Teil dazu bei, er konnte sich gerade noch vor Ausbruch des Ersten Weltkrieges habilitieren. Seine Habilitations-

[20] Sommerfelds Gutachten über Lenz' Dissertation vom 16.11.1911, siehe Archiv der Ludwig-Maximilians-Universität München, OC I 37p.

[21] Sommerfeld Briefwechsel 1, S. 401.

[22] Ebenda, S. 469, Fußnote 2; siehe ferner Physikalische Zeitschrift 14, 1913, S. 258 und 262, dort A. Sommerfeld (25.4.1913): Probleme der freien Weglänge, darunter auch «Specifische Wärme der einatomigen Gase (nach W. Lenz).»

[23] Eckert 1993, S. 53.

schrift war dem Thema «Berechnung der Eigenschwingungen einlagiger Spulen» gewidmet, sie wurde in den *Annalen der Physik* veröffentlicht.[24] In seinem Gutachten betonte Sommerfeld, dass Lenz die für die theoretische Physik erforderliche Vereinigung von physikalischer und mathematischer Denkweise besitzen würde.[25] Am 20. Februar 1914 hielt Lenz seine Probevorlesung über «Das Verhältnis der Thermodynamik und Statistik auf verschiedene Erscheinungsgebiete».

Schon im August desselben Jahres begann für Lenz der Kriegsdienst, der bis Anfang 1919 andauerte. Lenz' Vorlesungen wurden zwar stets angekündigt, konnten aber nicht mehr stattfinden. Nichts desto trotz oder gerade deshalb blieb Lenz in regem brieflichen Kontakt mit Sommerfeld.[26] Wie dies für viele Physiker während des ersten Weltkrieges zutrifft, so arbeitete auch Lenz während dieser Zeit durchaus auch an kriegsrelevanten Aufgaben, die er gelegentlich Sommerfeld wissen ließ bzw. über die er Andeutungen machte.[27]

Sommerfelds Empfehlungen für Lenz' berufliche Zukunft

Sommerfeld war menschlich Lenz sehr zugetan und von seinen wissenschaftlichen Leistungen überzeugt: «Lenz steht mir wissenschaftl. und persönlich besonders nahe» ließ Sommerfeld am 8. März 1918 Einstein wissen.[28] So ließ es Sommerfeld wahrhaftig nicht an Unterstützung für seinen Schüler fehlen.

Als es 1916 eine vakante Physikprofessur in Tübingen zu besetzen galt, meldete sich Sommerfeld am 1. Juni 1916 bei Wilhelm Wien und schlug Wilhelm Lenz vor:

[24] Lenz 1914.

[25] Archiv der Ludwig-Maximilians-Universität München, OC-N-14.

[26] Es sind 25 Briefe bekannt, die Wilhelm Lenz an Arnold Sommerfeld in den Jahren 1915, 1916, 1926 und 1932 schrieb, sowie ein Brief von Arnold Sommerfeld an Wilhelm Lenz vom 24.12.1926, siehe Sommerfeld Briefwechsel Internet. Es liegen sechs Briefe gedruckt vor, siehe Sommerfeld Briefwechsel 1, S. 532 – 534, Brief von Lenz vom 7.3.1916 und S. 567 – 568, Brief von Lenz vom 25.9.1916; Sommerfeld Briefwechsel 2, S. 262 – 264, Brief von Lenz vom 17.12.1926 und Brief von Sommerfeld vom 24.12.1926; ferner S. 343 f., Brief von Lenz vom 5.5.1932 und S. 348 f., Brief von Lenz vom 20.11.1932.

[27] Eckert 1993, S. 62, 64f.

[28] Einstein, Collected Papers 8, S. 671.

> «Denken Sie garnicht an Lenz? Tatsächlich ist er doch der einzige wirkliche Privatdozent für theoretische Physik, ein Mensch mit allen Vorbedingungen mathematischen Talentes, physikalischen Anschauungsvermögens, experimentellen Intereßes, durchaus Nachfolger von Debye. Seine Habilitationsarbeit (Eigenschwing. von Spulen) ist die höchste Leistung der rechnenden Elektrodynamik, wirklich meisterhaft in der Handhabung der mathematischen Hilfsmittel. Ich hätte mich nie an diese Arbeit herangewagt, trotzdem ich sie seit Drudes Beobachtungen[29] darüber immer im Auge hatte, weil mir das Problem aussichtslos verwickelt erschien. Lenz aber meistert die Problemstellung u. die Näherungsmethoden. Noch kürzlich schrieb mir Rogowski (Reichsanstalt)[30] ganz entzückt über diese Arbeit. [...] In Quantenstatistik, Verständnis der Prinzipien der Gastheorie, dürfte nicht leicht einer Lenz überlegen sein. Sie haben jedenfalls auch aus den persönlichen Gesprächen mit ihm den Eindruck eines ungewöhnlich tiefen Geistes. Seine Vorlesungen waren sehr gut, u. gern gehört.»[31]

Schließlich hielt man gemeinsam Lenz für zu jung für eine derartige Professur.[32]

Nach Kriegsende versuchte Lenz, ein Stipendium des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Physik in Berlin zu erhalten, sein Antrag datiert vom 25. März 1919 und war an Albert Einstein gerichtet. Hier schilderte Lenz ausführlich seinen wissenschaftlichen Werdegang, nämlich seine Forschungen über theoretische Elektrodynamik und zur statistischen Thermodynamik, genauer gesagt zur Theorie der einatomigen Gase. Was seine wissenschaftliche Zukunft anbelangte, so führte Lenz aus: «Ich beabsichtige vor allem die Theorie der einatomigen Gase wieder aufzunehmen und zwar aus dem Gesichtspunkt der *Quantelung des Stoßvorgangs*. Dies würde auf die Frage der Behandlung unperiodischer Vorgänge nach der Quantentheorie führen und im Zusammenhang

[29] Drude 1902.

[30] Walter Rogowski wurde 1912 Mitarbeiter an der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, bevor er 1920 eine Professur für theoretische Elektrodynamik an der TH Aachen übernehmen konnte.

[31] Sommerfeld Briefwechsel Internet, Scan.

[32] Sommerfeld an Willy Wien am 15.6.1916: «Daß Sie Lenz für zu jung halten, wundert mich nicht. Er hat nur ein Semester gelesen. Seine Berufung wäre ein zwar aussichtsreicher aber nach aussen hin vielleicht befremdender Wechsel auf die Zukunft» (Sommerfeld Briefwechsel Internet, Scan).

damit auf die Frage nach der Natur der kontinuierlich verteilten Roentgenspektren. Ausserdem beabsichtige ich, die Untersuchungen über die *Möglichkeit des Kernaufbaus* nach der Quantentheorie, die sich bisher auf die ersten Elemente des periodischen Systems bezogen, im Hinblick auf das radioaktive Ende des periodischen Systems fortzuführen.»[33] Demnach hatte sich Lenz nunmehr ganz der Quantentheorie zugewandt. Sommerfeld ergänzte den Antrag durch ein sehr wohlwollendes Schreiben, ebenfalls vom 25. März 1919.[34] Leider aber erhielt Lenz dennoch eine Absage:

> «Sehr geehrter Herr Kollege!
>
> In Anbetracht der gegenwärtigen schwierigen Lage der Institute hat das Direktorium des K.W. Institutes beschlossen, einstweilen keine Stipendien zu verleihen, deshalb muss ich Ihnen zu meinem grossen Leidwesen mitteilen, dass Ihrem Gesuche nicht entsprochen werden kann.
>
> Mit kollegialem Grusse
>
> Ihr
>
> gez. A. Einstein»[35]

In der Folgezeit setzte sich Sommerfeld dafür ein, dass Lenz an die Universität Tübingen berufen werden würde.[36] Der Name Lenz fiel schließlich im Jahre 1920, als es um die Nachfolge von Max Born an der Universität in Frankfurt am Main ging.[37] Einstein jedoch ließ am 29. Juli 1920 Arthur Schoenflies wissen: «Lenz ist zweifellos ein fähiger Theoretiker, der das Rüstzeug seiner Wissenschaft beherrscht. Aber ich würde es nicht gerecht finden, wenn er Stern[38] vorgezogen würde.»[39] Es war Erwin Madelung, der als Nachfolger von Max Born nach Frankfurt

[33] Einstein, Collected Papers 9, S. 18f.
[34] Ebenda, S. 20f.
[35] Brief vom 26.4.1919, Archiv zur Geschichte der Max-Planck-Gesellschaft, I. Abt., Rep. 34, Nr. 8, Mappe Lenz. Siehe ferner Einstein, Collected Papers 9, S. 561.
[36] Einstein, Collected Papers 9, S. 217 (Brief vom 24.10.1919 von Sommerfeld an Einstein).
[37] Einstein, Collected Papers 10, S. 304 (Brief von Schoenflies an Einstein, zwischen dem 9.6. und 28.7.1920) und S. 335f (Brief von Born an Einstein vom 16.7.1920).
[38] Otto Stern hatte sich 1915 bei Max Born in Frankfurt habilitiert, wo er 1919 Titularprofessor wurde.
[39] Einstein, Collected Papers 10, S. 353.

berufen wurde. Lenz stand aber sowohl in Münster als auch in Stuttgart auf der Berufungsliste.[40]

4.2 Zwischenspiel in Rostock

Im Jahre 1920 jedoch eröffnete sich für Lenz eine Möglichkeit an der Universität Rostock. Dort war 1907 ein Extraordinariat für «Angewandte Mathematik und theoretische Physik» gegründet worden, auf das schließlich Rudolf Weber berufen worden war. Da Weber schon seit vielen Jahren vor sich hin kränkelte, dachte man letztendlich an einen Nachfolger. Am 4. September 1920 lag die Liste vor: 1. Lenz, 2. Peter Ewald, 3. Walther Kossel. In der Begründung im Falle Lenz ist u. a. erwähnt, dass Lenz in München für die Verleihung des Professortitels vorgeschlagen und derzeit auf den Vorschlagslisten fast aller Neubesetzungen im Fache theoretische Physik zu finden sei, so in Göttingen, Münster, Frankfurt und Stuttgart. Man hielt es für unsicher, ob Lenz überhaupt zu gewinnen wäre.[41]

Aber, er war zu gewinnen, wenn er auch nur für ein Jahr in Rostock blieb. Aus den Vorlesungsverzeichnissen geht hervor, dass er im SS 1921 u. a. über die «Quantentheorie der Spektren» las, für das WS 1921/2 hatte Lenz eine Vorlesung über Relativitätstheorie angekündigt, zu der es aber nicht mehr kam.

Sein Nachfolger in Rostock wurde Otto Stern, der aber ebenfalls nach nur kurzer Zeit, nämlich 1923, nach Hamburg wechselte und dort eine Professur für physikalische Chemie wahrnahm. Es war nicht zuletzt den Bemühungen von Wilhelm Lenz zu verdanken, dass Otto Stern diesen Ruf nach Hamburg erhielt.[42] Stern wurde in Rostock durch Walter Schottky ersetzt, der schon 1921, als Stern berufen wurde, auf Platz 2 der Berufungsliste gestanden hatte. In der Tat herrschte reger Betrieb zwischen Rostock und Hamburg, denn 1929 wechselte Pascual Jordan umgekehrt von Hamburg nach Rostock, er kehrte nach einem kurzen Zwischenspiel in Berlin 1947 wieder nach Hamburg zurück.[43]

[40] Sommerfeld Briefwechsel 2, S. 79.

[41] Rostock, Universitätsarchiv: Personalakte Wilhelm Lenz, Gutachten vom 4.9.1920 zur Berufung von Lenz an die Universität Rostock.

[42] Jordan 1971, S. 53, 60.

[43] Zur Geschichte der theoretischen Physik an der Universität Rostock siehe: Universität Rostock 1994, S. 230.

4.3 Lenz in Hamburg

Wilhelm Lenz war an der Universität Hamburg die Nr. 2 der Berufungsliste vom 20. Januar 1921. Die Begründung für diese Platzierung lautete:

> «An zweiter Stelle: Den ausserordentlichen Professor an der Universität Rostock, Dr. Wilhelm Lenz, geb. 8. Febr. 1888 zu Frankfurt a/M., Schüler von Sommerfeld, promovierte und habilitierte er sich in München und wurde 1920 nach Rostock als Extraordinarius berufen. Lenz beherrscht ebenfalls die gesamte theoretische Physik, ist ein gründlicher Kenner der Maxwellschen Theorie und seine Forschungen über die spezifische Wärme bei tiefen Temperaturen, über die Kerntheorie des Atoms[44] und über Bandenspektren[45] sind als erstklassige zu bezeichnen.[46]»

Als Lenz nach Hamburg kam, umfasste sein Schriftenverzeichnis 15 Titel, das waren mehr als die Hälfte seiner insgesamt 28 Arbeiten, die er im Laufe seines ganzen Lebens veröffentlicht hatte. Das Jahr 1920 war sein produktivstes Jahr, in diesem hatte er allein vier Arbeiten publizieren können. In seinen späteren Forschungen widmete sich Lenz bevorzugt dem damals hochaktuellen Gebiet der Quantenmechanik, das er wie auch seine Schüler, in maßgeblicher Weise bereicherte. Zu seinen bedeutungsvollsten Arbeiten, die Lenz in Hamburg publizierte, gehörte sein 1924 erschienener Beitrag «Bewegungsverlauf und Quantenzustände der gestörten Keplerbewegung.»[47] Dort führte er einen Vektor ein, der später als Runge-Lenz-Vektor in die Geschichte einging.[48]

Am 29. Oktober 1934 musste Lenz seinen Diensteid wiederholen, das bedeutete zu dieser Zeit: «Ich schwöre: Ich werde dem Führer des deutschen Reiches und Volkes, Adolf Hitler, treu und gehorsam sein, die Gesetze beachten und meine Amtspflichten gewissenhaft erfüllen, so wahr mir Gott helfe».[49] Im Jahre 1939 konnte Lenz sein 25-jähriges Dienstjubiläum feiern, man hatte offensichtlich seinen Dienstantritt mit

[44] Lenz 1920c.
[45] Lenz 1919 und 1920b.
[46] Sta HH 364 – 5 I Universität I. D 20.2 Bd. 1, Blatt 50.
[47] Lenz 1924. Lenz hatte über dieses Thema auch bei der Deutschen Physikalischen Gesellschaft vorgetragen, siehe Verhandlungen der DPG (3) 5, 1924, S. 9.
[48] Zur Geschichte des Laplace-Runge-Lenz-Vektors siehe Guichardet 2008.
[49] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, I 269 Bd. 1, Blatt 22.

dem Jahr 1914, dem Beginn des ersten Weltkrieges, beginnen lassen, Lenz wurde mit dem Treudienst-Ehrenzeichen ausgezeichnet.[50]

Lehre an der Universität Hamburg[51]

Lenz las das gesamte Spektrum der theoretischen Physik: Mechanik, Optik, Elektronentheorie, Elektrodynamik, Wärmelehre, Thermodynamik, Quantentheorie, Quantenstatistik, Wellentheorie der Materie, Hydrodynamik, Potentialtheorie usw. Von besonderem Interesse sind seine Veranstaltungen über Relativitätstheorie. Lenz hatte unter diesem Titel Vorlesungen angeboten: im WS 1922/3, im SS 1932, im SS 1943, im WS 1943/4, im SS 1944, im SS 1948, im WS 1948/9, im SS 1951 sowie im SS 1954; im dritten Trimester 1940 betitelte er seine Vorlesung «Elektrodynamik bewegter Medien». Bemerkenswert ist die Lücke zwischen 1932 und 1940 bzw. 1943; diese Lücke sticht noch mehr ins Auge, wenn man bedenkt, dass Relativitätstheorie nicht nur von Lenz, sondern auch von Kollegen gelesen wurde, so bereits bevor Lenz nach Hamburg kam, im WS 1920/1 von Hecke, ferner im WS 1921/2 von Blaschke, des weiteren im SS 1923 von Hecke, im WS 1926/7 von Pauli, im WS 1928/9 und im SS 1929 von Pascual Jordan und im SS 1930 von Albrecht Unsöld, also nur vor 1933 und nicht während des Dritten Reiches. In der Tat war es vor der Konferenz in Seefeld im November 1942 wenig opportun, eine Vorlesung über «Relativitätstheorie» zu halten.[52]

Doch es gab auch eine rühmliche Ausnahme, nämlich Emil Artin; er las über Relativitätstheorie nicht nur im SS 1931, sondern auch im WS 1934/5. Er war in der Tat der einzige in Hamburg, der dieses Wagnis einging. Artin war 1923 Privatdozent an der Universität Hamburg geworden, seit 1926 bekleidete er dort eine Professur für Mathematik. 1937 wurde er, weil er mit einer Frau aus einer jüdischen Familie verheiratet war, pensioniert und emigrierte in die USA.

Im Jahre 1948 äußerte Lenz, anlässlich seines 60. Geburtstages, gegenüber dem Rektor der Universität Hamburg den Wunsch, seine Vorlesung

[50] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, I 269 Bd. 1, Blatt 23 und IV 612, Blatt 5.

[51] Als Grundlage dieser Abschnitte dienten die entsprechenden Vorlesungsverzeichnisse.

[52] Renneberg 1991, S. 1109; Beyerchen 1982, S. 230.

über Relativitätstheorie, die er im kommenden Wintersemester abzuhalten gedenke, zu einer Publikation auszuarbeiten.[53] Leider kam es dann doch nicht mehr dazu.

Lenz' Lehrveranstaltungen zur Vektoranalysis, die er im WS 1946/7, im WS 1949/50 und im WS 1955/6 hielt, fallen aus dem Rahmen seiner sonst nur der theoretischen Physik gewidmeten Vorlesungen heraus. Die Vermutung liegt nahe, dass Lenz das Thema Vektoranalysis auch in anders betitelten Veranstaltungen über theoretische Physik behandelt hatte.

Das Theoretisch-physikalische Vortragsseminar

Gleich zu Beginn seiner Tätigkeit in Hamburg, genau gesagt im SS 1922, hatte Lenz erstmals ein so genanntes «Vortragsseminar», später «Theoretisch-physikalisches (Vortrags-)Seminar» angeboten, das er zunächst nicht in jedem Semester und alleine abhielt. Im SS 1925 ließ er sich von Stern, Wolfgang Pauli und Rudolf Minkowski unterstützen. Für das WS 1926/7 wurden Stern und Pauli, und im SS 1928 nur noch Stern genannt, Pauli war gerade dabei, Hamburg zu verlassen. In den folgenden drei Semestern im WS 1928/9, im SS 1929 und im WS 1929/30 wurde für das Lenzsche Seminar neben Stern auch Pascual Jordan angegeben: Jordan aber konnte 1929 seine Stelle in Hamburg mit einem Extraordinariat in Rostock vertauschen. Von 1930 bis 1933 stand das Seminar nur noch unter der Ägide von Lenz und Stern. Als sich 1933 die politische Situation änderte, ging eine Ära zu Ende; Stern stand nunmehr nicht mehr zur Verfügung und Lenz musste das Vortragsseminar wieder alleine bestreiten.[54] In einer Gratulation zu Lenz' sechzigstem Geburtstag wurde bemerkt: «Die für Lenz glücklichste Zeit war die seines Zusammenwirkens mit O. Stern in Hamburg; mit ihm zusammen pflegte er ein Physikalisches Seminar, an dem viele namhafte auswärtige Gäste teilnahmen. Dieses Zusammenwirken wurde trotz seiner mutigen Bemühungen 1933 jäh unterbrochen.»[55] Im Fakultätsbuch wurde anlässlich der Sitzung am 12. Juli 1933 festgehalten: «Der Dekan gibt bekannt, dass Herr Stern um seine Entlassung zum 1. Oktober

[53] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 612, Blatt 21.
[54] Zwischen dem WS 1939/40 bis zum SS 1946 bot er kein derartiges Seminar an.
[55] Ortwein 1948, S. 31.

gebeten habe und zwar freiwillig, ohne eine anderweitige Berufung zu haben [...]. Der Herr Dekan hat es übernommen, Herrn Stern für die der Fakultät geleisteten Arbeiten und Verdienste mündlich zu danken.»[56] Das Amt des Dekans hatte damals der Chemiker und Biologe Gustav Bredemann inne. Kurze Zeit später erschien Lenz' Arbeit «Berechnung der Beugungsintensitäten von Molekularstrahlen an starren Kristalloberflächen»; es waren Otto Sterns Experimente gewesen, die Lenz zu diesem Beitrag veranlasst hatten.[57]

Erst ab SS 1948 ließ sich Lenz wieder offiziell im Vortragsseminar unterstützen und zwar zunächst von Jordan, der 1947 von Berlin nach Hamburg gewechselt hatte, dann von Erich Bagge oder beiden gemeinsam, gelegentlich fungierte auch Kurt Artmann als der zweite bzw. dritte Mann, so im SS 1952, SS 1955 und im WS 1955/6.

Das Physikalische Kolloquium

Im SS 1925 fand erstmals ein von der Experimentalphysik und von der theoretischen Physik gemeinsam getragenes «Physikalisches Kolloquium» statt. Schon im kommenden WS 1925/6 gesellte sich noch die angewandte Physik dazu. Das Institut für angewandte Physik war 1925 gegründet worden, Georg Möller war der erste Direktor.[58] So waren Koch, Lenz, Stern und Möller zunächst die für das Kolloquium verantwortlichen Professoren. Im WS 1927/8 durfte noch Pauli mitwirken. Als 1933 Stern ausschied, füllte im WS 1935/6 dessen Nachfolger Paul Harteck die Lücke. Im dritten Trimester von 1940 jedoch scherte der Experimentalphysiker Koch aus, man darf vermuten, dass persönliche Differenzen, vor allem über die Einschätzung der politischen Situation, der Grund dafür waren. Man erhielt stattdessen vom 1941 berufenen Astronomen Otto Heckmann Unterstützung. So stand im WS 1941/2 das Kolloquium unter der Ägide von Lenz und Heckmann und zusätzlich kam noch Hans Jensen dazu; in den folgenden Semestern bis Kriegsende wirkten ferner noch mit: Fritz Goos, Friedrich Knauer und Hans Heinrich Meyer.

[56] Fakultätsbuch I, S. 282.
[57] Lenz 1934.
[58] Legler 1985.

Als nach dem Tod von Koch am 1. Oktober 1945 Rudolf Fleischmann im Jahre 1947 als Nachfolger berufen wurde, wurde das Physikalische Kolloquium zwar wieder von der Experimentalphysik mitgetragen, jetzt aber fehlte die angewandte Physik, da Möller 1945 in den vorzeitigen Ruhestand versetzt worden war.[59] Als Heinz Raether am 1. Januar 1951 die bis dahin verwaiste Professur für angewandte Physik übernahm, war das Physikalische Kolloquium ab SS 1952 wieder «komplett». Da aber 1953 der Experimentalphysiker Fleischmann an die Universität Erlangen wechselte, fehlte alsbald wieder die Experimentalphysik. Dafür gesellte sich im SS 1955 noch Ewald Wicke von der physikalischen Chemie dazu.

Doktoranden, Habilitationen

Lenz hatte insgesamt hauptamtlich 14 Doktoranden betreut: Werner Schröder (1922), Ernst Ising (1924), Lucy Mensing (1925), Albert Grosmann (1925), Hans Jensen (1932), Erich Brandt (1933), Erwin David (1934), Kurt Artmann (1941), Herbert Schirmer (1949), Gerhart Lüders (1950), Erhart Heidelberg (1952), Werner Theis (1954), Heinzwerner Preuß (1954), Hans-Jürgen Borchers (1956).[60] Am häufigsten fungierten als Gutachter der Experimentalphysiker Peter Paul Koch und der Mathematiker Wilhelm Blaschke, beide je siebenmal. Die Zahl der betreuten Doktorarbeiten allein sagt vielleicht nicht allzu viel aus, aber im Vergleich zur Anzahl von Doktorarbeiten, die Peter Paul Koch im Zeitraum von 1919 bis 1945 betreut hatte, ist die Zahl ziemlich klein.

Setzt man die Zahl der Doktoranden aber in Beziehung zur Anzahl der Habilitationen, die unter Lenz zustande kamen, so ist das Bild ein ganz anderes: von diesen 14 Doktoranden konnten sich vier habilitieren, nämlich Hans Jensen (1936), Erwin David (1940), Kurt Artmann (1943) und Werner Theis;[61] dieser sei hier mitgezählt, obwohl seine Habilitation erst nach Lenz' Tod im Jahre 1958 abgeschlossen wurde. Zählt man im Falle von Lenz noch die beiden Habilitationen vor 1936 dazu, an denen Lenz mitgewirkt hatte, nämlich die von Wolfgang Pauli (1924) und Walter Gordon (1928), so gehen insgesamt 6 Habilitationen auf Lenz' Konto.

[59] Ebenda, S. 29.
[60] Doktor-Album.
[61] Habilitationsverzeichnis.

Walter Gordon hatte am 30. November 1928 den Antrag auf Habilitation eingereicht, als Habilitationsschrift fungierte die bereits 1926 veröffentlichte Arbeit «Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie».[62] Leider fehlt in seiner Habilitationsakte das Gutachten, aber es kann davon ausgegangen werden, dass seine Arbeit zur theoretischen Physik zu zählen ist und folglich Lenz das Gutachten verfasst hatte. In der Senatssitzung vom 9. Juli 1930 wurde Gordon zum «Professor» ernannt.[63]

5 Wissenschaftler im Umfeld von Lenz

Von den vielen Doktoranden von Lenz soll hier Ernst Ising besonders erwähnt werden. Sein Modell, das sog. Ising-Modell bzw. das Lenz-Ising-Modell, erlangte Weltruf.

Ferner sollen diejenigen, die sich bei Lenz habilitierten und die später den Nobelpreis bekamen, besonders vorgestellt werden, nämlich Wolfgang Pauli, der den Nobelpreis für 1945 erhielt, und Johannes Hans Daniel Jensen, der den Nobelpreis für 1963 bekam. Beide, sowohl Pauli als auch Jensen, hatten in Hamburg ihre fruchtbarste Zeit verbracht.

5.1 Ernst Ising

Ising war Lenz' zweiter Doktorand, aber er nimmt in der Liste der Doktoranden von Lenz sicher eine Sonderstellung ein. Als Sigismund Kobe Ising zum 95. Geburtstag gratulierte, vergaß er nicht zu erwähnen: «Ihren Namen findet man in mindestens zwölftausend Arbeiten, die nach 1969 erschienen sind, darunter mehr als 1500, die in den letzten zwei Jahren publiziert wurden, und wie viele es tatsächlich insgesamt sind, vermag wohl niemand zu sagen. In jeder Kursvorlesung über statistische Physik lernt der Physikstudent das Ising-Modell als Prototyp eines

[62] Gordon 1926.

[63] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 2196.
Walter Gordon hatte 1921 an der Universität Berlin promoviert und war seit 1926 wissenschaftlicher Hilfsarbeiter sowie 1930 ao. Prof. an der Universität Hamburg geworden. 1933 wurde ihm gekündigt und die Lehrbefugnis entzogen. Er emigrierte nach Schweden, wo er am Institut für Mechanik und mathematische Physik in Stockholm wirkte. Er verstarb bereits 1939.

‹idealen› theoretischen Modells kennen».[64] Eine genaue Beschreibung des sog. Lenz-Ising-Modells sowie eine Würdigung Isings geben z. B. Brush und Kobe.[65]

Die entscheidende Arbeit von Ising, die ihm diese überaus große Anerkennung zuteil werden ließ, war seine Doktorarbeit aus dem Jahre 1924. In der Tat ist die Rezeption der Isingschen Doktorarbeit herausragend und ganz und gar ungewöhnlich. Von einer derartigen Anerkennung können die meisten Doktoranden nur träumen.

Der am 10. Mai 1900 in Köln geborene Ernst Ising knüpfte mit seinem Thema Magnetismus direkt an die nicht einmal zwei Seiten umfassende Lenzsche Arbeit «Beitrag zum Verständnis der magnetischen Erscheinungen in festen Körpern» an, die dieser noch in Rostock eingereicht hatte.[66] Sommerfeld äußerte sich später darüber wie folgt: «Sehr früh hat Lenz die magnetischen Umklapp-Prozesse bei den paramagnetischen festen Stoffen zur Erklärung des Curieschen Gesetzes herangezogen, mit Ausblicken auf den Ferromagnetismus.»[67] Lenz konnte hier nur einen Weg andeuten, der es vielleicht gestatten würde, die Eigenschaften der Ferromagnetika zu erklären.

Ising hatte sich am 21. April 1921 an der Universität Hamburg immatrikuliert,[68] zu dieser Zeit war Lenz noch in Rostock, in Hamburg lief gerade sein Berufungsverfahren. Im Isingschen Lebenslauf, der seiner Promotionsakte beiliegt, kann man über sein Studium in Hamburg folgendes lesen: «Zwei Semester später[69] begab ich mich nach Hamburg, wo ich mich unter der Anregung von Professor Dr. Lenz besonders der Theoretischen Physik zuwandte. Unter seiner Anleitung begann ich Ende 1922 meine Untersuchungen über den Ferromagnetismus, die zu dem vorliegenden Ergebnis führten».[70]

---

[64] Kobe 1995.

[65] Brush 1967. Kobe 1997; 1998 und 2000.

[66] Lenz 1920a.

[67] Sommerfeld 1948.

[68] Hamburgische Universität, Matrikel der ordentlich Studierenden, SS 1920 – 1923, Nr. 4361.

[69] Ising hatte sich 1919 an der Universität Göttingen für ein Studium der Mathematik und Physik eingeschrieben und wechselte nach einer kurzen Unterbrechung an die Universität Bonn.

[70] Sta HH 364 – 13 Fakultäten/Fachbereiche der Universität, Mat.Nat.Prom. 135.

Schon am 8. Juli 1924 konnte sich Ising um die Promotion bewerben, in der Sitzung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät vom 23. Juli 1924 wurde das Promotionsgesuch von Ising genehmigt.[71] Am 18. August 1924 bat der damalige Dekan, der Mathematiker Erich Hecke, Lenz um das Gutachten.[72] In der Doktorprüfung prüften Lenz im Hauptfach, der Astronom Richard Schorr und der Mathematiker Hecke in den Nebenfächern Astronomie und Analysis.

Gemessen am großen Lob, das Ising später zuteil wurde, klingt das Ergebnis seiner Promotion eher mäßig. Lenz hatte ihn über Grundlagen der statistischen Mechanik, Gibbs'sche Statistik, Entropiedefinition, Grundlagen der klassischen Thermodynamik, Höhere Dynamik, Berührungstransformationen, Hamilton-Jacobische Dynamik, Wirkungs- und Winkelvariable, Quantenbedingungen und adiabatische Transformationen geprüft. Das Ergebnis lautete zwar «sehr gut», doch wurde diesem in Klammern «(schwach)» hinzugefügt. In Astronomie fragte Schorr nach sphärischer Astronomie und den Grundlagen der Bahnbestimmung; das Ergebnis lautete «gut». Lediglich in der Analysisprüfung, die über analytische Funktionen, Entwicklung in Potenzreihen, Singularitäten, Primzahlen, analytische Zahlentheorie, Differentialgleichungen und Besselsche Funktionen ging, erhielt Ising von Hecke ein uneingeschränktes «sehr gut».

Noch mehr erstaunt die Benotung der Doktorarbeit: Lenz hatte diese zunächst nur mit «gut» bewertet, nachträglich aber noch ein «sehr» vor das «gut» eingezwängt. Lenz monierte, dass die Frage, ob der ferromagnetische Zustand überhaupt als thermischer Gleichgewichtszustand betrachtet werden kann, nicht beantwortet werden konnte. Ising hatte ein, so Lenz, «negatives Ergebnis» erzielt, nämlich dass auf dem eingeschlagenen Weg ein Ferromagnetismus nicht zustande kommt.[73] Es erstaunt geradezu, dass die Gesamtnote dennoch «sehr gut» lautete.

Der Promotionsakte beigefügt ist ein vierseitiger Auszug aus der Dissertation, der 1924 in Hamburg veröffentlicht wurde; der Titel lautete: «Beitrag zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus». Am Ende kann man lesen: «Die vorliegende Arbeit wurde auf Veranlassung von Herrn Professor Dr. W. Lenz und unter seiner Anleitung ausgeführt.

[71] Fakultätsbuch I, S. 123.
[72] Damals genügte ein Gutachten.
[73] Sta HH 364 – 13 Fakultäten/Fachbereiche der Universität, Mat.Nat.Prom. 135.

Herrn Professor Dr. W. Lenz spreche ich auch an dieser Stelle meinen ergebensten Dank aus.» Dieser Auszug wurde nur Insidern bekannt und ist nicht identisch mit der Veröffentlichung in der *Zeitschrift für Physik* unter dem Titel «Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus», der 5 1/2 Seiten umfasst.[74] Dieser war die einzige Version, die zeitgenössischen und späteren Interessenten von Isings Arbeit zur Verfügung stand.

Am 3. November 1924 konnte Ising die Doktorurkunde in Empfang nehmen. In einem Brief an Stephen Brush, den Ising erst sehr viel später verfasste, beschrieb er die Situation, die damals am Hamburger Institut herrschte, als er an seiner Dissertation arbeitete. Besonders eindrucksvoll empfand er neben Lenz auch Gerlach,[75] Stern und Pauli:

> "At the time I wrote my doctor thesis Stern and Gerlach were working in the same institute on their famous experiment on space quantization.[76] The ideas we had at that time were that atoms or molecules of magnets had magnetic dipoles and that these dipoles had a limited number of orientations. We assumed that the field of these dipoles would die down fast enough so that only interactions should be taken in account, at least in the first order [...]. I discussed the result of my paper widely with Professor Lenz and with Dr. Wolfgang Pauli, who at that time was teaching in Hamburg. There was some disappointment the linear model did not show the expected ferromagnetic properties."[77]

Ising nahm danach eine Tätigkeit in der Patentabteilung der AEG in Berlin auf, holte später das Lehramtsexamen nach und wirkte als Lehrer. 1948 – 1976 war er als Professor der Physik an der Bradley University in Peoria (Illinois) in den USA tätig.[78]

---

[74] Ising 1925.

[75] Walter Gerlach studierte an der Universität Tübingen, wo er 1912 promovierte und sich 1916 habilitierte; er wirkte seit 1917 an der Universität Göttingen, 1920 an der Universität Frankfurt am Main, wo er 1921 ao. Prof. wurde. 1924 wechselte er als o. Prof. an die Universität Tübingen, 1929 an die Universität München, wo er bis 1957 tätig war.
Der Stern-Gerlach-Versuch fand 1921 in Frankfurt statt; Gerlach wirkte nicht in Hamburg.

[76] Zur Geschichte des Stern-Gerlach-Versuches siehe Heinrich/Bachmann 1989, S. 48 – 54; Walter 1991; S. 1141 – 1144; Friedrich/Herschbach 2005.

[77] Brush 1967, S. 885f.

[78] Kobe 1995.

Die Langversion der Doktorarbeit

Tatsächlich befindet sich in der Hamburger Staatsbibliothek unter der Signatur «Hamburg Diss.math.nat.Mscr./72» das 51 Seiten umfangreiche, maschinenschriftliche Originalmanuskript der Isingschen Dissertation: «Beitrag zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus» (siehe Abbildung 1). Hier diskutierte Ising in einem ersten Abschnitt «Das mittlere magnetische Moment der einfachen linearen Kette und verwandter Modelle» (S. 3 – 23), zum Schluss erwähnte er noch kurz den idealisierten Grenzfall eines flächenhaften Modells. Dabei ordnete er die Elemente in n_1 Querreihen an, von denen jede n nebeneinander liegende Elemente enthält. Dann macht sich die Wechselwirkung zwischen den Elementen verschiedener Ketten in derselben Weise geltend wie die Wechselwirkung zwischen den Elementen der einzelnen Ketten unter sich. Der zweite Abschnitt war den komplizierteren Fällen gewidmet (S. 24 – 49); diese betrafen die lineare Kette bei Zulassung von Querstellungen, die Doppelkette bei gleichzeitiger Wirkung benachbarter Elemente derselben und verschiedener Ketten sowie die lineare Kette bei Wechselwirkung zwischen erst- und zweitbenachbarten Elementen. Im Gegensatz zu seinen Vorgängern hatte Ising nicht angenommen, dass auch weit entfernte Elemente einen Einfluss aufeinander ausüben würden, denn dies schien in der Tat nicht der Fall zu sein, aber leider musste er bei seinen Annahmen mit dem oben schon erwähnten negativen Ergebnis vorlieb nehmen.

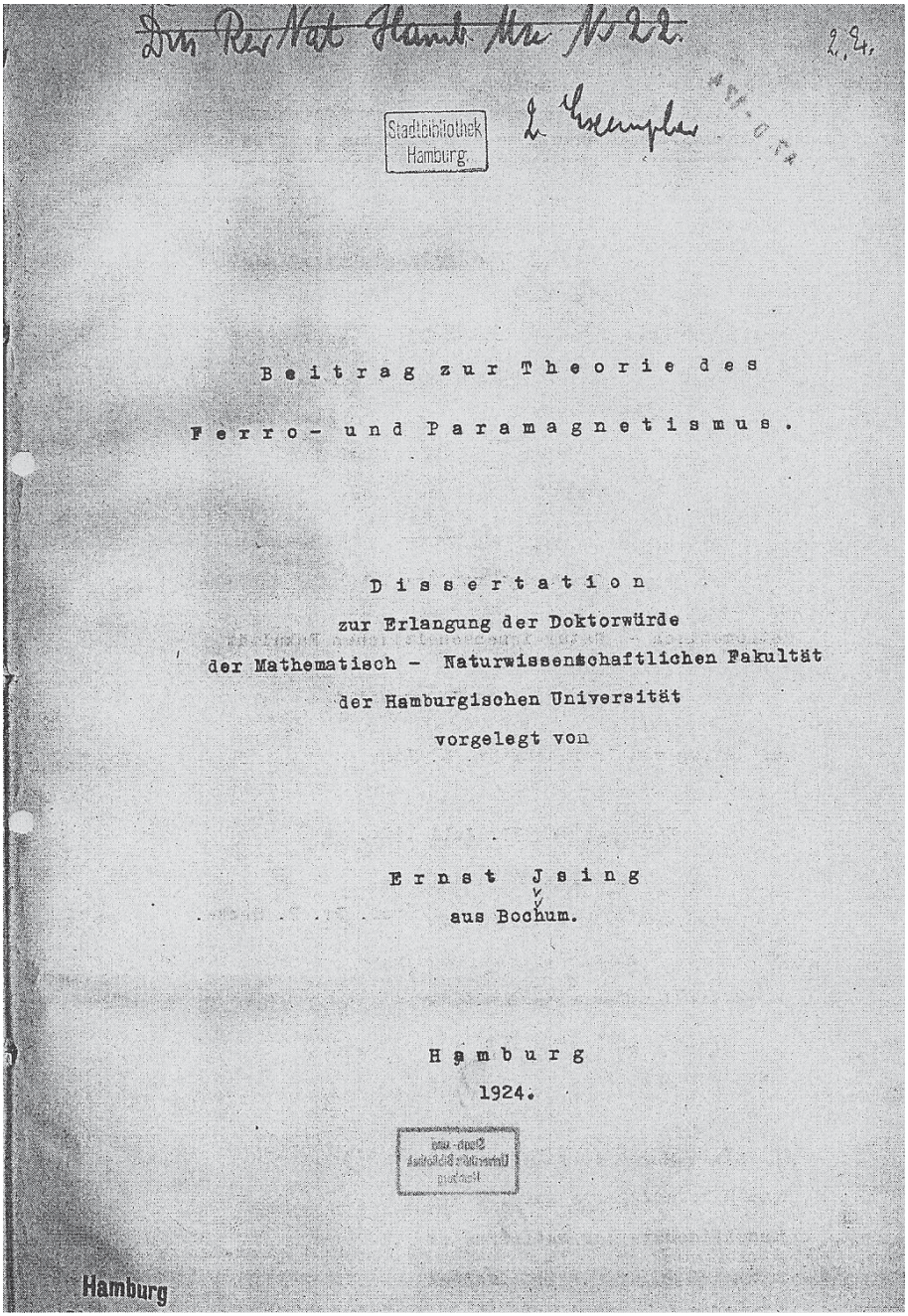
Diese Langversion der Isingschen Dissertation ist auch im Internet zugänglich.[79]

Die Rezeption der Isingschen Dissertation

Ising gelangte erst relativ spät zu Ruhm. Es war Werner Heisenberg, der als erster auf die Isingsche Doktorarbeit aufmerksam wurde. Heisenberg erwähnte Isings Arbeit kurz in einem Brief an Pauli vom 3. Mai 1928.[80] Am 20. Mai 1928 reichte Heisenberg seine Arbeit «Zur Theorie des Ferromagnetismus» ein, die noch in demselben Jahr in der *Zeitschrift für*

[79] Veröffentlicht im Internet: http://www.fh-augsburg.de/~harsch/anglica/Chronology/20thC/Ising/isi_fm00.html

[80] Pauli Briefwechsel 1, S. 443 – 447, hier S. 447.



Stadtbibliothek Hamburg

Beitrag zur Theorie des

Ferro- und Paramagnetismus.

Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Hamburgischen Universität

vorgelegt von

Ernst Ising

aus Bochum.

Hamburg

1924.

Hamburg

Abbildung 1
Ernst Ising: Beitrag zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus

Physik erschien. Dort kann man lesen: «Andere Schwierigkeiten wurden noch ausführlich von Lenz diskutiert, und es gelang Ising, zu zeigen, daß auch die Annahme richtender, hinreichend großer Kräfte zwischen je zwei Nachbaratomen einer Kette nicht genügt, um Ferromagnetismus zu erzeugen,»[81] er zitierte dabei die beiden bereits erwähnten Arbeiten von Lenz und Ising.[82] Am 31. Juli 1928 erwähnte Heisenberg gegenüber Pauli sein eigenes Modell, das dem von Ising ähnlich sei: «Nach meiner jetzigen Ansicht müßte auch Ising Ferromagnetismus bekommen haben, wenn er hinreichend viele Nachbarn [...] angenommen hätte. Nach der Argumentation, die Ising für das räumliche Modell publiziert hat, scheint es mir überhaupt, als ob er seine Arbeit gar nicht verstanden hätte.»[83]

Die weitere Rezeptionsgeschichte wurde in aller Ausführlichkeit von Brush und Niss dargestellt.[84] Während Kobe vom Ising-Modell sprach, bezeichneten Brush und Niss dieses als Lenz-Ising-Modell. In der Tat fand am 19. Dezember 2002 in Rostock, wo Lenz' Beitrag entstanden war, ein Weihnachts-Kolloquium statt, wobei Kobe den Festvortrag über «Ising-Modell, Lenz und Rostock» hielt.

5.2 Wolfgang Pauli

Nach seiner Berufung nach Hamburg war es für Lenz sicher mehr als nahe liegend, sich innerhalb der Sommerfeldschule nach einem neuen Assistenten umzusehen. Wolfgang Pauli hatte 6 Semester, von 1918 – 1921, in München studiert und bei Sommerfeld promoviert.[85] Mit Pauli hatte Lenz in München am gleichen Schreibtisch gesessen; auch hatte Pauli zwei Vorlesungen bei Lenz belegt.[86] Danach wurde Pauli, wenn auch nur für kurze Zeit, Assistent bei Max Born an der Universität Göttingen. Am 21. Oktober 1921 ließ Max Born Einstein wissen: «W. Pauli ist jetzt mein Assistent, er ist erstaunlich klug und kann sehr viel. Dabei ist er menschlich, seinen 21 Jahren entsprechend, durchaus normal, lustig und kindlich. Leider will er im Sommer wieder fort, zu Lenz nach

[81] Heisenberg 1928, S. 619.
[82] Lenz 1920a; Ising 1925.
[83] Pauli Briefwechsel 1, S. 466 – 469, hier S. 467.
[84] Brush 1967; Niss 2005/2009.
[85] Pauli 1922.
[86] Nachricht von Karl von Meyenn in einem Brief vom 24.3.2010.

Hamburg, dem er es versprochen hat.»[87] Und am 29. November ergänzte Born gegenüber Einstein: «Der kleine Pauli ist sehr anregend; einen so guten Assistenten werde ich nie mehr kriegen. Leider will er im Sommer zu Lenz nach Hamburg.»[88] Somit ist klar, dass Lenz, bereits kurze Zeit, nachdem seine Berufung nach Hamburg feststand, mit Pauli Kontakt aufgenommen hatte; Pauli, der 12 Jahre jünger als Lenz war, wurde im Mai 1922 in Hamburg als sog. «wissenschaftlicher Hilfsarbeiter» eingestellt.[89]

Als Pauli Ende September 1922 einer Einladung von Niels Bohr zu einem einjährigen Studienaufenthalt nach Kopenhagen nachkam, war für Lenz guter Rat teuer. Werner Heisenberg kam nun ins Gespräch, und dies, obwohl dieser erst 1920 sein Studium bei Sommerfeld begonnen hatte. Am 28. Oktober 1922 aber ließ Heisenberg Sommerfeld wissen: «Am letzten Samstag bekam ich plötzlich von Lenz aus Hamburg einen Brief, ob ich nicht die Nachfolge Paulis dort übernehmen wollte. Auf so etwas war ich garnicht vorbereitet [...] nach langer Beratung beschloß ich, diese Stelle anzunehmen. Leider aber währte der schöne Plan nicht lange, denn gestern abend bekam ich auf meine Zusage hin von Lenz einen zweiten Brief,» mit der Nachricht, dass Lenz sein Angebot wieder zurücknahm.[90]

Schließlich wurde Pauli durch Ernst Ising vertreten.[91]

Pauli weilte noch in Kopenhagen, als er intensiv über seine Habilitation nachzudenken begann; am 6. Juni 1923 schrieb er an Arnold Sommerfeld:

> «Es ist sehr freundlich von Ihnen, wenn Sie wünschen, daß ich mich schließlich in München habilitieren soll. Nun ist es damit eine sehr schwierige Sache. Einerseits drängen die Hamburger sehr, daß ich mich habilitieren soll; dies ist auch ein wenig verlockend, denn seitdem nun Lenz, Stern und Minkowski[92] dort sind, ist ein sehr

[87] Einstein, Collected Papers 12, S. 324 – 327, hier S. 325.

[88] Ebenda, S. 361 – 365, hier S. 362.

[89] Funk/Mumenthaler 2000, S. 35f.; Meyenn 2000, S. 62f.

[90] Sommerfeld Briefwechsel 2, S. 127.

[91] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, 317, Blatt 13: Lenz am 1.8.1923 an die Hochschulbehörde «Der bisherige Inhaber der Stelle mit Unterhaltszuschuss, Herr cand. phys. Ernst Ising, tritt dafür, wie vorgesehen, am 30. September d. J. aus.»

[92] Rudolf Minkowski hatte 1921 an der Universität Breslau promoviert. Er wurde 1922 an der Universität Hamburg wissenschaftlicher Hilfsarbeiter und habilitierte sich

> schöner wissenschaftlicher Betrieb dort, auch sind die Hamburger Mathematiker sehr vernünftig und interessieren sich immer sehr für die Probleme der Mechanik.»[93]

Am 9. August 1923 ging bei der *Zeitschrift für Physik* Paulis Beitrag «Über das thermische Gleichgewicht zwischen Strahlung und freie Elektronen» ein; dieses Werk war eine Frucht der Anregungen, die Pauli in Kopenhagen erhalten hatte, es wurde noch in demselben Jahr publiziert.[94] Pauli zitierte dort Hendrik Antoon Lorentz, Adriaan Fokker, Einstein und vor allem eben Niels Bohr; Pauli weilte zu diesem Zeitpunkt noch immer in Kopenhagen, er kehrte erst Anfang Oktober 1923 nach Hamburg zurück.

Pauli hatte sich nunmehr offensichtlich für eine Habilitation in Hamburg entschieden. Im Hamburger Staatsarchiv existiert eine «Habilitationsakte des Dr. phil. Wolfgang Pauli».[95] Gemäß dieser Akte reichte Pauli am 17. Januar 1924 offiziell sein Gesuch um Habilitation ein, als Habilitationsschrift diente die oben genannte, nur 15 Seiten umfangreiche Arbeit. Als Dekan fungierte damals Erich Hecke. Er bat Lenz um ein Gutachten über Paulis Habilitationsschrift möglichst noch vor dem 30. Januar. Lenz' Gutachten ist in der Tat ein Eulogium auf Pauli bzw. dessen äußerst seltene Begabung; von «einer erstaunlichen Frühreife seines stark auf's Mathematische gerichteten Geistes» ist hier die Rede; Lenz charakterisierte die Habilitationsschrift «als reifste Arbeit»:

> «Er [Pauli] zeigt hier, in welcher Weise die Einstein'schen Überlegungen, die für die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Atom gelten, auf den Fall des freien Elektrons erweitert werden müssen. Es ergibt sich eine unerwartete Form des Elementarprozesses und damit eine wertvolle Bereicherung unsrer Kenntnis

zwei Jahre nach Pauli im Jahre 1926 unter der Ägide von Koch; am 15.7.1931 wurde Minkowski zum nichtbeamteten ao. Prof. ernannt; am 26.3.1934 wurde ihm die Lehrbefugnis entzogen, am 31.3.1936 wurde er entlassen. Minkowski emigrierte in die USA, wo er bis 1960 an der University of California in Berkeley tätig war. Im Jahre 1957 stellte er einen Antrag auf Wiedergutmachung; diesen Vorgang sollte Lenz betreuen, der aber vorzeitig verstarb, sodass die Aufgabe Otto Heckmann zufiel (Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 2389).

[93] Pauli Briefwechsel 1, S. 94 – 101, hier S. 94.

[94] Pauli 1923.

[95] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 2340.

> der Naturvorgänge. – Die sehr selten anzutreffende Vereinigung von hohem mathematischem [sic!] und physikalischen Können verbunden mit einer erstaunlichen Arbeitskraft lassen in Hinblick auf das in so jungen Jahren schon Geleistete in der Zukunft Außergewöhnliches von Hrn. Pauli erwarten. Seine Habilitation ist auf das wärmste zu begrüßen.»[96]

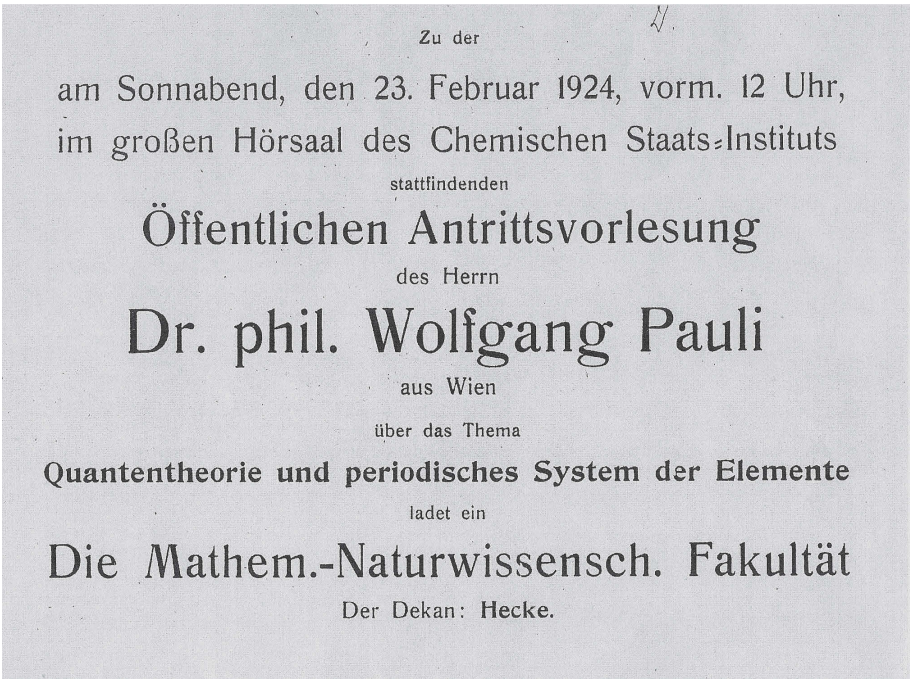
In der Sitzung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät vom 25. Januar 1924 wurde laut Fakultätsbuch festgehalten: «Auf Bericht der Kommission wird beschlossen, Hrn. Pauli als Privatdozenten für theoretische Physik zuzulassen und ihm die Habilitationsleistungen (außer der Antrittsvorlesung) zu erlassen, ihn jedoch zu bitten, der Fakultät einen Vortrag über ein selbstgewähltes Thema zu halten.» Schon in der nächsten Sitzung, am 13. Februar 1924, wurde Paulis Thema bekanntgegeben: «Über die Grenzen der Darstellbarkeit der physikalischen Erscheinungen durch kontinuierliche Felder».[97] Wann er diesen Vortrag vor der Fakultät hielt, war nicht zu ermitteln. Seine Antrittsvorlesung hielt Pauli am Sonnabend, dem 23. Februar 1924, vormittags um 12 Uhr über «Quantentheorie und periodisches System der Elemente» (siehe Abbildung 2).

In demselben Jahr 1924, nämlich im November, entdeckte Pauli das Ausschließungsprinzip.[98] Für dieses wurde er 1945 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet.

Im Mai 1926 herrschte bei den Hamburger Physikern große Aufregung, Pauli hatte am 18. Mai einen Ruf an die Universität Leipzig erhalten. Lenz verfasste einen «Entwurf an die Hochschulbehörde», einen dringlichen Appell, man solle versuchen, Pauli in Hamburg zu halten:

> «Herr Dr. Pauli hat einen Ruf auf das Extraordinariat für theoretische Physik an der Universität Leipzig erhalten. Die Fakultät legt den grössten Wert darauf, Herrn Dr. Pauli hier zu halten.
>
> Herr Dr. Pauli ist ein Gelehrter von internationalem Ruf. Seine Wirksamkeit in Forschung und Lehre ist an der hiesigen Universität von grösster Bedeutung. Neben einer Spezialvorlesung hat er die Abhaltung eines Proseminars übernommen. Ferner wirkt er bei der Leitung des physikalischen Kolloquiums und

[96] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 2340: Habilitationsakte S. 2.
[97] Fakultätsbuch I, S. 119.
[98] Pauli 1925. Siehe hierzu Meyenn 1980/1 und Meyenn 2000.


Zu der

am Sonnabend, den 23. Februar 1924, vorm. 12 Uhr,
im großen Hörsaal des Chemischen Staats-Instituts

stattfindenden

Öffentlichen Antrittsvorlesung

des Herrn

Dr. phil. Wolfgang Pauli

aus Wien

über das Thema

Quantentheorie und periodisches System der Elemente

ladet ein

Die Mathem.-Naturwissensch. Fakultät

Der Dekan: **Hecke.**

Abbildung 2
Ankündigung der Antrittsvorlesung von Wolfgang Pauli im Jahre 1924

> des theoretisch-physikalischen Seminars mit. Es besteht keine Aussicht, bei einem etwaigen Fortgang Herrn Dr. Pauli's einen irgendwie für diesen Umfang des Wirkungskreises in Betracht kommenden Ersatz zu finden.
>
> Aus diesen Gründen bittet die Fakultät die Hochschulbehörde jeden möglichen Schritt zu tun, um ein Weggehen von Herrn Dr. Pauli zu verhindern.»[99]

Am 19. Mai 1926 wurde in der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät festgehalten: «Es soll bei der Hochschulbehörde beantragt werden, Hrn. Dr. Pauli einen Lehrauftrag und den Prof.-Titel zu geben. Falls möglich, soll ein etatsmäßiges Extraordinariat für Hrn. Pauli erreicht werden, das jedoch erst nach Befriedigung der übrigen Wünsche der Fakultät errichtet werden soll.»[100] Kurze Zeit später, am 12. Juni 1926,

[99] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 2340.
[100] Fakultätsbuch I, S. 131.

stellte die Fakultät offiziell den Antrag an die Behörde, am 25. November 1926 wurde schließlich Pauli offiziell die Amtsbezeichnung «Prof.» verliehen.[101]

Und selbstverständlich pflegte man auch weiterhin ein mehr als nur gutes Verhältnis zu Arnold Sommerfeld, der nunmehr gleich einen doppelten Grund hatte, Hamburg einen Besuch abzustatten, so z. B. im November 1925[102] sowie vom 1. bis 6. Februar 1927; dieser Besuch wurde sogar mit einem Fakultätsessen gefeiert.[103]

Im WS 1927/28 hielt Emil Artin eine Vorlesung über «Ausgewählte Kapitel der höheren Algebra», die Pauli hörte und mitschrieb; es war dies das letzte Semester, das Pauli in Hamburg verbrachte. Im Pauli-Nachlass in Genf wird diese Mitschrift aufbewahrt. Artin behandelte dort halbeinfache Systeme, die später in der Geschichte der Elementarteilchenphysik große Bedeutung erlangten; Pauli nämlich empfahl diese halbeinfachen Systeme seinem ehemaligen Doktoranden und Assistenten Nicholas Kemmer,[104] der für deren weitere Rezeption sorgte. In einem Brief vom 9. November 1955 an Hermann Weyl erinnerte sich Pauli:

> «Im Wintersemester 1927/8 hörte ich dort eine mich im Zusammenhang mit der neuen Quantenmechanik sehr interessierende Vorlesung von *Artin* über hyperkomplexe Zahlsysteme. Dabei begann eine Episode in unserer Beziehung und damit auch in der Beziehung von Mathematik und Physik, die sich später noch fortsetzen sollte. Am Beginn der Vorlesung erklärte Artin, die kontinuierlichen Gruppen könne er nicht in der Vorlesung bringen, weil für das Theorem der vollen Reduzibilität der Darstellungen halbeinfacher kontinuierlicher Gruppen kein algebraischer Beweis vorliege. Der einzige bekannte Beweis von Weyl verwende leider Integrale über die Gruppenmannigfaltigkeit. Bei diesen letzten Worten warf Artin die seinen Hörern wohlbekannten zornigen Blicke um sich. Ich war beeindruckt davon, wie Artin als Vertreter der algebraischen Richtung, zu welcher der damals und heute anwesende van der Waerden sowie auch Emmy Noether gehörten, das asketische Weglassen eines ganzen Gebietes der Benützung ei-

[101] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 2340.
[102] Sommerfeld Briefwechsel 2, S. 241.
[103] Ebenda, S. 264.
[104] Pauli Briefwechsel 2, S. 624 – 627.

> ner vom Standpunkt seiner Richtung aus als inadäquat beurteilten Beweismethode vorzog.»[105]

Als jedoch Pauli einen Ruf an die ETH in Zürich erhielt, konnte die Universität Hamburg nicht mehr mithalten. Im November 1927 begannen die Berufungsverhandlungen, am 1. April 1928 wurde Pauli zum ordentlichen Professor für theoretische Physik auf 10 Jahre an der ETH in Zürich berufen.[106]

Pauli pflegte übrigens weiterhin eine enge Freundschaft mit dem Mathematiker Erich Hecke, mit dem er Anfang August des Jahres 1929, als er bereits in Zürich wirkte, eine Reise durch Schweden und Norwegen unternahm.[107] Ostern 1934 besuchte Pauli in Hamburg insbesondere Hecke.[108] Seinen vorletzten Besuch stattete Pauli Hamburg im Jahre 1955 ab, er war für drei Tage, vom 29. November bis zum 1. Dezember dort und fand leider einen sehr gealterten Lenz vor.[109] Bei dieser Gelegenheit dürfte bereits die Nachfolge von Wilhelm Lenz erörtert worden sein; Pauli setzte sich für Harry Lehmann ein, der dann auch tatsächlich 1956 Lenz' Nachfolger wurde. Am 18. Februar 1957 ließ Pauli den Kunsthistoriker Erwin Panofsky wissen: «Mit den Hamburgern stehe ich gut, denn sie haben genau *den* zum Nachfolger von Lenz gemacht, den ich empfohlen habe: einen jüngeren deutschen theoretischen Physiker *H. Lehmann*.»[110] In der Tat war Lenz am 30. März 1956 emeritiert worden und starb ein Jahr später. Pauli ließ Panofsky wissen: «In Hamburg *starb Lenz* am 30. April an einem Herzschlag, wahrscheinlich als Folge einer Embolie. Ein merkwürdiger Mann mit seinem chronischen Schnupfen! Nun bin ich froh, ihn im November 1955 noch einmal ausführlicher gesehen zu haben.»[111]

Die Verleihung der Würde eines Ehrendoktors an Pauli

Lenz erlebte dieses Ereignis nicht mehr. Die Hamburgische Wissenschaftliche Stiftung hatte Pauli zu einem Vortrag am 21. November 1958

[105] Pauli Briefwechsel 4,3, S. 401.
[106] Pauli Briefwechsel 1, S. 540.
[107] Ebenda, S. 541.
[108] Pauli Briefwechsel 2, S. 729.
[109] Pauli Briefwechsel 4,3, S. 74, Fn. 15.
[110] Pauli Briefwechsel 4,4 A, S. 238.
[111] Ebenda, S. 413.

eingeladen, das Thema lautete: «Die ältere und neuere Geschichte des Neutrinos».

Diese Gelegenheit nahmen Heckmann und Jordan zum Anlass, am 5. November 1958 der Fakultät vorzuschlagen, gleichzeitig Pauli mit der Ehrendoktorwürde der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät auszuzeichnen. Der Vorschlag wurde einstimmig angenommen.

Pauli weilte vom 20. bis 22. November 1958 in Hamburg, kurz vor seinem Vortrag, der um 17 Uhr im großen Hörsaal des Physikalischen Institutes stattfand, wurde ihm die Auszeichnung überreicht.[112]

Ohne es zu ahnen, war diese Reise nach Hamburg Paulis letzte Reise, denn er verstarb bereits am 15. Dezember 1958. Seine Frau Franca ließ die Fakultät am 2. Januar 1959 wissen:

> «Die Verleihung der Ehrendoktorwürde der Naturwissenschaften durch die Mathem.-Naturwissenschaftl. Fakultät der Universität Hamburg war die letzte große Freude meines Mannes, dafür möchte ich Ihnen von Herzen Dank sagen. Obwohl er schon krank war – ohne zu ahnen, daß er totkrank war – wollte er unbedingt diese Reise nach Hamburg unternehmen. Erst später verstand ich, wie wesentlich diese Reise für ihn war. Er wollte doch offenbar, unbewußt, in jene Stadt zurückkehren in der er einmal so schöpferisch war – und glücklich.»[113]

5.3 Johannes Hans Daniel Jensen

Lenz blickte später wehmütig auf die Zeit vor 1933 zurück. Doch auch die Zeit nach 1933 hatte für Lenz sicherlich noch einige positive Seiten, und diese waren insbesondere Hans Jensen zu verdanken. Ebenso wie Pauli, so hatte auch Jensen seinen bedeutendsten Beitrag zur Physik während seiner Tätigkeit in Hamburg geleistet:

> «So wie Pauli mit seinem Ausschließungsprinzip die Anordnung der Atomelektronen erklärte, hat Jensen den Schlüssel zum Verständnis des schalenförmigen Aufbaues der Atomkerne (und damit der sog. ‹magischen Zahlen›) geliefert. Beide Physiker Pauli und Jensen wurden für ihre entsprechenden Beiträge mit dem Nobelpreis ausgezeichnet. Später haben Pauli und Jensen gute

[112] Pauli Briefwechsel 4,4 B, S. 1328 – 1330 und S. 1383.
[113] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 2340.

> freundschaftliche Beziehungen miteinander gepflegt und auch Briefe miteinander ausgetauscht,»

so berichtet Karl von Meyenn, der Herausgeber des Pauli-Briefwechsels.[114] Mit keinem seiner Schüler und Mitarbeiter hatte Lenz so eng zusammengearbeitet wie mit Hans Jensen. Diese Zusammenarbeit eröffnete Lenz sogar ein neues Forschungsgebiet in der Physik, nämlich die Kernphysik, wohin Jensen alsbald wechselte.

Am 25. Juni 1907 in Hamburg geboren, hatte Jensen mit Hilfe der Studienstiftung des Deutschen Volkes in Hamburg und in Freiburg studiert. Schon aus seiner Freiburger Zeit, aus dem Jahre 1927, stammt seine erste Veröffentlichung: «Das magnetische Feld einer räumlichen Strömung bei linearer Stromquelle».[115]

Bereits im WS 1929/30 wurde Jensen am Institut für theoretische Physik in Hamburg vertretungsweise Hilfsassistent. Im November 1930 legte er das Staatsexamen in Mathematik und Physik für das höhere Lehramt ab, ferner bekam er den Guttmann-Preis der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät zuerkannt.[116] Über Lenz als Lehrer äußerte sich Jensen später Sommerfeld gegenüber, hier Sommerfeld: «Joh. Jensen, damals Student am Seminar, schildert mir, daß Lenz niemals mit seiner Zeit geizte, wenn es sich darum handelte, seinen Schülern zu helfen; man konnte bis tief in die Nachtstunden bei ihm sitzen und sich mit ihm beraten. Er gab sich nicht eher zufrieden, als bis an einem Problem die prinzipiellen Züge klar und einfach herausgearbeitet waren.»[117]

Die Promotion

Jensen war Lenz' Doktorand Nr. 5, seine Promotionsanmeldung trägt das Datum 4. Dezember 1931. Was die mündliche Prüfung anbelangt, so prüften Lenz und Koch Physik, Blaschke im Nebenfach Mathematik und Stern im Nebenfach physikalische Chemie. Stets bekam Jensen

[114] Pauli Briefwechsel 3, S. 742.

[115] Jensen 1927.

[116] Im Fakultätsbuch wurde am 3.12.1930 festgehalten: «Der Guttmann-Stiftung wird auf Antrag von Herrn Lenz und Befürwortung von Herrn Blaschke Herr Jensen für den Rm 500-Preis vorgeschlagen» (Fakultätsbuch I, S. 228).

[117] Sommerfeld 1948.

die Note «ausgezeichnet». Auch seine Doktorarbeit, die er unter dem Titel «Ladungsverteilung in positiven und negativen Ionen und die Gitterkonstante des Rubidiumbromids nach der statistischen Methode» einreichte, erzielte die Note «Mit Auszeichnung», der Gutachter war Lenz. In seinem in den Promotionsakten liegenden Lebenslauf hielt Jensen fest: «Meine Dissertation habe ich unter Anleitung von Herrn Prof. Lenz angefertigt; Herr Prof. Lenz hat durch seine zahlreichen Ratschläge die Arbeit in hohem Maße gefördert.»[118] Am 11. November 1932 konnte Jensen seine Doktorurkunde in Empfang nehmen; seine Doktorarbeit wurde kurze Zeit später unter leicht verändertem Titel in der «Zeitschrift für Physik» veröffentlicht.[119]

Schon die Dissertation von Jensen macht deutlich, dass Jensen und Lenz in besonders intensiver Weise kooperierten. Lenz' Arbeit «Über die Anwendbarkeit der statistischen Methode auf Ionengitter» nämlich, war ebenso wie Jensens Dissertation am 14. Mai 1932 bei der *Zeitschrift für Physik* eingereicht worden, sie wurde unmittelbar vor Jensens Dissertation veröffentlicht.[120] Beide Arbeiten zusammen bilden inhaltlich eine Einheit.

Trotz der ausgezeichneten Promotion musste sich Lenz Sorgen um die Finanzierung von Jensen machen. So ließ er am 29. April 1932 Sommerfeld wissen: «Hr. Jensen ist ganz mittellos. Ich habe bisher bei der Studienstiftung Unterstützung für ihn erwirkt. Aber jetzt mußten wir an die Notgemeinschaft herangehen. Die Antwort ist schon überfällig, ich bin deshalb etwas in Sorge um die Zukunft Hrn. Jensens u. auch die Fortführung der weiteren Arbeit an den Krystallgittern. Wenn Sie irgend einen Tip wüssten, wie man Hrn. Jensen, der ein sehr gescheiter Mensch ist, helfen kann, so wäre ich Ihnen außerordentlich dankbar.»[121] Erst am 20. November 1932 konnte Lenz Entwarnung melden, Jensen war nunmehr als vollgültiger Assistent eingestellt worden.[122] Bereits im SS 1933 hielt Lenz mit Jensen zusammen ein Proseminar ab, im Vorlesungsverzeichnis fehlt leider der Name Jensen.

---

[118] Sta HH 364 – 13 Fakultäten/Fachbereiche der Universität, Mat.Nat.Prom. 371.
[119] Jensen 1932.
[120] Lenz 1932.
[121] Sommerfeld Briefwechsel Internet, kein Scan. Originalbrief im Deutschen Museum, Sommerfeld-Nachlass, Archiv HS 1977 – 28/A, 199.
[122] Sommerfeld Briefwechsel 2, S. 348.

Diese gute Zusammenarbeit zwischen Lenz und Jensen wurde auch weiterhin fortgesetzt. Anlässlich der Tagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft (DPG), die am 16./17. Juli 1932 in Kiel stattfand, trug Jensen über «Die Gitterkonstante von Ionenkristallen nach der statistischen Methode» vor und Lenz über die «Allgemeine Theorie der Verbreiterung von Spektrallinien»,[123] Lenz' Beitrag wurde kurze Zeit später veröffentlicht.[124] Wiederum anlässlich der Tagung der DPG am 7./8. Juli 1934 in Kiel sprach Jensen über die «Berücksichtigung der Austauschenergie bei Fermischen Atom- und Ionengittern» und anschließend Lenz über «Theorie der Beugung von Molekularstrahlen an starren Kristallgittern».[125] Beide Vorträge fanden auch in ausführlichen Publikationen ihren Niederschlag.[126]

Die Habilitation

Anfang des Jahres 1936 reichte Jensen seine Habilitationsschrift ein, sein Schriftenverzeichnis umfasste zu dieser Zeit bereits acht Nummern. Seine Arbeit wurde unter dem Titel «Über die Existenz negativer Ionen im Rahmen des statistischen Modells» in der *Zeitschrift für Physik* veröffentlicht.[127]

Lenz war, wie sein Gutachten vom 15. April 1936 zeigt, begeistert, Jensen hatte der statistischen Methode voll und ganz zum Sieg verholfen, Lenz sprach von der «großen Überlegenheit des neuen Verfahrens». Lenz' Urteil lautete: «Die Arbeit enthält eine Fülle schöner neuer Ergebnisse methodischer und sachlicher Art, sie ist klar durchdacht und dargestellt und verdient in jeder Hinsicht, als Habilitationsschrift empfohlen zu werden.»[128]

Was das Habilitationsverfahren von Jensen anbelangt, so wurde im Fakultätsbuch festgehalten: «Der Herr Rektor Rein ist während der Habilitation Dr. Jensen anwesend.»[129] In der Tat war Adolf Rein vom 1.10.1934 bis zum 31.10.1938 Rektor der Hamburger Universität,

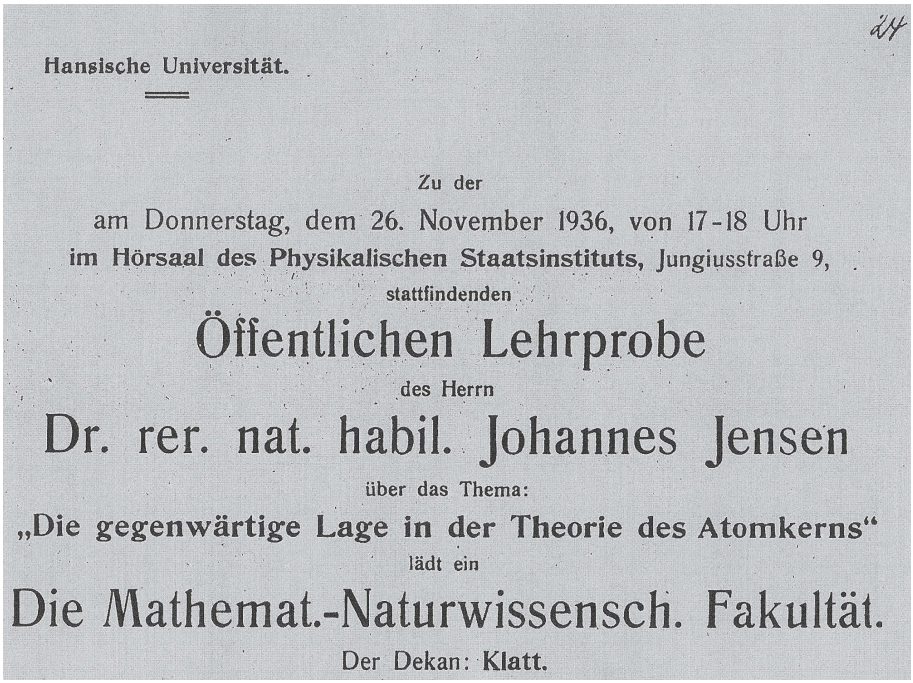
[123] Verhandlungen der DPG (3) 13, 1932, S. 21.
[124] Lenz 1933.
[125] Verhandlungen der DPG (3) 15, 1934, S. 17.
[126] Jensen 1934/5; Lenz 1934.
[127] Jensen 1936a.
[128] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, 2213, Blatt 10.
[129] Fakultätsbuch II, S. 43.

und Nomen est Omen, genauer gesagt, sein Vorname ist auch das Omen; hatte Rein doch 1933 die Aufgabe übernommen, die Universität Hamburg in eine nationalsozialistische Hochschule zu verwandeln. Der Grund für Reins Anwesenheit war, dass Jensens Habilitation die erste war, die nach dem neuen, von den Nationalsozialisten eingeführten Recht stattfand.

Jensen hatte folgende 3 Themen für seine sog. «öffentliche Lehrprobe» vorgeschlagen:

1. Die gegenwärtige Lage in der Theorie des Atomkerns.
2. Die Natur der Wechselwirkungskräfte zwischen Proton und Neutron.
3. Neue theoretische Argumente zu Gunsten der Neutrinohypothese.

Das erste Thema wurde gewählt. Diese Vorlesung fand am 26. November 1936 statt (siehe Abbildung 3). Das Thema macht deutlich, dass die Kernphysik nunmehr Jensens Interesse erobert hatte.


24

Hansische Universität.

Zu der
am Donnerstag, dem 26. November 1936, von 17-18 Uhr
im Hörsaal des Physikalischen Staatsinstituts, Jungiusstraße 9,
stattfindenden

Öffentlichen Lehrprobe

des Herrn

Dr. rer. nat. habil. Johannes Jensen

über das Thema:

„Die gegenwärtige Lage in der Theorie des Atomkerns"

lädt ein

Die Mathemat.-Naturwissensch. Fakultät.

Der Dekan: Klatt.

Abbildung 3
Ankündigung der Öffentlichen Lehrprobe von Johannes Jensen im Jahre 1936

Als eine Fortsetzung seiner Habilitationsschrift veröffentlichte Jensen direkt im Anschluss seine «Quantentheoretische Berechnung der Alkalihalogenidgitter».[130] Darüber, wie auch über den Inhalt seiner Habilitationsschrift hatte Jensen auch anlässlich der im Februar in Hamburg stattfindenen Tagung der DPG ausführlich vorgetragen.[131] Lenz sprach bei der gleichen Tagung «Zur wellenmechanischen Theorie der idealen Gase», dieser Beitrag wurde, im Gegensatz zur Ankündigung, offensichtlich nicht veröffentlicht.

Die Bergakademie in Clausthal war der Tagungsort der DPG im Jahre 1937. Lenz sprach, ganz untypisch für ihn, «Zur Demonstration von Geschoßpendelung und Fliegerhorizont mittels der Pohlschen Geräte». Dabei wurde erwähnt: «Vortrag i. V. Jensen», wie man auch immer dies zu deuten hat. Und schließlich trug bei derselben Gelegenheit Jensen sowohl über «Eigenschwingungen eines Fermi-Gases und Anwendung auf die Blochsche Bremsformel für schnelle Teilchen»[132] als auch «Über die Frage nach der Existenz angeregter Zustände negativer Halogenionen» vor, während Lenz anschließend über «Eine anschauliche Erklärung der anomalen Reflexion von Molekularstrahlen an Kristallen» referierte.[133] In der Folgezeit steuerte Lenz bei Tagungen der DPG keine Vorträge mehr bei.

Jensens Wechsel zur Kernphysik

Bereits in seinen späteren Vorträgen anlässlich der DPG-Tagungen zeigt sich deutlich Jensens Interessenverschiebung. Die Tagung des Jahres 1938 fand am 11./12. Juni in Kiel statt. Jensen hielt folgende zwei Vorträge:[134] «Zur Kernsystematik»[135] und «Zur physikalischen Deutung der kristallographischen Ionenradien».[136] Bei der vom 11.

[130] Jensen 1936b.

[131] Jensen trug vor über «Lösungen der ‹Fermigleichung mit Austausch› und Berechnung von diamagnetischen Suszeptibilitäten» und über «Quantentheoretische Berechnung der Alkalihalogenidgitter», siehe Verhandlungen der DPG (3) 17, 1936, S. 10.

[132] Diese Arbeit wurde veröffentlicht, siehe Jensen 1937.

[133] Verhandlungen der DPG (3) 18, 1937, S. 67f und S. 74f.

[134] Verhandlungen der DPG (3) 19, 1938, S. 86f, 88f und 132.

[135] Dieser Beitrag wurde unter dem Titel «Über die Elemente 43 und 61» veröffentlicht, siehe Jensen 1938.

[136] Jensen/Meyer-Gossler/Rohde 1938.

bis 16. September 1938 in Baden-Baden stattfindenden 14. Deutschen Physikertagung trug Jensen über die «Druck-Dichte Beziehung der Materie bei hohen und mittleren Drucken und $T = 0$» vor.[137]

Im Jahre 1939 war «Die klassische Herleitung der Kernkräfte aus Yukawas Feldtheorie» Jensens Thema bei der DPG.[138]

Als Lenz im Jahre 1939 erneut ein Gutachten über Jensen schreiben musste, damit dieser zum Dozenten neuer Ordnung ernannt werden konnte, kam Lenz auf Jensens Beiträge nach seiner Habilitation, insbesondere auch auf seine Beiträge zur Kernphysik, zu sprechen:

> «Herr Dr. Jensen hat seine früheren an das Fermiatom anknüpfenden Arbeiten in geistvoller Weise nach verschiedenen Richtungen hin fortgesetzt, wovon ich besonders zwei Arbeiten herausheben möchte: Erstens diejenige über die kristallographischen Ionenradien, in der die bisher ganz unverständliche empirisch gefundene Eigenschaft der Ionen, in Kristallen feste Ionenradien zu zeigen, auf sehr einfache Weise erklärt und eine Berechnung dieser Radien in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung durchgeführt wird.[139] Und zweitens diejenige über die Druck-Dichtebeziehung der Materie bei hohen Drucken, in der die hohe Dichte des Eisens im Erdinnern theoretisch erklärt wird, und womit zugleich ein neues Hilfsmittel zur Erforschung des Innern der Erde und der Planeten gewonnen worden ist.[140] Parallel damit gehen die theoretisch-physikalischen Untersuchungen über die Konstitution der Atomkerne. In 3 (4) Arbeiten erweist sich Jensen als ausgezeichneter Kenner dieses in schneller Entwicklung befindlichen Gebiets, und seine erfreulichen bisherigen Ergebnisse lassen hier noch viel von ihm erhoffen. Er wurde schon mehrfach zu Vorträgen auf diesem Gebiet nach auswärts eingeladen.»[141]

Am 1. Januar 1940 äußerte sich Lenz abermals über die Leistungen von Jensen, diesmal ging das Schreiben an den Rektor der Universität Hamburg, den Ostasienforscher Wilhelm Gundert; es bahnte sich bereits eine Wegberufung Jensens an: Lenz schrieb:

> «Ich hatte zum Ausdruck gebracht, dass ich Hrn. Jensen ungern verlieren würde, dass er mir ein lieber Kollege u. Freund ist, dass

[137] Verhandlungen der DPG (3) 19, 1938, S. 132.
[138] Jensen 1939a.
[139] Jensen/Meyer-Gossler/Rohde 1938.
[140] Jensen 1938/9.
[141] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, 2213.

> er gut liest u. insbesondere versteht schwierige Gegenstände in ihren Wesenszügen sehr klar und leicht verständlich darzustellen. [...] Jensen hat sich in der Fachwelt einen angesehenen Namen zunächst durch seine Untersuchungen zur Quantentheorie der Alkali-Halogenid-Krystalle gemacht. [...] Ferner konnte er die Zustandsgleichung des festen Körpers bei extrem hohen Drucken mit solcher Genauigkeit berechnen, dass die hohe Dichte des Eisen-Nickelkerns der Erde erklärt werden konnte und der weiteren Erforschung des Erdinnern wichtige theoretische Anhaltspunkte geliefert werden konnten. Neuerdings hat sich Hr. Jensen den Problemen des Aufbaus der Atomkerne zugewandt. Seine bisherigen Ergebnisse auf diesem Gebiet sind: interessante Betrachtungen zur Stabilität der Atomkerne (Isotope) und eine vereinfachte Fassung der Youkava'schen Theorie des Mesotrons, die viel Beachtung gefunden hat.[142] Sein großer Kenntnisreichtum auf dem Gebiet der Kern-Probleme ist aus seinem vor kurzem erschienenen Aufsatz in den Naturwissenschaften[143] ersichtlich.»[144]

Am 21. Mai 1941 erschien im *Hamburger Tageblatt* der Artikel «Atome unter einer Million Atmosphären Druck» mit dem Untertitel: «Elemente in der Panzerpresse – Physikalische Gespräche in Hamburg». Dieser Artikel hatte seine Wurzeln in einem Kolloquiumsvortrag Jensens, in dem er dieses Thema vorgestellt hatte. Hier ging es u. a. um das Innere des Erdkerns, wobei sich die oft gemachte Annahme, dass im Erdkern auch Nickel vorhanden sein müsste, so Jensen, als unhaltbar und überflüssig erwies:

> «Der Physiker sucht diese Erscheinungen auch bereits vom inneren Bau der Atome her, aus den Veränderungen der Atomstruktur bei zunehmendem Druck zu deuten. Er kommt zwischen schwierigsten mathematisch-physikalischen Ableitungen zum Beispiel dazu, von so gequetschten Atomen zu sprechen, daß die Elektronen nicht mehr wissen, zu welchem Kern sie eigentlich gehören.»[145]

1941 folgte Jensen einem Ruf an die Technische Hochschule in Hannover, dennoch hielt er noch bis 1945 in Hamburg Lehrveranstaltungen ab. Später nahm Jensen einen Ruf an die Universität Heidelberg an, wo er seit dem 1. Januar 1949 wirkte; dort wurde er 1969 emeritiert.

---

142 Jensen 1939a.
143 Jensen 1939b.
144 Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 1884, Blatt 89 – 91.
145 Hamburger Tageblatt Nr. 137, vom 21.5.1941.

Jensen als Hochschullehrer in Hamburg

Als frisch Habilitierter durfte Jensen zunächst nur das Physikalische Proseminar zusammen mit Hans Heinrich Meyer und Friedrich Knauer abhalten. Jensens Vorlesungstätigkeit begann erst im Wintersemester 1937/8, er las über Elektronentheorie der Metalle, Theorie bzw. Quantentheorie des Atomkerns, Kinetische Gastheorie, Statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage, Einführung in die Quantentheorie, Bausteine der Materie (Elektron, Positron, Proton, Neutron, Kerne, Mesotron, Strahlungsquanten, Neutrino; WS 1942/3). Auch seine anderen Lehrveranstaltungen zeigten deutlich den Wechsel zur Kernphysik an. Eine besondere Bedeutung kommt deshalb sicher der Veranstaltung «Besprechung neuerer kernphysikalischer Arbeiten» zu, die Jensen zusammen mit Harteck, Knauer und später auch mit Wilhelm Groth abhielt. Und zusätzlich wirkte Jensen noch vom WS 1941/2 bis zum SS 1945 im Physikalischen Kolloquium mit.[146]

Jensen und Sommerfeld

Es liegt auf der Hand, dass Jensen mit Sommerfeld in Briefkontakt stand, so erwähnte Sommerfeld in einem Brief an Paul Gombás am 3. Februar 1943, dass er einen Brief von Jensen erhalten habe.[147] In einem Schreiben vom 20. November 1950 schickte Jensen an Sommerfeld Sonderdrucke zur Atomtheorie und Hydrodynamik; ferner drückte er seine Freude über Sommerfelds Briefe aus: «Es wäre doch hübsch, Ihren gesamten derartigen Briefwechsel beisammen zu haben.»[148]

Und umgekehrt geizte Sommerfeld nicht mit Lob, wenn es um eine Empfehlung Jensens für eine mögliche Berufung ging. So ließ Sommerfeld am 29. April 1937 seinen Marburger Kollegen Eduard Grüneisen wissen: «Nach den von Ihnen gestellten Anforderungen scheinen mir folgende Herren für Sie in Betracht zu kommen [...] Jensen, Hamburg. Hat als Assistent von Lenz einige gute Arbeiten über Kristall-Jonen gemacht.»[149] Als es 1939 um die Nachfolge von Rudolf Reiger ging, empfahl Sommerfeld abermals Jensen:

[146] Siehe die einschlägigen Vorlesungsverzeichnisse.
[147] Sommerfeld Briefwechsel Internet, Scan.
[148] Sommerfeld Briefwechsel Internet, kein Scan. Originalbrief im Deutschen Museum, Sommerfeld-Nachlass, Archiv NL 89,009.
[149] Sommerfeld Briefwechsel, Internet, Scan.

> «H. Jensen ist Schüler und Mitarbeiter von Lenz. Er hat sich besonders gründlich und erfolgreich mit dem Thomas'schen Atommodell beschäftigt. Ich habe auch persönlich von ihm einen sehr guten Eindruck. Er ist in Graz als Nachfolger von Schrödinger in Vorschlag (hinter Hund[150] und Sauter[151]). Seine letzte Arbeit, über die er vor einem Jahr in Baden-Baden vortrug, wendet seine Atomstudien in interessanter Weise auf das Innere der Sterne an. [...] Jensen erweist sich in einem soeben erschienenen Aufsatz in den Naturwissenschaften[152] auch als zuverlässiger Kenner der Kernphysik.»[153]

1940 empfahl Sommerfeld Jensen für ein Extraordinariat in Greifswald: «Mit bestem Gewissen kann ich H. Jensen – Hamburg empfehlen, einen alten Schüler von Lenz. Er hat erfolgreich in Atomphysik, Astro- und Kernphysik gearbeitet. Er war bereits bei mehreren Berufungen in Frage».[154]

Schließlich übernahm Jensen 1941 ein Ordinariat an der Technischen Hochschule in Hannover (siehe oben); als er 1942 an der Tagung der DPG, die diesmal am 21./22. Februar in Hamburg stattfand, teilnahm, wurde Jensen bereits als aus Hannover kommend angekündigt; er hielt ein Referat über diverse neuere Arbeiten aus der Physik.[155]

Nobelpreisverleihung

1963 wurde Jensen und Maria Goeppert-Mayer der Nobelpreis «for their discoveries concerning nuclear shell structure» verliehen.[156] Noch in

[150] Friedrich Hund war von 1929 – 1946 Prof. für mathematische Physik an der Universität Leipzig.

[151] Fritz Sauter war 1933 – 1936 Dozent am Institut für theoretische Physik in Göttingen, 1936 außerordentlicher und 1938 ordentlicher Prof. an der Universität Königsberg, 1942 – 1945 an der TH München.

[152] Jensen 1939b.

[153] Sommerfeld am 1.12.1939 an Rudolf Pummerer, Sommerfeld Briefwechsel Internet, Scan.

[154] Sommerfeld am 20.11.1940 an Rudolf Seeliger, Sommerfeld Briefwechsel Internet, Scan.

[155] Verhandlungen der DPG (3) 23, 1942, S. 53.

[156] Gleichzeitig bekam auch Eugene P. Wigner den Nobelpreis zuerkannt und zwar «for his contribution to the theory of the atomic nucleus and the elementary particles, particularly through the discovery and application of fundamental symmetry principles».

seiner Rede, die Jensen am 12. Dezember 1963 anlässlich der Preisverleihung hielt, gedachte er seines früheren Lehrers Wilhelm Lenz:

> «When we consider all these questions as a whole – the problems of nuclear structure and nuclear forces, as well as the problems of elementary particles, a verse by Rilke still seems to fairly describe the situation. In the early days of quantum mechanics my late teacher, Wilhelm Lenz, brought this verse to my attention. In it Rilke speaks of his feelings at the turn of the century in terms of a large book in which a page is slowly being turned over, he concludes:
>
> ‹Man fühlt den Glanz von einer neuen Seite,
> Auf der noch alles werden kann.
> Die stillen Kräfte prüfen ihre Breite
> Und sehn einander dunkel an.››[157]

6 Das Verhältnis Lenz – Koch

Das Verhältnis zwischen Koch und Lenz scheint mindestens bis zum Beginn des Dritten Reiches problemlos gewesen zu sein. Das sollte sich jedoch spätestens in den vierziger Jahren ändern.

Auf äußeren Druck hin waren viele Hamburger Universitätsangehörige im Jahre 1937 der NSDAP beigetreten,[158] so auch Koch und Lenz.[159] Dennoch gab es große Unterschiede in den politischen Auffassungen. Bemerkenswert ist, dass Koch schon im dritten Trimester 1940 nicht mehr an dem ansonsten gemeinsam, von allen physikalischen Instituten getragenen Kolloquium teilnahm.

---

[157] Jensen 1963, S. 49f.

[158] Laut Sta HH 361 – 5 Hochschulwesen II, Pa 4 waren der Partei beigetreten: von den Professoren: Mecking, Blaschke, Möller, Harteck, Schlubach und Lenz; von den Dozenten Goos, Kindler, Hellerich, Petersson, Meyer, Knauer, Jensen und Lütgens; von den wissenschaftlichen Hilfskräften Zassenhaus, Wohltmann, Hagen, Groth und Jensen, und vom Physikalischen Staatsinstitut Pollän und David.

[159] Laut Auskunft des Bundesarchivs vom 24.5.2002 waren beide am 1.5.1937 in die Partei eingetreten; in den Unterlagen des Hamburger Staatsarchivs wurden, wenn überhaupt, andere Daten aus dem Jahre 1937 genannt.

Der Fall Lenz[160]

Am 6. November 1943 stellte Wilhelm Lenz einen Antrag auf Beurlaubung von den Vorlesungspflichten im Wintersemester 1943/4, und zwar aus Gesundheitsgründen; Jensen sollte ihn vertreten.[161] Dies nahm Koch zum Anlass, um Lenz aus seinem Amt entfernt wissen zu wollen. Am 10. Dezember 1943 schrieb Koch an den Dekan Ludwig Mecking, der vom Fache her Geograph, also kein Kenner der Situation unter den Physikern war; Koch wollte in einem 5-Punkte-Programm klarlegen, dass Lenz seinem Amte nicht mehr gewachsen sei:

> «1) Schon im Jahre 1925 tat die Hochschulbehörde Schritte zur Emeritierung von Herrn Professor Lenz, da dieser wegen angeblicher Magenbeschwerden seine Vorlesungen nicht abhalten konnte. Ich habe in der Angelegenheit damals als Dekan[162] mehrfach mit Herrn Regierungsdirektor v. Wrochem[163] und Herrn Professor Dr. Nonne[164] verhandelt. Akten darüber müssen bei der Behörde liegen.
>
> 2) Nach einer kurzen Zeit der Besserung im Befinden von Herrn Prof. Lenz mussten immer wieder in den folgenden Jahren Vertretungen für seine Vorlesungen beschafft werden. So haben die Herren Dr. Pauli, Dr. Unsöld und Dr. Jensen viele Semester lang die Vorlesungen für Herrn Prof. Lenz halten müssen.[165]

---

160 Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 1331 sowie IV, 2228.

161 Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 612, Blatt 8.

162 Koch war vom 1.10.1924 bis zum 30.9.1925 Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät gewesen.

163 Albert von Wrochem war Regierungsdirektor der Hochschulbehörde und Honorarprofessor an der Universität Hamburg.

164 Max Nonne war von 1919 – 1934 Professor der Neurologie an der Universität Hamburg.

165 In der Tat musste Lenz während des SS 1925 und des WS 1925/6 aus Gesundheitsgründen vertreten werden, die Vertretungen übernahmen Pauli und Gregor Wentzel. Siehe ferner Pauli an Sommerfeld: «Über den Gesundheitszustand von Lenz bin ich sehr traurig. Nun ist er in ein Sanatorium in der Nähe von Heilbronn verreist [...]. Wenn ich ihm nur helfen würde! Aber ich fürchte sein Zustand wird, von geringen Schwankungen abgesehen, chronisch. Mir tut das furchtbar leid. Es ist viel weniger schön in Hamburg, seitdem er so schwer zu fassen ist. Ich habe immer sehr viel Freude und Anregung davon gehabt, mit ihm über physikalische Fragen zu diskutieren, aber leider war das in letzter Zeit nur mehr in sehr beschränktem Maße möglich.» (Sommerfeld Briefwechsel 2, S. 192).

> 3) In den letzten Jahren hat sich Herr Professor Lenz öfters durch seinen Assistenten, Herrn Dr. Artmann in seinen Vorlesungen vertreten lassen, obwohl dieser überhaupt nicht habilitiert ist.[166]
>
> 4) Herr Professor Lenz hat, wenn er überhaupt las, meist erst einige Wochen nach Semesterbeginn seine Vorlesungen aufgenommen, da er stets zunächst durch Erkältung an der Rückreise nach Hamburg gehindert wurde.[167]
>
> 5) Herr Professor Lenz kommt so gut wie regelmässig 20 – 30 Minuten zu spät in seine Vorlesung und liest dann entsprechend über seine Zeit hinaus, sodass seine Hörer den Anschluß an ihre weiteren Vorlesungen versäumen.[168]»

Damit entstand der «Fall Lenz», der immer weitere Kreise zog.

In einer Sitzung zur Prüfung der «Angelegenheit Lenz», bei der Mecking, Harteck, Hecke, Heckmann, Koch, Lenz und Möller anwesend waren, musste Lenz Stellung nehmen. Koch erhielt Unterstützung von dem angewandten Physiker Möller, der Lenz ebenfalls die Emeritierung nahe legte. Schließlich wurde der Beschluss gefasst, Lenz solle ein amtsärztliches Gutachten über seinen Gesundheitszustand beibringen und Jensen sollte über den Unterricht in theoretischer Physik in den letzten Jahren berichten.

Nun meldete sich Koch nochmals schriftlich beim Dekan Mecking und zwar am 26. Januar 1944; gemäß diesem Schreiben Kochs bestätigten Goos Lenz' Zuspätkommen im Kolloquium, Meyer das regelmäßige Zuspätkommen von Lenz zu seinen Vorlesungen und zum Physikalischen Kolloquium, Möller ebenfalls das regelmäßige Zuspätkommen zum Physikalischen Kolloquium, sowie das Fernbleiben von den Lehramtsprüfungen und das Aussetzen der Vorlesungen während des Semesters. Gehört wurden ferner der Betriebsassistent A. Hoffmann, Professor

[166] Kurt Artmann hatte 1940 promoviert und am 5.7.1943 sein Habilitationsgesuch eingereicht; seine Habilitation wurde jedoch vonseiten der Dozentenführung abgelehnt. Um noch zu retten, was zu retten war, musste Artmann auf die Dozentur verzichten, er erhielt dieselbe erst am 18.8.1945 (Renneberg 1991, S. 1103).

[167] Pascual Jordan erwähnte in seinem Nachruf auf Lenz: «Eine unsichere Gesundheit [...] gewann bei Lenz die Form hochgradiger Abneigung gegen jede Zugluft. Die eigenwillig-seltsamen Schutzmaßnahmen, die er dagegen zu treffen pflegte, haben oft das heimliche Vergnügen von Studierenden und Kollegen erregt.» (Jordan 1957, S. 270).

[168] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 2228.

Dr. L. Müller sowie der Regierungsdirektor von Wrochem, die, so Koch, die Anschuldigungen ebenfalls nur bestätigen konnten. Schließlich bat Koch noch darum, «ein fachärztliches Gutachten über den Geisteszustand von Herrn Prof. Lenz herbeizuführen, da sein Gesamtverhalten doch wohl psychopathisch bedingt sein dürfte!» Koch vermutete sogar, dass Nonne Lenz Mitte der zwanziger Jahre für schizophren gehalten habe.

Mecking befragte nun seinerseits die von Koch benannten Zeugen Jensen, Artmann, Hilda Hänchen, Hoffmann und Goos, die Kochs Anschuldigungen aber in keiner Weise bestätigen konnten. Am 12. Februar 1944 fand schließlich eine weitere Sitzung des Ausschusses in der «Angelegenheit Lenz» statt. In dieser verlas der Dekan die Aussagen von 7 Zeugen,[169] von denen Koch sechs benannt hatte, über den Unterrichtsbetrieb. Daraus ergab sich, dass zwar Unregelmäßigkeiten vorkamen, aber übereinstimmend wurde betont, dass der Lenzsche Unterricht berechtigten Ansprüchen stets genügt habe.

Schließlich kam man zu dem Schluss, dass Koch zwar in Wahrung berechtigter fachlicher Interessen gehandelt habe, jedoch die Form seines Angriffs auf Lenz bedaure. Lenz erklärte sich damit zufrieden, Koch und Lenz reichten sich die Hände.

In diesem Sinne wurde am 15. Februar 1944 der Abschlussbericht formuliert, Lenz hatte inzwischen seinen Antrag auf Beurlaubung für das laufende Semester, mit dem die ganze Auseinandersetzung ihren Anfang nahm, zurückgezogen.

Schließlich verfasste Ludwig Mecking am 15. Februar 1944 in seiner Funktion als Dekan noch eine 7 Seiten umfassende, detaillierte Beschreibung des «Falles Lenz». Dort erwähnte Mecking ein Gespräch mit Möller, das ihm die Augen über die wahren Hintergründe erst geöffnet habe; diese nämlich waren politischer Natur: «und erst dabei ist mir überhaupt in der ganzen Angelegenheit das politische Stichwort entgegengetreten, indem Herr Möller mir gleichsam als entschuldigend für einen gewissen latenten Gegensatz zwischen Koch und Lenz den ganz besonderen politischen Eifer (150 % sagte er) des Herrn Koch

[169] In den Akten des Hamburger Staatsarchivs liegen von folgenden Personen Erklärungen zugunsten von Lenz: Walter Schottky vom 27.1.1944; Albrecht Unsöld vom 31.1.1944; Gregor Wentzel vom 8.2.1944; Rudolf Sieverts, Syndikus der Hansischen Universität, vom 8.2.1944 (Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 2228).

hinstellte, in dessen Gegenwart man z. B. nicht einmal Stalingrad als einen Mißerfolg erwähnen dürfe.»[170] Jetzt, so Mecking versuchte Koch den Spieß umzudrehen, indem er das Ganze als ein gegen ihn gerichtetes Kesseltreiben interpretierte. Mecking stellte dabei die Frage nach der Moral, ob Männer von Anstand und Charakter diesen wie ein Amoklaufen anmutenden Affront von Koch einfach so hinnehmen dürften.

Der Fall Koch[171]

Lenz hatte sich bei all diesen Anschuldigungen der Solidarität der Mehrheit seiner Kollegen sicher sein können.

Es erscheint gewissermaßen als Retourkutsche, dass nunmehr umgekehrt einige Mitglieder der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät Peter Paul Koch, den Urheber der Anschuldigungen gegen Lenz, emeritiert wissen wollten. Der entsprechende Brief trägt das Datum 5. Februar 1944; die Unterzeichner waren zunächst nur Blaschke, Harteck, Heckmann, Lenz, die Chemiker Hans Heinrich Schlubach und Heinrich Remy, später kamen noch Hecke und der Meteorologe Paul Raethjen dazu. Sie nahmen den bevorstehenden 65. Geburtstag von Koch am 15. März 1944 zum Anlass, den Vorschlag zu unterbreiten, Koch zu emeritieren, und zwar mit der Begründung, dass die Experimentalphysik einer Verjüngung bedürfe.[172] Aus dem «Fall Lenz» wurde nunmehr ein «Fall Koch».

Koch verfasste seinerseits einen umfangreichen, 9 Seiten umfassenden Bericht, beginnend mit seiner Berufung nach Hamburg, in dem er die Situation der Physik an der Universität beschrieb. In diesem beklagte sich Koch wiederum bitterst über Lenz' Benehmen im Physikalischen Kolloquium. Auch erwähnte Koch seine wissenschaftliche «Produktion», die offensichtlich seine Widersacher nicht zur Kenntnis nehmen wollten; diese hatten behauptet, dass Koch in seiner Hamburger Zeit nur drei Arbeiten veröffentlicht hätte, von denen zwei nichts Neues brächten und die dritte von einem Autorenkollektiv verfasst worden sei. Koch

[170] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 2222, Fall Lenz, niedergeschrieben am 15.2.1944 von L. Mecking, hier S. 6.
[171] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 2222.
[172] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 521, Blatt 23.

legte nun eine 58 Nummern umfassende Publikationsliste vor, also eine beachtliche Anzahl und eine Leistung, die durchaus einer Anerkennung würdig gewesen wäre; doch bei Licht betrachtet genügte diese Liste einfach nicht den üblichen Standards, hatte doch Koch vor allem Dissertationen in Experimentalphysik, bei denen er irgendwie mitgewirkt hatte, insbesondere die seiner eigenen Schüler, aufgenommen. Dennoch sprach Koch von Verleumdung; da momentan ein akuter Physikermangel herrsche, könne er, Koch, es nicht verantworten, trotz geistiger und körperlicher Leistungsfähigkeit nur spazierenzugehen, «so gerne ich den Herren Kollegen von Blaschke bis Remy sonst einen Gefallen tue.» Koch hatte diesen Bericht auch auswärtigen Kollegen zukommen lassen, so hatte er diesen z. B. am 6. August 1944 an Sommerfeld geschickt.[173] Dieser Bericht bewirkte eine weitere Zuspitzung der Situation.

Schließlich fand auch dieser Streit ein Ende, zwar kein salomonisches, sondern ein von der politischen Situation diktiertes: Die Niederschrift der 64. Sitzung des Fakultätsausschusses am 2. August 1944 wurde von einem ungewöhnlich langen Protokoll begleitet, es umfasst knapp 4 Seiten.[174] Hieraus geht hervor, dass Koch wichtige Forschungsaufträge der Wehrmacht übernommen hatte, «deren Durchführung es [...] erforderlich mache, daß ihm alle Einrichtungen des Institutes in Zukunft auch in vollem Umfange zur Verfügung stehen.»[175] Es wurde daher beschlossen, ein zweites Ordinariat für Experimentalphysik zu beantragen, wozu es aber nicht mehr kam. Das Ende vom Lied war, dass Koch im Amt blieb.

7 Die Nachkriegszeit und Rückblick

Diese Entscheidung, dass Koch nicht vor Kriegsende emeritiert wurde, wirkte sich nach Kriegsende für Koch verheerend aus: Koch verlor seine Professur. In einem Brief vom 16. September 1945 versuchte er, dagegen Einspruch zu erheben, indem er gleichzeitig darum bat, wenigstens die Entlassung in eine Pensionierung umzuwandeln. Ferner fügte er diesem

[173] Sommerfeld Briefwechsel, Internet, keine Scans. Originalbrief mit Beilage in: München, LMU, Universitätsbibliothek, Abteilung Handschriften, 19: Nachlass A. Sommerfeld.

[174] Fakultätsbuch II, S. 125 – 128.

[175] Ebenda, S. 127.

Schreiben einen Bericht über seine Betätigung in der NSDAP hinzu. In einem weiteren Schreiben vom 18. September 1945 rechtfertigte Koch abermals sein Vorgehen im Falle Lenz.[176]

Koch nahm sich am 1. Oktober 1945 im Arbeitszimmer von Lenz das Leben.

Die 1945 eingesetzte Militärregierung stufte Lenz als zutiefst unpolitischen Menschen ein, dessen Parteieintritt nur auf äußeren Druck hin geschah.[177]

1948 konnte Lenz seinen 60. Geburtstag feiern. Zu den Gratulanten gehörte natürlich auch Sommerfeld, seine Laudatio schloss dieser mit folgenden Worten: «Wir wünschen dem Sechzigjährigen, daß die Arbeitsbedingungen der kommenden Jahrzehnte ihm erlauben mögen, seine vielen geplanten Untersuchungen zu Ende zu führen und sich an den Früchten der Anregungen zu freuen, die er seinen Schülern gegeben hat.»[178] Zu den Gratulanten gehörte auch Hans Schimank, der in Hamburg als Physikhistoriker gewirkt hatte. Im Schimank-Nachlass befindet sich ein Antwortschreiben von Lenz mit dem Datum 15. Februar 1948, aus dem hervorgeht, dass die Universität Hamburg Lenz' Geburtstag mit einem Festkolloquium gefeiert hatte.[179] Dem Rektor der Universität antwortete Lenz auf dessen Glückwünsche hin, dass er den Plan hege, seine Vorlesung über Relativitätstheorie[180] zu veröffentlichen: «Ich wünsche mir sehnlichst, dass ich Gesundheit und Muße habe, neben anderem auch die kleine Vorlesung über Relativitätstheorie für Physiker (nicht Mathematikfreunde) fertig auszuarbeiten und drucken zu lassen,»[181] leider kam es nicht mehr dazu.

1951 schließlich konnte Lenz sein vierzigjähriges Dienstjubiläum feiern.[182] Lenz' 65. Geburtstages wurde u. a. im *Hamburger Abendblatt* mit folgenden Worten gedacht: «Der Schüler des kürzlich verstorbenen

[176] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 1331 sowie Beiakte 3.
[177] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 612; Renneberg 1991, S. 1112.
[178] Sommerfeld 1948.
[179] Schimank-Nachlass, Bereich Geschichte der Naturwissenschaften, Department Mathematik, Universität Hamburg.
[180] Lenz hatte im SS 1948, im WS 1948/9, im SS 1951 sowie im SS 1954 eine Vorlesung über Relativitätstheorie abgehalten.
[181] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 612, Blatt 21.
[182] Hamburger Abendblatt vom 3.4.1951, Nr.77.

Arnold Sommerfeld[183] trat schon frühzeitig mit aufsehenerregenden Forschungsergebnissen in der damals noch in den Anfängen stehenden Quantentheorie hervor und entfaltete seit 1921 an der Universität eine Lehr- und Forschungstätigkeit, die wesentlich zu dem hohen Stande naturwissenschaftlicher Forschung in Hamburg beigetragen hat.»[184] Pascual Jordan wurde in seinem an den Dekan übermittelten Entwurf einer Gratulation noch deutlicher:

> «Ihre besinnliche, liebevolle Versenkung in Ihr Wissenschaftsgebiet ist andererseits auch Ihren vielen Schülern beispielhaft und wegweisend geworden. Unsere Universität, der Sie schon seit ihren Anfängen Ihre unermüdliche Mitarbeit gewidmet haben, verdankt es Ihrem Wirken, daß auch in der theoretischen Physik die junge Hamburger Universität jenen hohen Stand erreichen konnte, durch den sie zur Stätte einer großen mathematischen und naturwissenschaftlichen Tradition geworden ist.»[185]

Im Nachhinein bekommt die Vergangenheit oft deutlichere Konturen als es die jeweilige Gegenwart vermocht hatte. Auch konnte man sich nach 1945 wieder frei äußern und die Wahrheit sagen, ohne Folgen befürchten zu müssen.

Jensen z. B. schilderte im April 1946 Otto Stern Details aus dem Umfeld von Koch: «Als Hamburger Klatsch wird Sie vielleicht interessieren, daß Ihr geschätzter Kollege, P. P. Koch, sich allmählich zu einem verbissenen Nazi entwickelt hatte und u. a. Harteck und später auch mich bei der Gestapo denunziert hat. [...] Auch Herrn Lenz versuchte Koch aus dem Amt zu bringen».[186]

Besondere Beachtung verdient ein Brief von Lenz vom 29. Dezember 1955, ebenfalls an Otto Stern gerichtet, den ehemaligen Weggefährten, der nunmehr in den USA weilte.[187]

In diesem Schreiben reflektierte Lenz über die Zeit seit 1933, als Stern Hamburg verlassen musste. Lenz ging auch auf die politischen

[183] Sommerfeld war am 26.4.1951 in München verstorben.
[184] Hamburger Abendblatt vom 10.2.1953, Nr. 34.
[185] Sta HH 361 – 6 HWDuPA, IV 2228.
[186] Walter 1991, S. 1149.
[187] Auf dieses Schreiben wurde bereits in (Walter 1991, S. 1150) hingewiesen. Eine Kopie und eine Transkription des Briefes befinden sich in der Hamburger Bibliothek für Universitätsgeschichte.

Überzeugungen der damaligen Kollegen ein, berichtete vom Krieg, den er als «Hitlerkrieg» bezeichnete, und den Kriegszerstörungen in den physikalischen Instituten. Lenz schloss seinen Brief mit folgender, sehr positiven Zukunftsperspektive: «zu meinem zu erwartenden Abgang (wahrscheinlich Ende SS 56) ist mir eine große Genugtuung geworden. Aufgrund meines Vorschlags auf die z. Zt. freie Exp. Phys. Professur einen Kerndynamiker zu setzen u. eine Maschine zu verlangen (wozu zunächst gar keine Aussicht zu bestehen schien) und stetigem weiteren Drängens [sic!] ist es schließlich gelungen, den Senat dazu zu bringen, dass er 7,5 Mill. D-Mark für ein kernphys. Institut bewilligte; die Maschine soll 2 Milliarden e-Volt schwere Teilchen liefern, Herr Jenschke [sic!] (Wiener) Urbana hat angenommen. Nun muß ein Nachfolger für mich berufen werden; eine Liste liegt noch nicht vor». Als Postscriptum gratulierte Lenz nachträglich Otto Stern noch zum Nobelpreis für 1943.

Der Nachfolger von Peter Paul Koch auf der Professur für Experimentalphysik war im Jahre 1947 Rudolf Fleischmann geworden. Als dieser 1953 die Universität Hamburg mit Erlangen vertauschte, gehörten Jensen und Lenz der Kommission an, die sich um einen Nachfolger bemühte. Es waren nicht zuletzt die sehr positiven Gutachten von Jensen und Lenz aus dem Jahre 1953 gewesen, die dazu geführt hatten, dass der 1911 in Wien geborene Kernphysiker Willibald Jentschke tatsächlich und zwar einstimmig gewählt und schließlich im Jahre 1956 nach Hamburg berufen wurde.[188] Sicherlich spielte hierbei eine Rolle, dass die Kernphysik zu Jensens und Lenz' Forschungsgebieten gehörte. Jentschkes Berufungsbedingung war die Gründung eines Teilchenbeschleunigers gewesen, der unter dem Namen DESY im Jahre 1959 ins Leben gerufen wurde, die Beschleunigungsanlage war 1964 fertiggestellt. Jentschke wurde Vorsitzender des DESY-Direktoriums. Er blieb allerdings nur bis 1970 in Hamburg, dann vertauschte er DESY mit CERN.

Lenz starb ein Jahr nach seiner Emeritierung am 30. April 1957 in Hamburg. Den Nachruf verfasste Pascual Jordan.[189]

Lenz' Nachfolger in Hamburg wurde, wie bereits berichtet,[190] 1956 der von Pauli vorgeschlagene theoretische Physiker Harry Lehmann.

[188] Sta HH 364 – 13 Fakultäten/Fachbereiche der Universität, Math.-Nat.9. Siehe ferner Pauli Briefwechsel 4,3, S. 452.
[189] Jordan 1957.
[190] Siehe hier § 5.2.

Mit Lenz ging eine Ära zu Ende und kurze Zeit später, 1959, begann mit der Gründung von DESY eine neue.

8 Resümee

Lenz wird normalerweise nicht zu den herausragenden Physikern gerechnet. An diesem Urteil hat sicher sein nicht gerade üppiges Schriftenverzeichnis Anteil, kaum eine seiner Arbeiten, für sich betrachtet, entpuppte sich in ihrer Zeit als «epochemachend». An diesem Bild würden wahrscheinlich auch Lenz' nicht bzw. nicht mehr vollendete Arbeiten etwas ändern. Zu nennen wären hier z. B. sein geplantes Werk über Relativitätstheorie,[191] ein großes Buch über Kreiseltheorie,[192] ferner ein in Arnold Sommerfelds Besitz befindlicher Entwurf einer Ableitung des Linienelementes im sphärischen Gravitationsfelde auf alleiniger Basis der Einsteinschen Äquivalenz von Gravitation und Beschleunigung.[193] Was Lenz vielmehr auszeichnete, war die seltene Gabe, in seinem Hamburger Umfeld für ein Arbeitsklima Sorge zu tragen, das sich als besonders fruchtbar erwies. Die beträchtliche Anzahl seiner herausragenden Schüler bzw. Mitarbeiter legt in der Tat ein beredtes Zeugnis ab. Dies galt nicht nur für die zwanziger Jahre, sondern auch für die dreißiger Jahre sowie für die Nachkriegszeit. Nicht unerwähnt bleiben soll wenigstens noch an dieser Stelle, dass der im Jahre 1950 bei Lenz promovierte Gerhart Lüders im Jahre 1966 durch die Verleihung der Max-Planck-Medaille ausgezeichnet wurde. In seinem Nachruf auf Lüders betonte Hans Grauert, dass Lüders den «verständnisvollen Umgang mit der Physik» eben von Lenz gelernt habe.[194]

Zwar war es Lenz nicht gelungen, wie seinem Lehrer Sommerfeld, eine «Schule» zu gründen, dennoch waren es u. a. auch Lenz' Schüler, die die Physik durch epochemachende und richtungsweisende, weitreichende Ideen bereicherten. Lenz' Lehrer Sommerfeld jedenfalls war offensichtlich zufrieden mit seinem Schüler Lenz, hatte doch auch Lenz seinen Schülern die Anregungen zu geben vermocht, aus denen sich später ansehnliche Früchte entwickelten.

[191] Siehe Anm. 180.
[192] Jordan 1957, S. 270.
[193] Sommerfeld 1948.
[194] Grauert 1995, S. 248.

Für die junge Universität Hamburg war es sicherlich ein Pluspunkt, einen Theoretiker vom Formate von Wilhelm Lenz auf die neugegründete Professur berufen zu haben.

9 Literaturverzeichnis

Beyerchen, Alan D.: Wissenschaftler unter Hitler. Physiker im Dritten Reich. Frankfurt 1982.

Brush, Stephen G.: History of the Lenz-Ising Model. Reviews of Modern Physics 39, 1967, S. 883 – 893.

Cassirer, Ernst: Zur Einsteinschen Relativitätstheorie: erkenntnistheoretische Betrachtungen. Berlin 1920 und 1921.

Cassirer, Toni: Mein Leben mit Ernst Cassirer. Hildesheim 1981.

Doktoralbum der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Hamburgischen Universität. Bd. I, 1920 – 1938, Bd. II, 1938 – 1969. Standort: Verwaltung des Departments Mathematik.

Drude, Paul: Zur Construction von Teslatransformatoren. Schwingungsdauer und Selbstinduction von Drahtspulen. Annalen der Physik (4) 9, 1902, S. 293 – 339.

Michael Eckert: Die Atomphysiker. Eine Geschichte der theoretischen Physik am Beispiel der Sommerfeldschule. Braunschweig, Wiesbaden 1993.

Einstein, Albert: Collected Papers. The Berlin Years: Correspondence. Bd. 8: 1914 – 1918; Bd. 9: January 1919 – April 1920; Bd. 10: May-December 1920; Bd. 12: January-December 1921, hg. von Diana Kormos Buchwald und anderen, Princeton 1998, 2004, 2006, 2009.

Fakultätsbuch Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Hamburg. Bd. I (7.2.1919 – 14.2.1934), Bd. II (9.5.1934 – 11.1.1950). Standort: Verwaltung des Departments Mathematik.

Friedrich, Bretislav; Herschbach, Dudley: Stern and Gerlach at Frankfurt: Experimental proof of Space Quantization. In: Wolfgang Trageser (Hg.): Stern-Stunden, Höhepunkte Frankfurter Physik. Frankfurt 2005.

Funk, Herbert; Mumenthaler, Rudolf: Wolfgang Pauli – A Biographical Sketch. In: Wolfgang Pauli and Modern Physics. Katalog zur Sonderausstellung der ETH-Bibliothek. Zürich 2000, S. 23 – 46.

Gordon, Walter: Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie. Zeitschrift für Physik 40, 1926, S. 117 – 133.

Grauert, Hans: Gerhart Lüders. 25. Februar 1920 – 31. Januar 1995. Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften in Göttingen für das Jahr 1995, S. 248 – 253.

Guichardet, Alain: Histoire d'un vecteur tricentenaire. Gazette des mathématiciens. Société Mathématique de France 117, 2008, S. 23 – 33.

Habilitationsverzeichnis, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Hamburg, ab 15.4.1936. Standort: Verwaltung des Departments Mathematik.

Heinrich, Rudolf; Bachmann, Hans-Reinhard: Walther Gerlach. Physiker – Lehrer – Organisator. München: Deutsches Museum 1989.

Heisenberg, Werner: Zur Theorie des Ferromagnetismus. Zeitschrift für Physik 49, 1928, S. 619 – 636.

Ising, Ernst: Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus. Zeitschrift für Physik 31, 1925, S. 253 – 258.

Jensen, Hans: Das magnetische Feld einer räumlichen Strömung bei linearer Stromquelle. Physikalische Zeitschrift 28, 1927, S. 815 – 819.

Jensen, Hans: Die Ladungsverteilung in Ionen und die Gitterkonstante des Rubidiumbromids nach der statistischen Methode. Zeitschrift für Physik 77, 1932, S. 722 – 745.

Jensen, Hans: Über den Austausch im Thomas-Fermi-Atom. Zeitschrift für Physik 89, 1934, S. 713 – 719. Ergänzung dazu: Zeitschrift für Physik 93, 1935, S. 232 – 235.

Jensen, Hans: Über die Existenz negativer Ionen im Rahmen des statistischen Modells. Zeitschrift für Physik 101, 1936, S. 141 – 163.

Jensen, Hans: Quantentheoretische Berechnung der Alkalihalogenidgitter. Zeitschrift für Physik 101, 1936, S. 164 – 185.

Jensen, Hans: Eigenschwingungen eines Fermi-Gases und Anwendung auf die Blochsche Bremsformel für schnelle Teilchen. Zeitschrift für Physik 106, 1937, S. 620 – 632.

Jensen, Hans: Über die Elemente 43 und 61. Die Naturwissenschaften 26, 1938, S. 381.

Jensen, Hans; Meyer-Gossler, G.; Rohde, H.: Zur physikalischen Deutung der kristallographischen Ionenradien. Zeitschrift für Physik 110, 1938, S. 277 – 290.

Jensen, Hans: Das Druck-Dichte-Diagramm der Elemente bei höheren Drucken am Temperaturnullpunkt. Zeitschrift für Physik 111, 1938/9, S. 373 – 385.

Jensen, Hans: Zur klassischen Herleitung der Kernkräfte aus Yukawas Feldtheorie. Verhandlungen der DPG (3) 20, 1939, S. 113 – 116.

Jensen, Hans: Die stabilen Atomkerne und der derzeitige Stand ihrer Systematik. Die Naturwissenschaften 27, 1939, S. 793 – 803.

Jensen, Hans: Glimpses at the history of the nuclear structure theory. Nobel Lecture, December 12, 1963. In: Nobel Lectures including presentation speeches and laureates' biographies. Physics 1963 – 1970. Amsterdam, London, New York, S. 40 – 51.

Jordan, Pascual: Wilhelm Lenz †. Physikalische Blätter 13, 1957, S. 269 f.

Jordan, Pascual: Begegnungen: Albert Einstein, Karl Heim, Hermann Oberth, Wolfgang Pauli, Walter Heitler, Max Born, Werner Heisenberg, Max von Laue, Niels Bohr. Oldenburg 1971.

Kobe, Sigismund: Ernst Ising zum 95. Geburtstag. Physikalische Blätter 51, 1995, S. 426.

Kobe, Sigismund: Ernst Ising – Physicist and Teacher. Journal of statistical Physics 88, 1997, S. 991 – 995.

Kobe, Sigismund: Das Ising-Modell – gestern und heute. Physikalische Blätter 54, 1998, S. 917 – 920.

Kobe, Sigismund: Ernst Ising 1900 – 1998. Brazilian Journal of Physics 30, 2000, S. 649 – 653.

Legler, Werner: 60 Jahre Angewandte Physik in Hamburg. uni hh Forschung. Wissenschaftsberichte aus derUniversität Hamburg 19, 1985, S. 29 – 32.

Lenz, Wilhelm: Über die Kapazität der Spulen und deren Widerstand und Selbstinduktion bei Wechselstrom. Annalen der Physik (4) 37, 1912, S. 923 – 974.

Lenz, Wilhelm: Berechnung der Eigenschwingungen einlagiger Spulen. Annalen der Physik (4) 43, 1914, S. 749 – 797.

Lenz, Wilhelm: Zur Theorie der Bandenspektren. Verhandlungen der DPG 21, 1919, S. 633 – 643.

Lenz, Wilhelm: Beitrag zum Verständnis der magnetischen Erscheinungen in festen Körpern. Physikalische Zeitschrift 21, 1920, S. 613 – 615.

Lenz, Wilhelm: Über einige speziellere Fragen aus der Theorie der Bandenspektren. Physikalische Zeitschrift 21, 1920, S. 691 – 694, mit Tafel V.

Lenz, Wilhelm: Kernstruktur der Atome. Zeitschrift für Elektrochemie und angewandte physikalische Chemie 26, 1920, S. 277 – 281 und S. 492.

Lenz, Wilhelm: Bewegungsverlauf und Quantenzustände der gestörten Keplerbewegung. Zeitschrift für Physik 24, 1924, S. 197 – 207.

Lenz, Wilhelm: Über die Anwendbarkeit der statistischen Methode auf Ionengitter. Zeitschrift für Physik 77, 1932, S. 713 – 721.

Lenz, Wilhelm: Allgemeine Theorie der Verbreiterung von Spektrallinien. Zeitschrift für Physik 80, 1933, S. 423 – 447.

Lenz, Wilhelm: Berechnung der Beugungsintensitäten von Molekularstrahlen an starren Kristalloberflächen. Zeitschrift für Physik 92, 1934, S. 631 – 639.

Meyenn, Karl von: Paulis Weg zum Ausschlußprinzip. Teil I und II. Physikalische Blätter 36, 1980, S. 293 – 298; und 37, 1981, S. 13 – 19.

Meyenn, Karl von (Hg.): Die großen Physiker. Bd. 2: Von Maxwell bis Gell-Man. München 1997.

Meyenn, Karl von: Wolfgang Pauli and the Exclusion Principle. In: Wolfgang Pauli and Modern Physics. Katalog der Sonderausstellung der ETH-Bibliothek. Zürich 2000, S. 47 – 72.

Niss, Martin: a) History of the Lenz-Ising Model 1920 – 1950: from ferromagnetic to cooperative phenomena. Archive for History of Exact Sciences 59, 2005, S. 267 – 318. b) History of the Lenz-Ising Model 1950 – 1965: from irrelevance to relevance. Archive for History of Exact Sciences 63, 2009, S. 243 – 287.

Ortwein: Wilhelm Lenz 60 Jahre. Physikalische Blätter 4, 1948, S. 30 f.

Pauli, Wolfgang: Wissenschaftlicher Briefwechsel. Hg. von Karl von Meyenn. New York, Berlin, Heidelberg. Bd. 1, 1979; Bd. 2, 1985; Bd. 3, 1993; Bd. 4,1, 1996; Bd. 4,2, 1999; Bd. 4,3, 2001; Bd. 4,4 A und B: 2005.

Pauli, Wolfgang: Über das Modell des Wasserstoffmolekülions. Annalen der Physik (4) 68, 1922, S. 177 – 240 (verbesserte und erweiterte Fassung der Dissertation).

Pauli, Wolfgang: Über das thermische Gleichgewicht zwischen Strahlung und freie Elektronen. Zeitschrift für Physik 18, 1923, S. 272 – 286.

Pauli, Wolfgang: Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren. Zeitschrift für Physik 31, 1925, S. 765 – 783.

Reich, Karin: Einsteins Vortrag über Relativitätstheorie an der Universität Hamburg am 17.7.1920. Vorgeschichte, Folgen. Mitteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 19*, 2000, S. 51 – 68.

Renneberg, Monika: Die Physik und die physikalischen Institute an der Hamburger Universität im «Dritten Reich». In: Eckart Krause, Ludwig Huber, Holger Fischer (Hg.): Hochschulalltag im «Dritten Reich». Die Hamburger Universität 1933 – 1945. Berlin, Hamburg 1991, S. 1096 – 1118.

Sommerfeld, Arnold: Wissenschaftlicher Briefwechsel, hg. von Michael Eckert und Karl Märker. Berlin, Diepholz, München. Bd. 1: 1892 – 1918, 2000. Bd. 2: 1919 – 1951, 2004.

Sommerfeld Briefwechsel: Internet
http://www.lrz-muenchen.de/∼Sommerfeld/

Sommerfeld, Arnold: Über das Wechselfeld und den Wechselstromwiderstand von Spulen und Rollen. Annalen der Physik (4) 15, 1904, S. 673 – 708. In: Sommerfeld, Gesammelte Schriften 1. Braunschweig 1968, S. 675 – 710.

Sommerfeld, Arnold: Über den Wechselstromwiderstand der Spulen. Annalen der Physik (4) 24, 1907, S. 609 – 634. In: Sommerfeld, Gesammelte Schriften 1. Braunschweig 1968, S. 729 – 754.

Sommerfeld, Arnold: Wilhelm Lenz zum 60. Geburtstag am 8. Februar 1948. Zeitschrift für Naturforschung 3a, 1948, S. 186.

575 Jahre Universität Rostock. Mögen viele Lehrmeinungen um die eine Wahrheit ringen. Rostock 1994.

Walter, Wolfgang: Otto Stern, Leistung und Schicksal. In: Eckart Krause, Ludwig Huber, Holger Fischer (Hg.): Hochschulalltag im «Dritten Reich». Die Hamburger Universität 1933 – 1945. Berlin, Hamburg 1991, S. 1141 – 1154.

Witte, Karl: Zur Geschichte des Physikalischen Staatsinstituts und der Physik in Hamburg. uni hh Forschung. Wissenschaftsberichte aus derUniversität Hamburg 19, 1985, S. 9 – 27.

Ferner Archive

Staatsarchiv Hamburg: Sta HH; HWDuPA = Hochschulwesen, Dozenten und Personalangelegenheiten.

Universitätsarchiv München.

Universitätsarchiv Rostock.

Danksagungen

Der vorliegende Aufsatz geht zurück auf die Feierlichkeiten zum 80-jährigen Bestehen der Professur für theoretische Physik in Hamburg im Jahre 2001. Mein damaliger Beitrag wurde mehrfach und bis in jüngste Zeit umgearbeitet. Für die schriftliche Ausarbeitung erfuhr ich mannigfache Hilfe, ich möchte allen meinen herzlichen Dank aussprechen, hier in alphabetischer Reihenfolge: Herrn Michael Eckert (München), Herrn Heinrich Heyszenau (Hamburg), Herrn Eckart Krause (Hamburg), Herrn Karl von Meyenn (Gietlhausen), Herrn Tilman Sauer (Pasadena), Herrn Kurt Scharnberg (Hamburg), Herrn Peter Toschek (Hamburg), Herrn Wolfgang Walter † (Hamburg) und Herrn Karl Heinrich Wiederkehr (Hamburg).

Geometry as Physics: Oswald Veblen and the Princeton School

Jim Ritter

Einstein's General Theory of Relativity has often been taken as the quintessential modern example of what can happen when a mathematical field comes into contact with a physical discipline. Indeed the story of the meeting between differential geometry and general relativity is often summed up in the literature by the expression "the geometrization of physics".

We shall be telling a different story here, one in which a group of mathematicians, in alliance with some physicists, consciously organized themselves into a school, organized on a large scale with a definite program. Their aim: to produce a new joint mathematics and physics project which would empower a great scientific advance in the domain of mathematics/theoretical physics, in turn raising the United States in general – and Princeton University in particular – to the position of a world-class scientific power. The primary creator and principal theorist of this project was Oswald Veblen and we shall be following the story from his point of view, as well that of his colleague and co-organizer Luther Pfahler Eisenhart. Having introduced the actors we now turn to the scenography.

The physical theory which the Princeton School saw as the target of their own mathematical work was that of general relativity and its extensions. What should be understood here by "general relativity" is that viewpoint, shared by many physicists in the nineteen-twenties, that general relativity, as a theory of gravitation, was just one step along the road that would lead to an ultimate theory of all physical interactions. As Einstein himself expressed it in 1925:

> "The conviction of the essential unity of the gravitational and the electromagnetic fields is firmly established today among the theoretical physicists working in the field of general relativity theory."[1]

To some, like Einstein, the constituent theories to be combined were limited to general-relativistic gravitation and Maxwellian electrodynam-

[1] «Die Überzeugung von der Wesenseinheit des Gravitationsfeldes und des elektromagnetischen Feldes dürfte heute bei den theoretischen Physikern, die auf dem Gebiete der allgemeinen Relativitätstheorie arbeiten, feststehen.» (Einstein 1925, 414)

ics. For others, however, a third domain, that of the atomic structure of matter, had to be integrated on an equal footing.[2]

But one need not take Einstein's word for the interest in unification. An examination of the published literature for this decade yields a confirmation of this attitude.

Comparing the number of articles published in the field of relativity and in that of unified theories (defined as those attempting a union of at least two of the fields of gravitation, electromagnetism and theories of matter) in the years 1920, 1925 and 1930 yields the result shown in Figure 1.

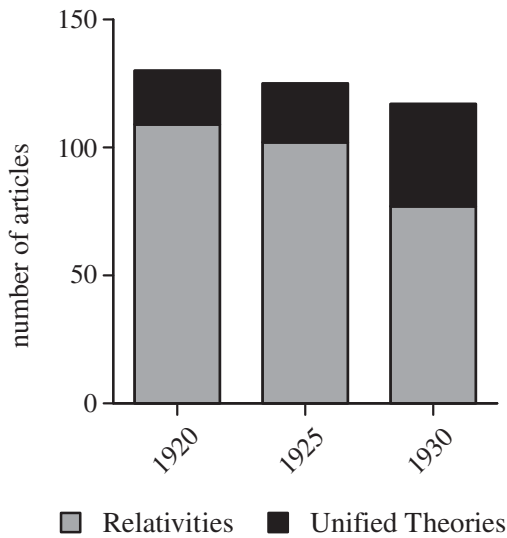


Figure 1
Number of publications in relativity (special + general) and unified theories 1920 – 1925 – 1930

The total number of articles show only a slight secular decrease over the decade but unified theories take a progressively larger proportion of this total, fueled at first by a decrease in the number of pure relativity articles and then, additionally, in 1930, by a major absolute increase in the number of unified-theoretical publications. A closer analysis of the contents of the articles and their authors show that the initial high level of interest in general relativity undergoes an important transfer

[2] Einstein's well-known objection to quantum theory was not based on a refusal of its results but arose from a conviction that quantum theory – old or new – should arise as a *consequence* of a correct unification of gravitational and electromagnetic interactions. This and the discussion which follows here are drawn from Goldstein & Ritter 2003.

to the new quantum theory of 1925/26, not immediately, but a bit later, following the publication of Dirac's electron theory (Dirac 1928). It was this latter which was seen at the time as offering a new alternative route to the unification of gravitation, electromagnetism and matter theory and, as such, inspired the surge in unified-theory publications at the end of the decade.

This then is the backdrop to a story which involves a group of bright and ambitious young American mathematicians in a small teaching university just after the First World War, with expertise in axiomatic and differential geometry facing new and exciting developments in the field of theoretical physics which seem to have a special relationship with their own or related fields. Within less than a decade Princeton University will be one of the foremost mathematical research institutions in America and the disciplinary program put in place will attract not only some of the brightest American mathematicians but quite a number of prestigious European scientists as well.

1 Oswald Veblen

When Oswald Veblen left the University of Chicago in 1905, two years after obtaining his doctorate, to take up his position at Princeton University as one of University president Woodrow Wilson's new "preceptors", he was already recognized as one of America's brightest young geometers. In particular, he had become, with Edward Vermilye Huntington at Harvard, the leading exponent of "American postulate theory",[3] an approach initiated by his Chicago thesis advisor, Eliakim Hastings Moore.

In the wake of the interest generated by the publication of David Hilbert's *Grundlagen der Geometrie* in 1899, Moore had organized a seminar at the University of Chicago on the foundations of geometry and analysis during the Fall quarter of 1901, with Veblen its most enthusiastic participant. (Parshall & Rowe 1994, 383–384). It was his experience in this seminar which set Veblen's interest and directly inspired his

[3] The term is due to Corcoran 1980. No particular name was used by the protagonists, who saw themselves simply as participants in the general and international discussion of the logical foundations of mathematics.

doctoral thesis on an alternate rigorous axiomatization of Euclidean geometry, based on "point" and "order" rather than Hilbert's "point", "line", "plane" and "between" as its founding undefined terms. But the most significant advance in this formulation was its emphasis on the question of the unique specification by the axioms of their object of study. As Veblen expressed it in the published version of his thesis:

> "Inasmuch as the terms *point* and *order* are undefined one has a right, in thinking of the propositions, to apply the terms in connection with any class of objects of which the axioms are valid propositions. It is part of our purpose however to show that there is *essentially only one* class of which the twelve axioms are valid. (...) Consequently any proposition which can be made in terms of points and order either is in contradiction with our axioms or is equally true of all classes that verify our axioms. The validity of any possible statement in these terms is therefore completely determined by the axioms; and so any further axiom would have to be considered redundant. Thus, if our axioms are valid geometrical propositions, they are sufficient for the complete determination of euclidean geometry."[4]

This question of "complete determination" – or *categoricity*,[5] the term introduced in this publication, borrowed by Veblen from fellow Chicagoan John Dewey[6] – was at first aimed at establishing a criterion for the determination of the possible redundancy of a set of axioms which, following the Italian school (Peano, Padoa), constituted the main thrust of Moore's own interest.[7]

But Veblen was quick to see a deeper significance to this question. For him and the other postulationists the real interest lay in the degree of precision and uniqueness which a set of axioms could achieve in designating the object(s) which they were created to formalize. By building up blocks of axioms, one could progressively sharpen the focus

[4] Veblen 1904, 346

[5] Actually, the current term "categoricity" is of recent vintage. Veblen either uses the adjectival form "categorical" or, later and more rarely, the substantive "categoricalness", e. g., Veblen 1911, 49.

[6] Veblen 1904, 346, note '‡'; see the discussion in Grattan-Guinness 2000, 211.

[7] See for example Moore's own publication arising from this seminar, (Moore 1902), and the first part of his Presidential farewell address to the American Mathematical Society in December 1902, (Moore 1903).

and eliminate unwanted objects from the class of those defined by the axioms up to that point. As Veblen expressed it some twenty years later with reference to "elementary geometry," i. e., that class of theorems extending from topology through projective and affine to Euclidean geometry:

> "Each one of these groups of theorems is logically distinguished from its predecessor by the appearance of new relations which are brought in either by means of new axioms and undefined terms or by means of definitions which limit attention to a restricted class among the totality of possible geometric objects. At each stage the freedom of physical interpretation is restricted until, at the final step, it is necessary to specify the physical significance of a measuring stick and of a rectangular cartesian coordinate system."[8]

Veblen's further pre-War work on the axiomatic foundations of projective geometry and of topology (Veblen always preferred the older term "analysis situs") will not detain us here.[9]

For the rest of Veblen's story there are two significant influences at work in the period leading up to the 1920s: Veblen's research experience during the First World War at the Aberdeen Proving Ground, and his contact and collaboration with his fellow Princeton preceptor, then professor, the differential geometer Luther Pfahler Eisenhart.

The combination of the two led to Veblen's "differential-geometric turn" and his post-War program, jointly with Eisenhart, to apply the postulationist approach to that new field straddling differential geometry and physics that was general relativity. In fact, the program was more ambitious still: to refound both geometry and physics in a new synthesis that would replace the old – Euclidean geometry and Newtonian mechanics – in a way that would include, and transcend, all contemporary work in topology, projective, affine and Riemannian geometry, general relativity, and the new unified field theories of Hermann Weyl and Arthur S. Eddington.

[8] Veblen 1923, 131 – 132

[9] For information on Veblen's work in these areas, as well as his later influence on Princeton logicians, see Aspray 1991.

2 The lessons of war

In a synthesis of the role of physics in American scientific war work, given at the end of 1919 by the physicist Gordon Hull before the American Association for the Advancement of Science, Veblen was singled out for particular praise:

> "A number of experiments [in ballistics] were carried on at Aberdeen [Proving Ground], chiefly by Major Veblen and Lieutenant Alger ... It is seen that these experiments added greatly to the effectiveness and therefore to the value of the guns in question. The work belongs to physics, notwithstanding the fact that one of these civilian officers was and is a professor of mathematics of the purest quality. That he was able to bring himself temporarily to neglect the fundamental concepts of geometry, in which realm he is one of our foremost thinkers, to enter into the problems of the war with an eagerness for close observation of actualities and a readiness to try out new methods, is very greatly to his credit. He is evidently a physicist by intuition and a mathematician by profession."[10]

From this war experience and his recognized success in organizing both the personnel and the scientific-technical ballistics program of the brand-new Aberdeen Proving Ground, Veblen came away with two major ideas: 1° that a new style of organization, centering on large groups, working collectively on a common research program, would be necessary for America to gain world status in science and 2° that the subject of such a scientific project – for America at least – would lay in the close integration of mathematics with physics to tackle the principal question of contemporary science.[11]

2.1 The Princeton School

Yet another aspect of Veblen's war work to be integrated into the project concerned the organizational aspects of the geometry/physics program. The War – and Veblen's own experience in setting up a fruitful and practical ballistics group in a new testing facility – convinced him that the old ways of individual researchers were now outmoded; real advances

[10] Hull 1919, 228 – 229

[11] For details on Veblen's war experiences, see Grier 2001.

were to be expected only through teamwork and the full mobilization of talents. To this end the Princeton Mathematics Department, faculty and doctoral students alike, became part of one of the first experiments in organized research in the US academic world. Concentration on the complementation of individual research projects, a structured and focused curriculum, and money and space for creating an efficient infrastructure were all ingredients.

As to the subject of such a collective project, the enormous success of Einstein's new theory of relativity following the eclipse results announced in November 1919 gave an obvious indication of where a focus might be found to really advance the position and role of American mathematics in the new post-war world. Moreover, there would be little competition from Europe in the field of fundamental applied mathematics. As he expressed it a few years later in seeking to organize an independent research center based at Princeton: "This programme [at Princeton] embraces studies in the geometry of paths and analysis situs which are becoming more and more clearly the foundations of [general relativistic] dynamics and the quantum theory."[12]

The difficulty was that Veblen himself had little experience with either the new physics or the particular mathematical tools – differential geometry and tensor analysis on manifolds – that were used by general relativity and many of the proposed unified theories. Luckily for him there was in the Mathematics Department someone who did know these things: Luther Pfahler Eisenhart. It was he who had been invited to introduce the mathematical aspects of relativity to the American mathematical community (with Leigh Page of Yale for the physics) at the special session on relativity at the annual meeting of the American Mathematical Society at Columbia on 24 April 1920 (published as Eisenhart 1920a). And it was Eisenhart who defended the new Einstein theory against critical attack by anti-relativists like Philipp Lenard and the idiosyncratic American astronomer T. J. J. See (Eisenhart 1923b).[13] Finally it was Eisenhart who wrote to Einstein to invite him to Princeton

[12] "Institute for Mathematical Research at Princeton": the manuscript is undated and unsigned but certainly by Veblen, circa 1925. Cited in Aspray 1988, 352.

[13] For the relativity debate in the American astronomical community see Crelinsten 2006.

to lecture on his new theory.[14] The original invitation was an offer of a semester's visiting lectureship, which Einstein refused. When he was later convinced of the interest of a visit to the United States, he agreed to give the Stafford Little Lectures at Princeton in May 1921.[15] These became the classic Einsteinian introduction to general relativity in the English-speaking world and served as an implicit declaration by Princeton University of its claim to be the center of relativity research in America.

Moreover, in the decade following 1923, the doctoral students of Veblen and Eisenhart (and sometimes of both jointly): Tracy Y. Thomas, Harry Levy, Morris S. Knebelman, John H. C. Whitehead, all did their theses in the domain of the geometry of paths.[16] Even the logician Alonzo Church, who had stayed on at Princeton to write a thesis on mathematical logic under Veblen, was persuaded to publish two articles as a doctoral student in the geometry of paths program (Church 1924; Church 1927).

In addition to the more or less permanent members the Princeton Mathematics Department hosted a number of Visiting Fellows during this period who worked on the geometry of paths program or closely related issues, their financing provided by the new National Research Council fellowship program in mathematics instituted in large part through Veblen's urging.[17]

The recruitment of permanent staff was a particularly important desideratum for the Department. Tracy Thomas was perhaps the most enthusiastic younger member of the School; after having obtained his doctorate with Veblen in 1923, he then spent two years as a National Research Fellow, the first year at the University of Chicago and the second with Hermann Weyl at the ETH in Zurich. He returned to Princeton as a lecturer for the Fall Term of 1926 where he remained

[14] Eisenhart to Einstein, 20 October 1920 (Eisenhart 1920b).

[15] These five lectures, delivered in German, were published simultaneously in English translation in the U. S. and Great Britain (Einstein 1922a) and, in the same year, in German (Einstein 1922b).

[16] John L. Vanderslice was a late addition, finishing his thesis under Veblen in 1934, after the latter had left the University in 1932 to become the first director of the mathematical section of the Institute for Advanced Study.

[17] For Veblen's role in structuring post-World War I mathematics financing see Feffer 1999.

Table 1
The Princeton School 1922 – 1934.
(**Boldface** = permanent staff; *Italics* = Visiting Fellow; Roman = doctoral student with date of Ph. D.).

Luther P. Eisenhart 1900 – 1945		**Oswald Veblen** 1905 – 1932
	⟵Tracy Y. Thomas 1923⟶	
Harry Levy 1924		
		(Alonzo Church 1927)
	⟵Morris S. Knebelman 1928⟶	
		John H. C. Whitehead 1930 Banesh Hoffman 1932 John L. Vanderslice 1934

Mathematics	*Joseph M. Thomas* 1925 – 1926 **Tracy Y. Thomas** 1926 – 1938 *Jesse Douglas* 1927 – 1928 **Hermann Weyl** 1928 – 1929
Physics	*Arthur H. Bramley* 1922 – 1925 **Howard P. Robertson** 1929 – 1947

until his departure for UCLA in 1938. Howard Robertson, a brilliant young physicist from Cal Tech, was recruited in 1929 with a joint chair in Physics and Mathematics. At home in general relativity, quantum physics and differential geometry, he worked at first with Hermann Weyl. The latter had arrived as a Visiting Professor in his eyes but a permanent staff member for the Princeton group and his departure for Göttingen after only a year was a great disappointment to the Group at the time, though he was to Princeton (at the newly-founded Institute for Advanced Study) a few years later.

The course structure, both upper-class undergraduate and graduate, was revamped to provide more differential geometry and relativity courses, as well as joint seminars with the Physics Department. This revamping lasted much longer at Princeton than the many other similar attempts at other American universities. Indeed to the demographer George E. Immerwahr, recalling his undergraduate days at Princeton in 1926 – 1930, it seemed that "almost all the upper-class math was related somehow to relativity, which was a big subject at that time."[18]

2.2 The geometry of paths program

If the restructuring of the curriculum was a crucial element in the program, the choice of a research project was at the heart of the matter. The basic idea had arisen during Veblen's and Eisenhart's joint mathematical seminar on "The Theory of Relativity" during the 1921 – 1922 academic year.[19] It was in this context that a very ambitious program not only for mathematics but also for the new physics of the twentieth century was laid out. It was named the *geometry of paths* program and, though modified over the coming years, it remained the hallmark of the greater part of research in mathematics carried out for a decade at Princeton.

The actual work in the program had begun in 1922 with the publication of a series of notes in the *Proceedings of the National Academy of Sciences* (and not for example, as was standard for mathematicians, in the *Bulletin of the American Mathematical Society*), a sign that, as in that year's American Association for the Advancement of Science address, the Princeton

[18] Immerwahr 2003.
[19] Princeton University 1922, 260.

group were appealing to a wider audience, beyond the boundaries of pure mathematicians. However the narrower mathematical public was not ignored and in the following years, publications were sent to the *Bulletin* and *Transactions* of the American Mathematical Society (an organization of which Veblen was President in 1923 – 1924 and Eisenhart in 1931 – 1932), as well as to the *Annals of Mathematics* (of which both Eisenhart and Veblen were editors). These publications continued without respite during the nineteen-twenties; in the decade following 1922 and ending with Veblen's 'departure' for the Institute for Advanced Study in 1932 there were some one hundred articles and books published by the Princeton group relating to the geometry of paths program.

The mathematical basis of the program was introduced in the group's very first publication:

> "1. One of the simplest ways of generalizing Euclidean Geometry is to start by assuming (1) that the space to be considered is an n-dimensional manifold in the sense of Analysis Situs, and (2) that in this space there exists a system of curves called *paths* which, like the straight lines in a euclidean space, serve as a means of finding one's way about.
>
> These paths are defined as the solutions of a system of differential equations,
>
> $$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = 0, \tag{1.1}$$
>
> in which the Γ^i_{jk}'s are analytic functions of $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ and the indices i, j, k run from 1 to n. (...)
>
> This definition of the *paths* is immediately suggested by the fact that the differential equations of the straight lines in a euclidean space which are
>
> $$\frac{d^2 x^i}{ds^2} = 0 \tag{1.3}$$
>
> in cartesian coördinates, take the form (1.1) in general coördinates, the Γ's now being such that there shall exist an analytic transformation of $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ converting (1.1) into (1.3)."[20]

[20] Eisenhart & Veblen 1922, 19 – 20

However paths are not necessarily geodesics since no minimizing or maximizing criteria are to be demanded of them. They are defined simply as the solutions to the set of n^3 differential equations given by (1.1).

Now since in general relativity these solutions with Γ^i_{jk} the Levi-Civita connection (Christoffel symbols) are precisely the trajectories of physical particles, with mass (matter) or without (light), such an approach is not only a natural way to explore the underlying levels of affine and metric geometries, but gives an immediate and physically intuitive way into the higher-level kinematics and dynamics of the new physics.

Elected president of the American Mathematical Society for 1923 – 1924, Veblen devoted his presidential address to the question of a survey of recent foundational advances in geometry. In the opening section he raised the question of the relations between physics and mathematics:

> "The foundations of geometry must be studied both as a branch of physics and as a branch of mathematics. From the point of view of physics we ask what information is given by experience and observation as to the nature of space and time. From the point of view of mathematics, we ask how this information can be formulated and what logical conclusions can be drawn from it.
>
> It is from the side of physics that has come the most important contribution in the last two decades."[21]

That geometry and physics formed indeed part of the same discipline had been first put forward in an explicit fashion by Veblen in his retirement address as Vice-President of the Mathematics Section of the American Association for the Advancement of Science in the closing days of 1922:

> "[Geometry] consists of a sequence of statements arranged in a certain logical order but void of all physical meaning. In order to apply them to nature we identify the undefined terms (points, lines, etc.) as names of recognizable objects. The unproved propositions (axioms) are then given a meaning, and we can ask whether they are true statements. If they are true, then we expect that the theorems which are their logical consequences are also

[21] Veblen 1925, 121

> true and that the abstract geometry will take its place as a useful branch of physics."[22]

Moreover it was at this same Boston AAAS annual meeting that Veblen first publicly presented the outline of a specific and ambitious program to carry out for the new relativistic physics what had historically been done for the old Newtonian theory; discussing in some detail the manner in which the components of the classical Euclidean geometry–Newtonian physics complex could be seen as built up in Postulationist style out of incremental additions of blocks of undefined terms and the axioms and definitions concerning them. His presentation can be summed up by a diagram (Figure 2) in which each level is denoted by a circle which subsumes the axioms of those sub-domains (circles) within it as well as adding other postulates to capture the introduction of new higher-level concepts.[23]

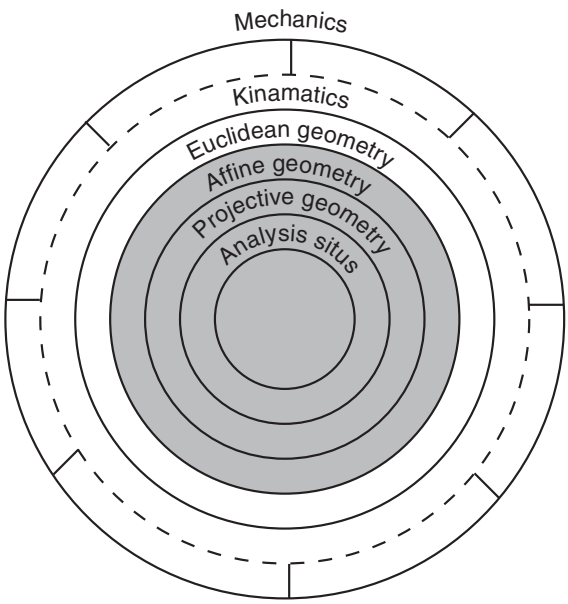


Figure 2
Veblen's view of the build-up of classical geometry and physics in terms of englobing axiom blocks (Based on Veblen 1923)

[22] Veblen 1923, 130. One might ask if, in Veblen's view, geometry is a part of physics why had it been miscatalogued as mathematics for so long? The answer is that "the branch of physics which is called Elementary Geometry was long ago delivered into the hands of mathematicians for the purposes of instruction" (Veblen 1923, 130).

[23] This diagram is my own résumé of the discussion in Veblen 1923.

> "Each one of these groups of theorems [defining a sub-discipline] is logically distinguished from its predecessor by the appearance of new relations which are brought in either by means of new axioms and undefined terms or by means of definitions which limit attention to a restricted class among the totality of possible geometric objects."[24]

The shaded circles represent those areas traditionally called "geometry". Further additions of axioms continue the construction into the domain traditionally called "mechanics" (non-shaded circles) though of course for Veblen there is no intrinsic difference in the nature of the enterprise.

As for the specific content of these various levels, Veblen goes into some detail for classical geometry/mechanics. One might summarize his discussion in the talk of the various sub-domains of this field by the first two columns of Table 2.

Thus starting from the fundamental level of analysis situs which associates triples of reals with points of a space, making analytic geometry possible, consecutively adds axioms concerning "straightness" (projective geometry), "parallels" (affine geometry) and "distance" (Euclidean metric geometry). With this last the domain of traditional domain called geometry is complete:

> "At each stage the freedom of physical interpretation is restricted until, at the final step, it is necessary to specify the physical significance of a measuring stick and of a rectangular cartesian coordinate system."[25]

Equipped with this measuring stick and cartesian coordinate system, one can build up the hierarchy of kinematics with the introduction of the postulates of time and substance (kinematics) and then of mass (mechanics in general).

The completion of the final stage, to produce specific dynamical systems is more complex. Newtonian mechanics, beyond the common "mechanics in general" is divided into a series of segmented higher-level theories because, while all the low-lying sub-disciplines are categorical (in the Postulationist sense),

[24] Veblen 1923, 131
[25] Veblen 1923, 131 – 132

> "the postulates for [classical] mechanics do not form a categorical set and cannot ... until the [specific] substance and the forces are specified. ... Mechanics is not a mathematical science, but is the group of theorems common to a collection of sciences. Each particular problem involves certain axioms in addition to those of mechanics in general."[26]

Table 2
Classical and modern constructions of geometry/physics

Domain of physics	**Classical physics**	**Modern physics**
Analysis situs	points $\longleftrightarrow (x, y, z)$ (analytic geometry)	continuous or discontinuous manifold
Projective geometry	theory of straightness	properties independent of infinitesimal parallelism
Affine geometry	theory of parallels	properties involving infinitesimal parallelism
Metric geometry	Euclidean geometry	Riemannian geometry
Kinematics	definitions of time and substance	special relativity
Mechanics	definitions of mass + specific axioms for each problem	general relativity and unified theories

So much for the past. Now "a series of brilliant discoveries in physics has been making the abstract [Postulationist] point of view a vital issue in that science also." (Veblen 1923, 129) Here Veblen has general relativity and its unified theory extensions in mind; their geometric base in Riemannian geometry however forces infinitesimal rather than finite structures in the construction of the geometry/physics discipline. Hence the necessary shift in the axioms and interpretation of the various levels of the hierarchy indicated in Table 2. It is this project that Veblen and Eisenhart had set into motion some eleven months earlier under the name of "the geometry of paths":

> "The geometry of paths can be considered as a generalization both of the earliest part of elementary geometry and of some of the most

[26] Veblen 1923, 134

> refined of physical theories. The study of the projective, affine and the metric geometry of paths ought to result in a comprehensive idea of what types of physical theory it is possible to construct along the lines which have been successful in the past."[27]

Others had, it is true, already begun the study of these geometries:

> "This generalized geometry has been studied by H[ermann] Weyl ... and ... by A[rthur] S[tanley] Eddington .... Both these authors define it in terms of a generalization of Levi-Civita's concept of infinitesimal parallelism rather than by the more natural idea of a system of paths."[28]

Not only did the Princeton School see their approach as different from one tied to a specific geometric interpretation of the connection and its (affine) generalization,[29] but they were to differentiate it even more sharply a bit later from the revived Erlangen Program championed in France by Élie Cartan, who had just begun to publish on this question in the same year.

The mention of Hermann Weyl in the filiation paragraph just cited was certainly the most important one for the Princeton School. They saw Weyl as the intellectual father of the approach which they were undertaking, particularly his gauge unified theory of 1919 – 1921; thus the importance of his acceptance of a position at Princeton University. I will not have the time here to go into detail concerning Weyl's relationship with the Princeton Group.[30] For what follows it is necessary only to point out that a unification of gravitation and electromagnetism was seen by Weyl to arise from the addition of a scalar field ϕ_i to the gravitational metric tensor g_{ij} such that a single variational principle will yield both the Einstein and the Maxwell equations, with the metric tensor as the gravitational potential and the "gauge field" ϕ as the electromagnetic potential. Both quantities are invariant under change of coordinates:

[27] Veblen 1923, 137

[28] Eisenhart & Veblen 1922, 20

[29] Aside from this reference to the affine generalization of the connection; the approach through a generalization of the idea of connection was adopted by the group around Jan Schouten at Delft.

[30] For this the reader is warmly recommended to Scholz 2001 and his chapter in this book.

> "The linear and quadratic fundamental forms
>
> $$\mathrm{d}\phi = \phi_i \, \mathrm{d}x^i \quad \text{and} \quad \mathrm{d}s^2 = g_{ik} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^k$$
>
> describe the metric of the manifold relative to a reference frame (=*coordinate system* + *gauge*); they are invariant under coordinate transformations: under a change of gauge the second form gains a factor α which is a positive continuous function of position (the 'gauge factor'), and the first form is diminished by a total differential $\mathrm{d} \lg \alpha$."[31]

Given the role played by Weyl in the inception of the path-theoretical approach it was thus appropriate that it was with his theory that the Princeton Group made its first intervention in physics.

3 Physics and the Princeton School

3.1 Responding to Weyl

Eisenhart, who had already published a series of articles on the groups of motion of static solutions of the Einstein field equations (Eisenhart 1921) became after 1922 the group's spokesperson for the application of the paths program to relativity theory and its extensions, with Veblen and other early members of the School, such as Tracy Y. Thomas and Harry Levy, concentrating at first on the geometric core.[32]

Though the program had been based from the beginning on paths as the fundamental object precisely in order to establish a direct connection between geometric objects and the trajectory of particles in the new physics, this point was first made explicit in the introduction to the first

[31] «Die lineare und die quadratische Fundamentalform

$$\mathrm{d}\phi = \phi_i \, \mathrm{d}x^i \quad \text{und} \quad \mathrm{d}s^2 = g_{ik} \, \mathrm{d}x^i \, \mathrm{d}x^k$$

beschreiben die Metrik der Mannigfaltigkeit relativ zu einem Bezugssystem (= Koordinatensystem + Eichung); sie bleiben bei Koordinatentransformationen invariant, bei Abänderung der Eichung nimmt die zweite einen Faktor α an, der eine positive stetige Ortsfunktion ist (das ‹Eichverhältnis›), die erste vermindert sich um das totale Differential $\mathrm{d} \lg \alpha$.» (Weyl 1919, 105)

[32] Eisenhart also of course participated in work on the geometric aspects of the theory and presented the group's general treatment of the geometry of paths approach in a series of five public lectures at the 1925 American Mathematical Society Colloquium, published as *Non-Riemannian Geometry* (Eisenhart 1927).

post-1922 Eisenhart physics article, concerning the Weyl unified gauge theory.

> "In the geometry of paths as developed by Professor Veblen and myself in a number of papers... the idea is that the paths are a generalization of straight lines in euclidean space.... Now I make the assumption that *physical phenomena manifest themselves in paths in a space-time continuum of four dimensions and that the functions* Γ^i_{jk} *are determined by the character of the phenomena*. In this note I apply this idea to the case of electro-magnetic phenomena as developed in the general theory of relativity, and the results raise the question whether Weyl, and later Eddington, are justified in the assumption that the fundamental vector introduced by Weyl in his gauging system is the electro-magnetic potential of the field."[33]

Now, directly from the condition that the class of paths be invariant (up to reparameterization) under a transformation of coordinates, Eisenhart obtains the class of physically equivalent paths (Γs); they are of the form:

$$\overline{\Gamma}^i_{\alpha\beta} = \left\{ {i \atop \alpha\beta} \right\} + \delta^i_\alpha \phi_\beta + \delta^i_\beta \phi_\alpha - g_{\alpha\beta}\phi^i$$

with $\left\{ {i \atop \alpha\beta} \right\}$ the Levi-Civita connection and ϕ an arbitrary vector. But this, with ϕ interpreted as the electromagnetic potential, is just the Weyl affine connection. This result had already been mentioned in passing in the 1922 articles on the geometry of paths program, e. g., (Eisenhart & Veblen 1922, 23). In spite of its casual treatment in these early notes, it seems clear that this result was central in the motivation of the Princeton group to pursue the geometry of paths approach.

Turning to Weyl's theory Eisenhart shows how the ϕ actually used is really

$$\phi^i = -\frac{1}{\mu}\phi^i_\nu \nabla_\rho \phi^{\nu\rho}$$

where $\phi^{\mu\nu}$ is the electromagnetic tensor (the 'curl' of the potential) and μ is the mass density of matter. Note that ϕ^i here is *not* the electromagnetic vector potential but a vector dependent on the electromagnetic *and* gravitational field (through the covariant derivative ∇ and the metric tensor used to raise and lower indices).

[33] Eisenhart 1923a, 175; emphasis in the original

Now enters the geometry of paths. Eisenhart had already established, as we saw earlier, that physically equivalent paths are only defined up to an arbitrary vector field. Choosing this ϕ for such a field defines then an affine connection, precisely that chosen by Weyl. But, Eisenhart points out, the ϕ here employed is *not* the vector potential as was assumed by Weyl. Furthermore, argues Eisenhart, if the conformal weight of the ordinary vector potential is normalized to +1, then ϕ's conformal weight is -1, underlying the difference between them. Weyl and Eddington are wrong, concludes Eisenhart, in assuming that the gauge vector is the electromagnetic potential; it is ϕ that plays this role.

Thus the Weyl theory as it stands is apparently not a unified theory of the gravitational and electromagnetic field but needs to be modified if the electromagnetic potential is to figure directly as a variable.

Eisenhart ends his paper with a mention of applications of the program to Einstein's field equations as well as those introduced by the latter in 1919 as his first proposal for a unified field theory[34]:

> "Mr. A. Bramley of the Department of Physics of Princeton University has shown, in a paper to be offered to the Philosophical Magazine, that [the Einstein 1915 and the Einstein 1919] equations ... are consistent, if the weight of [the electromagnetic potential] is taken to be one, and if [this potential] is not supposed to be the fundamental vector ϕ_α of the gauging system, but functionally related to it in such a way that ϕ_α is of weight zero."[35]

3.2 Widening the circle

The article referred to by Eisenhart was published under the rather unexpected title "Electronic conduction in metals" (Bramley 1923) by a young doctoral student at Princeton, Arthur Bramley. It was in fact a follow-up to a note proposing a derivation of value of the Planck constant h from the Maxwell equations and a model of electron radiation that had been published in a preceding *Philosophical Magazine* article (Bramley 1922) when Bramley was still an undergraduate at the University of Oregon. Coming to Princeton in 1923 to do experimental physics and write a thesis on the refractive index of helium, he discovered exciting new mathematical tools, probably first through Edwin P. Adams of the

[34] Einstein 1919. We shall return to this theory in a later section.

[35] Eisenhart 1923a, 178

Physics Department, the author of the first standard American textbook on (the old) quantum theory and the translator of Einstein's Princeton Lectures. The new article, written at Princeton, deals with an extension of his original model, now using new geometrical ideas explicitly drawn from the geometry of paths to explain J. J. Thomson's then popular "doublet theory" of metallic conduction.

Arthur Bramley was the first instance of the Princeton group's attempt to widen the disciplinary attraction of their program. After a purely mathematical collaboration with Eisenhart's doctoral student Harry Levy (Levy & Bramley 1923–24), published in the *Annals of Mathematics*, Bramley concentrated on the application of geometrical methods – specifically the geometry of paths – to problems arising in atomic physics, publishing in both mathematics and physics journals. He served as the group's principle source of information on developments in quantum theory until he left to become the first Bartol Fellow at the new Bartol Research Foundation in 1925.

This first collaboration with the Physics Department was to be followed by others, most notably with Harry Robertson at the end of the decade. Furthermore Veblen insisted on close physical proximity between the two Departments. Veblen's original office was inside the Physics Department's Palmer Physical Laboratory and when he has the occasion to help design the first Mathematics Department building in 1929, he added a hallway to connect the new Fine Hall and Palmer Laboratory.[36]

3.3 Responding to Einstein

Einstein had spent the early nineteen-twenties in modifying the unified theories of others but in 1925 he had his own non-symmetric affine theory to propose.[37] Starting from an asymmetric affine connection (from

[36] Until the completion of Fine Hall in 1931, the Princeton Mathematics Department possessed no specific building. The few mathematicians with office space were scattered about the campus, Veblen in Palmer and Eisenhart and Department chairman Henry Fine in the main administration building, Nassau Hall (Aspray 1988).

[37] A discussion of Einstein's various unified-theory proposals, along with French translations of some of the articles, is to be found in Ritter 1993. See also Goenner 2004.

which he constructs an asymmetric Ricci tensor R_{ab}) and an independent asymmetric tensor density $\mathcal{G}^{ab}$, Einstein varies the Lagrangian

$$\delta \int \mathcal{G}^{ab} R_{ab} \mathrm{d}\mathbf{x} = 0$$

independently with respect to the two quantities $\mathcal{G}$ and Γ^a_{bc}, which yields the following field equations:

$$\begin{aligned} R_{ab} &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{G}^{ab}}{\partial x^c} - \frac{\partial \mathcal{G}^{ba}}{\partial x^c} &= 0 \\ -\frac{\partial g_{ab}}{\partial x^c} + g_{rb}\Gamma^r_{ac} + g_{ar}\Gamma^r_{cb} + g_{ab}\phi_c + g_{ac}\phi_b &= 0 \end{aligned}$$

with ϕ_a an arbitrary covariant vector that Einstein will want to interpret as a electromagnetic potential. The first set of field equations arising from variation of the $\mathcal{G}^{ab}$ represent the generalization of general relativity while the last two, coming from variation of the Γ^a_{bc}, are the equivalents of Maxwell's equations in this context.

Three years after the critique of Weyl's unification scheme Eisenhart felt ready to tackle this new Einstein theory (Eisenhart 1926). In the introduction to the article he states his aim:

> "In proposing his recent theory of gravitation and electricity Einstein has derived his equations by expressing that a certain integral is stationary for the variations of a ... tensor density of the second order and the coefficient of an asymmetrical connection. In this note we show more particularly what kind of a linear connection Einstein has employed and obtain in tensor form the equations which in this theory should replace Maxwell's equations."[38]

As in his response to Weyl, Eisenhart points out in his final section that the identification of the arbitrary ϕ_a as the electromagnetic 4-potential is not as straightforward as the author thinks. Taking the linear approximation of the last set of the new Einstein field equations, he shows that they do *not* reduce to the linearized version of the corresponding Maxwell equations and that ϕ_a is not simply the expected potential.

[38] Eisenhart 1926, 125

But now, even though Bramley was gone, Eisenhart was no longer alone among the Princeton School members to venture onto the terrain of contemporary physics. Joseph M. Thomas, a National Research Fellow for 1925–1926 recruited from the University of Pennsylvania, participated too in the Princeton School's response to the new unified theory. In a paper published in the same number of the *Proceedings of the National Academy of Science* as Eisenhart's, he proposed an alternate derivation of Einstein's field equations via a certain generalization of the ordinary general relativistic equations:

> "Recently Einstein has deduced a unified theory of electric and gravitational fields. ... I show in the present paper that his equations can be obtained by direct generalization of the [empty space GR] equations. The process of generalization consists in abandoning assumptions of symmetry and in adopting a definition of covariant differentiation which is not the usual one, but which reduces to the usual one in case the connection is symmetric."[39]

Thus far, the attitude is not far from that of Eisenhart. The role of the mathematician is to make rigorous the mathematics used in an intuitive fashion by the physicist, pointing out how other options are available for the latter to do or to do more clearly what he has already done. But unlike Eisenhart, J. M. Thomas was prepared to go further. The method of generalization he develops in the article can be used not only to redo the Einstein route but can reproduce other physicists' work. Thomas devotes the last section of his paper to

> "show that the adoption of the ordinary definition of covariant differentiation leads to a geometry which is a special case of Weyl as a basis for the electric theory; further, that the asymmetric connection for this special case is of the type adopted by Schouten for the geometry at the basis of his electric theory."[40]

The references to Weyl and Schouten refer to the Weylian gauge theory discussed above and Jan Schouten's 1923 unified theory (Schouten 1923) as a generalization of Weyl's. The grounds of the intervention of J. M. Thomas in the debate among physicists is thus different than the more traditional attitude represented by Eisenhart. A mathematician can

[39] J. M. Thomas 1926, 187
[40] J. M. Thomas 1926, 187

not only improve the understanding of a particular theory, he can use sophisticated methods to restructure the domain by relating apparently disparate theories to each other.

This work sprang out of the Princeton Group's turn to the projective-geometric part of their project and, in this context, to a more analytic approach, centering on differential invariants as the privileged point of departure for further research.[41] When, the year before, Eisenhart had given one of the two annual American Mathematical Society Colloquium lecture series on the subject of "The New Differential Geometry", which summed up the position of the program as of that date, no particular mention of projective spaces had been made. When he published the lectures in 1927 under the title *Non-Riemannian Geometry* (Eisenhart 1927), he was obliged to add a whole section, over one-quarter of the book, to cover this subject.

3.4 Differential invariants

When Veblen was invited to give one of the plenary lectures at the September 1928 International Congress of Mathematicians in Bologna, Italy, he chose as the subject to introduce the Princeton Group project: "Differential Invariants and Geometry." In a very real sense this lecture was a response to one given at the previous Congress in Toronto four years earlier by Élie Cartan on "La théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle" in which the French mathematician had expounded his program to refound differential geometry on the basis of a revitalized Erlangen Program, one based on Lie groups rather than the classical groups that Klein had originally proposed as the basis for geometry. At the end of his talk he had mentioned in passing the Princeton program.[42] Veblen now took this opportunity to reply to Cartan:

> "The Klein theory of geometry seems to be showing the same symptoms as a physical theory whose heyday is past. More and more complicated devices have to be introduced in order to fit it

[41] The differential-invariant approach had been summed up by Veblen two years earlier in his Cambridge Tract volume *Invariants of Quadratic Differential Forms* (Veblen 1927).

[42] Cartan 1928. For a detailed analysis of the Princeton and Paris programs see Ritter 2011.

> to the facts of nature. Its fate I should expect will be the same as that of a physical theory – it becomes classical and its limitations as well as its merits are recognized. (...) We are on the way to recognize that the space may be characterized in many other ways than by means of a group. For example, there is the fundamental class of spaces of paths ... which are characterized by the presence of a system of curves such that each pair of points is joined by one and only one curve of the system...
>
> If we give up the idea of making one concept – such as the group concept – dominant in geometry, we naturally return to something like the starting point of Riemann's discussion. ... We prescribe only the continuous nature of the manifold to be considered and the analytic character of the operations. There has indeed been an uninterrupted development of the Riemannian geometries along these... unprejudiced lines. I mean Lipschitz, Christoffel, Ricci and, more recently, the mathematical physicists. This work seemed to most mathematicians to be extremely formal and narrow in outlook. But it was continually developing the ideas of differential invariant theory.... The theory of one or more such invariants is what we call a geometry."[43]

Veblen had chosen to take a sabbatical first semester that year, not only to attend the Congress but also, invited by his friend G. H. Hardy, to teach a term at Oxford. In an invited lecture delivered to the London Mathematical Society on 14 February 1929, Veblen outlined once again the recast program for the path-geometrical project:

> "In recent years geometry has passed definitely beyond the boundaries set for it by the Erlanger *Programm*. According to the Erlanger *Programm* a geometry is the invariant theory of a group. According to the new conception a geometry is the theory of an invariant. This invariant may or may not have a non-identical group of automorphisms. If it has such a group, the geometry will be one of the classical type characterized by Klein. If not, it is of a generalized type. Thus the group of a space is regarded as one of its important properties, but not as its all-sufficient characteristic one.
>
> I do not propose to discuss this question in general terms ... Instead, I shall attempt an introductory account of a particular

[43] Veblen 1929a, 182 – 183

> class of geometries which arise by generalization from the classical projective geometry. The first mathematician to recognize the possibility of a generalized projective geometry was, I think, Weyl, who showed in 1921 how it is possible to vary an affine connection in such a way as to keep projective properties unaltered, and to obtain a tensor, analogous to the curvature tensor, which is unaltered by these changes.
>
> This discovery was soon followed by studies of infinitesimal projective displacements – analogous to the infinitesimal parallelism of Levi-Civita – by Schouten and Cartan, from which there emerges a theory of what we may call (after Cartan) the non-holonomic projective spaces.
>
> At the same time some of my colleagues, especially Eisenhart and T. Y. Thomas and J. M. Thomas, in looking for the theorems of a geometry of paths which would be independent of any particular representation of the system of paths by means of an affine connection, were finding further projective invariants and getting at their geometric significance.
>
> Also the mathematical physicists, particularly O. Klein, were developing the so-called five-dimensional relativity which was first put forward in 1921 by Kaluza as a method of giving a unified theory of gravitation and electromagnetism.
>
> What they were doing is, however, as I hope to show elsewhere, better understood as a projective theory in which the supposed five-dimensional feature is a device covering the use of homogeneous coordinates in a space of four dimensions."[44]

Armed with these new tools and with, as we shall see, a new recruit to the Group, Veblen was ready to carry the fight onto the physicists' own ground. Veblen had moved into the outer, physical circles of his geometrico-physical concentric rings.

3.5 Talking to physicists

The last two paragraphs of his London talk cited above have no counterpart in the Congress address of five months previously. They are the result of Veblen's contact with one of the students at Oxford that term, a young physicist named Banesh Hoffmann, who was very

[44] Veblen 1929b, 140 – 141

impressed by both the Princeton project and social and intellectual style of Veblen (Hoffmann 1984). Once again the American mathematician had found someone who could provide the Princeton mathematicians with expertise on the physics side, both in general relativity and in modern quantum mechanics. Hoffmann came to Princeton and, together with Veblen, published an article on a projective reformulation of the Kaluza-Klein unified theory to which they gave the name of "projective relativity". Drawing on the geometry of paths but resolutely physical in content, it was sent to *Physical Review* and appeared in the 1 September 1930 issue of that journal.

> "In this paper we show that the formalism of O. Klein's version of the five-dimensional relativity can be interpreted as a four-dimensional theory based on projective instead of affine geometry. The most natural field equations for the empty spacetime case are a combination into a single invariant set of the gravitational and electromagnetic field equations of the classical relativity without modification. This seems to be the simplest possible solution of the unification problem.
>
> When we drop a restriction on the fundamental projective tensor which was imposed in order to reduce our theory to that of Klein a new set of field equations is obtained which includes a wave equation of the type already studied by various authors. The use of projective tensors and projective geometry in relativity theory therefore seems to make it possible to bring wave mechanics into the relativity scheme."[45]

Coauthoring the article with Hoffmann was, for Veblen, a way into contemporary physics. For the first time since the inception of the program in 1922 he was publishing an article proposing a specific physical theory. On his trip through Europe in 1932 he gave lectures on the new theory; at Göttingen, Vienna and Hamburg he lectured and propagandized on the subject. The lectures themselves were published by Veblen – in German – as the second volume of the newly-founded and prestigious Springer series, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*.[46]

[45] Veblen & Hoffmann 1930
[46] Veblen 1933

But when Veblen made this trip he was no longer – at least from an administrative point of view – part of Princeton University. Indeed, the main purpose of that trip was to find and recruit mathematicians for the Institute for Advanced Study of which he was the first head of the Mathematics School.[47] In many respects the just-created Institute was a realization of the earlier plans by Veblen for an American research center in mathematics and physics. Though initiated by people and institutions without much knowledge of Veblen's original ideas, the final selection of the Princeton mathematician to be scientific head of the new organization (instead of the original choice, Harvard's George David Birkhoff) meant that the program to be instituted bore a very close resemblance to what Veblen had thought of as the ideal infrastructure for the carrying-out of the plan to combine mathematics and physics. Of the five original members of the Mathematics School: James Alexander, Albert Einstein, Walther Mayer, John von Neumann, and Hermann Weyl, one (Einstein) was not a mathematician but a physicist and two had published recently on physics as well as on mathematics (Weyl on relativity and unified theories and Von Neumann on quantum mechanics).[48] Only Alexander was a pure mathematician, a topologist; he had however passed his entire career up to that point at Princeton where he had been Veblen's student[49] then colleague. And the fact that the institute remained physically at Fine Hall until the completion of its own building, Fuld Hall, in 1939, meant that a constant contact was maintained between the two institutions. Still with no classes to teach or students to advise, the old dynamic could no longer be maintained.

[47] For a detailed discussion of the early years of the Institute see now Batterson 2006.

[48] Einstein and Weyl of course were viewed by the Princeton School, as a number of citations above witness, as the precursors and founders in a sense of the Princeton program. Walther Mayer, a mathematician, was Einstein's collaborator and had been given his position at the Institute on the demand of the latter with the understanding that Mayer would continue to collaborate with Einstein on unified theories.

[49] As such, of course, he did not escape a temporary participation in the geometry of paths program and, like Alonzo Church, had published two articles on the subject: Alexander 1925 – 26 and Alexander 1926 – 27. The question of the extent to which Alexander saw his topological work of the nineteen-twenties as part of the path-geometrical program remains an open question.

3.6 Winding down

With Veblen involved with setting up the Institute for Advanced Study and Eisenhart, as Dean of the College, very occupied with administrative duties, the Princeton School no longer had a functioning center. But the University now had a reputation in the field of mathematics such that the activities centered around other faculty members such as Solomon Lefschetz, Eugene Wigner and Alonzo Church would constitute new centers. Moreover the recruitment of talent on both the national and international levels no longer posed any problem. The visitors that filed through Princeton included Paul Alexandroff and Heinz Hopf (1927 – 28); G. H. Hardy (1928 – 29); John von Neumann (1929 – 30 and later); John H. Roberts and J. H. van Vleck (1937 – 38); and Claude Chevalley (1939 – 40). But their agendas were no longer those of the Princeton School and the latter's part in the story of the rise of Princeton University as a center for research in differential geometry and in theoretical physics was largely forgotten.

But not quite completely. There had been three major centers of research in the differential geometry of generalized spaces and their connection with general relativity and unified theories during the first decade and a half following the Great War: Princeton, Paris with Élie Cartan and Delft, Holland with Jan Schouten and his school.[50] Often in conflict during the earlier period, the nineteen-thirties saw a convergence. Schouten and David van Dantzig had developed a projective unified theory quite similar to Veblen and Hoffmann's at the same time[51] using a very different approach, directly generalizing the connection. They explicitly pushed the similarities between their results and those of both the Princeton School and Cartan's work on projective spaces. Although Cartan himself never attempted a direct foray into physics, Shing-Shen Chern, back in Beijing, China after his studies with Wilhelm Blaschke in Hamburg and Cartan in Paris, produced his first major paper: "On Projective Normal Coordinates" in 1937, which he published in the Princeton-based *Annals of Mathematics*, and in which he showed the conditions for reconciling the Cartan and Princeton School definitions

[50] Details of these three centers will be discussed in Ritter 2011.

[51] See the review article they produced for the physics community, Schouten & van Dantzig 1932, and the literature cited therein.

of projective normal coordinates.[52] And in Princeton itself, Veblen's last student, John L. Vanderslice, who had followed him to the Institute in 1932, published a thesis in which he showed how the "non-holonomic" (generalized) spaces of Cartan could be viewed from the standpoint of the geometry of paths – using moreover a postulationist axiomatic approach. But this is not an abandonment of the Princeton School's program, as he points out in the introduction to his thesis:

> "We do not take the position that the non-holonomic geometries defined by our postulates represent the only significant generalized geometries, nor do we wish to minimize the importance of other points of view toward these same geometries. Our treatment is not in conflict with the conception of a geometry as the theory of a geometric object;[53] the analytical development soon gives rise to a "geometric object"... upon which the subsequent discussion is based. Rather does our theory furnish one method among many of discovering geometrical objects which are of significance."[54]

Moreover Eisenhart continued to publish his very influential books on differential geometry; significantly his next, after the programatic *Non-Riemannian Geometry* of 1927, was called *Continuous Groups of Transformations* which appeared in 1933, with generous references to Cartan and Schouten as well as to the Princeton School.[55]

The nineteen-thirties thus saw a series of attempts from all sides to show the equivalence of the three major approaches to the question of the generalization of traditional differential geometry. The final result was a certain consensus which, generalized again in a complicated development, starting in the late nineteen-thirties but extending well into the nineteen-fifties, led to a modern synthesis, essentially under the name of Cartan. Without denying the central role played by the French mathematician, the result historically is in part a cause and in part an effect of the post-World War II split between mathematics and physics in this domain, together with the marginalization of general relativity,

[52] Chern 1938. Furthermore Chern always referred to modern differential geometry as a joint production of the Princeton School and of Cartan. See, for example, Chern 1979.

[53] The reference here is to Veblen 1929b, see the quotation above, section 3.4.

[54] Vanderslice 1934, 154

[55] Eisenhart 1927; Eisenhart 1933.

both classical and in the extended sense of unified field theories. The unity between mathematics and physics worked for by the Princeton School and to a large extent also by the group around Schouten was lost, ironically perhaps, in large part due to the work of Princeton geometers of the post-Veblen period.

Thus ended one of the first attempts to create a modern research organization in American mathematics and physics. The kind of unity across mathematics and physics that Veblen foresaw was one that demanded not a simple application of mathematics to already existing physics or even a modification of mathematics through its contact with contemporary physical problems, but one that would remodel both mathematics and physics by showing their essential unity and drawing on the lessons of the past – Euclidean geometry and Newtonian physics – to inspire new geometries and new physics. Not that this demanded a uniform means of putting this into practice: we have seen the difference among the approaches of Eisenhart, the traditionalist, offering rigor and completeness as a mathematician to existing theories; J. M. Thomas proposing to go further and modify existing theories on the basis of mathematical demands; and Veblen and Hoffmann, engaging fully in terms of their own physical theories. Moreover the idea of having mathematicians and physicists working together through joint professorships for mature researchers and doctoral mentoring for younger ones, and joint seminars and publications, remind us to what extent the mathematics-physics frontier is not about the interface between some hypostatized intellectual domains but rather one of real mathematicians and physicists meeting to solve real problems.

That they did not in the end solve these problems is hardly surprising; they are with us still today. Nor is the model they created necessarily the best-suited to achieve that aim. But the experiment that started in post-War Princeton was in many respects a forerunner of our modernity, both in terms of infrastructure and of intellectual approach. The fact that mathematics and physics are now in one of their episodic *rapprochements* renders it profitable to look back at the last time the two fields nearly met, in a truly usable past.

4 Bibliography

Alexander, James W. (1925 – 26): On the Decomposition of Tensors. The Annals of Mathematics (2) **27**: 421 – 423

Alexander, James W. (1926 – 27): On the Class of a Covariant Tensor. The Annals of Mathematics (2) **28**: 245 – 250

Aspray, William (1988): The Emergence of Princeton as a World Center for Mathematical Research, 1896 – 1939. In W. Aspray & P. Kitcher (eds.), History and Philosophy of Modern Mathematics. Minneapolis: University of Minnesota Press, p. 346 – 366

Aspray, William (1991): Oswald Veblen and the Origins of Mathematical Logic at Princeton. In T. Drucker (ed.), Perspectives on the History of Mathematical Logic. Boston: Birkhäuser, p. 54 – 70

Batterson, Steve (2006): Pursuit of Genius: Flexner, Einstein and the Early Faculty of the Institute for Advanced Study. Wellesley: A. K. Peters

Bramley, Arthur (1922): Radiation. Philosophical Magazine (6) **44**: 720 – 728

Bramley, Arthur (1923): Electronic Conduction in Metals. Philosophical Magazine (6) **46**: 1053 – 1073

Cartan, Élie (1928): La Théorie des groupes et les recherches récentes de géométrie différentielle. In J. C. Fields (ed.), Proceedings of the International Mathematical Congress Held in Toronto, August 11 – 16, 1924. Toronto: University of Toronto Press, vol. I, p. 85 – 94

Chern, Shing-Shen (1938): On Projective Normal Coordinates. The Annals of Mathematics **39**: 165 – 171

Chern, Shing-Shen (1979): From Triangles to Manifolds. The American Mathematical Monthly **86**: 339 – 349

Church, Alonzo (1924): Uniqueness of the Lorentz Transformation. American Mathematical Monthly **31**: 376 – 382

Church, Alonzo (1927): On the Form of Differential Equations of a System of Paths. The Annals of Mathematics (2) **28**: 629 – 630

Corcoran, John (1980): Categoricity. History and Philosophy of Logic **1**: 187 – 207

Crelinsten, Jeffrey (2006): Einstein's Jury: The Race to Test Relativity. Princeton: Princeton University Press

Dirac, Paul A.M. (1928): The Quantum Theory of the Electron. Proceedings of the Royal Society A **117**: 610 – 625

Einstein, Albert (1919): Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle? Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1919: 349 – 356

Einstein, Albert (1922a): The Meaning of Relativity. Princeton: Princeton University Press & London: Methuen

Einstein, Albert (1922b): Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie. Braunschweig: Vieweg

Einstein, Albert (1925): Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1925: 414 – 419

Eisenhart, Luther Pfahler (1920a): The Permanent Gravitational Field in the Einstein Theory. The Annals of Mathematics **22**, 86 – 94

Eisenhart, Luther Pfahler (1920b): in M. Janssen et al. (eds.), The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 7: The Berlin Years: Writings, 1918 – 1921 Princeton: Princeton University Press: 231

Eisenhart, Luther Pfahler (1921): Einstein static fields admitting a group G_2 of continuous transformations into themselves. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **7**: 328 – 334

Eisenhart, Luther Pfahler (1923a): Another Interpretation of the Fundamental Gaugevector of Weyl's Theory of Relativity. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **9**, 175 – 178

Eisenhart, Luther Pfahler (1923b): Einstein and Soldner. Science **58**, 516 – 517

Eisenhart, Luther Pfahler (1926): Einstein's Recent Theory of Gravitation and Electricity. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **12**: 125 – 129

Eisenhart, Luther Pfahler (1927): Non-Riemannian Geometry. (American Mathematical Society Colloquium Publications 8). New York: American Mathematical Society

Eisenhart, Luther Pfahler (1933): Continuous Groups of Transformations. Princeton: Princeton University Press

Eisenhart, Luther Pfahler; Oswald Veblen (1922): The Riemann Geometry and Its Generalization. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **8**: 19 – 23

Feffer, Loren B. (1999): Oswald Veblen and the Capitalization of American Mathematics. Isis **89**: 474 – 497

Goenner, Hubert (2004): On the history of unified field theories. Living Reviews in Relativity 2004 – 2.
[http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2004 – 2]

Goldstein, Catherine and Jim Ritter (2003): The Varieties of Unity: Sounding Unified Theories 1920 – 1930. In A. Ashtekar, R. S. Cohen, D. Howard, J. Renn, S. Sarkar, A. Shimony (eds.), Revisiting the Foundations of Relativistic Physics: Festschrift in Honor of John Stachel. Dordrecht: Kluwer, p. 93 – 149

Grattan-Guinness, Ivor (2000): The Search for Mathematical Roots 1870 – 1940. Princeton: Princeton University Press

Grier, David Alan (2001): Dr. Veblen Takes a Uniform: Mathematics in the First World War. American Mathematical Monthly **108**: 922 – 931

Hoffmann, Banesh (1984): Interview of Albert Tucker with Banesh Hoffmann. The Princeton Mathematics Community in the 1930s (PMC20).
[http://www.princeton.edu/~mudd/finding_aids/mathoral/pme20.htm]

Hull, Gordon F. (1919): Some Aspects of Physics in War and Peace. Science **51**: 221 – 233

Immerwahr, George E. (2003): I Dream of Jeannie.
[http://immerwahr.com/Early%20Years.html]

Levy, Harry; Bramley, Arthur (1923 – 24): Geodesic Representation between Riemann Spaces. The Annals of Mathematics **25**: 53 – 56

Moore, Eliakim Hastings (1902): On the Projective Axioms of Geometry. Transactions of the American Mathematical Society **3**: 142 – 158

Moore, Eliakim Hastings (1903): On the Foundations of Mathematics. Science **17**: 401 – 416

Parshall, Karen; David Rowe (1994): The Emergence of the American Mathematical Research Community 1876 – 1900 (History of Mathematics 8). Providence: American Mathematical Society/London Mathematical Society

Princeton University (1922): Catalogue of Princeton University 1921 – 1922. Princeton: Princeton University Press

Ritter, Jim (1993): Théories unitaires. In F. Balibar (ed.), Albert Einstein: Œuvres choisies vol. 3. Relativités II. Paris: Seuil, p. 131 – 191

Ritter, Jim (2011): Mathematicians, Einstein, and the Unification Project: A Tale of Two Cities. (To appear)

Scanlan, Michael (1991): Who Were the American Postulate Theorists? The Journal of Symbolic Logic **56**: 981 – 1002

Scholz, Erhard (ed.) (2001): Hermann Weyl's Raum-Zeit-Materie and a General Introduction to His Scientific Work. Basel: Birkhäuser

Schouten, Jan A. (1923): Over een niet-symmetrische affine Veldtheorie. Verslag van de Gewone Vergaderingen der Wisen Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **32** 842 – 849

Schouten, Jan A.; van Dantzig, David (1932): Generelle Feldtheorie. Zeitschrift für Physik **78**: 639 – 667

Thomas, Joseph Miller (1926): On Various Geometries Giving a Unified Electric and Gravitational Theory. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **12**: 187 – 191

Thomas, Tracy Yerkes (1930): On the Unified Field Theory. I. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **16**: 761 – 770

Vanderslice, John L. (1934): Non-Holonomic Geometries. American Journal of Mathematics **56**: 153 – 193

Veblen, Oswald (1904): A System of Axioms for Geometry. Transactions of the American Mathematical Society **5**: 343 – 384

Veblen, Oswald (1911): The Foundations of Geometry. In J. W. A. Young. Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field. New York: Longmans, Green, & Co.: p. 3 – 51

Veblen, Oswald (1923): Geometry and Physics. Science (NS) **57**: 129 – 139

Veblen, Oswald (1925): Remarks on the Foundations of Geometry. Bulletin of the American Mathematical Society **31**: 121 – 141

Veblen, Oswald (1927): Invariants of Quadratic Differential Forms. (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 24). London: Cambridge University Press

Veblen, Oswald (1929a): Differential Invariants and Geometry. Congresso Internazionale dei Matematici Bologna: Zanichelli, vol. 1: 181 – 189

Veblen, Oswald (1929b): Generalized Projective Geometry. Bulletin of the American Mathematical Society 31: 121 – 141

Veblen, Oswald (1933): Projektive Relativitätstheorie. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 2) Berlin: Julius Springer

Veblen, Oswald; Hoffmann, Banesh (1930): Projective Relativity. Physical Review (2) **36**: 810 – 822

Weyl, Hermann (1919): Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie. Annalen der Physik (4) **59**: 101 – 133

Part III

Wissenschaftler | Scientists

Mathematische Physik bei Hermann Weyl – zwischen «Hegelscher Physik» und «symbolischer Konstruktion der Wirklichkeit»

Erhard Scholz

1 Vorweg

Hermann Weyls Beiträge zur mathematischen Physik des 20. Jahrhunderts waren vielfältig und hatten – zumindest teilweise – weitreichende Folgen. Hier kann es nicht darum gehen, diese Beiträge im Einzelnen darzustellen oder gar zu analysieren. Vielmehr soll das Profil von Weyls Umgang mit der Mathematik in der (theoretischen) Physik und seine Reflexion dieses Verhältnisses herausgearbeitet werden, so weit das möglich ist. Natürlich blieb dieses Profil nicht zeitlich konstant; Weyls Auffassungen des Fragekomplexes veränderten sich im Laufe seines Lebens erheblich.

Aus meiner Sicht lassen sich folgende drei Arten der Verwendung der Mathematik in der Physik durch Weyl identifizieren:

(1) Mathematische *Beiträge mit wesentlich spekulativ-apriorischem Geltungsanspruch*, gewissermaßen Mathematik «als Naturphilosophie». Ein bekanntes Beispiel ist Weyls reine Infinitesimalgeometrie von 1918 und sein darauf aufbauender Versuch zur Formulierung einer einheitlichen Feldtheorie (1918 – 1920).

(2) *Begriffsanalytische Beiträge* zur Klärung von Grundlagenfragen der Physik. Typische Beispiele: Konforme und projektive Strukturen in der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) (1921), Weyls mathematische Analyse des Raumproblems (1921/22) und seine Untersuchung zum gruppentheoretischen Fundament der Tensorrechnung (1924).

(3) Schließlich der Einsatz der Mathematik in strukturell unterstützender Funktion bei der *symbolischen Konstruktion der Naturerkenntnis* oder, wie Weyl vorzog zu formulieren, bei der «symbolischen Konstruktion der Wirklichkeit». Beispiele dieses Einsatzes finden sich in Weyls Diskussion der Rolle der hermiteschen Formen (Operatoren) in der Quantenmechanik (1927), der Rolle der Gruppentheorie bei der Begründung der Quantenmechanik und speziell bei der Aufklärung der homöopolaren Bindung (1928 ff.). Weiter wurde seine Sicht des Übergangs zur $U(1)$-Eichtheorie des Elektromagnetismus im Rahmen der allgemein relativistischen Dirac-Gleichung (1929) von dieser Auffassung charakterisiert. Wir

finden sie auch bei seinen späteren Diskussionen mathematischer Konstruktionen in der ART.

Die angeführten Beispiele zeigen eine klare zeitliche Reihenfolge. Man wird versucht sein daraus abzulesen, dass die hier aufgelisteten Aspekte nicht lediglich analytisch zu unterscheiden sind, sondern Veränderungen in Weyls Auffassung der Rolle der Mathematik im Erkenntnisprozess der Physik zum Ausdruck bringen. Das ist nicht ganz falsch; es soll hier aber keine epistemisch-biographische Entwicklungslinie des Weylschen Denkens (in dieser Sache) behauptet werden. Schon eine detailliertere Diskussion der Gründe für die jeweiligen Verschiebungen würde den Rahmen dieses Artikels überschreiten. Des weiteren wäre es falsch, hier eine Reihe sich ablösender (sich wechselseitig ausschließender) Auffassungen zu sehen. Eher müsste man von einer Anreicherung und relativen Gewichtsverschiebung zwischen diesen ausgehen. Die früheren Auffassungen wurden von Weyl nie völlig verworfen, sondern blieben in untergeordneter Form und veränderter Funktion auch später erhalten. Dies wird im folgenden im Auge zu behalten sein.

2 Beiträge mit spekulativ-apriorischem Geltungsanspruch

Das wohl schönste Beispiel für einen Einsatz der Mathematik im Sinne eines spekulativ-naturphilosophischen Vorgehens findet sich in Weyls Formulierung seiner *reinen Infinitesimalgeometrie*, in heutiger Formulierung der Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie zur *Weylgeometrie* [Weyl, 1918a, b, 1919]. In modernisierter Notation zusammengefasst, ging es Weyl darum, die Möglichkeit des *direkten Vergleichs* geometrischer (und physikalischer) Größen in einer Mannigfaltigkeit (M, g) mit Riemannscher Metrik g, in lokalen Koordinaten ausdrückbar in der Form $\sum g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu$, aufzugeben. Stattdessen sollte ein direkter Vergleich nur von Größen «an einem Punkt» $x \in M$ möglich sein (etwa der Längen von Vektoren in demselben Tangentialraum $T_x M$). Dies war durch die Abstraktion von g zur zugehörigen konformen Klasse $[g]$ ausdrückbar, mit $\tilde{g} \in [g]$, falls $\tilde{g} = \Omega g$ (Ω strikt positive reelle Funktion auf M). Der Vergleich an verschiedenen Punkten $x \neq x'$ wurde durch Integration einer Differentialform φ, in lokalen Koordinaten $\sum \varphi_\mu dx^\mu$, zu

einem (im allgemeinen wegabhängigen) Umskalierungsfaktor ermöglicht. Weyl nannte φ einen «Längenzusammenhang» (Skalenzusammenhang). Eine *rein infinitesimalgeometrische* (Weylsche) *Metrik* wurde/wird dementsprechend durch eine Äquivalenzklasse $[(g, \varphi)]$ angegeben, wobei Äquivalenzen $(g, \varphi) \sim (\tilde{g}, \tilde{\varphi})$ durch *Eichtransformationen* definiert sind:

$$\tilde{g} = \Omega g$$
$$\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{1}{2} d \log \Omega$$

Auf diese Skaleneichgeometrie baute Weyl ein dreischrittiges gegliedertes, umfassendes physikalisches Theorieprogramm auf:

- Interpretation des Längenzusammenhangs φ als ($\mathbb{R}^+$) *Eichtheorie des elektromagnetischen (e. m.) Feldes* $F = d\varphi$ (geometrisch: Krümmungsform von φ),
- *geometrische Vereinheitlichung* von Gravitation g und e. m. Feld $F = d\varphi$ durch die Weylsche Metrik $[(g, \varphi)]$,
- darauf aufbauend, in Fortführung des Mie-Hilbertschen Ansatzes, eine *rein feldtheoretische Materieerklärung* durch ein Wirkungsprinzip $\delta \int \mathcal{L}\, \mathrm{d}x = 0$ mit nur von g und φ abhängiger *eichinvarianter Lagrangedichte* $\mathcal{L}(g, \varphi)$.

Die Materie hoffte er ähnlich wie Hilbert durch zeitlich stabile «Energieknoten» in T_{00} erklären zu können, mit $T_{\mu\nu}$ Energie-Impulsanteil des aus Variation von $\mathcal{L}$ nach $g^{\mu\nu}$ hervorgehenden geometrisch-materiellen Tensors. Dies ist an vielen Stellen dargestellt worden.[1]

Man hätte dies als eine mehr oder weniger gewagte Hypothese der mathematischen Physik formulieren können, um sie der Fachdiskussion zu stellen und ihren empirischen Gehalt im Laufe der Zeit zu überprüfen. Bei Weyls ersten Publikationen zu diesem Thema hörte sich das aber anders an. Nach einer kurzen Schilderung der «alten Anschaung» von Raum und Zeit in der klassischen Physik erläuterte er die neue Sicht, die durch die ART eröffnet wurde:

[1] Vizgin, 1994; Corry, 2004; O'Raifeartaigh, 1997; Scholz, 2004a

> «Das prinzipiell Neue an ihr ist (...) die Einsicht: die Metrik ist nicht eine Eigenschaft der Welt an sich; vielmehr ist Raum-Zeit als Form der Erscheinungen ein völlig gestaltloses vierdimensionales Kontinuum im Sinne der Analysis Situs, die Metrik aber bringt etwas Reales zum Ausdruck, das in der Welt existiert, das durch Zentrifugal- und Gravitationskräfte physikalische Wirkungen auf die Materie ausübt und dessen Zustand auch umgekehrt durch die Verteilung und Beschaffenheit der Metrik naturgesetzlich bedingt ist.»[2]

Nach dieser Einstimmung kündigt er seinen eigenen Beitrag und dessen programmatische Intentionen an:

> «... Indem ich die Riemannsche Geometrie, die doch reine ‹Nahe-Geometrie› sein will, von einer ihr gegenwärtig noch anhaftenden Inkonsequenz befreite, ein letztes ferngeometrisches Element ausstieß, das sie von ihrer Euklidischen Vergangenheit noch bei sich führte, gelangte ich zu einer Weltmetrik, aus welcher nicht nur die Gravitations- sondern auch die elektromagnetischen Wirkungen hervorgehen, die somit, wie man mit gutem Grund annehmen darf, über alle physikalischen Vorgänge Rechenschaft gibt. Nach dieser Theorie ist *alles Wirkliche, das in der Welt vorhanden ist, Manifestation der Weltmetrik*; die physikalischen Begriffe sind keine andern als die geometrischen. Der einzige Unterschied, der zwischen Geometrie und Physik besteht, ist ...»[3]

Es folgte eine Darlegung, dass die Geometrie das «Wesen der metrischen Begriffe», also die allgemeinen metrischen Strukturen erforsche, während die Physik die «Gesetze der wirklichen Welt» unter allen möglichen vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten auszuzeichnen habe.

Man könnte dazu neigen, solche Sätze als Überhöhung und sprachliches Ornament einer möglicherweise ansonsten eher nüchtern ausgeführten Begriffsanalyse und -erweiterung samt Hypothesenbildung anzusehen. Zieht man aber weitere Arbeiten Weyls aus der Zeit 1918 – 1920 hinzu, so bestätigt sich der Eindruck, dass in ihnen die vorwärtstragende Gedankenentwicklung ihres Autors durchaus adäquat zum Ausdruck kam.

So finden sich am Ende des Textes der dritten Auflage von *Raum – Zeit – Materie* (RZM), in der Weyl nun auch seine neue Geometrie, einheitliche

[2] Weyl, 1918b, 2

[3] Weyl, 1918b, 2, Hervorhebungen hier wie im Folgenden im Original

Feldtheorie und die feldtheoretische Materiehypothese aufnahm,[4] zum Verhältnis Geometrie – Physik folgende Ausführungen:

> «Wir hatten erkannt, daß Physik und Geometrie schließlich zusammenfallen, daß die Weltmetrik eine, ja vielmehr die einzige physikalische Realität ist. Aber letzten Endes erscheint so diese ganze physikalische Realität doch als eine bloße Form; nicht die Geometrie ist zur Physik, sondern die Physik ist zur Geometrie geworden ...»[5]

Bei dieser Identifizierung von Geometrie und physikalischer Realität spielten starke philosophische Motive mit, die Weyl von seiten der Husserlschen Phänomenologie [Ryckman, 2005] und der Fichteschen Philosophie aufgenommen hatte [Sieroka, 2010; Scholz, 2005b]. Letztere nahm für Weyl in diesen Jahren eine zentrale Stellung ein.

Der cartesianisch anmutende Traum einer völligen Assimilation der Physik an die Geometrie blieb nicht ohne Folgen für den Charakter der physikalischen Erkenntnis. Diese formulierte Weyl zwei Sätze später so:

> «... Die Physik hat für die Wirklichkeit keine weitergehende Bedeutung wie die formale Logik für das Reich der Wahrheit ... Ich meine, daß die Physik es nur mit dem zu tun hat, was in einem genau analogen Sinne als formale Verfassung der Wirklichkeit zu bezeichnen wäre ...»[6]

Ähnliche Auffassungen finden wir an anderer Stelle in Äußerungen Weyls während der Jahre 1918/19. Wir können daher davon ausgehen, dass er in dieser Zeit und bis in das Jahr 1920 hinein davon ausging, dass

- die Physik in der Geometrie aufgehen würde,
- die Geometrie in innerer Entwicklungslogik ihrer eigenen begrifflichen Tendenzen entfaltbar sei (zunächst von der ‹Fern-› zu einer halbherzigen ‹Nahe-› schließlich zur ‹reinen Nahegeometrie›)
- und damit ein Erkenntnisfortschritt der Physik qua Begriffslogik schon so gut wie sicher verbunden sei.

[4] Die erste Auflage von RZM war im Druck (1918), als Weyl seine «reine» Infinitesimalgeometrie entdeckte, die zweite Auflage (1919) war ein unveränderter Nachdruck der ersten.

[5] Weyl, 1919, 263

[6] Weyl, 1919, 263

Hilbert kritisierte diese Auffassung als *Hegelsche Physik*.[7]

Ironischerweise entstanden die von Hilbert der Weylschen Theorie vorgeworfenen «Paradoxien» nur dann, wenn man letztere in Hilberts Denkstil auszuwerten versuchte. Sie warfen insofern ebensoviel Licht auf Hilberts wie auf Weyls Versuche, Geometrie und Physik aufeinander zu reduzieren. Und doch wies Hilberts Polemik ohne Zweifel auf eine Schwäche hin, die jedem radikalen rationalistischen Reduktionsprogramm der Naturtheorie droht.

Die Auffassung Weyls blieb dennoch nicht ohne Auswirkungen auf die zeitgenössische mathematische Physik. O. Veblens Programm von 1922 einer geometrisierten mathematischen Physik – und dadurch das Forschungsprogramm der Princeton Gruppe der mathematischen Physik der 1920er Jahre – war stark von Weyls Sicht geprägt, auf jeden Fall in mathematischer, teilweise aber wohl auch in erkenntnistheoretischer Hinsicht.[8] Weyl selber hielt diese, philosophisch gesehen extreme Position jedoch nicht lange aufrecht. Schon in der nächsten Auflage von RZM (^{4}1923) fehlte die eben zitierte Schlusspassage von RZM (^{3}1919) über die Reduktion der Physik auf die Geometrie und deren rein formale Bedeutung für die Erkenntnis der Wirklichkeit. In der fünften Auflage (der letzten von Weyl selbst redigierten) beginnt der letzte Absatz in ganz anderem Ton. Anschließend an einen kurzen Hinweis auf die jüngsten Vorschläge einheitlicher Feldtheorien von Eddington, Bach, Einstein und Kaluza kommentierte Weyl nun:

> «… Wir sind an einem Punkt angelangt, wo wir Halt machen müssen, wenn wir uns nicht im Nebel der Spekulationen vollends verlieren wollen; gefährden wir dadurch nicht, was wir an wertvollen Erkenntnissen gewonnen haben! Die Rolle, welche *Raum und Zeit*, das extensive Medium der Außenwelt und seine Struktur,

[7] Hilbert benannte zwei «Paradoxien», zu der die «neueste *Weylsche Theorie*» seiner Ansicht nach führen würde. Eine folgte für ihn aus der (angeblichen) Reduktion des organischen Geschehens auf die Feldtheorie. Das führe zur Paradoxie der Reversibilität der Zeitrichtung auch für organische Vorgänge. Eine weitere Paradoxie ergebe sich daraus, «…, daß in der alles umfassenden Theorie dasjenige vorliegen würde, was ich eine *Hegelsche Physik* genannt habe. Es würde da alles, was noch geschehen wird, endgültig vorbestimmt sein. Eigentliche Entscheidungen könnten gar nicht stattfinden, und das ganze Weltgeschehen würde nicht über den *begrenzten Inhalt eines endlichen Gedankens* hinausgehen.» [Hilbert, 1992, 100]

[8] Siehe den Beitrag J. Ritters in diesem Band.

> im Aufbau der der Wirklichkeit spielen, hat sich uns fortschreitend geklärt. ...»

Die *Struktur* von Raum und Zeit erschien also als so weit verstanden, wie es für den zeitgenössischen Stand der Naturwissenschaft notwendig erschien; von einer Reduktion der gesamten physikalischen Wirklichkeit, einschließlich der Materie, auf die Geometrie war hingegen keine Rede mehr. Drei Sätze weiter wurde Weyl in dieser Hinsicht explizit. Die abschließenden Sätze des Haupttextes von RZM [5]1923 lauteten:

> «... Wir haben unsere Analyse von Raum und Zeit nicht durchführen können, ohne uns zugleich mit *Materie* zu befassen. Hier stehen wir aber noch vor Rätseln, deren Auflösung nicht von der Feldphysik zu gewärtigen ist. In dem Dunkel, welches das Problem der Materie noch umhüllt, ist vielleicht die Quantentheorie das erste anbrechende Licht.»[9]

Mittlerweile war Weyl also von der Annahme einer Reduzibilität der Materie auf die Geometrie weit abgerückt, und sei es auch nur über den Vermittlungsschritt einer geometrisierten einheitlichen Feldtheorie. Ein eigener Zweig der Physik, die Quantentheorie, hatte sich mit den Phänomenen der Materiekonstitution und ihrer Erklärung zu befassen. Diese galt ihm nunmehr als primär und irreduzibel gegenüber der Geometrie und den Interaktionsfeldern (damals: Gravitation und Elektromagnetismus). Dem entsprach auch eine bescheidenere Rolle für die Mathematik im physikalischen Erkenntnisprozess.

Ende des Jahrzehnts zog Weyl in einer Rückschau auf die geometrischen Vereinheitlichungsversuche der (klassischen) Feldtheorien ein noch deutlicher formuliertes kritisches Resümee. Mittlerweile hatte die neue Quantentheorie eigene Materiefelder eingeführt (Schrödinger-, Dirac-, Weyl-Wellenfunktionen für Fermionenfelder). Aus Weyls Sicht bedeutete das für die klassischen geometrischen Feldtheorien nun folgendes:

> «Alle diese geometrischen Luftsprünge waren verfrüht, wir kehren zurück auf den festen Boden der physikalischen Tatsachen. ...»[10]

Die «festen Tatsachen» charakterisierte Weyl durch seine eigene zweikomponentige spinorielle Wellenfunktion (ψ_1, ψ_2) der irreduziblen

[9] Weyl, 1923b, 317
[10] Weyl, 1931, 343

Darstellung der komplex gelesenen Lorentzgruppe $SL_2(\mathbb{C})$. Diese Weyl-Spinorfelder erhielten allerdings erst in den 1950er Jahren bei der Beschreibung von Neutrinos in der Physik eine Bedeutung. In den 1930er Jahren wurden sie von Pauli wegen ihrer Masselosigkeit zunächst als unphysikalisch abgelehnt. Weyl dagegen schlug vor, so lange mit (zunächst) masselosen Feldern zu arbeiten, bis geklärt sei, wie die Ankoppelung an die Gravitation zu erfolgen habe.[11]

Dies beleuchtet noch einmal, mit welcher Vorsicht selbst hier die Weylsche Rede vom «festen Boden der physikalischen Tatsachen» zu lesen ist.[12]

Was jeweils als «physikalische Tatsache» angesehen wird, hing hier wie in anderen Fällen davon ab, wer von ihr redete und welcher Community die redende Person primär verpflichtet war (Mathematik, mathematische Physik, theoretische Physik, experimentelle Physik etc.). Weyl ließ sich anscheinend in dieser Zeit in den USA gerne unwidersprochen als theoretischer Physiker bezeichnen; Pauli hielt ihn weiterhin für einen Mathematiker, aus dessen Beiträgen er lediglich bereit war, «möglichst großen Nutzen für den Fortschritt der Physik herauszuschlagen» [Pauli, 1979, 505].

Weyl agierte selbstbewusst und erfolgreich auf beiden Feldern; eine stabile transnationale Community der mathematischen Physik, auf die er sich in diesen Arbeiten hätte beziehen können, gab es – noch – nicht. Mit der stärksten Gruppe dieser Arbeitsrichtung, der um Veblen und Eisenhart der 1920/30er Jahre (Princeton), stand Weyl zwar in engem Austausch; aber selbst diese war in ihrer Ausprägung noch stark von lokalen Bedingungen geprägt.[13] Die europäischen Zentren der mathematischen Physik waren weitgehend um Einzelpersonen konzentriert und besaßen jeweils höchst unterschiedliche Forschungsprofile mit zu geringem Austausch untereinander, um eine internationale Community zu bilden: E. Cartan (Paris), A. S. Eddington (Cambridge), J. A. Schouten

[11] «*Masse ist aber ein Gravitationseffekt*, es besteht die die Hoffnung, für dieses Glied in der Gravitationstheorie einen Ersatz zu finden, der die gewünschte Korrektur herbeiführt» [Weyl, 1929, 245]. Vgl. [Straumann, 2001].

[12] Weyl verwies aber im selben Absatz auch auf Dirac, in dessen Händen sich das hier eingesetzte $U(1)$-Eichprinzip in der Theorie des Elektrons «glänzend» bewährt habe [Weyl, 1931, 344].

[13] Siehe Anmerkung 8.

(Delft), T. Levi-Civita (Rom), A. Sommerfeld (München), F. Hund und B. L. van der Waerden (Leipzig), D. Hilbert und M. Born (Göttingen). Weyl (Zürich) stand zwar in engem Kontakt mit der Göttinger Gruppe (Hilbert, Born, von Neumann, in geringerem Maße auch Jordan), seinen Züricher Kollegen E. Schrödinger (bis 1927) und W. Pauli (der erst 1928 von Hamburg nach Zürich wechselte), er wurde aber nicht zum Zentrum einer eigenen Forschergruppe.[14] Die Göttinger mathematische Physik verlor mit Hilberts Emeritierung ihren Kopf; Weyls zweite Göttinger Periode (1930 – 1933) blieb ein kurzes Zwischenspiel. Nach dem Machtantritt der Nazis wurde die Göttinger Gruppe der mathematischen Physik in «alle Welt» (genauer gesagt, die angelsächsische) zerstreut.

3 Begriffsanalytische Beiträge zu Grundlagenfragen der Physik

Im Laufe der 1920er Jahre veränderten sich Weyls Auffassungen von den Aufgaben der Mathematik im Theoriebildungsprozess der Physik und insbesondere der Stellung der Geometrie in ihm. Schon zu Beginn des Jahrzehnts verlagerte sich seine Fragestellung in diesem Gebiet zu begriffsanalytischen Klärungen innerhalb der Mathematik mit unmittelbarer Bedeutung für Grundlagenfragen der Physik.

In einer kurzen Abhandlung *Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und konformen Auffassung* («aus einem Brief an F. Klein») [Weyl, 1921b] beschäftigte er sich mit der Frage, wie sich konforme, projektive und metrische Struktur auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit zueinander verhalten. Dabei charakterisiert er eine

- *konforme Struktur* («konforme Beschaffenheit»)
  durch eine Äquivalenzklasse von Metriken $[g]$, $\tilde{g} \sim g \longleftrightarrow \tilde{g} = \Omega g$,
- *projektive Struktur* («projektive Beschaffenheit»)
  durch eine Äquivalenzklasse affiner Zusammenhänge $[\Gamma]$ mit $\tilde{\Gamma} \sim \Gamma$
  $\longleftrightarrow$ Spur der Geodätischen von $\tilde{\Gamma} \equiv$ Spur der Geod. von Γ
  $\longleftrightarrow \tilde{\Gamma}^{\mu}_{\nu\lambda} = \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} + \delta^{\mu}_{\nu}\psi_{\lambda} + \delta^{\mu}_{\lambda}\psi_{\nu}$ für gewisse Funktionen ψ_{μ},[15]

[14] Nur in dieser Hinsicht konnte er, wie Yang es später beschrieb, in seiner Züricher Zeit als «lone wolf» erscheinen [Yang, 1986, 15].

[15] Vgl. Veblens etwas allgemeinere Definition (ein Jahr später) im Beitrag J. Ritter, dieser Band.

- *metrische Struktur* durch eine Weylsche Metrik, also auch wieder eine Äquivalenzklasse $[(g, \varphi)]$, wie oben angegeben.

Eine Weylsche Metrik zeichnet eindeutige affine und damit auch projektive Strukturen aus und besitzt eine natürliche konforme Struktur. Weyl konnte nun vergleichsweise leicht nachweisen, dass zwei Weylsche Metriken $[(g, \varphi)]$, $[(g', \varphi')]$ mit äquivalenten projektiven und konformen Strukturen ($g \sim g'$, $\Gamma \sim \Gamma'$) identisch sind:

> «Projektive und konforme Beschaffenheit eines metrischen Raumes bestimmen dessen Metrik eindeutig.»[16]

Ein halbes Jahrhundert später zeigten F. Ehlers, F. Pirani und A. Schild in einem vielbeachteten Beitrag, dass man nicht einmal die Existenz einer metrischen Struktur voraussetzen muss. Schon die Vorgabe einer konformen Metrik von Lorentzsignatur und einer projektiven Struktur (mit gewissen, sehr natürlichen Kompatibilitätsbedingungen zwischen Geodätischen und infinitesimalen Nullkegeln) reicht aus, um eine Weylsche Metrik zu konstruieren und sie eindeutig festzulegen [Ehlers e. a., 1972].

Weyl formulierte die physikalische Bedeutung seines Struktursatzes klar, aber ohne naturphilosophischen Anspruch:

> «In der Relativitätstheorie haben projektive und konforme Beschaffenheit eine unmittelbare anschauliche Bedeutung. Die erstere, die Beharrungstendenz der Weltrichtung eines sich bewegenden Teilchens, ... ist jene Einheit von Trägheit und Gravitation, welche Einstein an Stelle beider setzte, für die es aber bislang an einem suggestiven Namen mangelt ... die konforme Beschaffenheit ist der Wirkungszusammenhang der Welt, durch den bestimmt wird, welche Weltpunkte miteinander in möglicher kausaler Verbindung stehen ...»[17]

Daher werde in seinem oben zitierten Satz «eine auch für die Physik bedeutungsvolle Tatsache» ausgesprochen. Tatsächlich verwies er direkt im Anschluss an den Beweis des Satzes auf dessen Bedeutung für einen wichtigen Punkt der Debatte um die empirische Basis der ART.

[16] Weyl, 1921b, 196
[17] Weyl, 1921b, 196

> «Es geht aus diesem Satz hervor, dass allein aus der Beobachtung der ‹natürlichen› Bewegung materieller Teilchen und der Wirkungs-, insbesondere der Lichtausbreitung die Weltmetrik festgelegt werden kann; Maßstäbe und Uhren sind dazu nicht erforderlich.»[18]

Damit sprach Weyl einen Punkt an, der zwischen ihm und Einstein umstritten geblieben war, als er seine Skaleneichtheorie des e. m. Feldes im Jahre 1918 gegenüber Einstein verteidigte. Hier ging es nun aber nicht mehr um die Gültigkeit seiner einheitlichen Feldtheorie. Weyl arbeitete hier eine allgemeine strukturelle Eigenschaft der ART heraus, die unabhängig von speziellen feldtheoretischen Entscheidungen und damit verbundenen philosophischen Auffassungen galt. Es handelte sich also um eine von naturphilosophischen Präferenzen weitgehend unabhängige begriffliche Klärung von Grundlagenfragen der ART und jedweder darauf aufbauenden relativistischen Feldphysik. Interessanterweise bekam die Weylsche Metrik dadurch auch dann eine bleibende physikalische Bedeutung, wenn man Weyls einheitliche Theorie von 1918 aufgab (oder sie sogar für falsch hielt).

Man beachte dabei: Projektive und konforme Struktur einer Mannigfaltigkeit liefern eine *Weylsche Metrik*, nicht per se oder gar im ersten Schritt eine Riemannsche. Nur falls die Längenkrümmung Null ist ($\mathrm{d}\varphi = 0$), lässt sich die Weylsche Metrik, zumindest mathematisch gesehen, auf eine Riemannsche reduzieren. Aber selbst dann hat man noch die Skaleneichfreiheit in Rechnung zu stellen, also zu prüfen, ob die Riemannsche Eichung die Skalierung der physikalischen Observablen adäquat zum Ausdruck bringt.

In derselben Zeit, in der Weyl diese – aus einer Gelegenheitsarbeit für Felix Klein hervorgegangene – Untersuchung über die Beziehung zwischen konformer, projektiver und metrischer Struktur verfasste, beschäftigte er sich auch mit der Neuformulierung einer *mathematischen Analyse des Raumproblems* (ARP) [Weyl, 1921a, 1922, 1923a]. Auch hier ging es um eine mit mathematischen Methoden durchgeführte Begriffsklärung mit Blick auf die zeitgenössische (allgemein relativistische) Theoriebildung der Physik, angeregt und teilweise angeleitet durch philosophische Überlegungen.

[18] Weyl, 1921b, 196

Weyl versuchte hier zu klären, wie die grundlegende Idee der klassischen Analyse des Raumproblems des 19. Jahrhunderts im Sinne von Helmholtz, Lie und Klein unter den neuen Bedingungen der allgemein relativistischen Physik abzuändern ist. Dazu musste er zunächst einen möglichst allgemein formulierten Begriffsrahmen für die Charakterisierung der Gruppenoperationen «im Infinitesimalen» (in späterer Terminologie also etwa von Operationen auf dem Tangentialbündel einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit) formulieren. Für seine Sicht war wichtig, dass auch die «endlichen» Gruppenelemente «im Infinitesimalen» operierten (also die Liegruppe selbst auf den Tangentialräumen), nicht nur die «infinitesimalen» (die zugehörige Liealgebra). Dreißig Jahre später wurden solche Fragen in der Terminologie der Faserbündel (Prinzipal- und … assoziierte) formuliert. Weyl standen solche symbolischen Mittel nicht zur Verfügung. So blieben seine Ausführungen zu dieser Frage in einigen Aspekten unfertig, d. h. unklar. Sie gingen aber – wie die in ähnlicher Absicht verfassten und in begrifflich wie technischer Hinsicht entwickelteren Überlegungen von E. Cartan – in die Denkentwicklung ein, die später zur Formulierung der Faserbündel führte.

Es kann hier nur ganz kurz angedeutet werden, wovon Weyls Analyse des Raumproblems handelte. Sie genauer zu beschreiben, wäre hier kaum möglich, da schon die Formulierung des Problems erheblich verwickelter ist als im Fall der Aussage über projektive, konforme und metrische Strukturen. Weyl ging es darum, unabhängig oder vorgeordnet zu einer Metrik die Operation von endlichen und unendlich kleinen Elementen zweier miteinander in Verbindung stehender Gruppen $G \subset \tilde{G}$ (G «Kongruenzen», $\tilde{G}$ «Ähnlichkeiten») in den «infinitesimalen Umgebungen» U_x der Punkte x einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M zu studieren (wir würden heute sagen, auf den Tangentialräumen T_xM). Dabei waren $G \subset SL_n(\mathbb{R}), \tilde{G} \subset GL_n(\mathbb{R})$, und $\tilde{G}$ der Normalisator von G. Die Operation der Gruppe G sollte punktabhängig realisiert sein,

$$G_x := h_x^{-1} G h_x \quad x \in U,$$

mit punktabhängigen Konjugationen durch $h_x \in \tilde{G}$. Weyl sprach von einer «wechselnden Orientierung der Gruppe». Dies stellte für Weyl die Einführung eines verallgemeinerten Begriffs der *Kongruenz* in jeder ein-

zelnen infinitesimalen Umgebung (T_xM) dar.[19] Eine Kongruenz *zwischen* «infinitesimal benachbarten Punkten» x, x' (mit $x' = x + \mathrm{d}x$ – *par abus de notation*) sollte nach seiner Auffassung durch einen (zunächst beliebigen) linearen Zusammenhang Λ charakterisiert werden. Dieser ordnete jeder «infinitesimalen» Verrückung $\mathrm{d}x = (\mathrm{d}x^\mu)$ eine «infinitesimale» lineare Abbildung auf T_xM zu:

$$\mathrm{d}x \mapsto \Lambda \mathrm{d}x \quad \text{mit} \quad (\Lambda \mathrm{d}x)^\mu_\nu := \Lambda^\mu_{\nu\lambda} \mathrm{d}x^\lambda, \ \Lambda = (\Lambda^\mu_{\nu\lambda})$$

Die Gruppe G sollte dann gewisse, in zwei Postulaten formulierte Bedingungen erfüllen, die Weyl aus semantischen Gründen als sinnvoll und sogar unumgänglich erschienen:
1. Postulat der «freien» Verfügbarkeit von Λ,
2. Postulat der eindeutigen Auszeichnung eines affinen Zusammenhangs.[20]

Daraus ließen sich algebraische Bedingungen an $\mathfrak{g} = Lie(G)$ ableiten, deren Auswertung Weyl zur Aussage führte:

Theorem 1 (Hauptsatz der ARP) *Erfüllt eine Gruppe die algebraischen Bedingungen abgeleitet aus den Postulaten 1 und 2, so gilt für ihre Liealgebra*

$$\mathfrak{g} = so(p,q), \quad p + q = n = dim\, M.$$

Eine Mannigfaltigkeit M mit Weylscher Metrik ließ nun gerade faserweise Automorphismen auf TM vom Typ des Satzes zu. Insofern lieferte der Hauptsatz der ARP eine weitere, nun begriffsorientierte Untermauerung der Weylschen Differentialgeometrie. Folgte man den motivierenden Argumenten Weyls für seine Postulate 1 und 2, so erwies sich die Weylsche Geometrie als bestgeeigneter weiter Rahmen für die ART und relativistische Feldphysik. Zwar gingen in die Motivation auch weiterhin philosophische Überlegungen ein; Ausführung und Resultat waren jedoch begriffsanalytisch, beziehungsweise ein Struktursatz der theoretischen Mathematik.

An diesen beiden Beispielen wird sichtbar, wie vorsichtig Weyl schon während der ersten Hälfte der 1920er Jahre wurde, naturphilosophische

[19] Später sprach er auch von «physikalischem Automorphismus».
[20] Für mehr Einzelheiten siehe [Scholz, 2004b, 2010]. Eine andere Interpretation geben [Coleman/Korté, 2001].

Motive in seine mathematisch-physikalischen Arbeiten einfließen zu lassen. Begriffliche Analysen schienen in dieser Zeit für ihn eine sicherere Alternative zu den hochspekulativen Ansätzen aus den Jahren 1918 – 20 zu sein. Auch in weiteren Arbeiten Weyls in den 1920er Jahre finden sich Fragestellungen solcher Art, etwa in seinen Untersuchungen zum *gruppentheoretischen Fundament der Tensorrechnung* [Weyl, 1924]. Auf dem Weg zum Beweis des Hauptsatzes dieser Arbeit entdeckte Weyl die Möglichkeit der Übertragung des Hurwitz-Schurschen «unitären Tricks» von der Invariantentheorie auf die Darstellungstheorie als Schlüssel zum Beweis der vollständigen Irreduzibilität. Dadurch wurde sie zum Einstiegstor in Weyls große Serie von Publikationen über die Darstellungstheorie von Liegruppen [Hawkins, 2000]. Die Ausgangsfrage der Arbeit richtete sich jedoch zunächst auf die Rolle symmetrischer Tensoren in der Darstellungstheorie der speziellen linearen Gruppe $SL_n(\mathbb{R})$.

Die Charakterisierung von tensoriellen Symmetrietypen waren ihm als wichtig für die Felder der ART aufgefallen. Seine Arbeiten an der mathematischen Analyse des Raumproblems und E. Cartans Beitrag dazu [Cartan, 1923] veranlassten ihn dazu, sich Cartans Arbeiten zur Klassifikation und Darstellung einfacher Liealgebren genauer anzusehen. Diese wurden um 1923 herum zum Katalysator für eine Erweiterung seiner eigenen mathematischen Fragestellungen. Er entdeckte, wie sich Cartans Klassifikation der Darstellungen der $sl_n\mathbb{R}$ mittels des unitären Tricks in eine vollständige Liste der irreduziblen Darstellungen der speziellen linearen Gruppe selbst, $\mathfrak{G} := SL_n(\mathbb{R})$, übersetzen ließ. Das Ergebnis zeigte, dass es sich um – durch Symmetrietypen ausgezeichnete – Unterräume von Tensorprodukten des $\mathbb{R}^n$ handelte. Weyl war davon so beeindruckt, dass er dies kurzerhand zur begrifflichen Grundlage der Tensorrechnung überhaupt erklärte:

> «Und das wahre mathematische Fundament der Tensorrechnung scheint mir der Satz zu sein, daß *auf diese Weise jede zu $\mathcal{G}$* [$= SL_n(\mathbb{R})$, E. S.] *isomorphe, linear-homogene Gruppe Γ, jede ‹Darstellung von $\mathfrak{G}$› erhalten wird*.»[21]

Eine solche Aussage mag aus späterer Sicht, die auf eine entwickelte multilineare Algebra zurückgreifen kann, möglicherweise nicht mehr

[21] Weyl, 1924, 451

überzeugend wirken. Für Weyl jedoch stellte sie eine höchst überzeugende und gleichzeitig überraschende Beziehung zwischen den tensoriellen «infinitesimalen» Strukturen der allgemein relativistischen Feldtheorie und der Darstellungstheorie der speziellen linearen Gruppe her. Als wenige Jahre später klar wurde, dass in der relativistischen Quantentheorie die Darstellungen der reellen speziellen linearen Gruppe durch die der Lorentzgruppe zu ersetzen waren, übertrug Weyl in seiner Arbeit zur allgemein relativistischen Diracgleichung [Weyl, 1929] die irreduziblen Darstellungen der $SL_2(\mathbb{C})$ auf die infinitesimalen Strukturen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit (Konstruktion eines lokalen *Spinorbündels* in späterer Terminologie). Diese Art der Vorgehensweise ging über («bloße») Begriffsanalyse schon weit hinaus, obgleich die Fragestellung zumindest der Arbeit [Weyl, 1924] aus einer solchen hervorging. Inhalt und Ergebnis zeigten aber schon in eine Richtung, die Weyl in der zweiten Hälfte der 1920er Jahre in steigender Deutlichkeit ausformulierte.

4 Teilnahme an der ‹symbolischen Konstruktion› der Wirklichkeit

Begriffsanalytisch ausgerichtete Forschung zur Unterstützung naturwissenschaftlicher Wissensbildung war – und bleibt – hilfreich und wichtig; aber sie operiert natürlich zurückhaltender als die mathematische Physik im Modus der spekulativen Naturphilosophie, der die Weylschen Arbeiten an der Wende zu den 1920er Jahren dominierte. Weyl schien das auf Dauer nicht zu genügen; auf jeden Fall finden wir im letzten Drittel des Jahrzehnts Kommentare und Arbeiten unseres Autors, die diese Zurückhaltung gegenüber der Physik aufgaben. Dazwischen lag ein Jahr intensiven Studiums der wissenschaftsphilosophischen Literatur (Ende 1925 bis Mitte 1926), durch das sich Weyl auf die Abfassung seiner *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften* [Weyl, 1927a] vorbereitete (im folgenden PMN). In derselben Zeit vollzog sich der Übergang zur «neuen» Quantentheorie.

Weyl näherte sich um die Mitte der 1920er Jahre in Sachen Grundlagen der Mathematik den Auffassungen Hilberts wieder an, wenn auch in seiner eigenen Weise.[22] Das verband sich in steigendem Maße mit dem

[22] Vgl. dazu [Jahnke, 1990].

Blick auf die Verbindung von Mathematik und Physik. Ab etwa 1925 äußerte er, ganz anders als noch vier Jahre vorher, eine Wertschätzung für Hilberts Programm der logischen Absicherung der transfiniten Teile der Mathematik durch formale, aber *finite* Methoden im Sinne Hilberts [Weyl, 1925] – allerdings nur insofern es dort um eine «Darstellung des Transzendenten im Symbol» ging (ebda, 540). Etwas später begann er von der «kühnen theoretischen Konstruktion» zum Zwecke der Wirklichkeitserkenntnis zu sprechen [Weyl, 1927a, 51, 53],[23] um dies schließlich zur «symbolischen Konstruktion der Welt (symbolic construction of the world)» zusammenzuziehen [Weyl, 1934, 78].

Das geschah in der Zeit der Entstehung der neuen Quantenmechanik (QM) von Heisenberg/Born/Jordan/Dirac/Schrödinger. Durch die Arbeit am Aufbau der QM und die Herausforderung ihrer Interpretation wurde die rein formale Seite von Theorien der Physik noch einmal stärker betont, als dies schon nach der Formulierung der ART der Fall war. Das war ein zentrales Thema der logisch-empiristisch oder auch positivistisch ausgerichteten Kommentare zur QM von Physikern, Mathematikern und Philosophen. Für Weyl war das nicht grundsätzlich anders, während er auf die ART noch mit durchaus überschwänglich vorgetragenen, naturphilosophisch inspirierten Theorievorschlägen herangetreten war.

Er betonte nun im Anklang an die Debatte um die Grundlagen der Mathematik den wichtigen Beitrag einer mathematisch einwandfreien formalen (insbesondere konsistenten) Durchbildung der physikalischen Theorie, bestritt aber weiterhin vehement, dass sich dieser *lediglich* in der korrekten deduktiven Struktur der Theoriebildung auswirkte. Vielmehr galt ihm eine mathematisch gut durchgebildete physikalische Theorie, auch in ihren abstrakten Teilen, als eine *Repräsentation des Wirklichen im Symbol*, nicht nur in ihren direkt mit der Empirie vermittelbaren Observablen oder Beobachtungssätzen. Dieses Wirkliche musste dabei nicht – ja konnte vielleicht nicht einmal – anders als «im Symbol» benannt und bezeichnet werden. Es war jenseits der anschaulichen Evidenz und galt Weyl somit als *transzendent*, mit durchaus beabsichtigtem Anklang sowohl an die Sprache der Religion als auch an das Transzendente und Transfinite innerhalb der Mathematik.

[23] Entsprechend in [Weyl, 1949, 64 ff.].

Dies galt insbesondere für die Quantenrealität, die hinter den Erscheinungen mit ihren stochastischen Regularitäten lag, ohne selber direkt zugreifbar oder auch nur in sinnlichen Bildern imaginierbar zu sein. Bestenfalls hatte ein solches auf sinnliche Anschauung rekurrierendes Bild (wie «Welle» oder «Teilchen» etc.) eine ebenfalls bloß symbolische Funktion mit metaphorischem Charakter und von beschränkter Reichweite. Von den mathematischen Symbolen erhoffte sich Weyl mehr – wenn sie denn in geeigneter Weise gewählt und ausgebildet waren. Das lässt sich vielleicht am besten an einem einfachen Beispiel erläutern: Weyls Diskussion der Rolle hermitescher Formen (beziehungsweise Operatoren) bei der Beschreibung *reiner Fälle* in der QM, obgleich dieses Beispiel keineswegs in besonderer Weise Weyls eigene Forschungsbeiträge zur QM zum Ausdruck bringt.[24]

Durch Gespräche und Korrespondenz mit Born, Jordan und Schrödinger während der Jahre 1925/26 verfolgte Weyl die Entstehung der neuen Quantenmechanik direkt und aktiv mit. Seine erste Publikation zu diesem Thema erschien anderthalb Jahre später [Weyl, 1927b], kurz darauf sein weithin bewundertes, aber schwieriges Buch [Weyl, 1928]. Er konzentrierte sich dabei speziell auf konzeptionelle Fragen, die mit der Quantenwahrscheinlichkeit und dem Einsatz der Gruppentheorie in der QM verbunden waren. Zu seinen wichtigsten Forschungsbeiträgen zu den Grundlagen der QM zählen insbesondere:

(i) die integrale Fassung (Weyl-Form) der Heisenbergschen Kommutationsrelation, das darauf aufbauende Studium projektiver Darstellungen der «kinematischen Gruppe» $\mathbb{R}^{2n}$ eines Quantensystems mit n raumartigen Freiheitsgraden und die Eindeutigkeit der Schrödinger Darstellung (später präzisiert im Stone – von Neumann Theorem) und die Ansätze zur späteren Weyl-Quantisierung [Weyl, 1927b],[25]

[24] Allerdings erfolgte Weyls Charakterisierung der «reinen Fälle» und deren Unterscheidung von «Mischungen» zeitgleich mit der von J. von Neumann – möglicherweise mit mündlichem Austausch zwischen beiden Autoren – und enthielt selbst hier einen kleinen Originalbeitrag Weyls zur begrifflichen Grundlagenklärung in der QM.

[25] Siehe dazu Hinweise in J. Lackis Beitrag, dieser Band, und [Scholz, 2006].

(ii) Theorie der homöopolaren Bindung durch Spinkopplung von Valenzelektronen [Weyl, 1928, 1949],[26]

(iii) Übergang zur $U(1)$-Eichtheorie der Elektrodynamik in der Theorie des Diracfeldes [Weyl, 1929].[27]

Diese Arbeiten sind technisch aufwendig; ihre Darstellung würde jeweils einen eigenen Beitrag erforderlich machen. Wir beschränken uns daher hier auf die einfachst möglichen Grundlagenfragen bezüglich der Rolle hermitescher Formen/Operatoren.

Unser Autor betrachtete in [Weyl, 1927b] überall definierte hermitesche Formen im «unitären Raum» (Weyls Formulierung in [Weyl, 1928] für *Hilbertraum*).[28] *Reine Fälle* quantenmechanischer Zustände werden durch Einheitsvektoren, oder etwas allgemeiner durch einen Strahl im unitären Raum angegeben [Weyl, 1927b, 99]. Diese symbolisieren, physikalisch gesehen, Zustände von höchstmöglicher Homogenität hinsichtlich eines bestimmten Experimentalarrangements und damit, konzeptionell gesehen, bezüglich einer dadurch ausgezeichneten Observablen. Weyl erläuterte dies am Beispiel des «magnetischen Elektrons» (Spinphänomen). Sortiert man durch eine (stilisierte) experimentelle Konstellation analog dem Stern-Gerlach Experiment diejenigen Elektronen mit positivem Spin in eine auszeichnete x-Richtung aus ($\sigma_x = +1$), so gilt:

> «In einem solchen Elektronenschwarm haben wir (wenn wir noch von Ort und Geschwindigkeit der Elektronen abstrahieren) einen *reinen Fall* vor uns: er ist von einer inneren Homogenität, die prinzipiell nicht gesteigert werden kann. Denn alle physikalischen Fragen, welche sich sinnvoll mit Bezug auf ihn stellen lassen, finden eine von *vornherein angebbare numerisch bestimmte* Antwort.»[29]

[26] Parshall, 1997; Scholz, 2006.

[27] Vgl. [Straumann, 2001; Scholz, 2005a]

[28] Die Terminologie «Hilbertscher Raum von unendlich vielen Dimensionen» wurde von F. Riesz für den Folgenraum l_2 verwendet, etwa in [Riesz, 1918]. Die axiomatische Definition des Hilbertraums erfolgte durch J. von Neumann [von Neumann, 1930], dort auch Präferenz für die Betrachtung linearer (hermitescher) Operatoren und die Behandlung der analytisch kniffligen Fragen bei nicht beschränkten, nicht überall definierten symmetrischen bzw. selbstadjungierten Operatoren und des stetigen Anteils des Spektrums [Monna, 1973].

[29] Weyl, 1927b, 96

Die «numerische Bestimmtheit» bezog sich natürlich lediglich auf Wahrscheinlichkeitsaussagen.

Bei der Betrachtung eines realen Elektronenschwarms habe man es im Gegensatz zum «reinen Fall» häufig mit einer «Mischung», einem «Mischstrom» oder einem «Gemenge» zu tun (synonym verwendet). Diese seien mathematisch durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß über reinen Fällen beschreibbar; Weyl beschränkte sich allerdings auf endliche Gemenge und daher auf rein kombinatorisch angebbare Wahrscheinlichkeiten.[30] Auf die Art der Zusammensetzung eines Mischstroms könne man umgekehrt nur durch Auswertung experimentell beobachtbarer Häufigkeiten schließen.

Darin sah Weyl nichts für die QM Besonderes; denn auch beim Studium der Populationsdynamik von Spezies habe man etwa die «reinen Linien» der Mendelschen Vererbungslehre herauszupräparieren:

> «Hier wie dort ist es eine wichtige Aufgabe der Experimentierkunst, reine Linien zu isolieren. Die Unterscheidung: Theorie der reinen Fälle einerseits, Statistik der Gemenge andererseits, scheint mir fundamental für die richtige Erfassung des Sinnes der Quantenmechanik.»[31]

Hatte die experimentelle Physik aus den auftretenden Mischungen «reine Fälle» extrahiert, so konnte man für die mathematische Beschreibung zwanglos von einer frequentistischen Beschreibung zu einer wahrscheinlichkeitstheoretischen übergehen:

> «An dem Tatbestand, die Elektronenschwärme betreffend, wie er hier beschrieben wurde, ist nichts Paradoxes. Statt vom Schwarm spreche ich in Zukunft vom einzelnen Elektron und demgemäß von Wahrscheinlichkeit statt von Häufigkeit.»[32]

In Weyls Sicht lieferte also die Bornsche Interpretation der Schrödingerschen Wellenfunktion Wahrscheinlichkeitsaussagen über das *einzelne Quantenobjekt* (eines reinen Falls). Bei gut präparierten Gesamtheiten («Schwarm») kommen diese in entsprechenden Häufigkeitsverteilungen

[30] Von Neumann führte für den allgemeineren Fall einer Mischung über das stetige Spektrum der primären, den «reinen Fall» charakterisierenden Observablen die Charakterisierung eines Wahrscheinlichkeitsmaßes durch später so genannte Spurklassen Operatoren (trace class) ein.

[31] Weyl, 1928, 97

[32] Weyl, 1928, 97

der Messwerte von observablen Größen zum Ausdruck. Damit war nach Weyl auch klar, worin man die «physikalische Bedeutung» der hermiteschen Operatoren (beziehungsweise Formen) in der QM zu sehen hatte:

> «Der Kalkül der Hermiteschen Formen entspricht in rechnerischer Hinsicht allen Anforderungen, welche sich aus dem eben entwickelten Programm ergeben. Jede physikalische Größe wird repräsentiert durch eine Hermitesche Form, alle physikalischen Größen an demselben System durch Hermitesche Formen der gleichen Variablen x_i [stehen für Koeffizienten der auf Einheit normierten Basis von Strahlen im unitären Raum, E. S.].»[33]

Bei nichtkommutierenden «Koeffizientenmatrizen» hermitescher Formen führt dies notwendig zu Wahrscheinlichkeitsaussagen für weitere Größen, falls ein reiner Fall zur ersten Größe (bezüglich der das betrachtete System experimentell gesprochen präpariert, mathematisch gesehen definiert wird) vorliegt. Das sei «in Einklang mit Heisenbergs Anschauungen, wie er sie kürzlich in dieser Zeitschrift»[34] entwickelt habe (ebda 100).

Weyl lag mit dieser Darstellung nicht weit entfernt von Hilberts axiomatischer Auffassung der QM, wie sie insbesondere durch von Neumann weiterentwickelt wurde [Hilbert e. a., 1927; von Neumann, 1927a, b]. Doch lag sein Augenmerk nicht primär auf der Ausarbeitung der formalen Struktur, sondern auf einer sublimen Verschränkung von experimenteller Evidenz mit mathematisch angepassten Strukturen bei der Einführung der Grundbegriffe der neuen Theorie. Insbesondere gab es für ihn keine prinzipielle Trennung zwischen Beobachtungssätzen (Häufigkeitsaussagen der mathematischen Statistik) und Strukturaussagen (Eigenwerte hermitescher Formen, Projektion im Fall nichtkommutierender «Koeffizientenmatrizen» etc.).[35]

---

[33] Weyl, 1927b, 98

[34] Heisenberg, 1927

[35] Eine Diskussion um einen vermeintlichen «Kollaps der Wellenfunktion» würde aus seiner Sicht keinen Sinn machen und müsste wohl eher als pseudo-ontologischer Hokuspokus erscheinen. Weyl zog es anscheinend vor, sich zu dieser Frage erst gar nicht zu äußern. Jedenfalls ist mir keine entsprechende Stelle in seinen Schriften oder dem mir bekannten Teil seiner Manuskripte oder Korrespondenzen aufgefallen.

Aus Weyls Sicht war die Theorie der unitären Räume (Hilberträume) und der hermiteschen Formen (hermiteschen und selbstadjungierten Operatoren) durch darstellungstheoretische Strukturen der Symmetrien von Quantensystemen anzureichern ($SO_3(\mathbb{R})$, Permutationen, Strahldarstellung der kinematischen Gruppe $\mathbb{R}^{2n}$, Lorentzgruppe $\sim SL_2(\mathbb{C})$, $U(1)$ – die letzteren global und «lokalisiert» in der Funktion als Eichgruppen, etc.). Erst zusammen führte dies zu einer zumindest in einigen Aspekten adäquaten Darstellung der Quanten-Wirklichkeit «im Symbol».

Das Symbolsystem hatte dabei nicht lediglich eine formal axiomatische Bedeutung zur systematischen Ableitung von empirisch überprüfbaren Aussagen. Aus Weyls Sicht hatte es, wenn es gut gebaut war, bei ausreichend vorsichtiger Interpretation die Bedeutung einer Repräsentation «des Wirklichen», das man nicht direkt sieht, dessen Wirksamkeit aber in den gesetzhaften Regelmäßigkeiten der empirischen Statistik von Quantensystemen zum Ausdruck kommt. Die so verstandene (Quanten-) Realität braucht weder der unmittelbaren empirischen Anschauung noch der intellektuellen (nicht einmal der naturphilosophischen) Spekulation zugänglich sein.[36] Besonders zugespitzt trat dies in der nichteliminierbaren Stochastizität der Quantenwirklichkeit hervor (symbolisch repräsentiert durch nichtkommutierende Operatoren), die dennoch in vollem Einklang mit einer gesetzmäßigen Dynamik (unitäre Entwicklung des Zustands im Schrödinger-Bild) standen.

In seinem Anhang (C) zur englischen Ausgabe von PMN [Weyl, 1949] gab Weyl eine Zusammenfassung derjenigen Züge der Quantenphysik, die ihm von herausragender philosophischer Bedeutung erschienen. Darunter waren (starke Auswahl und Umordnung seitens E. S.):

- There exits a primary probability, as a basic trait of nature itself, that has nothing to do with the observer's knowledge or ignorance … [Weyl, 1949, 263]
- The principle of causality holds for the temporal change of the wave state, but must be dropped as far as the relation between wave and quantum states is concerned [«quantum state» hier verwendet im Sinne von Eigenzuständen von Observablen, E. S.] … (ibid.)

[36] An anderer Stelle habe ich das als «symbolischen Realismus» bezeichnet [Scholz, 2005c].

- … observation is impossible without an encroachment the effect of which can be predicted only in a statistical sense. Thus new light is thrown on the relationship of subject and object; they are more closely tied together than classical physics had realized … (ibid.)

Für das Verhältnis von Mathematik zur Physik hatte dies die Zuspitzung einer Beziehung zur Folge, die Weyl schon vorher mit Blick auf die ART wie folgt charakterisierte:

> "… [W]e develop the theory as a symbolic construction with unexplained symbols and only in the end indicate in which way certain derived quantities may be checked by observation."[37]

Das war im Jahr 1949 formuliert und klang nun schon sehr nahe an Hilberts Auffassung der axiomatischen Methode in der Physik. Tatsächlich zog Weyl im selben Jahr die Parallele explizit, diesmal wieder in Anhang (C) von PMN:

> "The 'physical process' undisturbed by observation is represented by a mathematical formalism without intuitive (anschauliche) interpretation; only the concrete experiment, the measurement by means of a grating [here in the generalized sense of a complete system of projectors, E. S.] can be described in intuitive terms. This contrast of physical process and measurement has its analogue in the contrast of formalism and meaningful thinking in Hilbert's system of mathematics."[38]

Weyls Auffassung der strukturellen Unterstützung der mathematischen Naturwissenschaften durch die Mathematik bei der ‹symbolischen Konstruktion der Wirklichkeit› verschob sich also in den zwei Jahrzehnten von Ende der 1920er Jahre bis zu den späten 1940ern noch einmal. Stand am Anfang dieses Zeitraums das ‹symbolisch realistische› Motiv einer Darstellung des ‹transzendenten› Wirklichen im Symbol noch im Zentrum seiner – damals auch aktiven – Bemühungen, die sich nur teilweise mit denen der mathematischen Physik im Sinne Hilberts deckte, zog er zwanzig Jahre später eine direkte Parallele zu dessen Auffassungen der axiomatischen Methode, sogar hinsichtlich der Grundlagen der Mathematik.

[37] *Man and the foundations of science*, 1949, zitiert nach [Weyl, 2009, 183]
[38] Weyl, 1949, 261

5 Eine Nachbemerkung

Um keinen falschen Eindruck entstehen zu lassen, möchte ich abschließend darauf hinweisen, dass Weyls letzte Annäherung an Hilberts Auffassung der axiomatischen Methode keineswegs den Übergang zur Sichtweise einer gesicherten Wissensfundierung bedeutete. Ganz im Gegenteil! Es handelte es sich hier um einen eher skeptischen Kommentar zu Entwicklungen der letzten beiden Jahrzehnte.

Was die Quantenphysik angeht, sind die Gründe nicht eindeutig festzustellen. Wahrscheinlich waren sie zumindest teilweise den technischen Schwierigkeiten der Quantenfeldtheorie (QFT) geschuldet; vermutlich entsprach diese Haltung aber auch seinem eigenen Rückzug aus dem Feld als aktiver Forscher.[39]

Weyl nahm jedenfalls die Entwicklung der QFT lediglich als Beobachter zur Kenntnis [Weyl, 1949, 264]; eigene Arbeiten dazu sind weder publiziert, noch finden sich im Nachlass Versuche in diese Richtung.

Hinsichtlich der Weylschen Einschätzung in Sachen Grundlagen der Mathematik ist die Quellenlage besser und völlig eindeutig. Im ersten 1949 neu verfassten Anhang (A) für die englische Ausgabe der *Philosophy of Mathematics and Natural Sciences* wertete Weyl die Ergebnisse der Gödelschen und Gentzenschen Forschungen für das Hilbertprogramm der Sicherung der Grundlagen der Mathematik aus. Das Resultat war für ihn sehr ernüchternd. Die beiden Gödelschen Unvollständigkeitssätze stellten aus Weyls Sicht für Hilberts ursprüngliches (finites) Programm eine «Katastrophe (catastrophe)» dar [Weyl, 1949, 60f.]. Gentzens Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Arithmetik erschien ihm zwar «genial (ingenious)», war aber aufgrund seines notwendigerweise «substantially lower standard of evidence» am Ende doch nicht mehr als ein «Pyrrhus-Sieg» [Weyl, 1949, 220]. Hier kam wieder Weyls konstruktivistische Sicht zum Tragen: eine beweistheoretische Argumentation, die die transfinite Induktion bis in die Cantorsche zweite Zahlenklasse hinein verwendete, konnte zwar aus seiner Sicht als genial anerkannt werden; einen Anspruch auf Evidenz konnte sie nicht erheben.

[39] Wenn diese Einschätzung zutrifft, dürften sich die beiden Motivlagen abgestützt, vielleicht sogar wechselseitig verstärkt haben. Zur frühen Entwicklung der QFT siehe den Beitrag von C. Lehner, dieser Band.

Diese Kurzfassung der Weylschen Sicht von 1949 mag negativer klingen, als sie gemeint war. Weyl war nie ein Vertreter ewiger (oder gar auf ewig abgesicherter) Wahrheiten, weder in den Zeiten seiner größten Distanz zu Hilbert (1918 – 1920) noch in denen größerer Annäherung (1905 – 1912, 1925 ff.). So konnte er den Schlägen für das Hilbert-Programm auch etwas Positives abgewinnen. Zu Beginn des 1949er Anhangs zu den PMN über die Grundlagen der Mathematik machte er klar, worin er die übergreifende Bedeutung der Gödelschen Unvollständigkeitssätze sah:

> "The ultimate foundations and the ultimate meaning of mathematics remain an open problem; we do not know in what direction it will find its solution, nor even whether a final objective answer can be expected at all. ‹Mathematizing› may well be a creative activity of man, like music, the products of which not only in form but also in substance are conditioned by the decisions of history and therefore defy complete objective rationalization ..."[40]

Ähnlich wie Weyl schon Mitte der 1920er Jahre gefordert hatte, als er sich Hilbert wieder anzunähern begann, nun aber aus noch viel grundsätzlicheren Gründen, war die Widerspruchsfreiheitsicherung nach Gödels Resultaten von 1931 endgültig zu einem Teil des größeren, transdisziplinären Unternehmens der mathematischen Wissenschaften insgesamt geworden. Darin spielte die Konsistenzsicherung der Mathematik keine unwichtige, aber eine insgesamt eher untergeordnete Rolle. Mit dem Verlust der Hoffnung auf eine fundamentale Sicherung der Widerspruchsfreiheit der interessanteren Teile der Mathematik blieb denn zuletzt folgendes:

> "A truly realistic mathematics should be conceived, in line with physics, as a branch of the theoretical construction of the one real world, and should adopt the same sober and cautious attitude toward hypothetic extensions of its foundations as is exhibited by physics."[41]

Das wurde 1949 geschrieben. Die theoretische und mathematische Physik wurde damals nach vergleichsweise strikten Maßstäben betrieben.

[40] Weyl, 1949, 219
[41] Weyl, 1949, 235

Die Rolle W. Paulis als Kritiker der zeitgenössischen Bemühungen mag als ein Indikator dafür betrachtet werden.

Mehr als fünfzig Jahre später und unter dem Einfluss diverser string und superstring «revolutions» kann man den Zustand der theoretischen Grundlagenphysik kaum noch durch die Beschreibung «sober and cautious attitude toward hypothetic extensions of its foundations» kennzeichnen. Die heutige theoretische Physik (2010) gibt der Mathematik keinen Anlass, sie hinsichtlich der Nüchternheit ihrer Grundlagenerweiterung als Vorbild zu betrachten.[42] Hinsichtlich ihrer Ideenlieferungsfunktion mag das anders bewertet werden; dies ist aber hier nicht das Thema.[43]

6 Literaturverzeichnis

Atiyah, Michael [2002]: Mathematics in the 20th century. Bulletin London Mathematical Societey 34: 1 – 15.

Baeumler, Alfred; Schroeter, Manfred [1927]: Handbuch der Philosophie. Bd. II. Natur, Geist, Gott. München: Oldenbourg.

Cartan, Élie [1923]: Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl. Journal des Mathématiques pures et appliquées 2: 167 – 192. In: [Cartan, 1952 ff., III, 633 – 658].

Cartan, Élie [1952 ff]: Oeuvres Complètes. Paris: Gauthier-Villars.

Coleman, Robert; Korté, Herbert [2001]: Hermann Weyl: Mathematician, physicist, philosopher. In: [Scholz, 2001] pp. 161 – 388.

Corry, Leo [2004]: David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898 – 1918). From Grundlagen der Geometrie to Grundlagen der Physik. Dordrecht: Kluwer.

Ehlers, Jürgen; Pirani, Felix; Schild Alfred [1972]: The geometry of free fall and light propagation. In: General Relativity. Papers in Honour of J.L. Synge, ed. Lochlainn O'Raifeartaigh. Oxford: Clarendon Press pp. 63 – 84.

[42] Siehe dazu aus historischer Sicht das letzte Kapitel in [Kragh, 1999], aus kritischer Perspektive theoretischer beziehungweise mathematischer Physiker [Smolin, 2006; Woit, 2006].

[43] Vgl. [Atiyah, 2002, 12 ff.], oder auch die ersten beiden Pfeiler der monumental angelegten *Brücke* [Zeidler, 2006 ff.].

Hawkins, Thomas [2000]: Emergence of the Theory of Lie Groups. An Essay in the History of Mathematics 1869 – 1926. Berlin etc.: Springer.

Heisenberg, Werner [1927]: Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. Zeitschrift für Physik 49: 172 – 198.

Hilbert, David [1992]: Natur und mathematisches Erkennen. Vorlesungen, gehalten 1919 – 1920 in Göttingen. Nach Ausarbeitungen von P. Bernays. Hrsg. von D. Rowe. Basel etc.: Birkhäuser.

Hilbert, David; Nordheim, Lothar; von Neumann Johann [1927]: Über die Grundlagen der Quantenmechanik. Mathematische Annalen 98: 1 – 30. In: [von Neumann, 1961/1976, I, 104 – 133].

Jahnke, Hans Niels [1990]: Hilbert, Weyl und die Philosophie der Mathematik. Mathematische Semesterberichte 37: 157 – 179.

Kragh, Helge [1999]: Quantum Generations: A History of Physics in the Twentieth Century. Princeton: University Press.

Monna, Antonie F. [1973]: Functional Analysis in Historical Perspective. Utrecht: Oosthoek.

O'Raifeartaigh, Lochlainn [1997]: The Dawning of Gauge Theory. Princeton: University Press.

Parshall, Karen [1997]: Chemistry through invariant theory? James Joseph Sylvester's mathematization of the atomic theory. In: Experiencing Nature: Proceedings of a Conference in Honor of Allen G. Debus, ed. K. Parshall; P. Theerman. Dordrecht: Kluwer pp. 81 – 111.

Pauli, Wolfgang [1979]: Wissenschaftlicher Briefwechsel .... Scientific Correspondence with Bohr, Einstein, Heisenberg a. o., Volume I: 1919 – 1929 edited by A. Hermann; K. von Meyenn; V. F. Weisskopf. Berlin etc.: Springer.

Riesz, Friedrich [1918]: Über lineare Funktionalgleichungen. Acta Mathematica 41: 71 – 98.

Ryckman, Thomas [2005]: Reign of Relativity. Philosophy in Physics 1915 – 1925. Oxford: University Press.

Scholz, Erhard (ed.) [2001]: Hermann Weyl's *Raum – Zeit – Materie* and a General Introduction to His Scientific Work. Basel etc.: Birkhäuser.

Scholz, Erhard [2004]: The changing concept of matter in H. Weyl's thought, 1918 – 1930. In: The interaction between Mathematics, Physics and Philosophy from 1850 to 1940, ed. J. Lützen. Dordrecht etc.: Kluwer. [http://arxiv.org/math.HO/0409576].

Scholz, Erhard [2004b]: Hermann Weyl's analysis of the "problem of space" and the origin of gauge structures. Science in Context 17: 165 – 197.

Scholz, Erhard [2005a]: Local spinor structures in V. Fock's and H. Weyl's work on the Dirac equation (1929). In: Géométrie au XXième siècle, 1930 – 2000. Histoire et horizons, ed. D. Flament; J. Kouneiher; P. Nabonnand; J.-J. Szczeciniarz. Paris: Hermann pp. 284 – 301. [http://arxiv.org/physics/0409158].

Scholz, Erhard [2005b]: Philosophy as a Cultural Resource and Medium of Reflection for Hermann Weyl. Révue de Synthèse 126: 331 – 351. [http://arxiv.org/math.HO/0409596].

Scholz, Erhard [2005c]: Practice-related symbolic realism in H. Weyl's mature view of mathematical knowledge. In: The Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy, ed. J. Gray; J. Ferreiros. Oxford: University Press pp. 291 – 309.

Scholz, Erhard [2006]: Introducing groups into quantum theory (1926 – 1930). Historia Mathematica 33: 440 – 490. [http://arxiv.org/math.HO/0409571].

Scholz, Erhard [2010]: H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática. To appear.

Sieroka, Norman [2010]: Umgebungen. Symbolischer Konstruktivismus im Anschluss an Hermann Weyl und Fritz Medicus. Zürich: Chronos.

Smolin, Lee [2006]: The Trouble With Physics: The Rise of String Theory, the Fall of a Science, and What Comes Next. Boston (Mass.): Houghton Mifflin. Reprint London: Penguin 2008.

Straumann, Norbert [2001]: Ursprünge der Eichtheorien. In: [Scholz, 2001]. pp. 138 – 160.

Vizgin, Vladimir [1994]: Unified Field Theories in the First Third of the 20th Century. Translated from the Russian by J. B. Barbour. Basel etc.: Birkhäuser.

von Neumann, Johann (János, John) [1927a]: Mathematische Begründung der Quantenmechanik. Nachrichten Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen. Math.-phys. Klasse pp. 1 – 57. In: [von Neumann, 1961/1976, I, 151 – 207].

von Neumann, Johann (János, John) [1927b]: Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik. Nachrichten Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen. Math.-phys. Klasse pp. 273 – 291. In: [von Neumann, 1961/1976, I, 208 – 235].

von Neumann, Johann (János, John) [1930]: Eigenwerttheorie hermitescher Funktionaloperatoren. Acta Mathematica 102: 49 – 131.

von Neumann, John (János, Johann) [1961/1976]: Collected Works, 6 volumes, ed. A. H. Taub. Oxford etc.: Pergamon.

Weyl, Hermann [1918a]: Gravitation und Elektrizität. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin pp. 465 – 480. In: [Weyl, 1968, II, 29 – 42]. English in [O'Raifeartaigh, 1997, 24 – 37].

Weyl, Hermann [1918b]: Reine Infinitesimalgeometrie. Mathematische Zeitschrift 2: 384 – 411. In: [Weyl, 1968, II, 1 – 28].

Weyl, Hermann [1919]: Raum – Zeit – Materie. Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie. Dritte, umgearbeitete Auflage. Berlin etc.: Springer.

Weyl, Hermann [1921a]: Das Raumproblem. Jahresbericht DMV 30: 92.

Weyl, Hermann [1921b]: Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung. Nachrichten Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen. Math.-phys. Klasse pp. 99 – 112. In: [Weyl, 1968, II, 195 – 207].

Weyl, Hermann [1922]: Das Raumproblem. (Kurzfassung Jahresbericht DMV 30 (1921), 92.) Jahresbericht DMV 31: 205 – 221. In: [Weyl, 1968, II, 212 – 228].

Weyl, Hermann [1923a]: Mathematische Analyse des Raumproblems. Vorlesungen gehalten in Barcelona und Madrid. Berlin etc.: Springer. Nachdruck Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft 1963.

Weyl, Hermann [1923b]: Raum – Zeit – Materie. 5. Auflage. Berlin: Springer.

Weyl, Hermann [1924]: Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechung. Nachrichten Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen. Math.-phys. Klasse pp. 218 – 224. In: [Weyl, 1968, II, 460 – 467].

Weyl, Hermann [1925]: Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik. Symposion 1: 1 – 32. In: [Weyl, 1968, II, 511 – 542].

Weyl, Hermann [1927a]: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. München: Oldenbourg. In: [Baeumler/Schroeter, 1927, Bd. II A]; separat. Weitere Auflagen ^{2}1949, ^{3}1966. English with comments and appendices [Weyl, 1949].

Weyl, Hermann [1927b]: Quantenmechanik und Gruppentheorie. Zeitschrift für Physik 46: 1 – 46. In: [Weyl, 1968, III, 90 – 135].

Weyl, Hermann [1928]: Gruppentheorie und Quantenmechanik. Leipzig: Hirzel. ^{2}1931. English translation R. P. Robertson, New York: Dutten 1931.

Weyl, Hermann [1929]: Elektron und Gravitation. Zeitschrift für Physik 56: 330 – 352. In: [Weyl, 1968, III, 245 – 267]. English in [O'Raifeartaigh, 1997, 121 – 144].

Weyl, Hermann [1931]: Geometrie und Physik. Die Naturwissenschaften 19: 49 – 58. In: [Weyl, 1968, III, 336 – 345].

Weyl, Hermann [1934]: Mind and Nature. Philadelphia: University of Pennsylvania Press. In: [Weyl, 2009, 83 – 150].

Weyl, Hermann [1949]: Philosophy of Mathematics and Natural Science. Princeton: University Press. ^{2}1950, ^{3}2009.

Weyl, Hermann [1968]: Gesammelte Abhandlungen. 4 vols. Ed. K. Chandrasekharan. Berlin etc.: Springer.

Weyl, Hermann [2009]: Mind and Nature. Selected Writings on Philosophy, Mathematics, and Physics. Edited and with an Introduction by Peter Pesic. Princeton: University Press.

Woit, Peter [2006]: Not Even Wrong: The Failure of String Theory and the Continuing Challenge to Unify the Laws of Physics. New York: Basic Books.

Yang, Chen Ning [1986]: Hermann Weyl's contributions to physics. In: Hermann Weyl 1885 – 1955. Centenary Lectures, ed. A. Borel; K. Chandrasekharan; R. Penrose; C. N. Yang. Berlin etc.: Springer pp. 7 – 22.

Zeidler, Eberhard [2006 ff.]: Quantum Field Theory. A Bridge between Mathematicians and Physicists. Vol. I, II (6 planned). Berlin etc.: Springer.

Henri Poincaré, theoretical Physics, and Relativity Theory in Paris

Scott Walter

1 Introduction

In studies of the emergence of relativity theory, historians have sought to characterize the reception of relativist ideas with respect to national communities of physicists and mathematicians, in an effort to reveal underlying features of these communities, such as their openness to new ideas, and their capacity for change. Stimulating this activity are the basic publication counts, that tell us that the reception of relativity theory in academic journals varied markedly from one country to another. Periodicals based in Germany accounted for roughly half of all relativist publications before 1916, while Germany-based authors published two of every five articles on relativity during the same period, and made up two-fifths of the total number of scientists (one hundred) contributing to relativity theory. France, the fifth most active country from a quantitative point of view, accounted for seven percent of relativist articles, and counted eight relativist scientists, or about a twelfth of the total.[1]

Examination of the content of these publications and their context of production allows for a finer-grained understanding of the differences revealed by quantitative analyses, and gives rise to theories of reception. For example, scholars of the reception of relativity theory in Germany and England have proposed explanatory models in which the details of post-secondary training in physics are seen as decisive.[2] Historians of French physics consider the muted reception of relativity in France as a consequence of a pervasive positivist outlook among French scientists, which would have favored the development of mathematics, while leaving little intellectual space for the distinct melange of experimental acumen, physical and mathematical reasoning that characterized the work of a Boltzmann, a Lorentz, or an Einstein.[3]

Attention to the conceptual foundations of early relativist publications reveals a marked difference in approach on the part of two contributors in particular: Henri Poincaré and Albert Einstein. Understanding this difference in approach has occupied historians and philosophers of

[1] Of 662 publications on relativity theory in periodicals between 1905 and 1916, 323 were published in Germany; see Walter [1996, Tables 4.3 – 4].

[2] Pyenson [1987], Warwick [2003].

[3] See Paty [1987, 115], Biezunski [1987, 184], and Pestre [1992, 117]. On French isolationism in electrodynamics (and its exceptions), see Darrigol [2000, 352].

science for over half a century, without reaching a consensus on its significance for the history of physics.[4] Poincaré's philosophical writings, published for the most part prior to the discovery of relativity, weigh heavily in these analyses, and according to one commentator, constituted an obstacle to the reception of Einstein's theory of relativity in France until the 1920s.[5] By the same token, Poincaré's philosophical writings ought to have benefited his theory of relativity, but the above-mentioned publication counts indicate that they did not do so, either in France or elsewhere in the world.

The outlines of an alternative account of French contributions to relativity during the years from 1905 to 1912 are drawn in this paper. Poincaré's intellectual and institutional leadership in French physics at the turn of the twentieth century is reviewed, and related to the emergence of Paul Langevin as his successor. Drawing on quantitative data and previously-unexploited manuscripts from Parisian archives, the paper compares the fate in France of Poincaré's theory of relativity to that of the Einstein-Minkowski theory of relativity championed by Langevin, and links these events to Langevin's rise to leadership of French theoretical physics.

2 Poincaré and theoretical physics in Paris

Compared to the situation of French physics in the first decades of the nineteenth century, in 1898 the future did not appear promising to Henri Poincaré. His pessimism stemmed from a perceived mismatch between the cognitive habits of the French scientist and the turbulent state of theoretical physics brought about by the discoveries of the past decade, including the null-result of the Michelson-Morley ether-drift experiment, the discovery of x-rays, the electron, the Zeeman effect, and radioactivity. A certain boldness was called for to explain such results, and Poincaré feared that the French were not up to the task at hand, as he expressed it in an official report to the Paris faculty of science:

[4] A balanced overview of the "mystery of the Einstein-Poincaré connection" is provided by Darrigol [2004].

[5] See Borella [2002].

> "The French mind, avid of clarity and logic, is repugnant of excessively temerarious adventures."

A new type of physicist was called for, according to Poincaré, in order to "discern the simplicity of laws beneath the complexity of phenomena".[6] The type of physicist Poincaré had in mind, although probably not the archetype, was Jean Perrin, whose candidacy he evaluated for a lectureship in physical chemistry on the Paris faculty of science. To some extent, Poincaré may have described here his own approach to the laws of physics, although his prowess in mathematics clearly set him apart from even the most mathematically-sophisticated of his colleagues in physics.

Paris did not yet dispose of a chair in theoretical physics *per se*, and would not create one until 1928, when the Rockefeller Foundation volunteered to finance a new institute.[7] The first French chair nominally devoted to theoretical physics dates from 1894, when the faculty of science in Bordeaux hired Pierre Duhem. This is not to say that theoretical physics was neglected in Paris. At the Paris faculty of science, the chair of probability calculus and mathematical physics, dating from 1834, was devoted to the subject. Poincaré held this chair for a decade, from 1886 to 1896, and single-handedly brought French theoretical physics to international attention. The work in theoretical optics and fluid mechanics by his successor Joseph Boussinesq, however, found little echo outside of France.[8]

For the sake of comparison, across the border, a modest institute for theoretical physics was created at the University of Berlin in 1889, at the behest of Hermann von Helmholtz, and by the turn of the century, such institutes had been created in Königsberg, Leipzig, Göttingen and Munich.[9] At the turn of the twentieth century, only two of these institutes were led by full professors: Max Planck in Berlin, and Woldemar Voigt in Göttingen.[10] There were other outstanding theorists in Germany,

[6] Paris faculty of science, pièces annexes aux procès-verbaux, 1883 – 1903, 78 – 79, French National Archives. A transcription is available from the Poincaré correspondence website.

[7] Siegmund-Schultze [2001].

[8] Darrigol [2005, 239].

[9] Jungnickel & McCormmach [1986, vol. 2, 254].

[10] Schlote [2004, 86].

notably Paul Drude, Willy Wien, and Arnold Sommerfeld, but some of these theorists felt Germany had lost its preeminence in the field since the time of Gustav Kirchhoff.[11] Since the death of Heinrich Hertz in 1894, and Ludwig Boltzmann's departure from Munich the same year, the brilliance of H. A. Lorentz in Leiden and Boltzmann in Vienna had cast shadows over their counterparts in Germany and France alike.

At least one theorist in Paris was prepared to meet the challenge posed by the recent results of experimental physics: Henri Poincaré. The fact that after 1896, Poincaré no longer occupied a chair of mathematical physics did not prevent him from lecturing and theorizing in this domain, just as earlier, he cultivated subjects of pure mathematics (function theory, algebraic topology), and celestial mechanics while nominally a professor of probability calculus and mathematical physics. Beginning in the late 1880s, Poincaré helped introduce Maxwell's electromagnetic theory to French readers, and in the late 1890s, he exhibited a keen interest in Lorentz's theory of electrons.[12] Interest in Lorentz's theory grew rapidly when Lorentz used it to explain the splitting of Sodium D lines in an external magnetic field, an unexpected phenomenon discovered in 1896 by Lorentz's former student, Pieter Zeeman. Poincaré communicated to the Paris Academy of Sciences a paper by Zeeman [1897] describing his discovery, and soon engaged with the explanation of the effect offered by Lorentz. Others in France soon took up studies of the Zeeman effect, including Alfred Cornu, Poincaré's former physics professor at the *École polytechnique,* and Alfred Liénard, a former student of Poincaré's, who taught mathematics and physics at the School of Mines in Saint-Étienne.

Poincaré's engagement with electrodynamics was enduring, and remarkably innovative, featuring applications of sophisticated mathematical methods (complex analysis, group theory), and the reformulation of key concepts of Maxwell's electromagnetic theory and Lorentz's electron theory, along with applications of these methods and theories. For example, in the 1890s, Poincaré was among the first to use retarded potentials in Maxwell's theory, and proposed the first electromagnetic theory of diffraction, which was soon extended by Arnold Sommerfeld. His demonstration of the recurrence theorem was recognized to have fundamental repercussions on physics, particularly for kinetic theory.

[11] Jungnickel & McCormmach [1986, vol. 2, 159].
[12] See Darrigol [2000].

He also provided a theory of multiple resonance for Hertzian oscillations, and the first exact solution of Maxwell's equations for charged particles in a strong magnetic field.[13]

By the turn of the century, Poincaré's contributions to physics had won the admiration and respect of his peers across Europe and in the USA. Poincaré was one of only two Frenchmen invited to contribute to a volume in honor of George G. Stokes in 1899, alongside Cornu.[14] The next year, Poincaré was one of the three Frenchmen on the scientific committee of the international physics congress organized in Paris by the French Society of Physics, and presided by Cornu. One of ten vice-presidents of the physics congress, Poincaré presided the international congress of mathematicians, which conveniently took place in Paris the same week in August.[15] The following year, Poincaré was elected vice-president of the French Society of Physics, and in 1902, served as its president. A few years later, the Society made Poincaré one of its ten honorary members.[16]

This recognition from Poincaré's peers in physics did not mean that his authority in physics went uncontested, either at home or abroad. There were those, like the Scottish natural philosopher Peter Guthrie Tait, who found his lectures on mathematical physics to be excessively analytical, and unreliable on foundational issues.[17] Near the end of the decade, when Lorentz explained the Zeeman effect on the basis of his theory of electrons, Poincaré proposed an alternative formula, which was mathematically sound, but for Lorentz, uncompelling from a physical standpoint.[18]

In France, Poincaré's views on questions of mathematics or physics were very rarely challenged in public. The case of Marcel Brillouin is instructive from this perspective. With doctoral degrees in mathematics and physics, Brillouin was named associate professor at the *École normale*

[13] Poincaré [1890; 1891b; 1891a; 1892 – 1893; 1897b].

[14] See Cambridge Philosophical Society, ed. [1900].

[15] Guillaume & Poincaré, eds. [1900 – 1901].

[16] Three other French physicists had attained this status by 1909: Jules Violle, Gabriel Lippmann, and Émile-Hilaire Amagat; see *Bulletin de la société française de physique* (1908), p. 3*.

[17] See the review by P. G. Tait [1892] of Poincaré's *Thermodynamique* [1892], reedited with annotations (and Poincaré's replies) in Walter et al., eds. [2007].

[18] Poincaré [1897a]; Buchwald [1985, 226].

supérieure in 1887. In the early 1890s, Brillouin dutifully pointed out what he thought was an error in the first edition of Poincaré's lectures on Maxwell's theory, concerning Hertzian waves. Poincaré's gentle private lesson led Brillouin to retract his criticism.[19] In 1900, Brillouin replaced Joseph Bertrand as professor of general and mathematical physics at the *Collège de France*, and when a new edition of Poincaré's *Électricité et optique* appeared in 1901, Brillouin had only high praise for it.[20]

At the turn of the century, Poincaré's physical acumen was severely tested, when Gabriel Lippmann's doctoral student, Victor Crémieu, published a result casting doubt on Rowland's effect, whereby, in line with Maxwell's theory, convected electricity produces a certain magnetic effect. Poincaré wrote the official report on Crémieu's thesis, communicated several of his results to the Paris Academy of Sciences, and argued that if the result was confirmed, Maxwell's theory would have to be abandoned. None of Europe's leading physicists gave any credence to Crémieu's findings, which if true, would have overturned the electron theories of Lorentz and Larmor, as well as Maxwell's theory. In France, Brillouin shared Poincaré's high opinion of Crémieu's results, but Poincaré's colleague at the Sorbonne, the physicist Henri Pellat remained doubtful, as did Poincaré's former teacher at the *École polytechnique,* Alfred Potier.

When Harold Pender, who was Rowland's last doctoral student, confirmed Rowland's effect in Baltimore, Poincaré saw to it that Pender and his equipment were transported to the Edmond Bouty's laboratory in Paris, in order to perform experiments side-by-side with Crémieu. Pender emerged victorious from the encounter; to the French Society of Physics Pender explained not only how the Rowland effect manifested itself, but why Crémieu's apparatus had failed to detect it.[21] The result of the encounter suggests that Poincaré had misjudged the situation; nonetheless, he obtained what he required as a theoretical physicist: an experimental decision between Maxwellian and non-Maxwellian electrodynamics.

[19] See Poincaré's correspondence with Brillouin in Walter et al., eds. [2007, § 12]; Brillouin [1891a; 1891b].

[20] Poincaré [1901], Brillouin [1901].

[21] Pender & Crémieu [1903]. Historical accounts include Indorato & Masotto [1989], and Walter et al., eds. [2007, § 17].

Pender and Crémieu's account of their parallel investigations of convected electricity appeared in a leading journal of French physics: the *Journal de physique théorique et appliquée* (*JPTA*), founded in 1872. During the first decade of the twentieth century, the *JPTA*'s editorial board counted two professors of physics from the Paris faculty of science, Edmond Bouty and Gabriel Lippmann, along with a pair of senior theorists, Alfred Potier and Élie Mascart, neither of whom survived the decade. Filling out the editorial board were a trio of associate editors, former students of the *École normale supérieure:* Lucien Poincaré, Bernard Brunhes, and Georges Sagnac; and one non-Normalien associate editor, Marcel Lamotte, an associate professor of physics at Clermont-Ferrand, who like Brunhes had helped edit Poincaré's volumes on mathematical physics in the early 1890s.

The *JPTA* did not publish contributions in theoretical physics that involved sophisticated mathematical elaboration, in order to remain accessible to "isolated" physicists, which is to say, those out of range of science faculties and their libraries.[22] This approach manifested itself in the selection of articles for publication, and in the abstracts of articles published abroad. More often than not, when an article featured a mathematical argument, the *JPTA* abstract revealed this fact alone, with no judgment of merit or meaning. Consequently, readers were ill-informed of current work in theoretical physics, beyond what might be guessed from reading the name of the author, and the title of the contribution.

There were other venues in France for publishing research in theoretical physics, including the *Annales de chimie et de physique* (or *ACP* for short), *Le Radium*, the *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, and the *Journal de mathématiques pures et appliquées*. The latter two journals attracted few papers on physics, unlike *Le Radium*, founded in 1904 by Henri Becquerel, Pierre Curie, Ernest Rutherford, Charles-Édouard Guillaume and others. *Le Radium* effectively competed for readers with the *JPTA*, providing translations of German and French contributions, and abstracts of various periodicals, until the two journals fused in 1920. The *ACP*, founded in 1816, attracted significant communications in the first decade of the twentieth century from Paul Langevin, Jacques

[22] This was the policy announced by the *JPTA*'s founder, J.-C. Almeida, in the first issue of the review.

Hadamard, Marcel Brillouin, and the latter's student, Jean Perrin. At the beginning of the decade, the *ACP* was directed by the venerable trio of Marcellin Berthelot, Élie Mascart, and Henri Moissan, none of whom were still alive in 1910. At the end of the first decade, a different trio of editors directed the *ACP*: the chemist Albin Haller and his two colleagues on the Paris faculty of science, Lippmann and Bouty, who continued to edit the *JPTA*.

During this period the *ACP* published doctoral theses in physics, as well as extended summaries of experimental and theoretical investigations. Two examples may be mentioned here. One of these is the Swiss theorist Walter Ritz's long memoir, "Critical investigations in general electrodynamics", in which Ritz gave an overview of the work of Lorentz, Poincaré, Einstein, and others, and sketched an alternative approach to the electrodynamics of moving bodies, based on retarded potentials and a principle of superposition.[23] Another is Perrin's "Brownian motion and molecular reality", where he presented the results of experiments that confirmed Einstein's formula for Brownian motion of a particle in a fluid, work for which Perrin was awarded the Nobel Prize in physics in 1926.[24]

The only other publishing outlet for research in theoretical physics in France, but one more widely cited than the *ACP* or any other French scientific journal, was the organ of the Paris Academy of Sciences, the *Comptes rendus hebdomadaires* (hereafter *CRAS*). This was where Poincaré published most often, averaging nine papers a year throughout his career, including a signal contribution to relativity theory on 6 June 1905. The *CRAS* enforced a page limit on its contributors, and Poincaré's four-page summary was no exception to the rule. The memoir summarized in the *CRAS* appeared in the *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, a journal in which since 1888 Poincaré had published on the theory of differential equations, analytical mechanics, and algebraic topology. Until 1906, Poincaré published all his articles on physics (excluding notes in the *CRAS*) either in foreign journals, or in a Paris-based journal of electrical engineering, *Éclairage électrique*, on the editorial board of which he served beginning in 1899.

[23] Ritz [1908]; Martínez [2004].
[24] Perrin [1909]; Nye [1972].

One consequence of this habit was that until 1906, Poincaré's latest research in theoretical and applied physics was known best to French electrical engineers, and readers of *CRAS* and foreign research journals. Students of physics knew Poincaré best through his lectures on mathematical physics, published in thirteen volumes (not counting translations to German, or reeditions). The effect of these volumes was described somewhat breathlessly by the mathematician (and former Poincaré student) Maurice d'Ocagne, for whom Poincaré had, in addition to being the world's premier theoretical astronomer,

> "... carved for himself an unequaled position as a theoretical physicist, projecting a new light, emanating from the most unexpected sources, upon every part of mathematical physics: heat, optics, electricity, elasticity, capillarity, etc. .... He has covered everything, renewed everything, extended everything. [...]
>
> What is more, there are many experimentalists who make no mistake in recognizing all they owe to the theoretical views introduced to science by Mr. Poincaré, and who have quite often reoriented their laboratory investigations to the great benefit of the general advance of our knowledge."[25]

What d'Ocagne's remark suggests most clearly is the source of Poincaré's preeminence in French theoretical physics, and his influence on research agendas in experimental physics. Physicists who acknowledged such an influence included, among others in France, Henri Becquerel, René Blondlot, Gustave Le Bon, Paul Langevin, Georges Sagnac, Alfred Perot, and Victor Crémieu; in Geneva, Lucien de la Rive and Édouard Sarasin; in Kristiania (now Oslo), Kristian Birkeland.[26]

While Poincaré's influence on the agenda of experimentalists is apparent, what can be said of his mark on the agenda of theorists? Some of the aforementioned experimentalists also wore a theorist's cap on occasion, like Birkeland, Langevin, and Sagnac. All three of these physicists published on subjects stemming from those taken up earlier by Poincaré, notably in the domains of Hertzian waves and electron theory; all were former students of Poincaré. According to another former student of Poincaré's, Arthur Korn, there was not a

[25] Ocagne [1909, 541].

[26] Poincaré's interaction with experimental physicists is well-documented in his correspondence; see Walter et al., eds. [2007].

single physicist anywhere whose work had not found fundamental stimulation in Poincaré's lectures.[27]

Poincaré is often characterized by historians as a leading critic of theories of physics, and indeed, his lectures in mathematical physics offered a magisterial discussion of rival theories in the several branches of physics, that compared relative strengths and weaknesses.[28] His lectures on Maxwell's theory were eagerly read in Germany (in German translation), and exercised a profound influence on the first German textbooks on Maxwellian electrodynamics.[29] Some of his non-technical analyses were reedited for a larger audience in the four anthologies of his epistemological writings on mathematics and the exact sciences edited by 1913, which were widely read and appreciated by both specialists and the general reading public alike.[30] Poincaré's critical acumen in theoretical physics was appreciated by his peers, including Joseph Larmor, who contributed a preface to the English translation of the first of the anthologies: *Science and Hypothesis*.

On an international level, with the discovery of x-rays, the electron and radioactivity in the closing years of the nineteenth century, the physics of charged particles filled the pages of physics journals. French prowess in experimental microphysics received international recognition following work by Henri Becquerel and the Curies on radioactive matter, and René Blondlot on electrical convection, although the latter's reputation was later tarnished when what he called "N-rays" proved spurious. On the theoretical side, Poincaré and Alfred Liénard were among the first theorists to contribute to Lorentz's electron theory, and to apply it to dispersion phenomena and the Zeeman effect.[31] Outside of France, respected theorists at the turn of the twentieth century included, first and foremost, Lorentz in Leiden, Boltzmann in Vienna, Joseph Larmor and Joseph John Thomson in Cambridge, Ernest Rutherford in Montreal, Paul Drude in Giessen, Max Planck in Berlin, Sommerfeld in Aachen, Wilhelm

[27] Korn [1912].

[28] Such a characterization is offered by Darrigol [1995; 2000].

[29] See Darrigol ([1993; 2000, 354]).

[30] According to Lebon [1912, 84], the first of these anthologies, entitles *La science et l'hypothèse* (1902), sold twenty thousand copies by 1911. On the composition of Poincaré's anthologies, see Rollet [2001, chap. 4].

[31] See Buchwald [1985].

Wien in Würzburg, Woldemar Voigt, Emil Wiechert, Max Abraham, and Walther Nernst in Göttingen.

Critical analysis of physical theories was an activity at which Poincaré was skilled and accomplished, and for which he was amply rewarded. His contributions to physics, however, went well beyond writing textbooks and critiques of others' work, into the creative realm of theory construction. Among the theoretical physicists mentioned above, Sommerfeld and Abraham found significant inspiration in Poincaré's theories of physics. Sommerfeld's electromagnetic theory of diffraction of plane waves (1896) improved on Poincaré's groundbreaking paper of 1892, while Abraham borrowed on the Frenchman's conception of electromagnetic momentum to form his theory of electron dynamics.[32] Last but not least, in the summer of 1907, Hermann Minkowski took up the elements of Poincaré's four-dimensional approach to relativity theory, in what became a game-changing theory of physics: the theory of spacetime.[33]

The latter three contributions were among those cited in support of an ultimately unsuccessful campaign to award Poincaré the Nobel prize in physics in 1910, in addition to work on the propagation of Hertzian waves, and the theories of vibrating plates, rotating fluid masses, and electron stability. The failure of Poincaré's Nobel campaign reflects in part the still-uncertain status of the theory of relativity in 1910, and in fact, the Nobel committee never awarded a prize in recognition of the discovery of special relativity. In context, it is curious that a Nobel prize nomination emanating from the Paris Academy of Sciences in January 1910, and including among its signatories the Academy's permanent secretary for the mathematical sciences, Gaston Darboux, should feature work "of the highest importance" by Poincaré on the principle of relativity.[34] On 5 June 1905, Poincaré's precis of relativity theory appeared in the *Comptes rendus* of the Academy, announcing a

[32] Poincaré [1892–1893], Sommerfeld [1896; 2004]. On Abraham's and Planck's theories see Miller [1980; 1981].

[33] Poincaré [1906], Minkowski [1908], Walter [2007; 2008].

[34] See Darboux et al. to the Nobel committee, ca. 1 January 1910, transcribed and annotated in Walter et al., eds. [2007, 430]. On the organization of the 1910 campaign, see Ph. Nabonnand's notes to the correspondence between Poincaré and G. Mittag-Leffler [1999].

longer work published in the Palermo *Rendiconti*.[35] Afterwards, no notes were published by anyone on this subject in the *Comptes rendus* until 7 February 1910, when results of cathode-ray deflection experiments by Charles-Eugène Guye and Simon Ratnowsky in Geneva appeared, tending to confirm Lorentz's predictions of velocity-dependent mass.[36] Contrary to Darboux's description, the publication record suggests that the theory of relativity was of little importance to French science, at least until February 1910.

What happened to the theory of relativity in France during the latter half of the first decade of the twentieth century? And how did Einstein's theory come to prominence in France in 1911? In the next section, I show that while Lorentz's theory was often discussed, alternative theories remained nearly invisible in France until 1911. The situation changed in 1911, as the final section will show.

3 The invisibility of Einstein's theory in France

In the scientific centers of Western Europe, physicists did not distinguish at first the theories of Lorentz, Poincaré, and Einstein. Of these three founders of relativity theory, Poincaré alone took care to identify the differences between his theory and that of Lorentz; Einstein's theory had not yet been published when he wrote his memoir. A year later, after Einstein's theory had been aired in the *Annalen der Physik*, Poincaré took care to explain to his students at the Sorbonne how his theory of relativity differed from that of Einstein, albeit without ever mentioning Einstein or his theory.

Poincaré performed a curious thought experiment for his students, in which a pair of inertial observers, one at rest, the other moving away in a straight line at constant speed, describe the form of a locus of light at a certain instant of time. An observer at rest with respect to the ether judges the light locus to have the form of a sphere, the radius of which increases with the speed of light. Observers in motion with respect to

[35] Poincaré [1905; 1906].

[36] Guye & Ratnowsky [1910], originally submitted on 10 January 1910, and withdrawn by Guye, ostensibly to permit the inclusion of new data (Guye to Gaston Darboux, 30 January 1910, Archives of the Academy of Sciences, session folder, 7 February 1910).

the ether, Poincaré explained, would conclude that the light locus at any instant of time (as determined via co-moving light-synchronized clocks) is represented by an ellipsoid of rotation, elongated in the direction of observer motion with respect to the ether. In Einstein's theory, by contrast, the light locus at any given instant of time (as determined via co-moving light-synchronized clocks) is always represented by a sphere.[37] After presenting his view of relativity to his students, Poincaré published his light-ellipsoid theory of relativity in France's leading popular-science biweekly, the *Revue générale des sciences pures et appliquées*. He did not mention Einstein's theory, and in the *Revue générale* no one else did, either, until Maurice Lémeray wrote of "Einstein's beautiful results" four years later.[38]

Poincaré's silence with respect to Einstein's theory has been the subject of much historical speculation, and will not concern us here. Instead, let us ask why no one else in France saw fit to mention Einstein's theory in print before 1911. And to begin with, let us investigate why one person in particular, Paul Langevin, did not mention Einstein's theory in print before 1911. Recall that in 1905 Langevin proposed an electron theory similar in some respects to that of Alfred Heinrich Bucherer, featuring an electron model of constant volume, and velocity-dependent shape, and that Poincaré showed Langevin's theory to be incompatible with relativity. Langevin acknowledged Poincaré's judgment of his theory, but did not give it up until the experimental results presented by A. H. Bucherer in September 1908 persuaded him to do so.[39] To put it briefly, until the fall of 1908 there were several plausible alternatives available to relativity theory, some of which enjoyed, like Abraham's rigid-electron theory, better empirical support in some tests than did the theory of relativity.[40]

Einstein was not unknown in French physics circles, and his name was cited in contexts other than relativity in the period from 1905 to 1910. In kinetic theory, for example, Einstein's formula of 1905 for specific

[37] See my forthcoming paper in *Einstein Studies*. For alternative explanations of Poincaré's light-ellipsoid, see Cuvaj [1970, 74] and Darrigol [2006, 17 – 19].

[38] Poincaré [1908], Lémeray [1912].

[39] See Langevin's *Notice sur les travaux scientifiques* [1908, 35].

[40] On the choice between alternative theories of the electrodynamics of moving bodies circa 1905, see Darrigol [2000, 391].

heat was promoted by Jean Perrin in 1908, and referred to simply as "Einstein's formula". A look at the abstracts published by the *JPTA* from 1905 to 1911 reveals that the "Abraham theory" of the electrodynamics of moving bodies was mentioned twice, the "Einstein theory" three times, and the "Poincaré theory" or "Lorentz-Poincaré theory" four times. One notices that Poincaré's theory never stood alone in these abstracts, but was always accompanied by a reference to Lorentz's theory, which was mentioned much more often than any other, garnering a total of twenty-two independent occurrences.

Also, the paucity of detail in *JPTA* abstracts on relativity and electron theory, compared with that provided for other subjects, suggests a certain lack of comprehension or interest on the part of the abstract writer. A general ignorance of and disinterest in relativity theory was not unique to French physicists, as even in Germany, publication numbers remained modest in this area until 1909, when they began to climb rapidly (see Fig. 2). One difficulty for relativity theory was its poor performance in electron-deflection experiments, which led many to believe that relativity theory was empirically untenable. In a discussion of electron theory in 1906, for example, Paul Ehrenfest considered Lorentz's theory to have been definitively disproved by experiment, and Ehrenfest's opinion was duly related by Léon Bloch for readers of *Le Radium*.[41] In such circumstances, it is a wonder that any physicist bothered learning relativity theory before the end of 1908.

After an experimental confirmation of relativity theory was announced in September 1908, the incentive to learn the theory, and to investigate its consequences naturally increased. What is curious in the French context is that apart from Poincaré, no other physicist took up relativity, until Paul Langevin lectured on the subject at the Collège de France in 1910–1911. According to Poincaré's own report, he pursued a relativistic theory of elastic collisions, but deemed his results unworthy of publication. As he explained it to a Berlin audience in late 1910, the lack of such a theory was one reason why the new mechanics of relativity could not be considered "definitively grounded".[42] In front of French audiences, Poincaré offered a different message, designed to reassure those worried about overturning Newtonian mechanics: the

[41] Ehrenfest [1906]; *Le Radium* 3, 1906, p. 148.
[42] Poincaré [1910, 115–116].

"old mechanics", Poincaré announced, was still the one for "our practical life and our terrestrial technology".[43]

Poincaré's measured consideration of the theory he helped create may have dissuaded a few junior French theorists from following in his tracks, but not Paul Langevin.[44] As a student of Poincaré's 1896 lectures on the elastic theory of light, Langevin had learned how a certain theorist referred to as "Somerset" extended Poincaré's theory of polarization by diffraction.[45] Ten years later, on the strength of this work, and more recent contributions to electron theory, this same theorist – better known as Arnold Sommerfeld – was named to the chair of theoretical physics in Munich, formerly held by Boltzmann.[46] Sommerfeld was in charge of the physics volume of Felix Klein's planned six-volume *Encyclopedia of Mathematical Sciences with Applications*, the first entries of which appeared in 1903.[47] On 16 April, 1906, Sommerfeld informed Langevin that Klein had agreed to let him co-edit the French version of the physics volume with Jean Perrin, a task that would occupy the two Frenchmen for nearly a decade.[48] Along with their editing duties, Sommerfeld and Langevin shared for several years the electromagnetic world-view, which promised a unification of all forces on an electromagnetic basis. But as mentioned above, in late 1908, theory and experiment conspired to convince Langevin of the cogency of the theory of relativity.

As a former student of Poincaré's, and an occasional dinner guest at his flat in Paris, Langevin would have been at first glance a natural candidate to take up Poincaré's theory of relativity. A similar remark may be made about Sommerfeld, who did not hear Poincaré's lectures at

[43] "Quoi qu'il en soit, d'ailleurs, elle restrera la mécanique des vitesses très petites par rapport à la vitesse de la lumière, la mécanique donc de notre vie pratique et de notre technique terrestre." Plenary lecture, 3 August 1909, to the meeting of the French Association for the Advancement of Science in Lille, Poincaré [1909].

[44] On Langevin's relation to Poincaré and Einstein, see Paty [2002].

[45] Fonds Langevin, Notebook "Poincaré Élasticité et optique III 1896", carton 123, Bibliothèque de l'École supérieure de physique et de chimie industrielle, Paris. In a later appreciation of Poincaré's contributions to physics, Langevin recalled Poincaré's lectures on optics, which showed how Sommerfeld "brilliantly followed a path" opened by Kirchhoff and Poincaré via complex analysis; see Langevin [1913, 691].

[46] Eckert & Pricha [1984].

[47] See Eckert & Märker, eds. [2001 – 2004, vol. 1, p. 40].

[48] Fonds Langevin, op. cit., carton 76.

the Sorbonne, but who admired and emulated his approach to physics. Whatever affinity Sommerfeld and Langevin had with Poincaré and his science, they both preferred the Einstein-Minkowski theory to that of Poincaré. For Sommerfeld, it was Minkowski's spacetime theory that persuaded him of the cogency of relativity theory.[49] Langevin, too, was impressed by Minkowski's theory, and by Sommerfeld's related four-dimensional vector algebra and analysis, which he presented in his 1910 – 1911 lectures at the Collège de France.[50] The elements of spacetime theory were readily available to French readers by then, since in late 1909, a pair of former students of the *École normale supérieure* had translated Minkowski's 1908 lecture "Space and time" for publication in the *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*.[51]

Like Poincaré, Langevin felt that the ether was not a wholly superfluous concept for modern physics. One auditor of Langevin's lectures, Léon Brillouin, recorded Langevin's remark on this subject:

> "The very notion of the ether loses its sense, says Einstein – this is an exaggeration. We can't discern our speed with respect to the ether, but we can discern [our] accelerations and rotations."[52]

On the subject of light-waves, Langevin maintained on another occasion that a spherical light-wave in one inertial frame is actually spherical for all inertial observers.[53] The latter view signals Langevin's break with Poincaré, for whom the light locus only *appeared* spherical for observers in motion with respect to the ether. In fact, Langevin fully agreed with Einstein and Minkowski that the universal validity of the principle of

[49] Walter [1999, 70].

[50] Sommerfeld [1910a; 1910b]. Likewise, Minkowski admired Langevin's contributions to the kinetic theory of gases; see Minkowski to Felix Klein, 1 Oct. 1906, Klein Nachlass, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen.

[51] Minkowski [1909], translated from the German original by Aimé Hennequin and Joseph Marty. On Poincaré's response to Minkowski's theory, see Walter [2009].

[52] "La notion même d'éther perd son sens, dit Einstein-c'est exagéré. On ne peut saisir notre vitesse p[ar] rapp[ort] à l'éther, mais on peut saisir les accélérations et rotations." Léon Brillouin, Notebook "Cours de Relativité au Collège de France 1910 – 1911", Léon Brillouin Papers, Box 7, folder 8, American Institute of Physics, Niels Bohr Library. Langevin made the same point – without mentioning Einstein by name – in a lecture delivered on 10 April 1911 to the Fourth International Congress of Philosophy in Bologna, where Poincaré was present; see Langevin [1911, 233].

[53] Langevin [1912, 335].

relativity implied a new view of space and time, and he defended this view publicly, beginning in 1911.

To put Langevin's defense of Einstein-Minkowski theory into historical perspective, let us examine some publication numbers. In 1911, publication of articles on relativity theory in periodicals worldwide hit a peak at one hundred and seventeen titles, after a sustained increase in scientific interest beginning in 1909 (see Fig. 1). This increase is reflected on a modest scale, and with a delay of a year or two, in the United Kingdom and in France. Figure 2 shows the evolution of publication numbers from 1905 to 1916 for the top five nations in article productivity. French numbers rose slightly in 1911, and peaked at thirteen articles in 1913.[54]

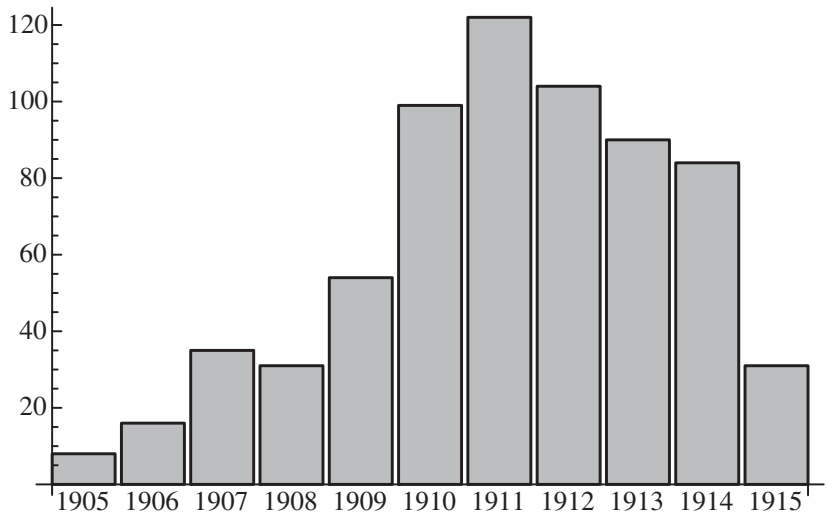


Figure 1
Global publication of articles on relativity in periodicals, 1905 – 1916. $N = 662$. Source: Walter [1996].

Bare publication numbers tell us nothing of the causes of their annual fluctuation, a fact which leads us back to the *JPTA* abstracts. In 1911,

[54] These publication numbers do not reflect the author's nationality or workplace. Data correlating the production of articles on relativity to nationality of the writer is presented in Walter [1996], which is also the source of the data in the figures presented here, augmented by fifty titles gleaned from the author's subsequent research. The publication database is freely available from the author's homepage.

"Einstein theory" is mentioned in nine abstracts, six of which mention no other theory. Next comes "Lorentz theory", with five mentions, followed by one mention each for Poincaré and Minkowski. The novelty in 1911 French physics, according to this source, was Einstein's theory of relativity. A closer look at the *JPTA* abstracts, however, suggests that these citation figures be treated with prudence. In 1911, the *JPTA* recruited a new abstract writer, a nautical engineer from Antibes, Maurice Lémeray, and assigned him articles on relativity published in German or English. A science teacher turned warship designer, Lémeray was himself a prolific writer on relativity, having published more articles in 1911 and 1912 than any other Frenchman. His writings show no marked allegiance to either Einstein or Poincaré, but agree in general with Einstein's theory. Indeed, Lémeray was the first to cite Einstein's publications on relativity in the *Comptes rendus*, in a note communicated to Academy of Sciences by Poincaré, whose name Lémeray was careful to cite.[55] In summary, the increased number of citations of Einstein's theory in the 1911 *JPTA* abstracts has more to do with staff changes at the *JPTA* than with any bound in recognition of Einstein's contributions to relativity among French physicists.

Figure 2
Publication of articles on relativity in periodicals, 1905 – 1916: Germany, United Kingdom, USA, Italy, France. $N = 566$. Source: Walter [1996]

[55] Lémeray [1911].

The details of Lémeray's rise to prominence in France throw light on the reception of Einstein's theory. Archival documents reveal that Lémeray sought the Paris Academy's approval for his work on relativity as early as September 1910, when he submitted a manuscript to Gaston Darboux, one of the Academy's permanent secretaries.[56] Judged unfit for publication, the four-page note entitled "On the Lorentz transformation" purported to demonstrate Lorentz's formulas for local time, length contraction, and transverse and longitudinal mass from Einstein's twin postulates of relativity and universal lightspeed invariance, and dimensional analysis. Lémeray insisted that his results were free of "any hypothesis on the mechanism of phenomena or on any electrical theory", and he cited only one paper: Einstein's first French-language publication on relativity in the *Archives de Genève*. His purported demonstration of time dilation from the longitudinal Doppler effect for lightwaves, however, involved circular reasoning, and probably rendered his manuscript unpublishable. What this episode suggests is that the invisibility of Einstein's theory in France until 1911 was due in part to the paucity of physicists prepared to meet the cognitive challenge of Einstein's theory, combined with the existence of a rigorous manuscript review process. Similar instances of manuscript rejection in this area of physics took place elsewhere, of course, Germany included.[57]

4 Epilogue

With assistance from Perrin, Langevin, and Lémeray, Einstein's star was ascending over France by 1911. In November, 1911, Poincaré recommended him for a chair in theoretical physics at the ETH in Zurich, commenting that "the future will show more and more what Mr. Einstein's value is", and in January 1912, Einstein was named to this chair, and elected a non-resident council member of the French Society of Physics.[58] In May, 1912, Poincaré admitted that the new mechanics of relativity could serve as a basis for a redefinition of

[56] Session folder, 3 October 1910, Archives of the Academy of Sciences, Paris.

[57] See, for example, Pyenson's review [1985, chap. 8] of Max Planck's rejection of papers submitted to the *Annalen der Physik*.

[58] Poincaré to Pierre Weiss, ca. November, 1911, transcribed in Walter et al., eds. [2007]; *Procès-verbaux de la société française de physique* 1912, p. 9.

time and space, thereby recognizing the philosophical significance of Einstein-Minkowski theory.[59] This was a giant step for Poincaré, but it came too late to make any difference for physics in France. By 1912, the leading French theorists, including Langevin, and the mathematicians Émile Borel and Élie Cartan, had already adopted Einstein-Minkowski theory.[60]

The engagement of Borel, Cartan, and other French mathematicians with the theory of relativity followed an example set in Germany by Minkowski, Gustav Herglotz, and Felix Klein. To some extent, the contributions of French mathematicians compensated the feeble participation of French theoretical physicists – Poincaré excepted – in the construction and diffusion of relativity. Once again, Langevin appears to have been instrumental in attracting the attention of French mathematicians to the study of Einstein-Minkowski theory. His role in introducing Einstein's theory to French scientists was later described by Jacques Hadamard as follows:

> "It is well known that, under the powerful leadership of Mr. Langevin, the young French physicists rallied to the new movement of ideas created by Mr. Einstein's discoveries. But cooperation with this movement was no less important to mathematicians, whose doctrines the new theory brought into play to a higher degree than any other previous physical conception. This is just what geometers like Mr. Borel understood from the beginning."[61]

What Hadamard's remark suggests is that for us to understand the reception of relativity in France, we need to go beyond the small circle of theoretical physicists, and examine how mathematicians came to engage with the theory.

In this essay, Poincaré's influence on theoretical physicists in France has been discussed, but not his interaction with mathematicians. Nonetheless, even in the restricted domain of theoretical physics in France, the interactions between mathematics and physics appear decisive for the reception of relativity theory. The systematic appeal

[59] Poincaré [1912]; Walter [2009].

[60] See Borel's 1913 lectures on Minkowski spacetime at the Sorbonne (Borel 1914), and Cartan's lecture on the "new kinematics" of relativity before the French Society of Mathematics (Cartan 1912).

[61] Hadamard [1922, p. i].

to sophisticated and powerful mathematics in the construction and elaboration of physical theory was a legacy Poincaré bestowed on all his physics students. In this sense, Poincaré may be said to have smoothed the path in France for both Paul Langevin and the Einstein-Minkowski theory of relativity, at the expense of his own approach to relativity.

5 Bibliography

Biezunski, M. [1987]: Einstein's reception in Paris in 1922. In: Glick [1987], 169 – 188, 1987.

Borel, E. [1914]: Introduction géométrique à quelques théories physiques. Paris: Gauthier-Villars, 1914.

Borella, V. [2002]: Les écrits épistémologiques de Poincaré, obstacles à la diffusion de la relativité. Revue d'histoire des sciences 55(1) (2002): 45 – 81.

Brillouin, M. L. [1891a]: Compte rendu: H. Poincaré, Électricité et optique II. Revue générale des sciences pures et appliquées 2 (1891a): 268.

Brillouin, M. L. [1891b]: Compte rendu et analyse: Henri Poincaré, Électricité et optique. Bulletin des sciences mathématiques 15 (1891b): 129 – 146.

Brillouin, M. L. [1901]: Compte rendu et analyse: Henri Poincaré, Électricité et optique. Bulletin des sciences mathématiques 25 (1901): 118 – 127.

Buchwald, J. Z. [1985]: From Maxwell to Microphysics. Chicago: University of Chicago Press, 1985.

Cambridge Philosophical Society, ed. [1900]: Memoirs Presented to the Cambridge Philosophical Society on the Occasion of the Jubilee of Sir George Gabriel Stokes. Cambridge: Cambridge University Press, 1900.

Cartan, E. [1912]: Sur les groupes de transformations de contact et la cinématique nouvelle. Société mathématique de France, Comptes rendus des séances (1912): 23.

Cuvaj, C. [1970]: A History of Relativity: The Role of Henri Poincaré and Paul Langevin. Ph. D. dissertation, Yeshiva University, 1970.

Darrigol, O. [1993]: The electrodynamic revolution in Germany as documented by early German expositions of 'Maxwell's theory'. Archive for History of Exact Sciences 45 (1993): 189 – 280.

Darrigol, O. [1995]: Henri Poincaré's criticism of fin de siècle electrodynamics. Studies in History and Philosophy of Modern Physics 26 (1995): 1 – 44.

Darrigol, O. [2000]: Electrodynamics from Ampère to Einstein. Oxford: Oxford University Press, 2000.

Darrigol, O. [2004]: The mystery of the Einstein-Poincaré connection. Isis 95(4) (2004): 614 – 626.

Darrigol, O. [2005]: Worlds of Flow: A History of Hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl. Oxford: Oxford University Press, 2005.

Darrigol, O. [2006]: The genesis of the theory of relativity. In: Einstein, 1905 – 2005. Edited by T. Damour, O. Darrigol, B. Duplantier, and V. Rivasseau, 1 – 32. Progress in Mathematical Physics 47. Basel: Birkhäuser, 2006.

Eckert, M. and Märker, K., eds. [2001 – 2004]: Arnold Sommerfeld: Wissenschaftlicher Briefwechsel. 2 vols. Diepholz: GNT-Verlag, 2001 – 2004.

Eckert, M. and Pricha, W. [1984]: Boltzmann, Sommerfeld und die Berufungen auf die Lehrstühle für theoretische Physik in Wien und München 1890 – 1917. Mitteilungen der Österreichischen Gesellschaft für Geschichte der Naturwissenschaften 4 (1984): 101 – 119.

Ehrenfest, P. [1906]: Zur Stabilitätsfrage bei den Bucherer-Langevin-Elektronen. Physikalische Zeitschrift 7 (1906): 302 – 303.

Glick, T. F., ed. [1987]: The Comparative Reception of Relativity. Dordrecht: Reidel, 1987.

Guillaume, C.-E. and Poincaré, L., eds. [1900 – 1901]: Rapports présentés au congrès international de physique. 4 vols. Paris: Gauthier-Villars, 1900 – 1901.

Guye, C.-E. and Ratnowsky, S. [1910]: Sur la variation de l'inertie de l'électron en fonction de la vitesse dans les rayons cathodiques et sur le principe de relativité. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences 150(6) (1910): 326 – 329.

Hadamard, J. [1922]: Préface to G. Juvet, Introduction au calcul tensoriel et au calcul differentiel absolu. Paris: Blanchard, 1922.

Indorato, L. and Masotto, G. [1989]: Poincaré's role in the Crémieu-Pender controversy over electric convection. Annals of Science 46(2) (1989): 117 – 163.

Jungnickel, C. and McCormmach, R. [1986]: Intellectual Mastery of Nature: Theoretical Physics from Ohm to Einstein. 2 vols. Chicago: University of Chicago Press, 1986.

Korn, A. [1912]: Henri Poincaré (1854 – 1912). Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft 12 (1912): 3 – 13.

Langevin, P. [1908]: Notice sur les travaux scientifiques de M. P. Langevin. Paris, 1908.

Langevin, P. [1911]: L'évolution de l'espace et du temps. Scientia (Rivista di Scienza) 10 (1911): 31 – 54.

Langevin, P. [1912]: Le temps, l'espace et la causalité dans la physique moderne. Bulletin de la Société française de philosophie 12 (1912): 1 – 28.

Langevin, P. [1913]: L'œuvre d'Henri Poincaré: le physicien. Revue de métaphysique et de morale 21 (1913): 675 – 718.

Lebon, E. [1912]: Henri Poincaré: Biographie, bibliographie analytique des écrits. Paris: Gauthier-Villars, 2d edition, 1912.

Lémeray, E. M. [1911]: Le principe de relativité et les forces qui s'exercent entre les corps en mouvement. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences 152(22) (1911): 1465 – 1468.

Lémeray, E. M. [1912]: Le principe de relativité et la mécanique. Revue générale des sciences pures et appliquées 23(5) (1912): 174 – 183.

Martínez, A. A. [2004]: Ritz, Einstein, and the emission hypothesis. Physics in Perspective 6 (2004): 4 – 28.

Miller, A. I. [1980]: On some other approaches to electrodynamics in 1905. In: Some Strangeness in the Proportion. Edited by H. Woolf, 66 – 91. Reading, MA: Addison-Wesley, 1980.

Miller, A. I. [1981]: Albert Einstein's Special Theory of Relativity: Emergence (1905) and Early Interpretation. Reading, MA: Addison-Wesley, 1981.

Minkowski, H. [1908]: Die Grundgleichungen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1908): 53 – 111.

Minkowski, H. [1909]: Espace et temps. Annales scientifiques de l'École normale supérieure 26 (1909): 499 – 517.

Nabonnand, Ph., ed. [1999]: La correspondance entre Henri Poincaré et Gösta Mittag-Leffler. Basel: Birkhäuser, 1999.

Nye, M. J. [1972]: Molecular Reality: A Perspective on the Scientific Work of Jean Perrin. Amsterdam: Elsevier, 1972.

Ocagne, M. d'. [1909]: Biographie du conférencier M. Henri Poincaré. Journal de l'Université des Annales 3 (1909): 539 – 541.

Paty, M. [1987]: The scientific reception of relativity in France. In: Glick [1987], 113 – 167, 1987.

Paty, M. [2002]: Poincaré, Langevin et Einstein. Épistémologiques 2 (2002): 33 – 73.

Pender, H. and Crémieu, V. [1903]: Recherches contradictoires sur l'effet magnétique de la convection électrique. Bulletin des séances de la société française de physique (1903): 136 – 162.

Perrin, J. [1909]: Mouvement brownien et réalité moléculaire. Annales de chimie et de physique 18 (1909): 1 – 114.

Pestre, D. [1992]: Physique et physiciens en France 1918 – 1940. Paris: Éditions des archives contemporaines, 2d edition, 1992.

Poincaré, H. [1890]: Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Acta Mathematica 13 (1890): 1 – 270.

Poincaré, H. [1891a]: Sur la résonance multiple des oscillations hertziennes. Archives des sciences physiques et naturelles 25 (1891a): 609 – 627.

Poincaré, H. [1891b]: Sur la théorie des oscillations hertziennes. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences 113 (1891b): 515 – 519.

Poincaré, H. [1892]: Thermodynamique. Edited by J. Blondin. Paris: Georges Carré, 1892.

Poincaré, H. [1892 – 1893]: Sur la polarisation par diffraction. Acta Mathematica 16 (1892 – 1893): 297 – 339.

Poincaré, H. [1897a]: La théorie de Lorentz et les expériences de Zeeman. Éclairage électrique 11 (1897a): 481 – 489.

Poincaré, H. [1897b]: Sur la polarisation par diffraction. Acta Mathematica 20 (1897b): 313 – 355.

Poincaré, H. [1901]: Électricité et optique: la lumière et les théories électrodynamiques. Paris: Carré et Naud, 1901.

Poincaré, H. [1905]: Sur la dynamique de l'électron. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences 140 (1905): 1504 – 1508.

Poincaré, H. [1906]: Sur la dynamique de l'électron. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 21 (1906): 129 – 176.

Poincaré, H. [1908]: La dynamique de l'électron. Revue générale des sciences pures et appliquées 19 (1908): 386 – 402.

Poincaré, H. [1909]: La mécanique nouvelle. Revue scientifique 12 (1909): 170 – 177.

Poincaré, H. [1910]: Die neue Mechanik. Himmel und Erde 23 (1910): 97 – 116.

Poincaré, H. [1912]: L'espace et le temps. Scientia (Rivista di Scienza) 12 (1912): 159 – 170.

Pyenson, L. [1985]: The Young Einstein: The Advent of Relativity. Bristol: Adam Hilger, 1985.

Pyenson, L. [1987]: The relativity revolution in Germany. In: Glick [1987], 59 – 111, 1987.

Ritz, W. [1908]: Recherches critiques sur l'électrodynamique générale. Annales de chimie et de physique 13 (1908): 145 – 275.

Rollet, L. [2001]: Henri Poincaré, des mathématiques à la philosophie: étude du parcours intellectuel, social et politique d'un mathématicien au début du siècle. Lille: Éditions du Septentrion, 2001.

Schlote, K.-H. [2004]: Zu den Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik an der Universität Leipzig in der Zeit von 1830 bis 1904/05. Abhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse 63(1) (2004): 1 – 132.

Siegmund-Schultze, R. [2001]: Rockefeller and the Internationalization of Mathematics between Two World Wars: Documents and Studies for the Social History of Mathematics in the 20th Century. Basel: Birkhäuser, 2001.

Sommerfeld, A. [1896]: Mathematische Theorie der Diffraction. Mathematische Annalen 47 (1896): 317 – 374.

Sommerfeld, A. [1910a]: Zur Relativitätstheorie, I: Vierdimensionale Vektoralgebra. Annalen der Physik 32 (1910a): 749 – 776.

Sommerfeld, A. [1910b]: Zur Relativitätstheorie, II: Vierdimensionale Vektoranalysis. Annalen der Physik 33 (1910b): 649 – 689.

Sommerfeld, A. [2004]: Mathematical Theory of Diffraction. Edited by R. J. Nagem, M. Zamponi, and G. Sandri. Boston: Birkhäuser, 2004.

Tait, P. G. [1892]: Poincaré's Thermodynamics. Nature 45 (1892): 245 – 246.

Walter, S. [1996]: Hermann Minkowski et la mathématisation de la théorie de la relativité restreinte, 1905 – 1915. Ph. D. dissertation, Université Paris 7, 1996.

Walter, S. [1999]: Minkowski, mathematicians, and the mathematical theory of relativity. In: The Expanding Worlds of General Relativity. Edited by

H. Goenner, J. Renn, T. Sauer, and J. Ritter, 45 – 86. Einstein Studies 7. Boston/Basel: Birkhäuser, 1999.

Walter, S. [2007]: Breaking in the 4-vectors: the four-dimensional movement in gravitation, 1905 – 1910. In: The Genesis of General Relativity, Vol. 3. Edited by J. Renn and M. Schemmel, 193 – 252. Berlin: Springer, 2007.

Walter, S. [2008]: Hermann Minkowski's approach to physics. Mathematische Semesterberichte 55(2) (2008): 213 – 235.

Walter, S. [2009]: Hypothesis and convention in Poincaré's defense of Galilei spacetime. In: The Significance of the Hypothetical in the Natural Sciences. Edited by M. Heidelberger and G. Schiemann, 193 – 219. Berlin: Walter de Gruyter, 2009.

Walter, S., Bolmont, E., and Coret, A., eds. [2007]: La correspondance entre Henri Poincaré et les physiciens, chimistes et ingénieurs. Basel: Birkhäuser, 2007.

Warwick, A. C. [2003]: Masters of Theory: Cambridge and the Rise of Mathematical Physics. Chicago: University of Chicago, 2003.

Zeeman, P. [1897]: Lignes doubles et triples dans le spectre, produites sous l'influence d'un champ magnétique extérieur. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences 124 (1897): 1444 – 1445.

Indeterminismus vor der Quantenmechanik: Richard von Mises' wahrscheinlichkeitstheoretischer Purismus in der Theorie physikalischer Prozesse

Reinhard Siegmund-Schultze

1 Einführung

Natürliche, technologische und ökonomische Prozesse werden heute bekanntlich mit einem vielfältigen Arsenal mathematischer Methoden unter anderem innerhalb der Theorie der stochastischen Prozesse, der Ergodentheorie und der statistischen Mechanik modelliert und analysiert. Wahrscheinlichkeitsrechnung spielt hierbei eine zentrale Rolle, und die Entwicklung der Rechentechnik hat in den letzten 50 Jahren neue Aspekte in eine Theorie gebracht, deren Anfänge physikalisch in der klassischen Thermodynamik, mathematisch in der Theorie der Ketten «nachwirkungsfrei» abhängiger Ereignisse A. A. Markovs (1906)[1] zu suchen sind.

Die vorliegende Arbeit will an einen weitgehend vergessenen Beitrag des Ingenieurs und philosophisch interessierten angewandten Mathematikers Richard von Mises (1883 – 1953)[2] zur wahrscheinlichkeitstheoretischen Durchdringung der Theorie physikalischer Prozesse erinnern. Dieser Beitrag war eher methodologisch-philosophisch als mathematisch-technisch und geht im Wesentlichen auf von Mises' Arbeit «Ausschaltung der Ergodenhypothese in der physikalischen Statistik» zurück, die 1920 in der *Physikalischen Zeitschrift* erschien.[3] Von Mises' Aufsatz ist bereits in einer bemerkenswerten und unpubliziert gebliebenen akademischen «Hausarbeit» von Antretter[4] und – teilweise darauf basierend – in dem wertvollen Buch von Hochkirchen[5] recht eingehend analysiert worden. Diese Arbeiten sind aber eher für Wahrscheinlichkeitstheoretiker geschrieben, insbesondere solche, die sich für die Geschichte der Theorie Markovscher Ketten und die Axiomatik der Wahrscheinlichkeitsrechnung interessieren. Einige methodische Wirkungen des von Misesschen Ansatzes sind in der Pionierarbeit von Platos beschrieben worden.[6]

---

[1] Seneta 1996.
[2] Siegmund-Schultze 2004a.
[3] Mises 1920.
[4] Antretter 1989.
[5] Hochkirchen 1999.
[6] Plato 1994. Allerdings sind einige Bemerkungen dort ohne direkten Bezug auf von Mises' Text unverständlich und insbesondere die Ausführungen zu von Mises' Auffassung der Ergodenhypothese nicht ganz korrekt.

Die vorliegende Arbeit geht weniger auf die technischen Details des von Misesschen Aufsatzes ein, die stark an seine durch die moderne Wahrscheinlichkeitstheorie überholte und veraltete Theorie der «Kollektivs» (zufällige Versuchsfolgen mit Wahrscheinlichkeiten, die sich als Grenzwerte relativer Häufigkeiten ergeben) gebunden sind.[7] Es wird auch nicht von Mises' einziger mathematisch-technischer Beitrag[8] zur Theorie Markovscher Ketten diskutiert, der eine gewisse Rolle bei Antretter und Hochkirchen spielt.[9] Vielmehr wird versucht, durch Rückkehr zu dem konkreten Wortlaut des von Misesschen Textes die darin enthaltenen Ansichten zum Determinismuspostulat der klassischen Physik und von Mises' Argumente für eine «puristische», rein wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung der Theorie physikalischer Prozesse zu präsentieren und – damit verbunden – eine Vorstellung von den in den 1920er Jahren zwischen Physikern und Mathematikern vor allem in Deutschland vor sich gehenden Diskussionen über «Indeterminismus» in der Physik zu geben. Es ist bekannt, dass Indeterminismus als *Methode* spätestens seit Maxwells und Boltzmanns Arbeiten in der Thermodynamik des 19. Jahrhunderts und dem (freilich nicht unumstrittenen) Aufstieg des Atomismus in die klassische Physik eingezogen war. Viele Physiker legten sich in Ermangelung systematischer mathematischer Methoden wahrscheinlichkeitstheoretische Argumente, insbesondere geeignete Durchschnittsbildungen, selbst zurecht. Die Diskussion in den 1920er Jahren zum Indeterminismus in der Physik drehte sich im wesentlichen um zwei neue Dinge: erstens, wie weit reichte die in der Thermodynamik bewährte mathematisch-statistische Methode in andere physikalische Bereiche, insbesondere der *makroskopischen* Physik, hinein,

[7] Insbesondere werden hier die bei Antretter und Hochkirchen beschriebenen von Misesschen Operationen für die Ableitung von zusammengesetzten «Kollektivs» aus einfachen «Kollektivs», denen heute Operationen über Summen von Zufallsgrößen bzw. der Übergang von ein- zu mehrdimensionalen Zufallsgrößen entsprechen, nicht im Detail erläutert.

[8] Mises 1931.

[9] Eine Geschichte der Markovschen Ketten und Markovschen Prozesse steht noch aus. Eine Fundgrube für eine solche künftige Geschichte, besonders was die anscheinend relativ unabhängigen Entwicklungen der Franzosen und mit ihnen des Tschechen B. Hostinský betrifft, ist der Aufsatz von Bernard Bru [2003]. Die Wirkung des Beitrages von Mises' in diesem Kontext war selbst bezogen auf das engere Problem der Matrizentheorie für Markov-Ketten vermutlich eher begrenzt, wie auch das Buch von Seneta [1981] andeutet.

und zweitens – und dies war insbesondere ein Resultat der um 1925 entstehenden Quantenmechanik – in welchem Grad war die Natur oder zumindest die Naturerkenntnis *prinzipiell indeterministisch*?

Wie der folgende Beitrag zeigen wird, war es von Mises vor allem um das erste der beiden Probleme zu tun, während er hinsichtlich des zweiten allmählich die physikalischen Erkenntnisse seiner Zeit übernahm. Die Arbeit wird in diesem Zusammenhang einiges neues Material über von Mises' Verhältnis zu mathematischen Physikern, insbesondere zu Einstein, präsentieren. Es wird auch angedeutet, dass von Mises' wahrscheinlichkeitstheoretischer «Purismus» nicht nur stimulierend auf die mathematische Theorie physikalischer Prozesse wirkte, sondern vor allem wegen seiner mathematisch konservativen Methodik bereits die Gründe für sein Scheitern in sich trug. Es bietet sich an, im Kontext der Indeterminismus-Diskussion auch auf die bekannte These von Paul Forman einzugehen,[10] die diese Diskussion wesentlich mit den sozialen Bedingungen der Kultur der Weimarer Republik verbindet und im wesentlichen aussagt, dass einige moderne wissenschaftliche Begriffsbildungen (Indeterminismus in der Physik zum Beispiel) Ausdruck einer «Anpassung deutscher Physiker und Mathematiker an ein feindliches intellektuelles Milieu» gewesen seien. Es wird sich zeigen, dass der viel eher der «Wiener Kultur» entstammende Mach-Anhänger[11] Richard von Mises ein recht wenig geeigneter Zeuge für die Richtigkeit der anregenden Formanschen These ist.

2 Von Mises' Publikation der «Ausschaltung der Ergodenhypothese in der physikalischen Statistik» durch Vermittlung von Albert Einstein

Ende 1919 erhielt Richard von Mises, damals Professor für Mechanik in Dresden, die Berufung als Leiter des neu zu gründenden Instituts für Angewandte Mathematik der Berliner Universität. Von Mises hatte gerade seine beiden Arbeiten über die Grundlagen der Wahrschein-

[10] Forman 1971. Auch auf Forman wird teilweise schon bei Hochkirchen [1999] kritisch eingegangen, wovon jedoch meine Interpretation in Teilen differiert.

[11] Mises 1939.

lichkeitsrechnung in der *Mathematischen Zeitschrift* veröffentlicht.[12] Einerseits war er hier um eine strenge, in einem gewissen Sinne sogar axiomatische Begründung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs und der darauf aufbauenden Theorie (Verteilungen, Grenzwertsätze) bemüht. Andererseits war er als angewandter Mathematiker daran interessiert, in der Praxis tatsächlich vorkommende Probleme wahrscheinlichkeitstheoretisch zu modellieren. Dies führte ihn zu einer gewissen Skepsis gegenüber allgemeinen und abstrakten mengen- und funktionentheoretischen Methoden in der Tradition der Borelschen Maßtheorie und der Lebesgueschen Integraltheorie. Dies wiederum brachte ihn in Konflikt mit Mathematikern wie Georg(e) Pólya (ETH Zürich), die von Mises' Methoden bei seinem relativ eingeschränkten Beweis des Zentralen Grenzwertsatzes der Wahrscheinlichkeitsrechnung kritisierten. Von Mises musste nach brieflichen Diskussionen mit Pólya im November und Dezember 1919 die Nützlichkeit gewisser moderner Sätze über Folgen monotoner Funktionen einräumen, fühlte sich aber mit einigem Recht unterbewertet in seinen Bemühungen um eine systematische Einführung des Verteilungsbegriffes (geknüpft an seinen speziellen Begriff des «Kollektivs») und um eine Verwendung von charakteristischen Funktionen in den Beweisen.[13] Was schwerer wog, waren Kritiken an innerlogischen Problemen und Widersprüchen in von Mises' Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, die von Pólya, vor allem aber in einem anderen Briefwechsel mit von Mises, ebenfalls im November 1919, von Felix Hausdorff (damals in Greifswald) geübt wurden.[14] Weitere führende Mathematiker, wie Hermann Weyl (damals ETH Zürich) und von Mises' künftiger Kollege in Berlin Issai Schur waren skeptisch gegenüber von Mises' Wahrscheinlichkeitstheorie. Ein vorläufiges Angebot zur Publikation eines Lehrbuchs über Wahrscheinlichkeitsrechnung im Springer-Verlag, das Richard Courant 1919 von Mises unterbreitete, wurde nie erneuert. Die Göttinger Mathematiker um Courant und später Weyl gehörten in den 1920er Jahren zu den stärksten Kritikern der neuen, von Misesschen Wahrscheinlichkeitstheorie. Von Mises' Theorie blieb jedoch in den 1920er Jahren international weitgehend ohne ausgear-

[12] Mises 1919a und 1919b.
[13] Siegmund-Schultze 2006.
[14] Siegmund-Schultze 2010.

beitete Alternative[15] und wurde durch von Mises in einflussreichen Publikationen, insbesondere in der Zeitschrift *Die Naturwissenschaften* und in seinem halb-populären Buch *Wahrscheinlichkeit, Statistik, Wahrheit* (Erstauflage 1928 bei Springer, Wien, in einer mit dem Wiener Kreis verbundenen philosophischen Reihe) unermüdlich propagiert.

Von Mises war von seiner Mission durchdrungen, die Wahrscheinlichkeitstheorie als ein Kerngebiet angewandter Mathematik zu etablieren. Seine spätere Ehefrau Hilda Geiringer, selbst eine recht erfolgreiche Wahrscheinlichkeitstheoretikerin, schrieb 1959 nach von Mises' Tod in ihren Erinnerungen:

> "He interpreted everyday things instinctively in scientific terms. Statistics played a very great role in his scientific conception of the world. (Many discussions with Einstein who said: «Gott würfelt nicht».) Mises saw in the statistical conceptions a great progress towards unification. We were freed from a logically unsatisfactory dualism. The equations of quantumphysics connect probability distributions and the statements of microphysics have the character of probability propositions. *No* measurement is without intervention of statistics in macrophysics as well as in microphysics."[16]

In der Tat suchte von Mises Kontakte zu den Physikern, die er mit seinem Freund, dem späteren Einstein-Biographen und Physiker in Prag, Philipp Frank, ohnehin hatte.[17] Von Mises hatte bereits 1918 seine Fehlertheorie für Normalverteilungen auf dem Kreis veröffentlicht, die heute innerhalb der modernen Theorie «Directional Statistics» durchaus als fruchtbar anerkannt ist, so sehr sie damals wegen ihrer scheinbaren Losgelöstheit von physikalischem Inhalt auch auf die Skepsis von Kollegen wie Pólya traf.[18] Von Mises bewunderte Einstein und dessen Relativitätstheorie und er versuchte in vielen Diskussionen in Berlin, Einstein von seiner Wahrscheinlichkeitstheorie zu überzeugen. Auch Max von Laue sollte in Berlin zu seinen ständigen Gesprächspartnern gehören; er publizierte

[15] Hausdorff, dessen Nachlass in Bonn gegenwärtig in einer hervorragenden Edition bearbeitet wird, hätte eine solche Alternative schon damals anbieten können, wie unter anderem seine unveröffentlichten Vorlesungsskripte zeigen.

[16] Siegmund-Schultze 2004a, S. 363.

[17] Siegmund-Schultze 2007.

[18] Siegmund-Schultze 2006.

gemeinsam mit von Mises,[19] war unter anderem Korreferent für die wahrscheinlichkeitstheoretische Dissertation des Mises-Schülers Paul Höflich[20] und bezeichnete von Mises einmal 1931 als «meine ständige mathematische Beratungsstelle.»[21]

Der Beginn des Kontaktes zu Einstein – ebenfalls in den für von Mises so ereignisreichen Monaten Ende 1919 – war vielversprechend.[22] Von Mises hatte an Einstein in Berlin ein Manuskript mit dem Titel «Ausschaltung der Ergodenhypothese in der physikalischen Statistik» geschickt und um Kommentare und Vermittlung einer Publikationsmöglichkeit gebeten. Einige Bemerkungen über die Stoßrichtung der von Misesschen Arbeit,[23] die einen stark methodologischen und physikalisch-philosophischen Charakter trägt, sind erforderlich.

Philosophisch relevante Begriffe wie Zufall, Determinismus, Kausalität haben offensichtlich Verbindung sowohl zur Wahrscheinlichkeitsrechnung als auch zur Physik. Solche Begriffe waren seit Jahrzehnten in der Physik kontrovers diskutiert worden, gerade von Ernst Mach, Ludwig Boltzmann und Franz Exner in von Mises' Heimatstadt Wien.[24] Richard von Mises, der philosophisch interessierte Mathematiker und Ingenieur, konnte diesen Diskussionen nicht entgehen. Als ein kritischer Anhänger von Mach hatte von Mises zweifellos seine eigene Sicht auf die Geschichte der Thermodynamik und auf Boltzmanns statistische Mechanik, insbesondere auf das Problem der Atomistik, die er einmal als eine Theorie bezeichnete, die Boltzmann zum Zwecke der Rettung des Determinismus in der Physik eingeführt habe.[25] Von Mises sah nun die

[19] Laue/Mises 1926/1936.

[20] Höflich 1927.

[21] Max Laue an Mises, Postkarte 24.7.1931, Harvard University Archives, HUG 4574.5, box 2, folder 1931.

[22] Der weiter unten zitierte Briefwechsel zwischen Einstein und von Mises ist bereits in den Collected Papers von Einstein, Band 9, abgedruckt worden, jedoch ohne inhaltliche Analyse der Beziehung zu von Mises. Vgl. Einstein 2004, document 195, doc 205 und doc 226.

[23] Mises 1920.

[24] Hanle 1979. Stöltzner 1999.

[25] Diese letzte Bemerkung findet sich in Mises 1930, S. 152. Manche Bemerkungen von Mises' zur Geschichte der Thermodynamik und des Ergodentheorems der statistischen Mechanik müssen zweifellos vor dem Hintergrund der Arbeiten von S. Brush und anderer Historiker noch gründlich auf ihre völlige Stichhaltigkeit hin untersucht werden.

Wahrscheinlichkeitsrechnung als berufen, einer weiteren Verallgemeinerung des Determiniertheitsprinzips in der Physik zum Durchbruch zu verhelfen. In einem gesonderten Absatz «Die physikalische Bedeutung des neuen Ansatzes» sagt von Mises in seiner Arbeit von 1920:

> «In der Physik der sichtbaren Welt bestand, bis zum Auftreten der modernen Atomistik, die Auffassung, dass durch den augenblicklichen Zustand (und eventuell die Vergangenheit) eines abgeschlossenen Systems der weitere Ablauf seiner Zustandsänderungen eindeutig gegeben sei. Die atomistischen Theorien seit Boltzmann haben dieses ‹Determinationspostulat› dahin eingeschränkt, dass nur der *mikroskopisch* gegebene Anfangszustand (eventuell einschließlich der mikroskopischen Vergangenheit) den weiteren Ablauf, und zwar auch den makroskopischen, bestimmt. … Die Wendung, die wir hier der physikalischen Statistik geben, verlangt aber eine noch *etwas weitergehende Einschränkung* des Determinationspostulates.»[26]

Von Mises begründet diese Notwendigkeit damit, dass bereits in der makroskopischen Physik Idealisierungen erfolgen, die letztlich statistische Methoden erfordern:

> «Unser Standpunkt zum Determinationspostulat der Mechanik ist hiernach wie folgt bestimmt. Nur wenn das mechanische System mit allen inbetracht kommenden Nebenerscheinungen, Unregelmäßigkeiten usf. gegeben wird – was im Falle des *Galton*schen Bretts oder des Gasmodells praktisch unerreichbar ist –, lassen die Differentialgleichungen der Bewegung aus dem Anfangszustand die Folgezustände berechnen. Für das *idealisierte* System – und nur mit einem solchen haben wir es in allen Problemen der statistischen Mechanik zu tun – besteht diese Determinierung nicht: hier versagt der mechanische Ansatz und nur die Wahrscheinlichkeitsrechnung führt zu einer gewissen, freilich andersartigen Aussage über die Bewegung.»[27]

Im Mittelpunkt der Arbeit von Mises' von 1920 steht nun insbesondere der natürlich nicht neue, schon bei den Ehrenfests 1911 deutlich herausgestellte Gegensatz zwischen dem durch die klassische Mechanik und die Gleichungen der mathematischen Physik determinierten Verlauf der Zustandsänderung in aus vielen «Molekülen» bestehenden physikali-

[26] Mises 1920, S. 230. Hervorhebungen im Original.
[27] Mises 1920, S. 231. Hervorhebungen im Original.

schen Systemen (zum Beispiel Gasvolumen) und der Notwendigkeit der Heranziehung wahrscheinlichkeitstheoretischer Hilfsmittel bei der Ermittlung von Durchschnittswerten jener Zustandsänderungen. Mises verweist direkt auf die Arbeit der Ehrenfests und sagt 1920:

> «Es besteht ... ein tiefliegender Widerspruch in der physikalischen Statistik darin, dass man auf der einen Seite den Ablauf der Vorgänge als durch die physikalischen Gleichungen (die Differentialgleichungen der Bewegung des Systems) *völlig bestimmt* ansieht, dann aber doch von ganz anderer Seite [also statistischer Seite; R.S.] her zu *bestimmten Aussagen* über diesen Ablauf gelangen zu können meint.»[28]

Von Mises spielte hier natürlich zunächst auf das an, was er «Ergodenhypothese im engeren Sinne» nannte, nämlich

> «die Annahme, dass das ins Auge gefasste mechanische System im Laufe der Zeit alle Zustände, die mit der ihm mitgegebenen Totalenergie verträglich sind, tatsächlich durchläuft (oder zumindest jedem solchen Zustand beliebig nahe kommt).»[29]

Ganz im Sinne einer konsequenten wahrscheinlichkeitstheoretischen Denkweise lehnte von Mises eine auf die engere Ergodenhypothese gegründete Möglichkeit der Berechnung von Zeitabläufen (Zeitmitteln) für individuelle (!) Systeme aus vorgegebenen statistischen Durchschnitten (Phasen- oder Raummitteln) prinzipiell ab. Darüber hinaus war von Mises anscheinend generell skeptisch auch gegenüber einer der engeren Ergodenhypothese entsprechenden konkreten statistischen Aussage der Durchmischung des Phasenraumes, da diese

> «gleichbedeutend ist mit der Annahme gleicher mittlerer kinetischer Energie für alle Freiheitsgrade des Systems. Da diese Annahme in der Theorie der Strahlung, der spezifischen Wärme bei niederen Temperaturen usw. in grellem Widerspruch mit der Erfahrung steht.»[30]

[28] Mises 1920, S. 227. Hervorhebungen im Original.

[29] Mises 1920, S. 225.

[30] Mises 1920, S. 225. Vergleiche die Diskussion mit Einstein über das «Äquipartitionsgesetz der Energie» unten. Allerdings nahm von Mises in seinem in derselben Arbeit speziell behandelten Problem der Brownschen Bewegung eine solche starke Durchmischungseigenschaft an (s. u.). Generell ist die physikalische Realisierbarkeit strenger Ergodenhypothesen auch im statistischen Sinne nach wie vor ein Problem der Forschung.

Aus prinzipiellen Gründen lehnte von Mises auch jegliche «Ergodenhypothese im weiteren Sinne» ab:

> «Wir wollen als ‹Ergodenhypothese im weiteren Sinn› jede Annahme bezeichnen, … die gestattet, *den für irgendeine konstruierte Gesamtheit auf kombinatorischem Weg errechneten Wert einer relativen Häufigkeit hinterher zu deuten als die relative Zeitdauer beim wirklichen Ablauf der Bewegung eines bestimmten mechanischen Systems.*»[31]

Von Mises plädierte somit im Grunde für einen rein probabilistischen Zugang zur Ergodentheorie, wie er später beispielsweise auch von dem Russen A. Khinchin in seiner Umformulierung des Birkhoffschen individuellen Ergodensatzes – nicht unbeeinflusst von von Mises' Vorbild übrigens – verfochten wurde.

Es sei noch bemerkt, dass von Mises' Auffassung von der Ergodenhypothese als Ausdruck eines «tiefliegenden Widerspruchs in der physikalischen Statistik» damals anscheinend auch von anderen Mathematikern und Physikern geteilt wurde. Sogar der dem von Misesschen Wahrscheinlichkeitsbegriff gegenüber sehr skeptische Pólya schrieb ihm am 4. Dezember 1919:

> «Wenn Sie diese ‹ominöse› Ergodenhypothese aufklären oder vielleicht vollständig beseitigen könnten, so wäre das wirklich ein wichtiger Dienst und eine mir persönlich sympathische Arbeit.»[32]

Am 6. Dezember bestätigte Einstein den Empfang des von Misesschen Manuskriptes mit den folgenden Worten:

> «Die mir übersandte Arbeit, sowie die über das Fundament der Wahrscheinlichkeitsrechnung handelnde[33] habe ich mit großem Interesse studiert. Sie haben sich durch die Klärung der fundamentalen Begriffe wirklich ein grosses Verdienst erworben.
>
> Auch ist es interessant zu sehen, wie weit man ohne Ergodenhypothese kommen kann. Die Hauptfrage, ob das Äquipartitionsgesetz aus der Mechanik mit Notwendigkeit folgt, oder ob dies nicht der

[31] Mises 1920, S. 226. Hervorhebungen im Original.

[32] Siegmund-Schultze 2006, S. 502. Pólya arbeitete damals bekanntlich selbst an Irrfahrtsproblemen (random walks), die in enger Beziehung zu Markovschen Ketten und zugehörigen Ergodenproblemen stehen. Alexanderson 2000.

[33] Anscheinend hatte von Mises dem Brief auch den Sonderdruck einer seiner Arbeiten über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Mises 1919 a/b) beigelegt.

> Fall ist, bleibt allerdings nach wie vor offen! Ich glaube fest daran, dass endlich die Antwort bejahend ausfallen wird.»[34]

Einstein teilte von Mises auch mit, dass eine Publikation seines Manuskripts in den *Sitzungsberichten der Preußischen Akademie der Wissenschaften* nicht in Frage käme, da diese überfüllt und gewöhnlich Akademiemitgliedern vorbehalten seien.[35] Er fragte von Mises, an welche Zeitschrift er das Manuskript statt dessen schicken solle. Dieser bat daraufhin um die Übersendung des Manuskripts an die *Physikalische Zeitschrift*, wo es dann 1920 erschien.

3 Der zweite Teil der Arbeit von Mises': die prinzipielle Behandlung eines stark vereinfachten Modells der Brownschen Bewegung und die Vorahnung Markovscher Ketten[36]

Im zweiten Teil seiner Arbeit (Mises 1920), die den Untertitel «Brownsche Bewegung als Beispiel» trägt, nahm sich von Mises vor, seinen «neuen Ansatz» an einem Beispiel zu demonstrieren. Die von dem schottischen Botaniker Robert Brown 1827 erstmals beschriebene Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten makroskopisch beobachtbaren Teilchen war längst als ein mögliches Anwendungsfeld der Wahrscheinlichkeitsrechnung erkannt worden. Arbeiten von A. Einstein,[37] M. Smoluchowski und anderen Physikern hatten schon Anfang des Jahrhunderts nicht nur dem Atomismus in der Physik (als Erklärung der Ursachen der Brownschen Bewegung) endgültig zum Durchbruch verholfen, sondern auch numerisch verwertbare Modelle zur Beschreibung der Brownschen Bewegung geliefert, wenn auch eine mathematisch zufriedenstellende Theorie erst dem Amerikaner Norbert

[34] Einstein 2004, S. 275/276, document 195.

[35] Dies war für von Mises als künftigem Berliner zweifellos ein besonders attraktiver Publikationsort. Es sollte sich schließlich zeigen, dass von Mises selbst nie Mitglied dieser führenden Wissenschaftsakademie werden sollte, wohl unter anderem wegen der Kontroversen rund um seine Wahrscheinlichkeitstheorie.

[36] Vergleiche für die mathematischen Einzelschritte hier die Rekonstruktion bei Antretter 1989, S. 32 – 39, und partiell darauf gestützt Hochkirchen 1999, S. 180 – 193.

[37] Purkert 1983.

Wiener um 1923 gelang, so dass das adäquate mathematische Modell der Brownschen Bewegung heute auch häufig als *Wienerscher Prozess* bezeichnet wird.[38]

Von Mises' Arbeit zur Brownschen Bewegung war definitiv methodologisch und idealisierend. Vor allem war es sein Grundprinzip, eine rein wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung zu geben, so dass konkrete mechanische Annahmen über die Flüssigkeit, wie ihre Zähigkeit, insbesondere die Diffusionsgleichung, bei von Mises gar nicht auftreten. Von Mises macht darüber hinaus stark vereinfachende Annahmen für die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Teilchen:

> «Die Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes Teilchen, sich zu einer feststehenden Zeit in einem beliebigen der N Gitterpunkte aufzuhalten, ist – laut Annahme – gleich $1 : N$.»[39]

Trotz solch einschränkender Annahmen, zu denen auch die noch zu erwähnenden über die Änderungswahrscheinlichkeiten in der Zeit gehörten, die das Problem zu einer ‹kräftefreien Irrfahrt› machten, fand von Mises seine Idealisierung der Brownschen Bewegung in methodischer Hinsicht interessant und schwierig genug, um es in seinem Aufsatz exemplarisch zu behandeln. Er leitete gemäß seiner Theorie der Kollektivs (Verteilungen) aus dem «Ausgangskollektiv» (der Gleichverteilung) zunächst sorgfältig ein anderes Kollektiv (Verteilung) für denselben festen Zeitpunkt 0 ab, das für großes N (also sehr feine Aufteilung des Raumes) die (Bernoullische) Verteilung $w_n(x)$ für den Aufenthalt von x der n Teilchen in einem beliebigem Gitterpunkt ergibt. Daraus gewinnt er für großes N die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Gitterpunkte, an denen sich zum selben Zeitpunkt gerade x der n Teilchen befinden, wobei er zeigt, dass diese Wahrscheinlichkeit, die die Zustandsverteilung im Raum (‹Raumgesamtheit›) angibt, denselben zuvor berechneten Wert $w_n(x)$ besitzt.[40] Man erkennt in diesen relativ elementaren Schritten, die aber doch genaue Abschätzungen der in den Verteilungen auftretenden Erwartungswerte und Streuungen voraussetzten, von Mises' Bemühen um absolute mathematische Strenge. Man mag auch erkennen, dass

[38] Krengel 1990, S. 469.

[39] Mises 1920, S. 256. Gemeint ist natürlich der Aufenthalt in dem dem Gitterpunkt zugehörenden Intervall.

[40] Mises 1920, S. 258.

diese umständliche, an von Mises' Kollektivs gebundene Schlussweise manchen Anwender abgeschreckt haben könnte.

Nun kam das, was von Mises als das eigentlich Neue seines Zugangs zur Theorie physikalischer Prozesse (hier das einfache Modell einer Brownschen Bewegung) ansah und deshalb im ersten Teil seiner Arbeit als «neuen Ansatz»[41] bezeichnet hatte:

> «Das zweite Ausgangs-Kollektiv und seine Ableitungen (Zeitgesamtheit). Wir wählen jetzt als Grundlage der weiteren Betrachtungen folgendes Kollektiv. Element sei die Beobachtung eines Teilchens zu Beginn und zu Ende einer Zeitspanne τ, Merkmal die Lagenänderung in dieser Zeit, also die Angabe der drei Koordinaten des neuen Standortes bezogen auf den ursprünglichen.»[42]

Von Mises setzt dabei noch voraus, dass die Wahrscheinlichkeiten der Änderungen der Lage der Teilchen «Symmetrie» besitzen, so dass «keine der drei Koordinatenrichtungen [$\varkappa\lambda\mu$] vor den anderen bevorzugt ist, wie es etwa durch den Einfluss einer äußeren Kraft bedingt sein könnte.» Ferner sollen die Werte jener Wahrscheinlichkeiten $p_{\varkappa\lambda\mu}$ «von der Anfangslage des Teilchens unabhängig» sein, was eine gute «Mischung der gesamten Emulsion» bereits zum Ausgangszeitpunkt 0 voraussetzt.[43]

Von Mises ist nun daran interessiert, Aussagen über den Verlauf des physikalischen Prozesses zu erhalten,[44] also das System zu späteren Zeitpunkten $m\tau$ zu betrachten und auf diesem Wege die «Zeitmittel» für die Annahme der verschiedenen Zustände des Systems zu berechnen. Letztlich plädiert er hier also für Anfangsgründe einer Theorie stochastischer Prozesse. Deshalb wendet von Mises auch auf dieses zweite Ausgangskollektiv die systematischen Operationen seiner Theorie der Kollektivs (Verteilungen) an, die aus vorgegebenen Verteilungen neue Verteilungen ableiten:

> «Durch ‹Verbindung› von m Kollektivs, die alle dem eben besprochenen gleich sind, entsteht ein neues, dessen Element die Beobachtung eines Teilchens durch m aufeinanderfolgende Zeit-

[41] Mises 1920, S. 227.
[42] Mises 1920, S. 256, 258.
[43] Mises 1920, S. 258.
[44] Mises 1920, S. 227: «die Physik will ja gerade über den zeitlichen Ablauf der Erscheinungen etwas aussagen.»

> spannen und dessen Merkmal die Angabe der 3 m, die m Lagenänderungen charakterisierenden Zahlen … bildet.»[45]

Die «Stationarität» (zeitliche Homogenität) des Prozesses wird hier durch die Bedingung garantiert, dass die m Kollektivs «alle dem eben besprochenen gleich sind», das heißt, dass zu jedem späteren Zeitpunkt $m\tau$ dieselben Wahrscheinlichkeiten der Ortsänderung ('Lagenänderung') eines Teilchens vorliegen.

Für große m gibt von Mises gewisse Grenzwahrscheinlichkeiten für die Lagen*änderungen* nach m Schritten an,[46] die er auf seine erste wahrscheinlichkeitstheoretische Arbeit über die «Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung»[47] zurückführt, wo er verschiedene diskrete und stetige Versionen des Zentralen Grenzwertsatzes für unabhängige (!) Kollektivs (Verteilungen) diskutiert und bewiesen hatte.[48]

Nun werden aber offensichtlich die «Zeitmittel» des Systems, d. h. die Wahrscheinlichkeiten mit denen sich Teilchen über einen langen Zeitraum in einem bestimmten Zustand (Lage, Gitterpunkt) befinden, nicht unmittelbar durch Wahrscheinlichkeiten der Ortsänderung (!) zu festen Zeitpunkten oder durch deren Grenzwerte beschrieben. Deshalb musste von Mises einen weiteren Schritt gehen und mit Mitteln der Kombinatorik Häufigkeiten $f_{n,m}(x)$ berechnen, die in der Grenze $m \to \infty$ die Verteilung der n Teilchen über den Zustandsraum in der Zeit(!) angeben. Von Mises kommt hier zu dem folgenden Ergebnis für seinen einfachen Spezialfall der Brownschen Bewegung, zu einem Ergebnis, das die Identität der Verteilungen der «Raum- und Zeitgesamtheiten» ausdrückt:

> «Die Wahrscheinlichkeit dafür dass n Teilchen von einem beliebigen[49] Anfangszustand aus, im Verlauf der Zeit $m\tau$, in einen Zustand übergehen, bei dem an einer bestimmten Stelle sich gerade xTeilchen befinden, hat bei großem m und n denselben Wert $w_n(x)$ der [von Mises verweist hier auf die oben zitierten Ableitungen zur Raumgesamtheit; R. S.] als Wahrscheinlichkeit

[45] Mises 1920, S. 258/259.
[46] Mises 1920, S. 259.
[47] Mises 1919a.
[48] Siegmund-Schultze 2006.
[49] ‹Beliebig› natürlich unter Voraussetzung der speziellen einfachen Verteilung; R. S.

> für das Auftreten der Teilchenanzahl x in einem Punkte gefunden wurde.»[50]

Dieses Resultat hört sich nun allerdings ganz nach einem Äquivalent der Ersetzbarkeit des Zeitmittels durch das Raummittel in der klassischen Thermodynamik an. Hochkirchen geht deshalb so weit, in dieser Arbeit die «Geburtsstunde der Ergodentheorie»[51] zu sehen. Die «Ergodenhypothese» (das heißt die starke Mischungseigenschaft) wird hier allerdings durch die speziellen starken Annahmen (Gleichverteilung und symmetrische Änderungswahrscheinlichkeiten) erzwungen. Wichtiger für von Mises war der Nachweis (wenn auch nur in einem sehr stark vereinfachten System) der mathematischen *Existenz* von Zeitmitteln. Er sagt ausdrücklich im Zusammenhang mit dem obigen Resultat:

> «Das Bemerkenswerteste an diesem Resultat ist die Unabhängigkeit des $f_{n,m}(x)$ von der Anfangsaufstellung.»[52]

Die Gleichheit (in der Grenze) dieser $f_{n,m}(x)$ mit dem Raummittel war sekundär, und von Mises sagt im ersten, allgemeineren Teil seiner Arbeit:

> «Man könnte schließlich fragen, ob unser Ansatz vielleicht die Ergodeneigenschaft der Systembahnen tatsächlich bestätigt, etwa in dem Sinne, dass die überwiegende Mehrheit der Bahnen die gesamte Energiefläche erfüllt. Dies lässt sich jedoch nicht folgern. Es könnte sehr gut sein, dass jede Bahn einen Teil der Energiefläche unberührt lässt und dass trotzdem für jedes Zustandsgebiet A in fast allen Bahnen die gleiche zeitliche Häufigkeit resultiert.»[53]

Von Mises überlässt es vielmehr prinzipiell der Mechanik zu entscheiden, welche konkreten Aufenthalts- und Übergangswahrscheinlichkeiten für das System vorausgesetzt werden, die dann ein statistisches Äquivalent der «Ergodenhypothese» sein können. Dies macht gerade seine

[50] Mises 1920, S. 260.

[51] Hochkirchen 1989, S. 118/192. Antretter dagegen geht einen Schritt zu weit, wenn er von Mises' Resultat als «ersten ‹Ergodensatz› innerhalb der Wahrscheinlichkeitstheorie» bezeichnet, zumal der rein mathematische Inhalt relativ trivial ist. Antretter 1989, S. 37. Auch wenn der Schwerpunkt dieser Aussage auf dem Wort «innerhalb» zu liegen scheint, gab es bekanntlich schon Resultate von Markov für Ketten mit positiven Übergangswahrscheinlichkeiten mit analogen Aussagen über Grenzverteilungen. Seneta 1996.

[52] Mises 1920, S. 260.

[53] Mises 1920, S. 232.

Abgrenzung von der Mechanik und seine Fokussierung auf einen rein wahrscheinlichkeitstheoretischen Zugang aus. Von Mises sagt hierzu:

> «In der Tat stellt sich die hier anzudeutende neue Theorie auf den Standpunkt, dass bestimmte Aussagen über den wirklichen Verlauf der Bewegung eines einzelnen Systems nur aus den mechanischen Gleichungen, aber niemals aus Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen abgeleitet werden können.»[54]

Und weiter, im speziellen zweiten Teil seiner Arbeit:

> «Der ‹mechanische Ansatz› liefert also keineswegs ein Ergebnis, das mit dem der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Konkurrenz tritt, sondern legt nur den Zusammenhang zwischen den die Ausgangsverteilungen bestimmenden Größen … und physikalischen Variablen fest. Dies ist die Rolle, die den physikalischen Gesetzen auf jedem Gebiet der physikalischen Statistik zufällt.»[55]

Obwohl von Mises von «Wahrscheinlichkeiten» spricht, wenn er den Grenzwert der relativen Häufigkeiten $f_{n,m}(x)$ für $m \to \infty$ meint, hat er schon zuvor im ersten, allgemeinen Teil seiner Arbeit von 1920 klar gemacht, dass die «Zeitgesamtheit» eigentlich kein «Kollektiv» im Sinne seiner strengen Wahrscheinlichkeitstheorie ist, da sie das Axiom der Regellosigkeit nicht erfüllt. Mises schreibt:

> «Es mag noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass die von uns betrachtete ‹Zeitgesamtheit› … keineswegs ein Kollektiv bildet. Der ganze Gang der Überlegungen hat in keiner Weise dazu geführt, in ihr ein Kollektiv zu sehen, und sie erfüllt auch nicht die unumgängliche Bedingung der ‹Zufallsartigkeit› der Zuordnung, da ja zwischen unmittelbar hintereinanderfolgenden Zahlen gewisse Bindungen bestehen. Die relative Zeitdauer y ist somit auch im limes für $m = \infty$ keine Wahrscheinlichkeit im Sinne unserer Definition. In dieser sich von selbst ergebenden Wendung erblicken wir ein besonders befriedigendes Ergebnis der Theorie, da sie den Zwiespalt der Auffassung zwischen kausaler Verknüpfung und Zufälligkeit vermeidet.»[56]

Während die aufeinanderfolgenden *Ortsänderungen* zu jedem Zwischenzeitpunkt noch als unabhängige Zufallsgrößen aufgefasst werden

[54] Mises 1920, S. 226.
[55] Mises 1920, S. 261.
[56] Mises 1920, S. 229.

können und damit die Anwendung klassischer Sätze wie des Zentralen Grenzwertsatzes gestatten, ist der zu einem gewissen Zwischenzeitpunkt resultierende Ort des Teilchens abhängig von dem beim vorhergehenden Zeitpunkt resultierenden Ort.

Man erkennt an dieser Stelle vielleicht am deutlichsten, welche Vorteile an Durchsichtigkeit und Systematik von Mises' Theorie durch die Einbeziehung Markovscher Ketten gewonnen hätte. In der modernen Theorie Markovscher Ketten wird die Brownsche Bewegung bekanntlich oft umgekehrt durch Mengen von Zufallsgrößen (B_i) definiert deren Inkremente $B_{i+1} - B_i$ unabhängige Gaußsche Zufallsgrößen sind. Der erste Schritt der Theorie ist dann der Nachweis der «Existenz»[57] einer Brownschen Bewegung, wobei Resultate von Wiener verwendet werden, die kurz nach von Mises' Arbeit um 1923 gefunden wurden. Von «Markovschen Ketten» war aber in von Mises' Arbeit nicht die Rede, obwohl von Mises Markovs Lehrbuch in der deutschen Übersetzung von 1912 nachweislich[58] kannte. Wieners Arbeiten dagegen nahm von Mises noch nicht einmal in seinem Lehrbuch von 1931 oder in den vielen deutschen und englischen Auflagen seines halbpopulären Buches von 1928 über «Wahrscheinlichkeit, Statistik, Wahrheit» zur Kenntnis. Aber auch die Franzosen und B. Hostinský waren hier nicht besser informiert,[59] obwohl Wiener die modernen (französischen) funktionentheoretischen Methoden verwendete.

4 Die Rezeption der Arbeit von Mises' durch die Physiker

Die erste Reaktion erhielt von Mises natürlich von Einstein, wie oben dokumentiert. Einstein hatte sich in seiner Arbeit von 1905 die Wahrscheinlichkeitstheorie noch selbst zurechtlegen müssen[60] – eine systematische

[57] Norris 1997, S. 160/61. Diese Formulierung ist angesichts der unbestreitbaren Existenz des physikalischen Phänomens «Brownsche Bewegung» ein gutes Beispiel für die inzwischen erreichte Verselbständigung mathematischer Modellierung und Theorie gegenüber dem physikalischen Ausgangsproblem.

[58] Von Mises schreibt am 3. Juli 1918 in sein Tagebuch: «Etwas Markoff gelesen. Namentlich versucht, die Probleme der verketteten Wahrscheinlichkeiten zu verfolgen.» Harvard University Archives, HUG 4574.2.

[59] Bru 2003.

[60] Purkert 1983.

wahrscheinlichkeitstheoretische Behandlung stochastischer Prozesse sollte noch ein weiteres Vierteljahrhundert auf sich warten lassen.[61] Er muss deshalb besonders an von Mises' Arbeit interessiert gewesen sein. Allerdings knüpfte er daran auch unmittelbare Erwartungen, wie die Begründung des Äquipartitionssatzes der Energie, die von Mises in seinem Manuskript von vorherein als physikalisch nicht allgemeingültig und methodisch nicht im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung liegend kennzeichnete. Es bestehen deshalb gewisse Zweifel, dass Einstein die Intentionen der von Misesschen Arbeit wirklich im vollen Umfang teilte oder auch nur verstand. Die Reaktion von Mises' auf Einsteins Brief vom 6. Dezember 1919 fiel dementsprechend höflich aber auch etwas kopfschüttelnd aus. Er antwortete noch von Dresden aus am 10. Dezember 1919 in folgender Weise:

> «Ihre Äußerung über das Äquipartitionsgesetz ist mir sehr wertvoll, wenn ich sie auch nicht ganz verstehen kann. Ich glaube eben, gezeigt zu haben, dass die Mechanik überhaupt keine derartigen Aussagen über den Ablauf der Bewegung statistischer Systeme gestattet. Die Aussagen, die möglich sind (mit ‹erdrückender Wahrscheinlichkeit› ist zu erwarten, dass…) fließen nicht aus der Mechanik allein, sondern unter Zuhilfenahme von wahrscheinlichkeitstheoretischen Annahmen. Doch will ich die Frage noch weiter zu klären versuchen.»[62]

Einstein antwortete darauf von Mises am 21. Dezember 1919 und erläuterte seinen vorigen Brief:

> «Die Frage des Äquipartitions-Satzes scheint mir so zu liegen. Sie haben in Ihrer Arbeit ein System von Konsequenzen gezeigt, zu welchem man ohne Ergoden-Hypothese, das heißt ohne unerlaubte zusätzliche statistische[63] Voraussetzungen gelangen kann. Sie scheinen mir aber nicht bewiesen zu haben, dass, bezw. in welchen Fällen, aus den Voraussetzungen der Mechanik allein der Äquipartitionssatz nicht gefolgert werden kann. Mir scheint es immer noch so zu liegen, dass die Mechanik den Äquipartitions-Satz

[61] Kolmogorov 1931. Auch diese Arbeit war noch begrenzt auf Markovsche, «nachwirkungsfreie» Prozesse, wo die Vergangenheit des physikalischen Systems ignoriert werden konnte.

[62] Einstein 2004, S. 290/291, document 205.

[63] Entweder ist das ein lapsus linguae von Einstein, oder er hat von Mises nicht ganz verstanden.

> verlangt, wenn dies auch noch nicht stringent bewiesen worden ist. Ich habe den Eindruck, dass man den der Quanten-Theorie zugrunde liegenden Tatsachen nur durch eine Modifikation oder prinzipielle Spezialisierung der Grundlagen der Mechanik wird gerecht werden können.»[64]

Von Mises setzte seine Diskussionen mit Einstein über Wahrscheinlichkeit in den folgenden Jahren fort, wobei er es nicht an Selbstbewusstsein gegenüber dem von ihm bewunderten großen Physiker fehlen ließ. Bereits am 11. September 1920 schrieb er seiner Mutter in Wien:

> «Du wünschst noch ein Gutachten über Einstein? Es besteht gar kein Zweifel, dass er ein unvergleichlich genialer Naturforscher ist. Was er auf verschiedenen Gebieten geleistet hat, wird solange Menschen leben und denken, zu dem Allergrößten gezählt werden. Auch heute gibt es keinen ernsthaften Fachmann, der daran zweifelt. Ich betone das umso mehr, als ich selbst (in einem Punkt, der mit seiner Relativitätstheorie nichts zu tun hat) eine von der seinen abweichende Meinung vertrete und mit aller Energie gegen ihn aufrecht halte. In der physikalischen Gesellschaft in Berlin haben wir uns unlängst vor einem ‹Parkett von Königen› scharf auseinandergesetzt.»[65]

So lange den Physikern keine alternative und ihnen begrifflich verständliche mathematische Theorie physikalischer Prozesse angeboten wurde, musste der von Misessche Ansatz eine gewisse Anziehungskraft ausüben.[66] In seinem voluminösen, wenn auch nur in einem kleineren Verlag erschienenen Buch *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen in der Statistik und der theoretischen Physik*[67] hat von Mises dann – gestützt auf die Theorie quadratischer Matrizen mit nichtnegativen Elementen von O. Perron (1907) und G. Frobenius (1912) – zur Theorie der Matrizen von Übergangswahrscheinlichkeiten beigetragen, was in der sich erst zur damaligen Zeit allmählich entwickelnden Theorie Markovscher Ketten

[64] Einstein 2004, S. 318, document 226. Hervorhebungen im Original.

[65] HUG 4574.5.2, Box 3: Letters and Postcards to his mother. Correspondence 1912/13 – 1920.

[66] Antretter (1989) erwähnt Reaktionen von A. Smekal und R. Fürth, meint aber, dass die Wirkung der von Misesschen Arbeiten auf die Physiker «nicht sonderlich groß» war. Antretter 1989, S. 41.

[67] Mises 1931.

mit endlich vielen Zuständen Bedeutung erlangte.[68] Indem von Mises von seinem stark vereinfachten Modell einer Brownschen Bewegung abrückt, schreibt er in seinem Buch:

> «Nicht die – physikalisch kaum sinnvolle – Annahme, dass gewisse Zustände gleichwahrscheinlich sind, sondern die, dass zwischen diesen Zuständen symmetrische, d. h. vertauschbare Übergangs-Wahrscheinlichkeiten bestehen, bildet die sachgemäße Grundlage der kinetischen Gastheorie und ähnlicher physikalisch-statistischer Theorien.»[69]

Für solche mathematisch modellierten Systeme beweist von Mises in seinem Buch gestützt auf Frobenius einen von ihm selbst sogenannten «Pseudo-Ergodensatz,» der von Physikern wie dem Russen M. Leontovich aufgegriffen wurde. Letzterer schrieb in einer im November 1932 eingereichten Arbeit

> «Es wird … der Misessche Pseudoergodensatz für den Fall der in der Zeit kontinuierlichen Vorgänge formuliert.»[70]

Mises' konkrete Ansätze mit Matrizen der Übergangswahrscheinlichkeiten (Markov-Ketten mit diskreter Zeit) waren also hier ein Stimulus für eine inhaltliche Ausfüllung der Theorie stochastischer (Markovscher) Prozesse mit kontinuierlichem Zeitparameter, die inzwischen in der von Leontovich zitierten Kolmogorovschen Theorie der «stochastisch definiten» Prozesse[71] schon vorlag. Von Mises' Beitrag zur mathematischen Theorie der Markovschen Ketten wurde schließlich auch von Kolmogorov anerkannt.[72] Leontovich dankte am Ende seines Artikels nicht nur Mandelstam (dem Freund von Mises' aus gemeinsamer Zeit in Straßburg) für «fruchtbare Unterhaltungen» sondern auch Kolmogorov für «aufklärende Besprechungen der mathematischen Fragen». Wenig später veröffentlichte er selbst zusammen mit Kolmogorov.[73] Beide unter Beteiligung Leontovichs erschienenen Publikationen figurieren in Kolmogorovs einflussreichem Buch als wesentliche physikalische

[68] Siehe Details für von Mises' Anwendung in Antretter 1989 und Hochkirchen 1999, sowie für die allgemeine Theorie Romanovsky 1970 und Seneta 1981.
[69] Mises 1931, S. 555.
[70] Leontovich 1933, S. 35.
[71] Kolmogorov 1931.
[72] Kolmogorov 1935, S. 159.
[73] Kolmogorov/Leontovich 1933.

Stimuli seiner Wahrscheinlichkeitstheorie, die bekanntlich auch die allgemeinen Grundlagen für eine Theorie der stochastischen Prozesse legte.[74] Während Leontovich anscheinend besonders stark mit modernen mathematischen Hilfsmitteln vertraut war, mag für mathematisch durchschnittlich gebildete Physiker der damaligen Zeit das folgende Urteil des Assistenten von Mises', Rudolf Iglisch, zutreffend gewesen sein. Iglisch, der in seiner Meinung kaum unbefangen gewesen sein wird, schrieb noch 1932, als Kolmogorovs Ergebnisbericht schon unmittelbar vor seiner Publikation stand:

> «Dass die Physiker und praktischen Statistiker, wenn sie sich überhaupt über die Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung Rechenschaft abgeben, in der Mehrzahl den von Herrn v. Mises gegebenen Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung annehmen, hat wohl seinen Grund darin, dass erstens dieser Aufbau seine Konstruktionsbausteine am unmittelbarsten der praktischen Erfahrung entnimmt … und dass zweitens verhältnismäßig wenig spezielle Kenntnisse vorausgesetzt werden aus mathematischen Wissensgebieten, die dem Naturwissenschaftler und Statistiker ferner liegen, wie etwa die Mengenlehre.»[75]

Zweifel besteht jedenfalls weder an dem Wert des konkreten Beitrags von Mises' zur Theorie der Matrizen der Übergangswahrscheinlichkeiten,[76] noch an der methodologischen Bedeutung seiner Arbeit von 1920 für den allmählichen Übergang zu einer rein wahrscheinlichkeitstheoretischen Theorie physikalischer Prozesse, mit langfristigem Einfluss sowohl auf Ergodentheorie als auch auf die Theorie der stochastischen Prozesse. Ein wesentlicher Vermittler dieses Einflusses war zweifellos der russische Stochastiker Alexander Khinchin, der von von Mises' Wahrscheinlichkeitsbegriff jedenfalls ursprünglich stark beeindruckt war und auch von Mises' *Wahrscheinlichkeit, Statistik, Wahrheit* ins Russische übersetzen ließ.[77] Dies führte von Plato zu seinem recht positiven Urteil über von Mises' Einfluss:

[74] Kolmogorov 1933.

[75] Iglisch 1933, S. 471.

[76] Es wäre allerdings diesbezüglich der mögliche Einfluss von Mises' auf die fundamentalen Arbeiten von Wolfgang Doeblin in Paris in der zweiten Hälfte der 1930er Jahre noch zu untersuchen.

[77] Freilich war gerade bei den sowjetischen Mathematikern wie Khinchin und Kolmogorov immer etwas ideologische Berührungsangst vor von Mises, dem bekennenden Anhänger Ernst Machs, im Spiel. Nicht zufällig erschien die russische Übersetzung

> "Khintchine's knowledge of von Mises's 1920 ideas on ergodic theory can be considered the route that led to the purely probabilistic formulation."[78]

Dennoch muss erneut betont werden, dass im Großen und Ganzen die Theorie der stochastischen Prozesse, Ergodentheorie und statistische Mechanik später Wege gegangen sind, die weitgehend von von Mises unabhängig waren, was nicht zuletzt mit von Mises' methodischem Konservatismus hinsichtlich moderner mengen- und funktionentheoretischer Methoden zusammenzuhängen scheint. Eine Bemerkung in A. Khinchins Buch über statistische Mechanik von 1949 deutet zudem an, dass von Mises' probabilistischer «Purismus» seinen Einfluss in gewisser Weise auch beschränkt hat:

> "The main viewpoint of v. Mises differs from the traditional standpoint to such an extent that the theory expounded by him hardly could be given the historically established name of statistical mechanics; mechanical concepts are almost completely eliminated from this theory. In any case we shall have no occasion to compare the exposition of v. Mises with other expositions."[79]

5 Schluss: von Mises' spätere Ansichten zum Indeterminismus und die mangelnde Eignung des Mach-Anhängers Richard von Mises für eine Bestätigung der Forman-These

Es besteht wohl nach dem bisher Gesagten kein Zweifel, dass die Hauptwirkungslinie der von Misesschen Arbeit von 1920 eher methodologisch-philosophisch als mathematisch-technisch war. Dies betraf insbesondere das Problem der mathematischen Verallgemeinerung oder Abschwächung des Determinismuspostulats der klassischen Physik. Es ist deshalb interessant, der weiteren Entwicklung der Ansichten

des von Misesschen Buches 1930 in Moskau mit verkürztem Titel «Wahrscheinlichkeit und Statistik». Der Anspruch des philosophischen Positivisten von Mises auf «Wahrheit» war anscheinend unter der Herrschaft stalinistischer Philosophie ideologisch zu anstößig. Siehe Siegmund-Schultze 2004b.

[78] Plato 1994, S. 112.

[79] Khinchin 1949, S. 6, Fn. 4.

von Mises' nicht zuletzt unter dem Einfluss der sich erst etwa 1925 herausbildenden Quantenmechanik nachzuspüren.

Bereits ein Jahr nach dem Erscheinen seiner Arbeit hielt von Mises auf der Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung im September 1921 einen Vortrag mit dem Titel «Über die gegenwärtige Krise der Mechanik». Von Mises machte von Beginn an expressis verbis klar,[80] dass er als Zeichen der «Krise» keineswegs die Entstehung der Relativitätsmechanik meinte, die er unter «gebundene Mechanik» subsumierte. Von Mises fragte aber dann:

> «Können wir noch annehmen, dass alle Bewegungs- und Gleichgewichtserscheinungen, die wir an sichtbaren Körpern beobachten, sich in dem Rahmen des Newtonschen und der daran anknüpfenden Ansätze [zu denen Mises die Einsteinsche Relativitätstheorie zählte; R. S.] erklären lassen?»[81]

Von Mises wiederholte in seinem Vortrag einige Argumente aus seiner Arbeit von 1920, unter anderem das oben zitierte mit dem Galtonschen Brett, und sprach von der «berüchtigten Ergodenhypothese.»[82] Zusätzlich ging er auf ungeklärte Fragen wie das Turbulenzproblem ein, das seiner Meinung nach ebenfalls wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden zu seiner Lösung erforderte. Von Mises' Freund, der Prager Physiker Philipp Frank, schrieb 1932 in seinem Buch *Das Kausalgesetz und seine Grenzen*:

> «Vielleicht war es zuerst v. Mises, der in seinem Vortrage ‹Über die gegenwärtige Krise der Mechanik› darauf hingewiesen hat, dass auch auf dem Gebiete der Mechanik im engeren Sinne, der beobachtbaren Vorgänge in flüssigen und festen Körpern, Vorgänge existieren, die sich mit Hilfe kausaler Gesetze nicht gut darstellen lassen.»[83]

Es ist darauf hinzuweisen, dass sich von Mises weder 1920 noch 1921 auf den Standpunkt eines «prinzipiellen Indeterminismus» stellte, vielmehr die sachliche Unmöglichkeit meinte, die aus Teilbewegungen zusammengesetzten komplizierten physikalischen Prozesse klassisch

[80] Mises 1922a, S. 25.
[81] Mises 1922a, S. 26.
[82] Mises 1922a, S. 29.
[83] Frank 1932, S. 62.

mit den Differentialgleichungen der Mechanik zu beschreiben. Die Betonung in dem Zitat Philipp Franks lag also auf «beobachtbar».

Freilich änderte von Mises seine Haltung allmählich, und dies nicht zuletzt unter dem Einfluss der Quantenmechanik, also der modernen Physik der «nicht unmittelbar beobachtbaren» Vorgänge. Bereits 1928 schrieb von Mises in seinem Buch *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*, dass selbst die Positionen von Rutherford und Bohr in der Atomtheorie nunmehr verlassen worden seien und sie hätten

> «einer viel allgemeineren, von Ernst Mach vorausgeahnten Auffassung, wonach man den Atomen weder Ort noch Zeit im gewöhnlichen Sinn zuschreiben darf, weichen müssen.»[84]

Das heißt, von Mises versuchte, Machs Zweifel an Boltzmanns Atomismus nachträglich im Lichte der modernen Quantenmechanik als weitsichtig zu interpretieren. Immerhin machte von Mises im September 1929 in seinem Vortrag auf dem 5. Deutschen Physiker- und Mathematikertag in Prag[85] einen Rückzieher vom prinzipiellen Indeterminismus, als er mit Bezug auf eine damals sehr umstrittene quantenmechanische Arbeit[86] sagte:

> «Erscheint so … die statistische Betrachtungsweise als die überlegene und umfassendere, so muss doch eines betont werden: Niemals ist von einem *Widerspruch* zwischen einer Beobachtungsreihe und der klassischen Theorie die Rede, niemals sind wir gezwungen, zu sagen, bei irgend einem Einzelvorgang würde ein Satz der deterministischen Physik *verletzt*. Eine derartige Annahme wurde nur einmal in den letzten Jahren in einer bekannten Arbeit von Bohr, Kramers und Slater gemacht, aber bald als unbegründet wieder fallen gelassen. Die systematische Theorie, die ich seit mehr als 10 Jahren verfolge, hat, obwohl sie dem Indeterminismus weiten Raum gewährt, nie eine andere Form des Versagens der deterministischen Physik gekannt als die, dass sie in gewissen Fällen *leerlaufend*, also unzureichend zur Lösung der Aufgaben sein wird.»[87]

[84] Mises 1928, S. 152.

[85] Die Session war zugleich Teil einer gemeinsamen Tagung des Wiener Kreises und der Berliner Gesellschaft für Empirische Philosophie.

[86] Bohr/Kramers/Slater 1924.

[87] Mises 1930, S. 152. Hervorhebungen im Original.

Doch allmählich hat sich von Mises anscheinend zu einem recht prinzipiellen Indeterminismus durchgerungen. In seiner 1934 aus der türkischen Emigration geschriebenen Stellungnahme zu einem Artikel seines guten Berliner Kollegen Max von Laue,[88] beide Publikationen wiederum in den einflussreichen *Die Naturwissenschaften* erscheinend, unterstreicht er:

> «V. Laue vertritt ... den Standpunkt, man könne trotz der Ungenauigkeitsrelation der deterministischen Auffassung der Physik treu bleiben. ... Hierzu möchte ich nur sagen, dass man meiner Ansicht nach die HEISENBERGsche Ungenauigkeitsrelation *überhaupt nur als einen Satz der statistischen Physik aussprechen* kann, der im Rahmen der kausalen Auffassung der Physik keinen Platz und keine Möglichkeit findet.»[89]

In welchem Verhältnis steht nun – und das ist die abschließende Frage dieses Artikels – Richard von Mises' sich entwickelnder Standpunkt in der Indeterminismus-Frage zur «Forman-These»? Für Forman in seinem einflussreichen und anregenden Artikel[90] war von Mises ein typisches Beispiel für die «Anpassung deutscher Physiker und Mathematiker an ein feindliches intellektuelles Milieu». Das allgemeine intellektuelle Milieu war bekanntlich in der Weimarer Republik vor dem historischen Hintergrund des verlorenen Krieges maßgeblich von lebensphilosophischen irrationalen Strömungen bestimmt. Forman schreibt:

> "The cases of von Mises and Doetsch demonstrate most clearly that there were mathematical physicists who went so far in assimilating the values and mood of their intellectual milieu as to effectively repudiate their own discipline."[91]

Forman sagt, dass «no specific developments in physics could plausibly be regarded as the source of such a-causal convictions,»[92] hat aber dabei anscheinend nur die Tatsache im Auge, die auch der Historiker von Plato hervorhebt:

---

[88] Laue 1934.

[89] Mises 1934. Hervorhebungen im Original.

[90] Forman 1971.

[91] Forman 1971, S. 55. Gustav Doetsch war ein angewandter Mathematiker einer etwas anderen Richtung, der unter anderem 1937 ein einflussreiches Buch über die Laplace-Transformation schrieb.

[92] Forman 1971, S. 86.

> "It is remarkable that von Mises's probabilism as such had nothing to do with the emerging quantum mechanics."[93]

Forman berücksichtigt nicht, dass von Mises, wie oben ausgeführt, für einen generellen methodologisch-mathematischen Indeterminismus plädierte, der auch makroskopische Phänomene wie das der Turbulenz umfasste.

Forman will nun einen gewissen Opportunismus auf von Mises' Seite angesichts sich verstärkender Tendenzen zu indeterministischen Auffassungen unter den Physikern erkennen:

> "A conversion to a-causality carried with it significant social approbation, social rewards so substantial that von Mises could not bear to let the atomic physicists monopolize them."[94]

Das ist genau der Punkt, wo meine Interpretation von derjenigen Formans abweicht, zumindest soweit es um die Person Richard von Mises' geht.[95]

Ich kann nur einen eingeschränkten «Opportunismus» von Mises' in dem Sinne erkennen, dass er darüber erfreut war, dass der Indeterminismus Wasser auf die Mühlen der Machschen Philosophie zu leiten schien. Die Verwendung des Wortes «Krise» entsprach durchaus dem Zeitgeist der Weimarer Republik. Von Mises hatte aber – und das ist die entscheidende Aussage – ernsthafte mathematisch-wahrscheinlichkeitstheoretische Argumente, sich bereits um 1920 einem zumindest methodologisch-mathematischen Indeterminismus zuzuwenden. Vor allem argumentierte er in erster Linie als Mathematiker (Wahrscheinlichkeitstheoretiker), nicht als Physiker. Schon Formans oben

[93] Plato 1994, S. 182.

[94] Forman 1971, S. 82.

[95] Es soll nicht verschwiegen werden, dass Forman ein gutes Stück weiter in der Analyse der von Misesschen Texte geht, als das hier geschehen konnte. Insbesondere geht er auch auf von Mises' Position zu O. Spengler, dem bekannten Kultur- und Lebensphilosophen ein. Ohnehin verdanken ich und viele Kollegen der anregenden Studie Formans sehr viel für eine kritische Sozialgeschichte der Physik. Formans Thesen werden mit Hinblick auf von Mises teilweise auch von Hochkirchen 1999, S. 173 ff. kritisch diskutiert, allerdings ohne wesentlich auf die für mein Argument entscheidende Mach-Anhängerschaft von Mises' einzugehen, wohl zum Teil deshalb, weil Hochkirchen den positivistischen Wiener Kreis als «integralen Bestandteil der Weimarer Kultur» (S. 175) ansieht.

zitierte Qualifizierung von Mises' und Doetschs[96] als «mathematische Physiker» erscheint als ein Missverständnis. Ich stimme somit überein mit «rewards,» aber durchaus nicht mit der angeblichen «conversion to a-causality» auf von Mises' Seite, die ohnehin als unnötig erschienen wäre angesichts der auch von Forman anerkannten Tatsache, dass von Mises ein «loyal scion of Austrian positivism»[97] gewesen ist.

Es scheint mir eher so zu sein, dass von Mises' wirkliche Konversion (angesichts nur weniger wahrscheinlichkeitstheoretischer Arbeiten von seiner Seite bis dahin) um 1920 darin bestand, einer neuen (im Vergleich zur klassischen Mechanik) Richtung der Forschung, nämlich Wahrscheinlichkeitsrechnung und statistischer Physik zum Durchbruch zu verhelfen und dabei seine spezielle und seltene Kompetenz zwischen den klassischen Disziplinen Mathematik und Physik auszunutzen. Von Mises selbst sah seine «conversion to probabilism» zweifellos als eine rein wissenschaftliche Entscheidung an, nicht beeinflusst von irgendeiner pessimistischen Zeitstimmung. Indem er auf die seiner Meinung nach fehlenden Wirkungen des Ersten Weltkrieges auf die Wissenschaft einging, schrieb von Mises übrigens 1922 bemerkenswerterweise – was ich hier abschließend zitieren will, ohne dies als Autoritätsbeweis gegen Forman missbrauchen zu wollen und ohne auch nur von Mises' Ansicht zu teilen:

> «Die geschichtliche Erfahrung lehrt, in wie hohem Maße rein geistige Bewegungen und Erscheinungen von politischer Entwicklung unabhängig bleiben.»[98]

6 Archivquellen und Danksagung

Ich danke den Harvard University Archives für die Erlaubnis, die dortigen Richard von Mises Papers, HUG 4574, zu benutzen. Ich danke Herrn Walter Purkert (Bonn) für die kritische Lektüre einer früheren Version.

[96] Schlote und Schneider 2009, S. 236, polemisieren gegen eine ähnliche Behauptung Formans über den angewandten Mathematiker Gustav Doetsch. Obwohl von Mises' und Doetschs Ansichten deutlich variieren, besteht auch in Doetschs Fall kein Anlass, ihm einen opportunistischen Meinungswandel während der 1920er Jahre zu unterstellen.

[97] Forman 1971, S. 80.

[98] Mises 1922b, S. 3.

7 Literaturverzeichnis

Alexanderson, Gerald. L. [2000]: The Random Walks of George Pólya; Washington: The Mathematical Association of America.

Antretter, G. [1989]: Von der Ergodenhypothese zu stochastischen Prozessen. Die Entfaltung der Theorie der Markov-Ketten und -Prozesse vor dem Hintergrund statistisch-mechanischer Probleme. Hausarbeit Mathematik, Uni München, 102 S.

Bohr, N.; Kramers, H. A.; Slater, J. C. [1924]: Über die Quantentheorie der Strahlung. Zeitschrift für Physik 24, 69 – 87.

Bru, B. [2003]: Souvenirs de Bologne. Journal de la Société Française de Statistique 144, no. 1 – 2, 135 – 226.

Forman, P. [1971]: Weimar Culture, Causality, and Quantum Theory, 1918 – 1927: Adaptation by German Physicists and Mathematicians to a Hostile Intellectual Environment. Historical Studies in the Physical Sciences 3, 1 – 115.

Einstein, Albert [2004]: Collected Papers. Volume 9: The Berlin Years: Correspondence, January 1919 – April 1920 (Hrsg. D. K. Buchwald et al.); Princeton: Princeton University Press.

Frank, Ph. [1932]: Das Kausalgesetz und seine Grenzen. Wien: Springer 1932.

Hanle, P. [1979]: Indeterminacy before Heisenberg. Historical Studies in the Physical Sciences 10, 225 – 269.

Hochkirchen, Th. [1999]: Die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Kontexte. Von Hilberts sechstem Problem zu Kolmogoroffs Grundbegriffen. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Höflich, P. [1927]: Wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung der Ergodenhypothese. Zeitschrift für Physik 41, 636 – 673.

Iglisch, R. [1933]: Zum Aufbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mathematische Annalen 107, 471 – 484. [Eingegangen am 15.2.1932]

Khinchin, A. I. [1949]: Mathematical Foundations of Statistical Mechanics. New York: Dover.

Kolmogorov (Kolmogoroff), A. [1931]: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mathematische Annalen 104, 415 – 458.

Kolmogorov (Kolmogoroff), A. [1933]: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechung. Berlin: Springer (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete II, 3).

Kolmogorov (Kolmogoroff), A. [1935]: Zur Theorie der Markovschen Ketten. Mathematische Annalen 112, 155 – 160.

Kolmogorov (Kolmogoroff), A.; Leontovich (Leontowitsch), M. [1933]: Zur Berechnung der mittleren Brownschen Fläche. Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion 4, 1 – 13.

Krengel, U. [1990]: Wahrscheinlichkeitstheorie. In: Fischer, G., F. Hirzebruch et al. (Hrsg.): Ein Jahrhundert Mathematik 1890 – 1990. Festschrift zum Jubilaeum der DMV. Braunschweig: Vieweg, 457 – 489.

Laue, M. von [1934]: Über Heisenbergs Ungenauigkeitsbeziehungen und ihre erkenntnistheoretische Bedeutung. Die Naturwissenschaften 22, 439 – 441.

Laue, M. von; Mises, R. v. (Hrsg.) [1926/1936]: Stereoskopbilder von Kristallgittern. Berlin: Springer, 2 Bände.

Leontovich (Leontowitsch), M. [1933]: Zur Statistik der kontinuierlichen Systeme und des zeitlichen Verlaufes der physikalischen Vorgänge. Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion 3, 35 – 63. [Eingegangen am 1. November 1932]

Mises, R. von [1919a]: Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mathematische Zeitschrift 4, 1 – 97.

Mises, R. von [1919b]: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Mathematische Zeitschrift 5, 52 – 99.

Mises, R. von [1920]: Ausschaltung der Ergodenhypothese in der physikalischen Statistik. Physikalische Zeitschrift 21, 225 – 232, 256 – 262.

Mises, R. von [1922a]: Über die gegenwärtige Krise der Mechanik. Die Naturwissenschaften 10, 25 – 29.

Mises, R. von [1922b]: Naturwissenschaft und Technik der Gegenwart. Eine Akademische Rede mit Zusätzen. Leipzig, Berlin: Teubner 32 S.

Mises, R. von [1928]: Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Wien: Springer.

Mises, R. von [1930]: Über die kausale und statistische Gesetzmäßigkeit in der Physik. Die Naturwissenschaften 18, 145 – 153.

Mises, R. von [1931]: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen in der Statistik und der theoretischen Physik. Leipzig, Wien: Franz Deuticke.

Mises, R. von [1934]: Über Heisenbergs Ungenauigkeitsbeziehungen und ihre erkenntnistheoretische Bedeutung. Die Naturwissenschaften 22, 822.

Mises, R. von [1939]: Kleines Lehrbuch des Positivismus. Den Haag: W. P. Van Stockum & Zoon.

Norris, J. R. [1997]: Markov Chains. Cambridge: Cambridge University Press.

Plato, J. von [1994]: Creating Modern Probability. Its Mathematics, Physics and Philosophy in Historical Perspective. Cambridge: Cambridge University Press.

Purkert, W. [1983]: Die Bedeutung von A. Einsteins Arbeit über Brownsche Bewegung für die Entwicklung der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie. Mitteilungen Mathematische Gesellschaft der DDR, no. 3, 41 – 49.

Romanovsky, V. I. [1970]: Discrete Markov Chains. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Schlote, K.-H.; Schneider, M. [2009]: Funktechnik, Höhenstrahlung und algebraische Strukturen. Zu den Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik an der Universität Halle in der Zeit von 1890 bis 1945. Frankfurt: Harri Deutsch.

Seneta, E. [1981]: Non-negative Matrices and Markov Chains. New York et al.: Springer, 2nd edition.

Seneta, E. [1996]: Markov and the Birth of Chain Dependence Theory. International Statistical Review (3) 64, 255 – 263.

Siegmund-Schultze, R. [2004a]: A non-conformist longing for unity in the fractures of modernity: towards a scientific biography of Richard von Mises (1883 – 1953). Science in Context 17, 333 – 370.

Siegmund-Schultze, R. [2004b]: Mathematicians forced to philosophize: an introduction to Khinchin's paper on von Mises' theory of probability. Science in Context 17, 373 – 390.

Siegmund-Schultze, R. [2006]: Probability in 1919/20: the von Mises-Pólya-Controversy. Archive for History or Exact Sciences 60, 431 – 515.

Siegmund-Schultze, R. [2007]: Philipp Frank, Richard von Mises, and the Frank-Mises. Physics in Perspective 9, 26 – 57.

Siegmund-Schultze, R. [2010]: Sets versus trial sequences, Hausdorff versus von Mises: «Pure» mathematics prevails in the foundations of probability around 1920. Historia Mathematica 37, 204 – 241.

Stöltzner, M. [1999]: Vienna Indeterminism: Mach, Boltzmann, Exner. Synthese 119, 85 – 111.

Mathematical Foundations and physical Visions: Pascual Jordan and the Field Theory Program

Christoph Lehner

1 Introduction

The work of Pascual Jordan (1902 – 1980) offers rich material for a study of the complex interactions between mathematics and physics in the twentieth century, and especially for its possibly most eventful period, the years 1925 – 1927 when modern quantum mechanics and quantum field theory were established. Jordan was truly a scion of the unique closeness if not amalgamation of physics and mathematics characteristic for Göttingen in the days of Felix Klein and David Hilbert. Within two years of his arrival there in 1922, he had been a student assistant with the theoretical physicist Max Born revising his article «Dynamik der Kristallgitter» [Born, 1923], with the mathematicians Richard Courant and David Hilbert working on the textbook *Methoden der Mathematischen Physik* [Courant and Hilbert, 1924], and with the experimentalist James Franck coauthoring the review article «Anregungen von Quantensprüngen durch Stöße» [Franck and Jordan, 1926]. The present contribution will discuss the connection of this educational background with Jordan's program and achievements in quantum field theory.

Jordan was the earliest and most ambitious visionary of the quantum field theory program: long before this became commonly accepted in the second half of the twentieth century, he saw in quantum field theory a unified basis for all of modern physics.[1] Jordan's formulation of this goal and his work towards it depended on a rather unique combination of a foundationalist universalism that would befit an Einstein or Planck, and a radical positivism that rejected vehemently the demand for a visualizable and intuitive understanding of physics. While it is not hard to discern these two tendencies in Jordan's work and see the tension between them, it is less obvious to understand how they relate to the balance between mathematics and physics in Jordan's work. Nevertheless, I will claim that there is an intimate connection between the two relationships.

[1] Jordan's seminal contributions to quantum field theory are described in more detail in [Cini, 1982] and [Darrigol, 1986]. Duncan and Janssen [2008] give a detailed account of Jordan's derivation of Einstein's fluctuation formula for radiation and the role this played in the emergence of quantum field theory.

2 Neither waves nor particles

In his dissertation,[2] Jordan had attempted to find a way to avoid Einstein's conclusion [Einstein, 1917] that the emission of radiation by the Bohr atom had to be directed. Einstein [1925a] quickly showed that Jordan's argument rested on the physically implausible assumption that also the absorption of radiation could not be directed, i. e., that an atom could not absorb a light wave coming in from a specific direction. After this paper and a correspondence about it with Einstein, Jordan accepted Einstein's argument about the irreducibly dual nature of light. However, the lessons he had learned about the statistics of the equilibrium of radiation and matter would have a decisive impact on his further development: When Jordan read Einstein's papers on the Bose statistics of the ideal gas [Einstein, 1924, 1925b], he immediately noticed the impact that the new statistics had on the theory of the interaction between radiation and matter. Jordan used the new statistics, as well as de Broglie's idea of matter waves to which Einstein had referred in order to motivate it, to study the thermodynamical equilibrium of light quanta and the ideal gas. This led him to make a strikingly novel stipulation:

> "The elementary acts of dispersion [between radiation and matter] can be viewed not only as dispersion of light radiation on material corpuscles but also as dispersion of matter radiation on corpuscular light quanta; therefore, the probabilistic law will be symmetric ... [between the densities of radiation and matter]."[3]

Schrödinger had taken Einstein's theory of the ideal gas as evidence that matter and radiation both had to be understood as waves [Schrödinger, 1926b]. Jordan agreed that matter and radiation were of the same nature, but he did not accept that this nature was correctly expressed by a classical wave picture. Instead, he postulated that both matter and radiation should be representable equivalently either as waves or as particles, thus establishing a complete symmetry between the two representations.

In an interview with Thomas Kuhn for the Archives for the History of Quantum Physics (AHQP),[4] Jordan credited the idea of the symmetry

[2] Published as [Jordan, 1924].

[3] Jordan 1925

[4] Interview of Pascual Jordan with Thomas S. Kuhn, June 18, 1963. AHQP, Transcripts of Oral History Recordings, Microfilm 1419-03, Jordan interview 2, p. 19.

of representations to William Duane's treatment of the scattering of light quanta by a grid [Duane, 1923]. Duane had shown that the interference on a grid, which had always been seen as a paramount wave phenomenon, could also be explained in the light quantum theory if one quantized the periodic structure of the grid. Jordan saw this argument as evidence that the dualism of particle and wave character of light should find its theoretical expression in the possibility to represent the same physical situation equivalently in particle and in wave description. For Jordan, this symmetry of representations was a convincing argument that all previous mechanical pictures had to be insufficient. The symmetry of representations would become the fundamental heuristic principle underlying Jordan's work both in quantum mechanics and quantum field theory during the following years. Jordan claimed in the AHQP interview[5] that already at this point he was hoping that a quantum theory of waves could deliver this symmetrical representation for both matter and radiation. Although there is no direct contemporary evidence, the circumstances described above make this plausible.

In the summer of 1925, Jordan got recruited by Max Born to help in the mathematical elaboration of Werner Heisenberg's idea of *Umdeutung*. Born and Jordan [1925] showed that the matrix calculus was the appropriate mathematical form for Heisenberg's new mechanics. However, Jordan did not limit himself to the formalization of Heisenberg's ideas: the paper contains an application of matrix mechanics to the electromagnetic field. This section did not lead to any concrete empirical predictions, and was largely ignored. But it is an indication of Jordan's program of a quantized field theory, rooted in his earlier insights from gas theory. Also the subsequent *Dreimännerarbeit* [Born et al., 1926] contains a section on the quantization of a field, this time with a much more striking result: the derivation of Einstein's famous and puzzling fluctuation formula for radiation from matrix mechanics applied to a field. As we know from a letter from Heisenberg to Pauli,[6] it was written

[5] Interview of Pascual Jordan with Thomas S. Kuhn, June 19, 1963. AHQP, Transcripts of Oral History Recordings, M/f 1419-03, Jordan interview 3, p. 9.

[6] Heisenberg to Pauli, October 23, 1925 [Pauli, 1979, p. 252].

by Jordan who later considered it as "almost the most important thing I have contributed to quantum mechanics."[7]

Einstein had used the thermodynamic entropy of radiation to derive its fluctuation properties: the energy fluctuations in a small volume of a small band of frequencies contained two terms. One could be interpreted as expressing fluctuations due to a varying number of light quanta in the volume, the other as due to the interference of light waves. Their simultaneous presence was a striking illustration of the dual nature of light but also posed the problem to find a theory of light that could account for the presence of both terms. Einstein struggled for the rest of his life to provide such a theory of light. In a study of Einstein's fluctuation formula, Paul Ehrenfest [1925] had introduced the model of a vibrating elastic string fixed at both ends as the simplest possible situation for the study of wave fluctuations. Each characteristic frequency of its vibration (or wave mode) can be treated as an independent harmonic oscillator. The total energy of each mode (and thus of the string as a whole) is constant. But the energy content of a small number of neighboring wave modes in a small segment of the string fluctuates because of the interference of the neighboring wave modes. Ehrenfest calculated this fluctuation and obtained only the wave fluctuation term, even if the individual wave modes were quantized in the sense of the old quantum theory. In the *Dreimännerarbeit*, Jordan quantized Ehrenfest's model using matrix mechanics – harmonic oscillators being one of the few things one could quantize with matrix mechanics in 1925 – and discovered that the non-commutativity of the matrix calculus leads to an additional term for the energy fluctuations: it is exactly the particle fluctuation term. For the first time, Einstein's fluctuation formula had been derived from an underlying dynamical theory.

Jordan concluded his considerations with the remark:

> "If one considers that the question treated here [the fluctuation of radiation] is rather removed from the problems out of which quantum mechanics arose, one will perceive the result [...] as especially encouraging for the further extension of the theory."[8]

[7] Jordan to van der Waerden, April 10, 1962, AHQP M/f 1419-006, p. 604. The quotes from Heisenberg and Jordan are given in [Duncan and Janssen, 2008].

[8] Born et al. 1926, p. 615

The full meaning of this remark would have eluded a contemporary reader, but it fits very well with Jordan's later reminiscences that he saw in this derivation the first lead to the quantized field theory he had been looking for. However, even his coauthors Heisenberg and Born were skeptical about the need to quantize the electromagnetic field [Duncan and Janssen, 2008, p. 640 – 642]. One obvious problem was that Jordan's method implied that each of the quantized oscillators representing the radiation field had a zero-point energy, so that the vacuum had an infinite energy density. This led Heisenberg to state that the method is only suitable for the treatment of oscillations of a discrete crystal lattice where such infinities would not occur. Jordan, on the other hand, had an even more ambitious goal: His principle of symmetries of representations implied that also matter should be represented by quantized waves in the same manner. As he claimed in [Jordan, 1927g, p. 480] and in a letter to Schrödinger, his occupation with the quantum theory of the ideal gas had suggested this further application of the theory of quantized waves. Jordan writes in the letter:

> "Then your hydrogen paper [i. e., Schrödinger [1926a]] gave hope that by following up this correspondence also the non-ideal gas could be represented by quantized waves – that therefore a complete theory of light and matter could be derived in which, as an essential ingredient, this wave field itself operates in a quantum, non-classical way."[9]

Jordan saw Schrödinger's wavefunctions as a generalization of the simple plane waves that he had quantized in the *Dreimännerarbeit* and interpreted as the quantum mechanical representation of the Bose-Einstein ideal gas; he was convinced that the quantization of these wavefunctions was the method necessary to apply quantum mechanics to the case of several interacting particles.[10] In the letter to Schrödinger, Jordan gives two reasons why he did not pursue this program immediately: The problem to account for Fermi-Dirac statistics, since it seemed that the wave picture would always lead to Bose-Einstein statistics, and the reservations of his colleagues Heisenberg, Pauli, and Born.

[9] Jordan to Schrödinger, reply to Schrödinger's letter from July 28, 1927, AHQP M/f 41 Sect. 8-009b, quoted after Darrigol, p. 224.

[10] Interview of Pascual Jordan with Thomas S. Kuhn, June 20, 1963. AHQP, Transcripts of Oral History Recordings, M/f 1419-03, Jordan interview 4, p. 3.

By the summer of 1926, Jordan was thus convinced that the correct treatment of a system of interacting particles was the quantization of their associated matter waves. This approach was fundamentally different both from Schrödinger's and from Heisenberg's and Dirac's ideas about the application of quantum mechanics to the many-particle problem. While Schrödinger was searching for a way to represent the many-body problem as the self-interaction of a continuous charge distribution, Heisenberg and Dirac had constructed symmetrical and antisymmetrical many-particle wavefunctions from single-particle wavefunctions and given phenomenological arguments why they should account for the characteristics of atomic spectra. Dirac showed that symmetrical wavefunctions led to Bose-Einstein statistics and that antisymmetrical wavefunctions explained the Pauli exclusion principle for electrons and therefore should be the basis of a statistics for matter particles. The success of the Heisenberg-Dirac method in the explanation of atomic spectra made Jordan's much more abstract program seem superfluous.

The transformation theory, developed in 1926/27 by Dirac [1927a] and Jordan [1927e, f] independently, was for Jordan further evidence for his principle of symmetry of representations. To Jordan, it showed that there is no preferred ontological basis in which quantum mechanics should be explicated. Jordan's transformation theory did not use the concept of a state at all; rather, what he used for the description of a physical system was the totality of all possible transition amplitudes between the values of physical quantities, the squares of which give the probability of finding the value of one quantity given the value of another quantity. Instead of specifying, e. g., one specific state of a hydrogen atom by a wavefunction, Jordan's transformation theory describes all possible states of the hydrogen atom by the transition amplitudes between a basis diagonalizing the energy matrix and a basis diagonalizing the position matrix of the electron. Jordan now identified "particle" properties with the basis diagonalizing the position matrix and "wave" properties with the basis diagonalizing the momentum matrix conjugate to the position matrix. Since the theory is invariant with regards to the choice of basis, the system can be described equally in particle or wave language. Therefore, neither description of the system (as a particle or as a wave) is fundamental.

This conviction about the symmetry of representations was also the background for Jordan's attack on Schrödinger's physical wave interpretation of wave mechanics [Jordan, 1927d]. Jordan agreed with Schrödinger that light and matter show analogous behavior and should be treated analogously in quantum theory. But he argued that just as classical wave optics fails for the effects that made the light quantum theory necessary, so wave mechanics alone cannot account for the particulate aspects of matter. Otherwise, there would be a disanalogy between the theories of light and matter.

3 The beginning of quantum field theory

The idea of a quantized field only came to the attention of a wider group of physicists through Paul Dirac's "The quantum theory of emission and absorption of radiation."[11] Paradoxically, the notion of quantizing a field appears nowhere in the paper. Dirac started with standard perturbation theory and observed that the expansion of the perturbed state ψ in terms of the eigenstates ψ_r of the unperturbed Hamiltonian H_0

$$\psi = \sum_r a_r \psi_r \tag{1}$$

can be interpreted as describing how a statistical ensemble of noninteracting systems reacts to an external perturbation, since the squared expansion coefficients $|a_r|^2$ can be read as giving the ratio of systems in each eigenstate. Standard perturbation theory gives for a perturbed Hamiltonian $H = H_0 + V$ the following time-dependence of the expansion coefficients:

$$i\hbar \dot{a}_r = \sum_s V_{rs} a_s \tag{2}$$

Dirac now showed that if one treated the a_r as quantum numbers, the same equations can be interpreted as describing an ensemble of systems obeying Bose-Einstein statistics. In this case, $N_r = a_r^\dagger a_r$ gives the number of systems in state r. If one applies this procedure to a system of light quanta interacting with an atom, one can represent the interaction in

[11] Dirac 1927b

terms of the changes that it causes in the atomic states and in the number of light quanta.

Dirac never tried to relate the a_r directly to field amplitudes. Rather, he connected the two by observing that a given number of light quanta determines through Einstein's $E = h\nu$ the energy density of the corresponding electromagnetic field and thus the field amplitudes acting on the atom. Using this equation, he could connect Einstein's emission and absorption coefficients with the matrix elements of the atomic electron in matrix mechanics – something that Heisenberg had only postulated in the *Umdeutung* paper. However, Dirac explicitly denied that the "wave function of the light quanta" is the same as the electromagnetic field. He also argued that while an ensemble of light quanta can be associated with a light wave, there is no such physical wave associated with an ensemble of matter particles such as electrons. Therefore, he did not see the quantization procedure as an explanation of the quantum nature of radiation. It was to him only an elegant way to take into account the Bose statistics of light quanta. Since electrons do not obey Bose statistics, the procedure is not applicable to them. Dirac maintained particle number conservation for light quanta by introducing a 'sea' of zero-momentum light quanta. This is another piece of evidence that for Dirac the particle concept was primary.[12]

Unlike Jordan's earlier attempt, Dirac's theory was greeted with enthusiasm, since it first derived the link between quantum mechanics and Einstein's theory of absorption and emission, and so offered a quantum-mechanical representation of the interaction of matter and radiation. Today, Dirac's paper is often seen as the seminal work for quantum field theory. This is somewhat ironic, as Dirac explicitly rejected the idea that his method was to be understood as the quantization of the classical field. Jordan thought for the rest of his life that he did not get due credit for his work:

> "It has always saddened me somehow that the attack on the light-quantum problem already contained in our Dreimännerarbeit was rejected by everyone for so long (I vividly remember how Frenkel, despite his very friendly disposition toward me,

[12] It also shows the problems that interpreting light quanta as particles leads to, foreshadowing the even more problematic notion of a sea of negative-energy electrons that would appear in Dirac's 1928 electron theory.

> regarded the quantization of the electromagnetic field as a mild form of insanity) until Dirac took up the idea from which point onward he was the only one cited in this connection."[13]

Instigated by Dirac's success, Jordan quickly returned to the theory of the quantized field. However, what he did was in conflict with Dirac's ideas and a clear continuation of his earlier program based on the principle of symmetry of representations. Therefore, his first paper [Jordan, 1927g] explicitly rejected Dirac's assessment that the ideal gas obeying Fermi statistics cannot be represented by a wave field. Jordan observed that in the case of Bose-Einstein statistics, the number operator has arbitrary integer eigenvalues, while in the case of Fermi-Dirac statistics, the number operator can only have eigenvalues 0 or 1. He now constructed an algebra of field operators that yield these eigenvalues for the number operator using Pauli's spin matrices. This construction was made possible by Jordan's concept of conjugate variables that was more general than Dirac's: While Dirac relied on commutation relations of the standard form $pq - qp = -i\hbar$, Jordan's transformation theory relied on a more general notion of conjugate variables (motivated by the need to represent angle and angular momentum as conjugate variables[14]) and allowed for a generalization of these commutation rules. However, as Darrigol [1986, p. 232] has pointed out, Jordan's actual calculations were full of mistakes: "Although Jordan knew he was on the right track, his paper was only a sketch, full of misprints and imprecisions. The draft received by Alfred Landé resembles a bad student paper overcorrected by the professor." What had gotten lost in the imprecisions were the correct phase relations between the creation and annihilation operators. Only in the fall of 1927, Jordan would return to the topic and, with the help of Eugene Wigner, present the correct algebra (now called Jordan-Wigner second quantization) using anticommutation relations [Jordan and Wigner, 1928].

Despite its technical flaws, [Jordan, 1927g] already defines Jordan's program: a unified quantum field theory for matter and radiation.

[13] Jordan to Born, July 3, 1948, AHQP M/f 1419-006, p. 596; quoted after Duncan and Janssen, 2008

[14] Interview of Pascual Jordan with Thomas S. Kuhn, June 19, 1963. AHQP, Transcripts of Oral History Recordings, M/f 1419-03, Jordan interview 3, p. 22 – 23.

Particles and waves are only two different aspects of the same underlying quantum field both in the case of light and in the case of matter:

> "Despite the validity of the Pauli instead of Bose statistics for electrons, the results achieved so far leave hardly a doubt that a quantum-mechanical wave theory of matter can be formulated, in which electrons are represented as quantized waves in ordinary three-dimensional space and that the natural formulation of the quantum theory of the electron will have to be achieved by comprehending light and matter on equal footing as interacting waves in three-dimensional space. The fundamental fact of electron theory, the existence of discrete electrical particles, thus manifests itself as a characteristic quantum phenomenon, namely as equivalent to the fact that matter waves only appear in discrete quantized states."[15]

Jordan pointed out that the antisymmetrical wavefunctions that Heisenberg and Dirac had constructed for many-particle systems were therefore not at all physical waves but simply "a special case of the general probability amplitudes which have to be used as a mathematical tool for the description of the statistical behavior of quantized light and matter waves" [Jordan, 1927g, p. 480]. These quotes show clearly the difference in perspective between Jordan and Dirac: Unlike Dirac, Jordan treated second quantization of the Schrödinger wave function as the quantization of a physical field and saw this procedure as an explanation of the corpuscular character of matter. Unlike Schrödinger, however, Jordan did not attempt to find an objective physical description behind the mathematical formalism. Transformation theory to him still implied that neither the particle nor the wave description were fundamental and therefore neither picture could be used to construct a complete description of objective reality.

Jordan's vision was not yet a full theory. So far, he only could treat free fields nonrelativistically. In the following months, Jordan made quick progress towards a complete theory in a series of three papers with different collaborators. First, he collaborated with Wolfgang Pauli [Jordan and Pauli, 1928], giving relativistically invariant commutation rules for the free field. The second paper was written together with Oskar Klein in Copenhagen [Jordan and Klein, 1927]. Klein had been thinking

[15] Jordan 1927g, p. 480

about a relativistic quantum theory of interacting particles, based on Dirac's quantized waves. As he wrote to Dirac, he worried about the problem of self-energies arising from the field-theoretical treatment of the Coulomb interaction.[16] When Jordan stayed in Copenhagen in the summer of 1927, they introduced field operators $\phi(r)$ to represent the field strength in a specific spacetime point and solved the problem of self-energies by what is now called normal ordering of these field operators. This allowed for a quantum field theoretical reformulation of the (instantaneous) interaction between particles and demonstrated that quantum field theory can treat the many-particle problem, as Jordan had envisioned already in 1926.

Schrödinger, referring to the programmatic passage from [Jordan, 1927g] cited above, wrote to Jordan in surprise:

> "This is, as far as I understand, also my opinion. So far, I thought that it was decidedly rejected from Göttingen and Copenhagen. Now I am glad to see that prospects are improving that we will come together again."[17]

Born, Heisenberg, and Pauli referred to Jordan's work at the Solvay meeting in October of 1927, as a possible solution to the problems faced when explaining quantum effects based on a wave picture. Also Bohr was impressed and praised the work by Jordan and Klein in [Bohr, 1928]. Dirac, however, was not convinced and, in the discussions at the Solvay meeting (yet never in writing), criticized Jordan's quantization procedure as artificial and *ad hoc*. He also pointed out that there were mistakes in the mathematical derivation of [Jordan, 1927g]. When in 1928 Dirac developed his relativistic theory of the electron [Dirac, 1928], he treated the relativistic wave equation as an analogue of the Schrödinger equation and did not make use of any field-theoretical interpretations.

The first attempt at a full treatment of quantum electrodynamics was given by Heisenberg and Pauli [1929]. But this treatment also showed the problems connected with the quantum field theory program. As Jordan [1929] noted, the infinite self-energy of the electron was not a constant that could be simply ignored as in the case of the free

[16] See [Darrigol, 1986, p. 234].

[17] Letter from Erwin Schrödinger to Pascual Jordan, 28 July 1927, AHQP, M/f 18, Sect. 7-001.

field. Jordan remarked that this problem was inherited from classical electrodynamics and that therefore it showed the limitations of the procedure of quantizing a classical theory. A new autonomous quantum field theory would have to be found to solve the problem. While various proposals to remove the infinities were made in the following years, it remained unclear how a general theory without inconsistencies could be built up. Possibly even more damaging to the program was the fact that it did not offer empirical predictions going beyond a theory such as Dirac's treating particles with antisymmetrical wave functions.

Only after World War II did the observation of the Lamb shift offer a first empirical confirmation of vacuum fluctuations, leading to a resurgence in interest in the quantum field theory program.[18] Quickly, this led to new renormalization techniques and the successful treatment of perturbation theory with Feynman diagrams. Jordan and Dirac, however, never rejoined the forefront of research in quantum field theory. Jordan's early contributions were mostly forgotten by the time of the postwar renaissance of quantum field theory, even though its modern formulation is closer to Jordan's program than to Dirac's original ideas.

4 Positivism

Schrödinger's hope for a reapproachment between his views and those of Jordan was not shared by the latter. Despite Jordan's polite answer, there was no indication that Jordan was changing his views already expressed in connection with transformation theory, that quantum mechanics did not allow for a reduction to classical models, be they particles or waves. As he would state in 1936 in his programmatic popular account "Physics in the 20th century":

> "The atom as we know it today no longer has the tangible and visualizable properties of the atoms of Democritus. It has been stripped of all sensible qualities and can only be characterized by a system of mathematical equations. The unbridgable opposition of materialistic philosophy and positivistic epistemology stands out especially clearly at this point. With this insight, one of the

[18] See [Schweber, 1994] for a treatment of the history of quantum electrodynamics after World War II.

> most prominent elements of the materialist world view has been liquidated once and for all. At the same time, the positivistic epistemology has been confirmed and justified decisively."[19]

The fundamental lesson Jordan drew from quantum physics was a confirmation of positivism. The basis for this bold metatheoretical claim[20] was Jordan's conviction that the symmetry of different descriptions established by transformation theory implied that there was no *one* fundamental physical description and that therefore statements about unobservable entities in quantum mechanics (which corresponded to one specific description, i. e. the wave or particle picture) were meaningless.

However, neither Jordan's positivism nor his argument for it from transformation theory harmonize very well with his program for quantum field theory: Jordan's claims about the foundational character of quantum field theory imply a priority of an abstract field concept, with particles as secondary quantum phenomena. This abstract field concept, even though it does not coincide with Schrödinger's more physical concept of a matter field, retains one important characteristic of the classical field: the continuity and classical description of spacetime. No matter what representation is chosen, the states of the theory are defined on this continuum. For that reason, transformation theory does not have the same implications in quantum field theory as it does in quantum mechanics. Even though Jordan is not explicit about how he understands the application of transformation theory to quantum field theory, he seems to assume that particle and wave properties are represented by the two basic quantities of his formalism, the $\phi(r)$, describing the field strength at the position r, and the b_k, describing the amplitude of the excitation with the wavevector k.[21] Although these two quantities are related by a Fourier transform

$$\phi(r) = \sum_k b_k u_k(r) \tag{3}$$

(which resembles the Fourier transform between position and momentum eigenstates in quantum mechanics), this does not mean that $\phi(r)$

[19] Jordan 1936, pp. 122 – 123

[20] See [Jordan, 1934] for a defense of positivism as a general epistemological principle, and [Darrigol, 1986, pp. 232 – 233], [Cini, 1982] for discussions of Jordan's positivism.

[21] In modern terms, these are the field operator and the annihilation operator, respectively.

can be identified with a particle property (i. e., a particle being in the position r). $\phi(r)$ only specifies the field strength at the position r, not a localization of the field at r. In Jordan's terminology: The matrix $\phi(r)$ is highly degenerate and therefore does not specify a basis that suffices to describe *localized* excitations of the field. Therefore, the Fourier transform is not the formal expression of a symmetry between wave and particle representations, unlike in the case of quantum mechanics. Thus, Jordan's quantum field theory is not symmetrical between wave and particle representations and so does not confirm positivism in the same way that he believed transformation theory did. Rather, one could say that wave and particle picture are represented by Jordan's field theory and Dirac's "many-particle theory" of symmetrized or antisymmetrized wave functions. But these are two distinct theories, which only coincide in certain cases.[22]

More generally, one can observe that Jordan's grand foundationalist visions are at odds with his positivism: According to the 19th century understanding of positivism, physical theory should describe, not explain. But Jordan himself kept invoking the explanatory power of quantum field theory as a justification of its fundamental nature, e. g., in the above quote from [Jordan, 1927g, p. 480]. Despite these tensions, Jordan maintained his positivism by emphasizing the differences between his quantized fields and classical fields. He frequently stressed that the quantum field did not offer hope for picturability in the classical sense. Therefore Jordan could maintain that, although quantum field theory offers a unified foundation of physics, it does not offer a visualizable physical model of the world. All it provides are probability amplitudes connecting possible observations, like in the case of transformation theory. However, this is a much weaker argument than in the case of the explicit argument for the possibility of different representations – it does not exclude the possibility that a *non-classical* but still spatiotemporal field picture could eventually be found as a consistent model for quantum field theory.

[22] A simple aspect in which they do not coincide is that for Dirac, particle number must be conserved, while for Jordan, this is not necessarily the case.

5 Mathematics and physics

It is somewhat difficult to define the relation between mathematics and physics in Jordan's work. Exactly because of his Göttingen background he does not seem to see the two as distinct research subjects. In the AHQP interviews, he characterizes himself as a «Göttinger» in several places, contrasting his own open-minded attitude towards mathematical formalism to the suspicion if not hostility towards it from other physicists. For example, he relates the well-known story that Pauli accused Born that he would mess up Heisenberg's «Umdeutung» ideas with excessive mathematical formalism. However, and this is the more important observation, Jordan goes beyond what was traditionally seen as the role of a mathematical physicist: the precise elaboration of existent physical theories (say, in analytical mechanics). This difference becomes quite evident in comparison with John von Neumann's work, and his central contribution to quantum physics, the introduction of the Hilbert space formalism. Von Neumann's formalization gave a firm mathematical grounding to transformation theory, avoided Dirac's "improper functions," and allowed for new important concepts and arguments on the basis of the formalized theory, such as projection and density operators, quantum logic, his no-hidden-variable proof, or the formulation of the measurement problem. For all his important contributions, von Neumann's ambition was not to establish a new theory, but to clarify the existing statistical transformation theory. Thus his work is much more easily understood in the traditional sense of mathematical physics.

Jordan's strength, on the other hand, was definitely not the clarification of formal structures. We encountered a striking example above: Jordan needed Wigner's help to formulate the correct commutation relations for fermion fields. Another example is Jordan's half-hearted and confused attempt to present [Jordan, 1927e, f] in axiomatic form. Rather, Jordan's strength laid in his novel and far-reaching ideas about the foundations of quantum physics. In this respect, he was much more in the tradition of the previous generations of theoretical physicists, such as Planck, Einstein, and Schrödinger. Like these, he had the ambition to develop new and fundamental theories encompassing hitherto disjoint phenomena and the talent to find the correct clues in an abundance of

experimental data. An indication of his claim to the status of a theoretical physicist are his lucid review papers[23] and his eloquent presentations to general audiences (e. g. [Jordan, 1927a, b, c] in *Die Naturwissenschaften*).

However, there is a fundamental divide between Jordan and Einstein or Schrödinger. What Jordan sees as a proof of positivism from quantum physics is for them a *reductio ad absurdum* of quantum mechanics as a physical theory. Although they disagreed in their specific criticisms and their hopes for a better theory, they agreed in one point: The inability of quantum mechanics to produce unambiguous spatiotemporal models of objective processes disqualified it as a fundamental physical theory.[24] The disagreement about positivism was not merely a philosophical debate disconnected from physical theorizing, it fundamentally affected the definition of theoretical physics itself and its methodological prescriptions.

The central role of (mechanical) models for the foundations of classical theoretical physics is a well-treated subject.[25] I will only touch on one aspect that throws an interesting light on the relation of theoretical physics to mathematics: Elizabeth Garber contrasts the work of Poincaré as a mathematician in electrodynamics with that of Einstein and Lorentz as theoretical physicists. She notes that Poincaré had a different interest in exploring electrodynamics: "Poincaré's net was mathematics and observation, not physical theory."[26] This led Einstein to explore the physical consequences of Lorentz invariance, which Poincaré didn't. Einstein in turn did not see the relevance of Minkowski's geometrical representation of the Poincaré group, until his work on general relativity forced him to deal with it. One can therefore see the distinction between mathematics and theoretical physics in the focus on theoretical models

[23] E. g. [Jordan, 1928, 1929]

[24] The philosophical principles underlying Schrödinger's critique of quantum mechanics are treated in [Bitbol and Darrigol, 1992], Schrödinger's defense of the need for visualizability of physical theories in [De Regt, 1997]. In the case of Einstein, the existing literature is far too extensive to be cited in detail here. See [Home and Whitaker, 2007] for an overview; I will discuss Einstein's critique of positivism in quantum mechanics in a forthcoming contribution to *The Cambridge Companion to Einstein*, M. Janssen and C. Lehner, eds. Cambridge University Press, Cambridge.

[25] See for example [Lützen, 2005] for the case of Heinrich Hertz, [De Regt, 1999] for the case of Boltzmann, or [Cat, 2001] for the case of Maxwell.

[26] Garber 1999, p. 354

of physical situations and their exploration. While theoretical physicists took them as an expression of fundamental physical principles, mathematicians treated them as secondary illustrations of the fundamental mathematical structure.

This distinction connects the issue of positivism with the demarcation of theoretical physics from mathematics: Pauli, Heisenberg, and Jordan saw matrix mechanics as expressing the impossibility to give a consistent physical picture to quantum mechanical processes and Heisenberg's uncertainty relations as numerical limit to the applicability of such pictures.[27] As we saw, Jordan maintained this position also for the quantized field and was the most explicit in connecting it to a emphatic defense of positivism: Physics is about nothing but a concise mathematical description of the phenomena. Every question going beyond that is a pseudoproblem. The conspicuous absence of the concept of a physical state in Jordan's formalism reflects his conviction that there are no matters of fact beyond the observational data. According to Garber's distinction, his positivism therefore would make him a mathematician rather than a theoretical physicist – or at least it would have done so around the turn of the twentieth century. This verdict would have probably been applauded by Einstein and Schrödinger, who maintained that giving up a fundamental physical picture for quantum theory meant abandoning the core element of physical theorizing. And both, in different ways, kept fighting to regain such a physical picture.

However, as we have seen, this verdict is rather one-sided. It does not do justice to the relevance and foresight of Jordan's vision for quantum field theory. It is not that Jordan was not a theoretical physicist, rather theoretical physics changed radically in the years between 1900 and 1930. But there is something particular about Jordan's quantum field theory that put it in a precarious situation: Not only had Jordan abandoned the theoretical models of old, he also did not have a solid mathematical foundation at the basis of his theory. And this might very well be the reason why the pursuit of his theoretical visions was rather short-lived. When the problems of infinities in the Heisenberg-Pauli theory convinced Jordan that a straightforward quantization of Maxwell-Lorentz electrodynamics was not possible,

[27] See [Hendry, 1984] for a detailed discussion.

and that "radical new ideas" were necessary, he had no firm ground from which he could have kept trying. It is striking how quickly Jordan abandoned his program after 1929: No direct continuation of his work on the foundations of quantum field theory exists. Rather, in the following years, he turned to biology, to mathematics, and to the right-wing politics that should permanently damage his reputation. Only in the mid-thirties there were some unsuccessful attempts to resuscitate his work on quantum field theory. Unlike Einstein and Schrödinger who kept developing their chosen models, despite success kept evading them, and against the opinion of the mainstream, Jordan had no fundamental structure to fall back on in the face of his problems.

6 Epilogue

It was not just Jordan, but his whole generation that rejected the idea of theoretical physics that Einstein and Schrödinger defended. The triumph of quantum mechanics convinced theoretical physicists ever since that they could do their job without recourse to visualizable models. But unlike in the case of quantum mechanics, where von Neumann's Hilbert space formalism offered a clear and solid mathematical foundation, quantum field theory up to this day has not been cast into a definite mathematical structure. The algebraic approach has been an attempt in that direction, but has not yet arrived at a point where it successfully reconstructs the theory that physicists use.

In its physical foundations, on the other hand, modern-day quantum field theory equally suffers from lack of clarity and definiteness. Just as in the days of Dirac and Jordan, it sometimes is interpreted as field theory, sometimes as particle theory; its proudest technical achievement, renormalization theory, lacks a physical interpretation or theoretical justification. Nor is there a clear account of the relation of quantum field theory to quantum mechanics, its nonrelativistic limit. In their daily work most physicists use varying visualizations, especially Feynman diagrams, as a substitute for physical models. But they are quite aware that their use is very limited and in the end they just rely on pragmatic rules when the model fails. Just like Jordan, quantum field theorists today still have a grand vision of a unified theoretical framework for

all of physics. But (as Einstein might add) just like him they are still suspended in a no-man's land between physics and mathematics.

7 Bibliography

Bitbol, M. and Darrigol, O., editors (1992). Erwin Schrödinger: philosophy and the birth of quantum mechanics. Editions Frontières, Gif-sur-Yvette.

Bohr, N. (1928). The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory. Nature, 121: 580 – 590.

Born, M. (1923). Atomtheorie des festen Zustandes (Dynamik der Kristallgitter), volume 4 of Fortschritte der mathematischen Wissenschaften in Monographien. B. G. Teubner, Leipzig.

Born, M., Heisenberg, W., and Jordan, P. (1926). Zur Quantenmechanik II. Zeitschrift für Physik, 35: 557 – 615.

Born, M. and Jordan, P. (1925). Zur Quantenmechanik. Zeitschrift für Physik, 34: 858 – 888.

Cat, J. (2001). On Understanding: Maxwell on the Methods of Illustration and Scientific Metaphor. Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 32(3): 395 – 441.

Cini, M. (1982). Cultural Traditions and Environmental Factors in the Development of Quantum Electrodynamics (1925 – 1933). Fundamenta Scientiae, 3: 229 – 253.

Courant, R. and Hilbert, D. (1924). Methoden der mathematischen Physik, volume 12 of Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin.

Darrigol, O. (1986). The Origin of Quantized Matter Waves. Historical Studies in the Physical and Biological Sciences, 16: 197 – 253.

De Regt, H. (1997). Erwin Schrödinger, Anschaulichkeit, and quantum theory. Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 28(4): 461 – 481.

De Regt, H. (1999). Ludwig Boltzmann's Bildtheorie and Scientific Understanding. Synthese, 119(1): 113 – 134.

Dirac, P. A. M. (1927a). The Physical Interpretation of Quantum Dynamics. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 113: 621 – 641.

Dirac, P. A. M. (1927b). The Quantum Theory of Emission and Absorption of Radiation. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 114: 243 – 265.

Dirac, P. A. M. (1928). The quantum theory of the electron I. Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 117: 610 – 624.

Duane, W. (1923). The Transfer in Quanta of Radiation Momentum to Matter. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 9: 158 – 164.

Duncan, A. and Janssen, M. (2008). Pascual Jordan's resolution of the conundrum of the wave-particle duality of light. Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 39(3): 634 – 666.

Ehrenfest, P. (1925). Energieschwankungen im Strahlungsfeld oder Kristallgitter bei Superposition quantisierter Eigenschwingungen. Zeitschrift für Physik, 34(1): 362 – 373.

Einstein, A. (1917). Zur Quantentheorie der Strahlung. Physikalische Zeitschrift, 18: 121 – 128.

Einstein, A. (1924). Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse, pages 261 – 267.

Einstein, A. (1925a). Bemerkung zu P. Jordans Abhandlung "Zur Theorie der Quantenstrahlung". Zeitschrift für Physik, 31: 784 – 785.

Einstein, A. (1925b). Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. Physikalisch-Mathematische Klasse, pages 3 – 14.

Franck, J. and Jordan, P. (1926). Anregung von Quantensprüngen durch Stösse, volume 3 of Struktur der Materie in Einzeldarstellungen. Springer, Berlin.

Garber, E. (1999). The language of physics: the calculus and the development of theoretical physics in Europe, 1750 – 1914. Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin.

Heisenberg, W. and Pauli, W. (1929). Zur Quantendynamik der Wellenfelder. Zeitschrift für Physik, 56: 1 – 61.

Hendry, J. (1984). The Creation of Quantum Mechanics and the Bohr-Pauli Dialogue, volume 14 of Studies in the History of Modern Science. Reidel, Dordrecht, Boston, Lancaster.

Home, D. and Whitaker, A. (2007). Einstein's struggles with quantum theory: a reappraisal. Springer Verlag, New York.

Jordan, P. (1924). Zur Theorie der Quantenstrahlung. Zeitschrift für Physik, 30, 297 – 319.

Jordan, P. (1925). Über das thermische Gleichgewicht zwischen Quantenatomen und Hohlraumstrahlung. Zeitschrift für Physik, 33: 649 – 655.

Jordan, P. (1927a). Die Entwicklung der neuen Quantenmechanik I. Die Naturwissenschaften, 15(30): 614 – 623.

Jordan, P. (1927b). Die Entwicklung der neuen Quantenmechanik II. Die Naturwissenschaften, 15(31): 636 – 649.

Jordan, P. (1927c). Kausalität und Statistik in der modernen Physik. Die Naturwissenschaften, 15(5): 105 – 110.

Jordan, P. (1927d). [Review of] Schrödinger, E., Abhandlungen zur Wellenmechanik. Die Naturwissenschaften, 15(18): 412 – 413.

Jordan, P. (1927e). Über eine neue Begründung der Quantenmechanik (1). Zeitschrift für Physik, 40: 809 – 838.

Jordan, P. (1927f). Über eine neue Begründung der Quantenmechanik (2). Zeitschrift für Physik, 44: 1 – 25.

Jordan, P. (1927g). Zur Quantenmechnik der Gasentartung. Zeitschrift für Physik, 44: 473 – 480.

Jordan, P. (1928). Die Lichtquantenhypothese: Entwicklung und gegenwärtiger Stand. Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, 7: 158 – 208.

Jordan, P. (1929). Der gegenwärtige Stand der Quantenelektrodynamik. Physikalische Zeitschrift, 30: 700 – 713.

Jordan, P. (1934). Über den positivistischen Begriff der Wirklichkeit. Die Naturwissenschaften, 22(29): 485 – 490.

Jordan, P. (1936). Die Physik des 20. Jahrhunderts: Einführung in den Gedankeninhalt der modernen Physik. Vieweg, Braunschweig (Die Wissenschaft, 88).

Jordan, P. and Klein, O. (1927). Zum Mehrkörperproblem der Quantentheorie. Zeitschrift für Physik, 45: 751 – 765.

Jordan, P. and Pauli, W. (1928). Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder. Zeitschrift für Physik, 47: 151 – 173.

Jordan, P. and Wigner, E. (1928). Zum Paulischen Äquivalenzverbot. Zeitschrift für Physik, 47: 631 – 651.

Lützen, J. (2005). Mechanistic images in geometric form: Heinrich Hertz's Principles of mechanics. Oxford University Press, Oxford.

Pauli, W. (1979). Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein, Heisenberg u. a., volume 1: 1919 – 1929. Springer, New York, Heidelberg, Berlin.

Schrödinger, E. (1926a). Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung). Annalen der Physik, 79: 486 – 527.

Schrödinger, E. (1926b). Zur Einsteinschen Gastheorie. Physikalische Zeitschrift, 27(4/5): 95 – 101.

Schweber, S. S. (1994). QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga. Princeton Univ Press, Princeton.

Part IV

Entwicklung von Konzepten und Theorien | Development of concepts and theories

From Matrices to Hilbert Spaces: The Interplay of Physics and Mathematics in the Rise of Quantum Mechanics

Jan Lacki

1 Introduction

In his *History of Functional Analysis*, the leading mathematician Jean Dieudonné points out how the history of this field ran counterwise to what a nowadays mathematician could imagine relying on the present way of introducing the topic. To make a long story short, Dieudonné emphasises how, in the development of functional analysis, the "linear algebra" type of understanding of the relevant issues came rather late, being historically preceded by the use of some tools today viewed as emblematic to the theory, but then not recognized as such. The theory of infinite systems of linear equations, of infinite determinants, of infinite bilinear forms and their normal forms, for their own sake or as a way to deal with integral equations, was first developed without reference to linear spaces and to typical problems associated with their endomorphisms. Also, the geometric interpretation of the problems that gave rise to functional analysis was absent from the early intuitions of its main founders. Only after Hilbert's results on the theory of integral equations and infinite forms were taken over and extended by his followers and students such as Hellinger, Schmidt, or Weyl, did the geometric point of view become explicit and recognized as an important insight to frame the theory[1].

When surveying the contributions of von Neumann who extended Hilbert's spectral theory to unbounded forms, Dieudonné mentions how these mathematical results were of highest importance to physicists having hard time to cope with the involved mathematics of quantum mechanics. Dieudonné's account offers ample ground for criticism as he conveys the impression that before the intervention of the mathematicians, physicists were much into the blue in what concerns the formal structure of their theory; he also fails to mention how the reflection on the foundations of quantum mechanics actually triggered von Neumann's results. These shortcomings, that one could possibly attribute to Dieudonné overly Bourbakist stand, are possibly minor if considered from the point of view of pure history of mathematics. However, beyond the question of sheer historical accuracy, Dieudonné's account thus misses the opportunity to pay due tribute to an important, if not

[1] Dieudonné 1981, pp. 2 – 3.

exemplary, episode from the rich history of fruitful connections between physics and mathematics. More importantly, by largely ignoring the physical context into which went invested some of the most important results of early functional analysis, Dieudonné fails to recognize that to a large extent, both communities were at the time facing the same lack, that of a geometrical, "linear algebra" intuition on their respective issues and problems. Indeed, my contribution endeavours to show how, in their respective way, physicists reached, in the crucial year 1926, a full understanding of the proper mathematical interpretation of the formalism of quantum mechanics, recognizing thus the prime importance of the linear structures and objects underlying their way to handle the formalism and put it to physical use. Their appraisal of this mathematical reality, known then as transformation theory, was the starting point of the developments that led Johann von Neumann to his abstract Hilbert space and his theory of self-adjoint unbounded operators and associated spectral theory.

2 Quantum theory: alternate formalisms and equivalences

The birth of quantum mechanics took place with a seminal paper of Werner Heisenberg in 1925[2]. The formal features of Heisenberg's approach were soon recognized to amount to (infinite) matrix manipulations by Max Born and Pascual Jordan[3] who subsequently elaborated, together with Heisenberg, the main features of matrix mechanics[4]. Dirac extended independently Heisenberg's original ideas as a calculus of abstract q-numbers in a series of papers from the same period[5]. Only a couple of months later, Erwin Schrödinger introduced in a series of four papers the differential equations of wave mechanics[6]. In the

[2] Heisenberg 1925. For a general history, see Jammer 1966, Mehra and Rechenberg 1982, 1987, Darrigol 1992.
[3] Born and Jordan 1925.
[4] Born, Jordan and Heisenberg 1926.
[5] Dirac 1925, 1926ab.
[6] Schrödinger 1926abcd.

same period, quantum theory even received a fourth formulation as an operator calculus due to Born and Wiener[7].

Thus, by mid 1926, quantum theory was associated with four different formalisms. The latter were differing by choices of basic ingredients and/or of logical order of presentation, and most of all, by different types of mathematical objects that were involved. Let us review their main characteristics.

2.1 Heisenberg's matrix mechanics

Born, Jordan and Heisenberg's formalism of matrix mechanics is deeply rooted in the classical theory of multiply periodic systems quantized with the help of the Bohr-Sommerfeld conditions[8]. It takes over some of the latter's formal features, replacing its characteristic Fourier expansions for physical magnitudes by arrays of numbers constructed from the corresponding Fourier amplitudes and frequencies. Thus, matrix mechanics associates to each of the physical quantities of a system a set of numbers $a(nm)\exp(2\pi i\nu(nm)t)$ understood as defining a (time-dependent) matrix $\mathbf{a}$[9]. For each degree of freedom indexed with integer k, and described by the coordinate q_k and associated momentum p_k, one imposes the fundamental relation between the corresponding canonical matrices:

$$\mathbf{p}_k\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_k\mathbf{p}_k = -\mathrm{i}\hbar\mathbf{1}. \tag{1}$$

[7] Born and Wiener 1926.

[8] For an insightful account of the classical foundations and analogies that drove the early attempts at quantum theory before the advent of quantum mechanics, see Darrigol 1992.

[9] The integer indices n, m label the (discrete) set of stationary states of the system. The frequencies $\nu(nm)$ correspond to the transitions between state n and m according to Bohr's frequency conditions (see below). The origin of such expressions goes back to the use of multiple Fourier expansions inherited from the methods of celestial mechanics applied to the (planetary) models of the "old quantum theory". The successive harmonic terms of those series were providing, following Bohr's correspondence principle, information on the corresponding transitions between the stationary states of the quantum system. For the details of this correspondence, see Jammer 1966, p. 102–118, and Hund 1967; see also Darrigol 1992.

These relations enable to calculate products of quantum theoretical quantities[10]. Given a Hamiltonian matrix $\mathbf{H}$, the relations (1) ensure the validity of the canonical equations[11]

$$\dot{\mathbf{p}}_k = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}_k}, \quad \dot{\mathbf{q}}_k = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}_k},$$

which account for the dynamics of the system. Bohr frequency conditions

$$h\nu(nm) = H_n - H_m \tag{2}$$

are recovered when the Hamiltionian matrix is diagonal, with H_n its n-th diagonal element (this corresponds to the energy of the n-th stationary state), and h Planck's constant. In matrix mechanics,the dynamical problem amounts thus to finding a set of matrices obeying (1) such that the corresponding Hamiltonian expressed in terms of the latter is diagonal. The main tool for diagonalization are the (canonical) transformations

$$\mathbf{H} \to \mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{S}. \tag{3}$$

Born, Heisenberg and Jordan developed in their paper the stationary and time dependent perturbation theories, obtaining perturbative expansions for the diagonalization matrix $\mathbf{S}$. In this case the latter has an expansion of the form $\mathbf{S} = \mathbf{1} + \mathcal{O}(\epsilon)$ where ϵ is a small parameter, so that the computation of $\mathbf{S}^{-1}$ can be formally handled. The difficulty of computing $\mathbf{S}^{-1}$ in the general case will motivate soon research for alternate forms of the transformation (3). We shall shortly examine some examples of such.

It is of prime importance to emphasize here that in the matrix approach, matrices are understood simply as arrays of coefficients providing all the information that is directly observable, namely the amplitudes of the processes, which was the declared motivation of Heisenberg's first

[10] Canonical matrices for different degrees of freedom commute, i. e. $\mathbf{p}_k\mathbf{q}_l - \mathbf{q}_l\mathbf{p}_k = \mathbf{0}$, for $k \neq l$.

[11] $\mathbf{H}$, a function of the symbols $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$, has its form suggested by the classical case. However, as in the quantum case the symbols $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ are matrices obeying the canonical commutation relations (1), the quantum Hamiltonian may eventually differ in its functional form from his classical counterpart due to the quantum non-commutativity of the symbols $\mathbf{p}$ and $\mathbf{q}$ which makes ambiguous their products.

paper. These matrices are however deprived of any operatorial meaning, i. e. they are not conceived as representatives of linear mappings within some linear space, left alone as acting on some physically meaningful objects.

2.2 Dirac's q-numbers

Inspired by Heisenberg's results, Dirac derived the formalism of quantum theory insisting on the essential non commutativity of the symbols associated to quantum quantities, which he consequently called q-numbers in opposition to ordinary commuting scalars. Classically, given a system described in the Hamiltonian scheme by the (generalized) coordinates q_k and the associated momenta p_k, the time evolution of any physical quantity, say $A = A(p_k, q_k)$, is given by its Poisson bracket with the Hamiltonian $H = H(p_k, q_k)$

$$\dot{A} = \{A, H\} \equiv \sum_k \frac{\partial A}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial A}{\partial p_k}$$

In particular, for the coordinates and momenta themselves, one has

$$\dot{p}_k = \{p_k, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad \dot{q}_k = \{q_k, H\} = \frac{\partial H}{\partial p_k}.$$

Analysing the formalism that Heisenberg introduced in his 1925 foundational paper, Dirac recognized that the quantum case involved in general non-commuting q-number analogues of the q_k's and p_k's, and the prescription that any classical Poisson bracket $\{A, B\}$ of any two quantities A and B goes into the corresponding quantum bracket $\frac{\mathrm{i}}{\hbar}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \equiv \frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\mathbf{AB} - \mathbf{BA})$ of the q-analogues. Dirac's approach was in principle more general than that of Born, Jordan and Heiseberg since, concentrating on the non-commutative q-numbers algebra, he did not give necessarily these numbers an explicit realization in terms of matrices[12].

2.3 Schrödinger's wave mechanics

Schrödinger's approach is physically based on the view of classical mechanics as a limiting case (long-wave approximation) of wave mechanics

[12] Dirac 1925, 1926ab.

in analogy with the geometric optics with respect to wave theory of light[13]. Consequently, Schrödiger considered the energy levels E of the stationary states of the quantum system in a potential V as associated to a wave function ψ, in general a complex valued function defined over the configuration space of the system parametrized with the coordinates q_k. The wave function ψ is a solution of the eigenvalue equation[14]

$$\triangle\psi - \frac{8\pi^2}{h^2}(E - V)\psi = 0.$$

This equation is formally obtained from the energy relation

$$(H(p_k, q_k) - E)\,\psi = 0, \tag{4}$$

where in the Hamiltonian

$$H(p_k, q_k) = \frac{1}{2}\sum_k p_k^2 + V(q_k)$$

of the system, one has substituted for the momenta p_k the partial derivatives

$$p_k \to -i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial q_k}$$

The dynamics of the system is given by the time-dependent equation

$$\left(\triangle - \frac{8\pi^2}{h^2}V\right)\psi = i\frac{4\pi}{h}\frac{\partial}{\partial t}\psi$$

where E in (4) has been replaced this time by $i\frac{h}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}$.

[13] Schrödinger 1926abcd, in particular 1926b.

[14] The mass of the particle has been set to 1. Below, $\triangle$ is the (negative of the) Laplacian operator, given in (rectangular) coordinates by

$$\triangle = -\sum_k \frac{\partial^2}{\partial q_k^2}$$

2.4 The operator calculus of Born-Wiener

Let us also mention for the sake of completeness that, because matrix mechanics was impractical to formulate in the case of non periodic systems [15], Born and Wiener formulated an alternative formalism for quantum theory choosing as the fundamental formal devices linear operators[16]. I shall omit to comment on this approach as it did not play a major role in the developments that are pertaining to my topic. Let me just emphasize that Born and Wiener operators are not equivalent to those of the Hilbertian theory[17].

2.5 Problems of Equivalence

Dirac's q-numbers could be easily represented in terms of Born Jordan matrices thus showing immediately the equivalence of Dirac's formalism with the matrix one. In his early paper "Quantum Mechanics and a Preliminary Investigation of the Hydrogen Atom"[18], Dirac, studying the quantum analogue of action-angle variables, introduced the fundamental interchange relations

$$e^{i(\alpha q)} f(q_r, p_r) = f(q_r, p_r - \alpha_r \hbar), \tag{5}$$

$$f(q_r, p_r) e^{i(\alpha q)} = e^{i(\alpha q)} f(q_r, p_r + \alpha_r \hbar),$$

$$\text{with} \quad (\alpha q) \equiv \sum_{r=1}^{f} \alpha_r q_r, \tag{6}$$

[15] As we have seen, the integer indices labelling the matrices directly refer to the stationary states of the theory which are the eigenstates of the Hamiltonian. Now, whenever the latter has a continuous spectrum, the matrices are clearly ill-defined: even if one is ready to consider a continuous range for the index labelling their lines and columns, one ends up with mathematical trouble, for instance singularities (Dirac's functions) on their diagonal.

[16] Born and Wiener 1926.

[17] Pauli, when trying to understand the equivalence between matrix and wave mechanics, introduced operators as well, but in a form different from that of Born and Wiener, see Mehra and Rechenberg 1987, chap. IV. The operator approach was used also by others in their attempts to prove the equivalence of matrix and wave mechanics; among others, C. Eckart (Eckart 1926ab). Actually, Cornelius Lanczos proposed as early as end of 1925 a systematic way of obtaining continuous equations equivalent to matrix ones using integral equations and the formalism of Green functions (Lanczos 1926), but did not provide any new application, see below.

[18] Dirac 1926a.

where the index r runs over the degrees of freedom, and f stands here for a function of the q_r and p_r. This enabled him to deal with the quantum analogues of the classical multiply periodic expansions of the form

$$x = \sum_{\alpha} x_{\alpha}(J_r)e^{i(\alpha w)}.$$

used in the "old quantum theory". Commuting the x_α across the $e^{i(\alpha w)}$, and using the canonical commutation relations, Dirac could obtain q-number formulas displaying the same structural features as the ones of matrix mechanics. This lead, in Dirac's terms, to the proof of the possibility of representing his q-numbers by Heisenberg's matrices of c-numbers, defining the corresponding "matrix scheme". Dirac studied later this correspondence in a more general setting acting directly with q-numbers on Schrödinger's eigenfunctions[19].

The situation was much more puzzling in what concerned the relation of matrix mechanics with Schrödinger's wave formalism. Quite early, it was understood that both formalisms yielded the same physical predictions. The first proof of the equivalence of wave mechanics with matrix mechanics was given by Schrödinger himself[20]. For each pair of (normalized) eigenfunctions of his equation, say ψ_n and ψ_m, and a physical quantity $A(p_k, q_k)$, Schrödinger showed that the expressions

$$A_{nm} = \int dq \psi_n A(q, \frac{\partial}{\partial q})\psi_m.$$

defined the coefficients of the corresponding Heisenberg matrix[21]. Schrödinger's proof was sufficient as far as practical considerations were concerned. One could then freely choose between his approach and the rival matrix formalism depending on the problem at hand. Actually, the differential formalism of wave mechanics soon supplanted the matrix one. However, Schrödinger's proof, a kind of dictionary between both approaches was not providing any clue about the mathematical reasons

[19] Dirac 1926b.

[20] Schrödinger 1926e.

[21] Although Schrödinger realized that, to some extent, the square modulus $\psi\psi^* = |\psi|^2$ played the role of a weight function in the configuration space (this interpretation can be found in Schrödinger 1926d, pp. 109 – 139), the full probabilistic meaning of $|\psi|^2$ came only with Born's statistical interpretation.

that were making it possible. Let us consider a bit closer the situation. As mentioned, Born and Jordan matrices were not understood as associated to linear transformations in some (linear) space. Accordingly, in the matrix formalism, there are just no column matrices (vectors) on which these matrices could 'act'. With hindsight, these vectors would, if present, formally correspond to (quantum) states of the system, but in the matrix formalism, we are just in the "Heisenberg representation" where observables (matrices), but not states, evolve with time and the dynamical equations are about observables-matrices and not states-vectors. This makes it plain why matrix mechanics was not necessitating, as far as physical reasons go, any reference to a linear space underlying its formalism. Given that, at the time, in mathematics too, one could deal with diagonalization problems in the language of the normal form of bilinear forms, and that other 'linear' problems were treated in a non-coordinate free approach, we see that matrix mechanics and its use were not requiring any geometric form of intuition to be associated to its formal features.

Similar observations can be done with respect to wave mechanics, albeit for different formal reasons. Here, one considers a partial differential equation defining an eigenvalue problem. The eigenvalues are associated to stationary solutions of the time-dependent equation and refer to time-constant physical configurations of the system. Because the equation is linear, one can take linear combinations of its solutions to obtain new ones. However, the linear span of the solutions is devoid of any physical meaning beyond the physical meaning attributed to the solutions themselves. Thus, Schrödinger's solutions are not representing quantum states, they provide just the density of matter waves of the system. Since Schrödinger is attributing to the solutions an interpretation in terms of configurations of matter waves, he does not associate either to its differential expressions $A(p_k, q_k)$ an operatorial meaning in the linear span.

As we see, the way both formalisms were used and interpreted was not requiring any recognition of the importance of the linear structure underlying both. Given that the latter is the key to grasp the nature of the mathematical relationship between matrix and wave mechanics, the proper mathematical understanding of this relation had to remain obscure for some time. The appraisal of the intrinsic relevance of

the linear structure underlying matrix and wave mechanics actually emerged out of the necessity to work out the dynamic equations in different coordinate schemes i. e. to understand how to perform, at the level of the quantum treatment, the analogue of a classical (canonical) transformation of variables used to describe the system. As we will see, learning how to do it provided a strong hint to understand the relationship between both eigenvalue problems of matrix and wave mechanics. It is within these developments that the linear stucture underlying both formalisms started to be granted some attention, until it received a central place in the formulation of quantum mechanics as the space of quantum states. Thus, the problem of quantum canonical transformations led to the "transformation theory" of London, Dirac and Jordan, which in turn triggered von Neumann's theory of quantum mechanics as an operator calculus in abstract Hilbert space in which one-dimensional spaces (rays) describe pure states.

3 The question of transformations of coordinates

Whatever the formalism of quantum mechanics put to use, matrix or wave, in the practical applications there arose immediately the need to understand how to take advantage of the various coordinate schemes that physicists were widely using in classical mechanics. This implied to work out, at the quantum level, the transformations analogous to the canonical transformations of the classical formalism. In particular, one wished to recover in matrix or wave mechanics the computational convenience and physical heuristics of the action-angle techniques, and more generally of cyclic coordinates, the more so as these techniques were underlying the computational scheme of the "old quantum theory" of multiply periodic systems[22]. To much surprise, it was discovered that the taking over of the canonical techniques in the realm of quantum formalism was not quite easy. Actually, instead bringing more insight, the early uses of transformations of variables prompted new questions and lead sometimes to paradoxical statements. But this was eventually to good effect: in need to clarify what were exactly the quantum counterparts of classical transformations, quantum physicists were

[22] See Darrigol 1992.

forced to face problems where the linear structure of the formalism was most manifest. Not only were the problems of the transformation of coordinates eventually solved, the insight gained on this occasion was instrumental in the obtention of the transformation theory and the Hilbert space formalism.

3.1 Canonical transformations

The concept of canonical transformation received its full understanding in the works of Carl G. J. Jacobi in the middle of the 19th century[23]. Jacobi, following Hamilton's reformulation of analytical mechanics[24], simplified the theory and made it a powerful tool for solving mechanical problems. For generalized coordinates q_k and corresponding momenta p_k, obeying the canonical equations

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

a canonical transformation q_k, $p_k \to Q_i$, P_i defines a set of new variables Q_i and P_i, functions of the former q_k and p_k, which are required to be canonical as well, i. e. there exists a new Hamiltonian function, K, such that:

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}, \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}.$$

Jacobi identified the most general canonical transformation q_k, $p_k \to Q_i$, P_i, as obtained by considering a generating function, say $V = V(q_k\,, P_i, t)$ with the relations

$$\begin{aligned} Q_i &= \frac{\partial V}{\partial P_i}, \\ p_k &= \frac{\partial V}{\partial q_k}, \\ K &= H + \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned} \tag{7}$$

[23] Jacobi 1866.
[24] Hamilton 1834.

The first two relations, together with their inversions, yield the transformation formulas, whereas the last one defines the new Hamiltonian K.

The theory of canonical transformations is an important tool in the Hamilton-Jacobi theory of solving the dynamics of the system. A powerful way to solve the Hamilton-Jacobi equation for the function S characterizing the geometry of the possible trajectories of the system:

$$0 = H(q_k, \frac{\partial S}{\partial q_k}) + \frac{\partial S}{\partial t}, \tag{8}$$

is indeed to try to express it in a set of canonical variables where it is separable[25]. One can then introduce yet another transformation of variables where the dynamics of the system are particularly simple to picture in periodic terms, where the new momenta (called then 'action variables') are constant in time, and their canonical conjugates are evolving linearly in time (called then 'angles'). The Hamilton-Jacobi theory became popular in the second half of the 19th century mainly among astronomers busy with celestial mechanics. The latter developed sophisticated perturbation methods which enabled to solve (8) by successive approximations. Owing to the similarity between the dynamical problems of celestial mechanics, and Bohr's atomic theory, these same techniques were next applied to the field of quantum theory and constituted the formal core of the "old quantum theory" of multiply periodic systems.

With the advent of quantum mechanics, the concept of a canonical transformation went transposed to the quantum case. In their paper from November 1925, Born, Jordan and Heisenberg defined a canonical transformation, as a transformation $\mathbf{p}, \mathbf{q} \to \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ preserving the fundamental commutation relations[26]:

$$\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = -\mathrm{i}\hbar\mathbf{1} \Leftrightarrow \mathbf{PQ} - \mathbf{QP} = -\mathrm{i}\hbar\mathbf{1}.$$

[25] For an introductory review of the Hamilton-Jacobi theory, see for example Goldstein 1980, or the beautiful book of Lanczos 1986. For a more rigorous and deeper approach to the mathematical implications of the Hamilton-Jacobi theory, see instead Rund 1966.

[26] For the sake of simplicity, the authors considered initially the case of a single degree of freedom, see Born, Heisenberg and Jordan 1926.

The authors recognized that the conjugation by an arbitrary matrix **S**:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &\to \mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}\mathbf{S} \equiv \mathbf{Q} \\ \mathbf{p} &\to \mathbf{S}^{-1}\mathbf{p}\mathbf{S} \equiv \mathbf{P} \end{aligned} \tag{9}$$

is a canonical transformation. They postulated further that *any* canonical transformation is of that form. The proof of that statement came four month later in a paper by Jordan[27]. Reducing the problem to the case of one degree of freedom (one could combine transformations multiplying the corresponding matrices), Jordan showed that for any canonical transformation one could obtain the form (9) considering **S** as a solution of the differential equation

$$\mathbf{R}\mathbf{S} + \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}} = 0 \tag{10}$$

where **R** is defined by $\mathbf{P} - \mathbf{p} = -\mathrm{i}\hbar\mathbf{R}$. When **R** does not depend on **q**, Jordan could provide an explicit solution to (10) in the form of a 'normal ordered' exponential

$$\mathbf{S} = Exp(-\mathbf{R}, \mathbf{q}) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathbf{R})^n \mathbf{q}^n}{n!}.$$

The same exponential can be used to construct the quantum analogue of a classical canonical transformation with generating function

$$V(q, P) = \sum_k v_k(q) P_k. \tag{11}$$

This was an important practical result as this is the general form of a point-transformation where by definition the new generalized coordinates are only functions of the old ones. Indeed, one has:

$$\begin{aligned} Q_k &= \frac{\partial V}{\partial P_k} = v_k(q); \\ p_k &= \frac{\partial V}{\partial q_k} = \sum_l \frac{\partial v_l}{\partial q_k}(q) P_l \end{aligned}$$

Jordan thus proved that all the point-transformations used in classical mechanics could be transposed to the quantum case.

[27] Jordan 1926a, submitted April 27.

Jordan contributed two months later a second paper[28] where he extended this result showing that given a generating function generalizing (11):

$$V(P,q) = \sum_n f_n(P) g_n(q),$$

the transformation defined by the formulas (7) was quantum canonical. He proved this result showing explicitly the following relation between the generating function $\mathbf{V}(\mathbf{q},\mathbf{P})$ (understood as a matrix) and the corresponding matrix $\mathbf{S}$

$$\ln \mathbf{S} = \sum_{n=1}^{f} \mathbf{q}_n \mathbf{P}_n - \mathbf{V}(\mathbf{q},\mathbf{P}).$$

Indeed, one can then prove that

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{S}\mathbf{P}_k^{-1}\mathbf{S}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{q}_k},$$
$$\mathbf{q}_k = \mathbf{S}\mathbf{P}_k\mathbf{S}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{P}_k}.$$

Jordan's results were crucial for the very consistency of the quantization procedure. Indeed, as we will see now, the difficulties met in the quantization of systems involving cyclic coordinates led to the fundamental problem of investigating the equivalence between quantum problems stemming from canonically equivalent versions of a same classical problem. Thus, the problem adressed was to provide a quantum equivalent of the theory of classical canonical transformations, with the requirement that classically equivalent problems, once quantized, are equivalent too and hence describe the same physical situation.

3.2 The quantization of action-angle pairs: an unexpected difficulty

Action-angle techniques achieved considerable popularity among atomic physicists following their efforts to generalize Bohr's quantization of the circular orbits of the hydrogen atom. The solution of this problem led

[28] Jordan 1926b, submitted July 6.

to a set of well-defined prescriptions (the Bohr-Sommerfeld conditions) allowing the quantization of multiply periodic systems where one could introduce action-angle variables, a class of systems already known to 19th century astronomers and mathematicians involved into problems of celestial mechanics. Thanks to the analyses of Karl Schwarzschild, Paul Epstein, and Niels Bohr[29], some of the results of these astronomers and mathematicians, from Delaunay to Poincaré, became known to the quantum community. The systems considered were of the separable type, i. e. cases where the Hamilton-Jacobi equation could be separated and the motion understood as a superposition of one-dimensional periodical components characterized by an angle variable, growing uniformly in time, and a conserved action integral. These multiply periodic systems fitted well the physical models of Bohr's atomic theory where, save for the quantization prescriptions, atoms were expected to be considered in analogy to planetary systems with the help of the arsenal of perturbation methods. As it turned out, this analogy led eventually to a dead-end: genuine quantum effects such as spin and quantum statistics, showing up respectively in the anomalous Zeeman effect and Helium spectra, effects resisting the 'semi-classical' methods of the "old quantum theory", were instrumental in the advent of quantum mechanics. Actually, it was already clear that the quantum theory of multiply periodic systems could not be the last word: because of its requirement of an underlying periodicity, it was inoperative in situations as simple as free motion, not to speak of scattering, or of transitions between stationary states.

Given the canonical form of the equations of matrix mechanics, inviting to take advantage as much as possible of the analogy with the classical theory, it was natural to try to import into its formal developments the arsenal of techniques developed by 19th century astronomers and their 20th century quantum heirs[30]. However, quantization using the action-angle variables turned out unexpectedly difficult to handle in the matrix context: a straightforward application of the rules of quantization to a couple of action-angle variables appeared impossible.

[29] Schwarzschild 1916, Epstein 1916ab, Bohr 1918.

[30] For instance the papers of Born and Brody 1921, Epstein 1922, Born and Pauli 1922.

Indeed, the commutation relations (1) can not be imposed because of the time-constancy of the action variable[31].

The problem appears already in simplest case of the rotator. Using the angular variable φ and the associated momentum p_φ, the classical Hamiltonian of the rotator is[32]:

$$H = \frac{1}{2A} p_\varphi,$$

with A, in analogy to the mass, is the moment of inertia of the rotator. The angular coordinate is cyclic which ensures the time-conservation p_φ. In matrix mechanics, the latter become matrices, and the conservation of p_φ requires it to commute with the Hamiltonian so that it is diagonal, which is incompatible with the canonical relations (1) as a simple inspection shows. To circumvent the difficulty of quantization using the cyclic variable φ, several authors proposed to express the rotator in a different set of canonical variables where quantization could be carried out. In a paper submitted just before the first one of Jordan, Igor Tamm proposed a (point) transformation[33] going to the libration coordinate q and its associated momentum p_q using as generating function $V = p_q \sin\varphi$, so that

$$p_\varphi = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = p_q \cos\varphi, \quad \text{and} \quad q = \frac{\partial V}{\partial p_q} = \sin\varphi, \tag{12}$$

and the corresponding classical Hamiltonian:

$$H = \frac{1}{2A}\left\{p_q^2 - p_q^2 q^2\right\}.$$

After a proper symmetrization of this Hamiltonian, Tamm was then able to comput he spectrum of the stationary states. Relying on his transformation (12) he further proposed a general scheme to deal with problems involving cyclic coordinates. However, in a note added in the proofs (dated May 22), apparently unaware of Jordan's result, Tamm asked the following general question[34]:

[31] An explicitation of this difficulty is to be found in a later paper of Jordan (Jordan 1927, p. 3), see also the section on Jordan's transformation theory below.

[32] I have changed below Tamm's notations.

[33] Tamm 1926, submitted April 23.

[34] Tamm 1926, pp. 696–697.

> «Das zur Behandlung des Rotators angewandte Verfahren führt zu der Frage, ob es berechtigt ist zur Lösung eines Problems, das durch Angabe einer «klassischen» Hamiltonschen Funktion definiert ist, eine «klassische» kanonische Transformation der Variablen auszuführen und erst dann die transformierte Hamiltonsche Funktion nach Umschreiben in Matrizenform in die Quantenmechanik zu übernehmen. Das heisst, liegen zwei klassische Hamiltonsche Funktionen $H(p,q)$ und $H'(P,Q)$ vor, die vermittelst einer klassischen kanonischen Transformation ineinander übergeführt werden können und schreibt man H und H' in Matrizenform um, so fragt es sich, ob die nach den Regeln der Quantenmechanik durchgeführte Lösung der beiden Hamiltonschen Probleme zu gleichen Energiewerten führt oder nicht.»

It is difficult to prove the equality of spectra of the matrices H and H' without Jordan's first result. The concept of a (quantum) canonical transformation as a change of variables preserving the canonical commutation relations does not entail in a straightforward way the invariance of the spectrum of the related Hamiltonians. Such a result is on the other hand easily obtained when one can use the form (9)[35].

Tamm further observed that given a classical transformation with the generating function $V(q,P)$ written as a sum of monomials of the form $q^i P^j$, when replacing systematically all the variables by matrices, the relations

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{q}}; \quad \mathbf{Q} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{P}} \tag{13}$$

define a transformation which is canonical. Although unable to prove in general that the energy spectrum was left invariant, except in some peculiar cases (he missed Jordan's result!), Tamm conjectured it was true and hence conjuctured further that the answer to his question was in general affirmative[36]:

> «[...] die am Anfang des Nachtrages erwähnte Frage, wenn nicht allgemein, so doch in vielen Fällen [ist] zu bejahen, denn es

[35] One already finds an example in section three of Born, Heisenberg and Jordan paper where they discuss the uniqueness of the diagonalizing procedure, proving the well-definedness of the quantum dynamical problem.

[36] Ibid, p. 698.

> ist gleichgültig, ob die Transformation [13] vor oder nach der Umschreibung der klassischen Hamiltonschen Funktion in der Matrizenform ausgeführt wird.»

Tamm's question on the identity of spectra for classically equivalent Hamiltonians was not an isolated concern: a similar investigation can be found in a slightly posterior contribution of Otto Halpern from Vienna, with the title «Notiz über die Quantelung des Rotators und die Koordinatenwahl in der neuen Quantenmechanik»[37]. Halpern quantized the rotator using instead the Poincaré transformation

$$p_q = -\sqrt{2p_\varphi}\sin\varphi \quad \text{and} \quad q = \sqrt{2p_\varphi}\cos\varphi,$$

with the resulting Hamiltonian

$$H' = \frac{(p_q^2 + q^2)^2}{8A}$$

of which he then duely studied the spectrum. If Tamm's concern about the soundness of his procedure came only after he completed his paper as his note suggests, Halpern realised the same problem right from the start: indeed, he ended his paper with the following commentary[38]:

> «Es läge nun nahe, diesen recht einfachen Rechenvorgang, der jedes zyklische Problem auf die «Potenz» eines Oszillatorenproblems umformt, ganz allgemein zur Integration aller gequantelten Probleme heranzuziehen, die ja nach Einführung der Wirkungsvariablen durchweg zyklische Systeme geworden sind. Rechnet man dies für einige Fälle aus, so ergibt sich ein vollkommenes Versagen dieses Versuchs. Dies hat im folgenden seine Ursache. Betrachten wir zunächst die Hamiltonsche Funktion $\mathbf{H}$ in Matrizengestalt, die wir durch Transskription des klassischen Ausdrucks H in kartesischen Koordinaten gewonnen haben, und gehen wir von den Matrizen $\mathbf{x}$, $\mathbf{p}_x$ zu neuen Matrizen $\mathbf{q}, \mathbf{p}$ über, so daß auch bei dieser Transformation die Vertauschungsrelation
>
> $$\mathbf{p}_x\mathbf{x} - \mathbf{x}\mathbf{p}_x = \mathbf{p}\mathbf{q} - \mathbf{q}\mathbf{p} = -\,\mathrm{i}\hbar\mathbf{1}$$
>
> gewahrt bleibt, so ergibt sich: $\mathbf{H}\,(\mathbf{x},\,\mathbf{p}_x) \to \mathbf{H}'\,(\mathbf{p},\,\mathbf{q})$. Dadurch werden die Werte der Energieniveaus nicht geändert, wie aus dem

[37] Halpern 1926, submitted June 5.
[38] Ibid, p. 10.

> Eindeutigkeitssatz von Born-Heisenberg-Jordan folgt. Dieser Matrizentransformation entspricht eine Berührungstransformation mit dem Ergebnis
>
> $$x, p_x \to q, p; H(x, p_x) \to H'(q, p).$$
>
> Wenn wir jetzt H' in Matrizengestalt aufschreiben, so geht sie nicht in die Form $\mathbf{H}'$ über, sondern etwa in $\mathbf{H}^*$. $\mathbf{H}^*$ aber würde andere Termwerte liefern als $\mathbf{H}'$. [...] Daraus folgt zwingend, daß es für die Anwendung der Matrizenrechnung notwendig ist, die Hamiltonsche Funktion des Systems in *kartesischen* Koordinaten in den Matrixkalkül herüberzunehmen. *Innerhalb* der Matrizenrechnung sind dann alle Koordinaten erlaubt, die unter Wahrung der Vertauschungsrelation auseinander hervorgehen.»

Reaching a negative conclusion contrary to Tamm's, Halpern makes a statement certainly puzzling to the modern reader used to coordinate-independent statements: this shows just how much there still was to be achieved before a proper understanding of the situation was enventually obtained.

3.3 Quantum analogues of the action-angle techniques

Various approaches to the problem of the quantization using cyclic coordinates were further provided by London, Dirac, and others. I mentioned already Dirac's approach when discussing his equivalence proof of the q-number calculus with matrix mechanics. His fundamental relations (5) were used again by Fritz London three months later[39]. The latter proposed to circumvent the difficulty to quantize an action-angle pair p and q considering as a substitute for (1) the derived relation

$$\mathbf{p}\mathbf{E}(\mathbf{q}) - \mathbf{E}(\mathbf{q})\mathbf{p} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}} = -\mathrm{i}\hbar\mathbf{E}(\mathbf{q}), \tag{14}$$

where $\mathbf{E}(\mathbf{q})$ was defined formally as the exponential $\mathbf{E}(\mathbf{q}) = \sum \mathbf{q}^s/s!$. Contrary to (1), (14) makes sense for a time-constant, hence diagonal matrix $\mathbf{p}$. London could then discuss the eigenvalues of the action matrix $\mathbf{J}$ and the resulting relationship between the 'transition' and the 'classical' (*Umlauf*) frequencies. London considered next the problem

[39] London 1926a, submitted May 22.

of the form of quantum canonical transformations. Observing that the Born-Jordan-Heisenberg form (9) of the canonical transformations was unpractical to use because of the necessity of computing the inverse $\mathbf{S}^{-1}$(this is in general tractable only for infinitesimal cases), London proposed an alternative. He proved that given an arbitrary (matrix) function $\mathbf{S}(\mathbf{q}, \mathbf{P})$, the transformation defined by

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{P}}; \quad \mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{q}},$$

was canonical, i. e. he generalized Jordan's result which he apparently was not yet aware of. He immediately applied his result to the oscillator and rotator problems, going to action-angle variables and using as well his newly obtained relation (14).

4 Towards a proper understanding of the mathematical structure: London's early transformation theory

London's work on quantum canonical transformations lead him to penetrate deeper than anybody else before the mathematical structure of the new quantum theory. In a paper submitted October 16 which established him firmly as one of the pioneers of transformation theory[40], London reached a clear understanding of the importance of the linear and functional structures involved in the kind of problems considered in quantum theory.

London opened his paper observing that in the recent wave mechanics of Schrödinger the full power of the canonical formalism was not yet taken advantage of[41]:

> «Die Beschreibung des Schwingungsvorganges, in welchen Schrödinger das quantenmechanische Geschehen aufgelöst hat, bedient sich ausschließlich des «q-Raumes» als Mannigfaltigkeit der mathematischen Formalismen. Es ist bekannt, welche außerordentliche Symmetrie die klassische Mechanik annimmt, wenn man statt der Koordinaten und ihrer zeitlichen Ableitungen die Koordinaten

[40] London 1926b.
[41] Ibid, p. 193.

> und Impulse als «kanonische» Variable einführt, und sich dadurch die Möglichkeit erschließt, die Lösung des mechanischen Problems auf die Aufsuchung einer Transformation auf uniformisierende Variable zurückzuführen.
>
> Die Übertragung dieses Ideenkreises auf die Wellenmechanik ist von prinzipieller Bedeutung; sie soll in ihren Grundzügen im folgenden skizziert werden. Dabei wird uns die Parallele zu der bereits vorliegenden Transformationstheorie[42] der Matrizenmechanik von Vorteil sein.»

London observed that in the Schrödinger equation

$$\mathbf{H}(q, \frac{\partial}{\partial q})\Psi(q) = E\Psi(q), \tag{15}$$

the changes of variables used until then corresponded solely to point transformations, namely $Q = F(q)$. He proposed consequently to consider the most general formal differential relations

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mathbf{F}(q, \frac{\partial}{\partial q}), \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} &= \mathbf{G}(q, \frac{\partial}{\partial q}), \end{aligned}$$

where the second one is constrained by the necessity to preserve the canonical relation

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}}\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}} = 1.$$

$\mathbf{F}$ and $\mathbf{G}$ can be obtained, drawing on London's, and Jordan's earlier results, from a single 'generating' expression $\mathbf{S} = \mathbf{S}(q, -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}})$ using the Jacobi representation

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial q}, \\ \mathbf{Q} &= \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{P}}. \end{aligned} \tag{16}$$

[42] Notice the use of this word which suggests that the problem by then has become a topic by itself. London refers here to the canonical transformation papers of Jordan as well as to his own commented above.

On the other hand, one can construct an operator **T** implementing this transformation (16) as a conjugation (9). The proof of the equivalence of (15) with the transformed eigenvalue problem,

$$\mathbf{H}^*(\mathbf{Q}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}})\Psi^*(Q) = E\Psi^*(Q), \quad \text{where}$$
$$\mathbf{H}^*(\mathbf{Q}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}}) \equiv \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{Q}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}})\mathbf{T},$$

becomes trivial provided one recognizes that the solutions of the transformed problem are related to the previous ones by the action of T:

$$\mathbf{T}(\mathbf{Q}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{Q}})\Psi^*(Q) = \Psi(Q). \tag{17}$$

The most striking part of the paper is London's realization of the proper mathematical meaning of a canonical transformation. London rightly insists on the operatorial meaning of the Q and P symbols, bringing to the forefront the 'linear algebra' structure of the problem[43]. The rather forceful style of the following quote from his paper clearly witnesses London's awareness of the importance of his insight[44]:

> «Wir werden [...] zwangläufig zu einer Deutung des ganzen Transformationszusammenhanges geführt, welche bereits in der Matrizenmechanik mehrfach geahnt worden ist, aber in ihr noch nicht vollständig zum konkreten Ausdruck gelangen konnte.
>
> Wir sind ausgegangen von Transformationen von Operationen [16]. Das bedeutet folgendes: Ich habe in einem Gebiet eine Abbildung H, welche jeden Gegenstand x in einen anderen Gegenstand y des Gebietes überführt. Außerdem habe ich eine andere Abbildung **T**, welche das ganze Gebiet mitsamt seiner Abbildung H in ein neues Gebiet abbildet. x gehe dabei in x^*, y in y^* über. Die «abgebildete Abbildung» $\mathbf{H}^*$ führt dann x^* in y^* über.

[43] London rightly noted that this algebraic reality had been hinted at previously by Born, Jordan and Heisenberg (in connection with the theory of Hermitian forms), and Born and Wiener (operators acting on formal series).

[44] Ibid, pp. 197 – 198.

$$\begin{array}{ccc} y & \xRightarrow{\mathbf{T}} & y^* \\ \uparrow \mathbf{H} & & \uparrow \mathbf{H}^* \\ x & \xRightarrow{\mathbf{T}} & x^* \end{array}$$

Benutzt man statt $x^* \to y^*$den Umweg $x^* \to x \to y \to y^*$, so ergibt sich die bekannte Darstellung für die Transformation einer Transformation:

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{T}.$$

Dieser Zusammenhang hatte von Anfang an in der Matrizenmechanik die Frage nahegelegt: Wenn die kanonischen Transformationen $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{T}$ die Form von Transformationen von Transformationen haben, an welchen Dingen x greift dann $\mathbf{T}$ unmittelbar an? Die Antwort auf diese Frage gibt Gleichung [17]: Die Dinge x sind Schrödingers neue Zustandsgröße Ψ, deren Schwingungsvorgänge durch eine Reihe von Eigenfunktionen Ψ_k beschrieben werden. Der Operator $\mathbf{T}$ führt gemäß [17] diese Reihe gliedweise über in ein anderes System Ψ_k^* von Eigenfunktionen.»

London expanded further the eigenfunctions Ψ_k on the system formed by the Ψ_i^*,

$$\Psi_k(Q) = \sum_i T_{ik}\Psi_i^*(Q), \tag{18}$$

and proved that the matrices built out of the Schrödinger matrix elements T_{ik},

$$T_{ik} = \int \bar{\Psi}_i^* \mathbf{T} \Psi_k^* dQ$$

were unitary

$$\mathbf{T}^\dagger \mathbf{T} = \mathbf{1}. \tag{19}$$

He interpreted then the corresponding linear transformations as "rotations" (*Drehungen*) in the linear space that, remarkably enough, he insightfully related to Hilbert's name[45]:

[45] Ibid, p. 199. London refered here to the linear space that Hilbert used, extending Fredholm's pioneering results (Fredholm 1900, 1903), in his studies of the spectral

> «[19] charakterisiert die Abbildung [18] als eine «*Drehung*» (im Hermiteschen Sinne) des von den orthogonalen Eigenfunktionen ausgespannten «Koordinatenachsensystems» im *Hilbertschen* Funktionenraum von unendlich vielen Dimensionen. Die kanonischen Transformationen der Matrizen sind dann die von dieser Drehung *induzierten* Transformationen beliebiger linearer Transformationen des Simultansystems der Ψ_k.»

London devoted the rest of his paper applying his formal understanding of what canonical transformation are to obtain in a unified way solutions of problems involving action-angle coordinates. Since, in the latter, the Hamiltonian $\mathbf{H}$ is by definition only a function of the $\mathbf{J}_k = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial w_k}$, the wave equation is easily solved yielding as eigenfunctions the exponentials. This is, finally identified, the quantum counterpart of the simplicity which the use of action-angle variables brings to classical mechanics. Then, applying the transformation, (17), one can compute explicitly the solutions corresponding to the old variables scheme. As London puts it, the action-angle variables correspond to the use of the exponentials for the complete system, and other choices map this system to other complete sets.

Apparently after completing his work, London realized that a whole mathematical trend was related to his own results. In a footnote, he mentioned the works of Pincherle and Cazzaniga on "distributive functional operations"[46]. In Pincherle's language, the "distributive" property corresponds to what we call today linearity, and the papers London refers to develop elements of a theory of formal operations on functional spaces. Another reference is to Paul Lévy's *Leçons d'analyse fonctionnelle*, which deals with functional spaces insisting much on the "geometrical" (linear space) aspect of the situation. London's comments were the second time, after Born's, Jordan's and Heisenberg's remarks on the relevance for the matrix formalism of the theory of the diagonalization of infinite forms, that physicists were explicitly pointing to the importance for quantum physics of a new mathematical

problem of bounded forms (Hilbert 1906, and Hilbert 1912 for a collection of all his papers devoted to the topic), that today we name l^2. See Dieudonné 1981, chapt. V, and Steen 1973 for detailed accounts. See also below the section on the contribution of John von Neumann.

[46] Pincherle 1897, 1905; Cazzaniga 1899.

field of functional analysis. The final episode, where to occur with the mathematical elaboration of transformation theory by von Neumann.

Before we continue next with an examination of transformation theory, it is fair to recall the unfortunate fate of Lanczos' continuous field-like formulation of matrix mechanics which preceded, this is important to mention, Schrödinger's wave mechanics[47]. Would his work been better understood and accepted at the time, the recognition of the linear structure of quantum mechanics would have been accelerated and its relation to the mathematics of functional analysis taken earlier advantage of. Indeed, as early as November 1925, Lanczos succeeded in translating the discontinuous matrix equations into integral equations using the theory of Green functions. One of the weaknesses of his approach, but, with distance, one of his most glorious anticipations, was Lanczos' use of a kernel associated to an orthogonal system of functions. Lanczos fully realized the lack (at the time!) of a physical motivation for his construction, but emphasized that the situation would radically change in case the orthogonal system were to receive a physical meaning. Then, the equation defining the kernel would make the whole difference and the continuous 'field-like' (*feldmäßige*) formulation would supersede the matrix one[48]:

> «Daraus ergibt sich für die prinzipielle Bewertung der beiden Auffassungen folgendes Bild. Sind alle physikalischen Tatsachen von der Beschaffenheit, daß sie uns prinzipiell immer nur die Koeffizienten der Matrizen liefern können, so gebührt der matrizenmäßigen Darstellung der Vorzug (wenigstens vom positivistischen Standpunkt aus !), weil sie kein prinzipiell unerreichbares Element in die Beschreibung der Tatsachen hineinbringt. Die Sachlage ändert sich aber, wenn dem Kern eine physikalische Bedeutung zukommt. In diesem Falle muß die feldmäßige Darstellung als die adäquatere gelten, weil die matrizenmäßige Formulierung insofern weniger liefert, als sie nur die Eigenwerte des Kernes geben kann, das System der Eigenfunktionen aber unbestimmt läßt.»

Lanczos' proposal did not receive the attention it retrospectively deserved, even not when the first proofs of the equivalence between matrix

[47] Lanczos 1926.
[48] Ibid, pp. 820 – 821.

and wave formalism hit the stage. This is actually quite surprising given the first rank mathematical abilities of those who at the time played down Lanczos' contribution, namely Schrödinger and Pauli themselves[49]. This will be remained as one of the missed opportunities in this story. Be it as it may, Lanczos deserves retrospectively his part of recognition as one of those whose intuition of the mathematics involved was developing (retrospectively) in the right direction.

5 The wave function acquires physical meaning

There are many sides to the crucial contribution of wave mechanics to the shaping and final understanding of quantum mechanics. Here, I want to emphasize the very importance of the wave function, more precisely its formal role within the formalism, before (at least conceptually) the issue of its physical interpretation was raised. Because in wave mechanics we are, retrospectively, in the "Schrödinger picture", the wave function, as an explicit formal ingredient of the Schrödinger formalism, offers a potential 'handle' on which the object soon to be recognized as operators, can simply 'act'. This is plain with the differential operators of Schrödinger, but we just saw that London recognized a deeper picture where there was advantage to fancy "distributive operations" on a space spanned by the wave functions. Let us remember that Heisenberg's matrices were not understood as standing for mathematical objects endowed with an operatorial meaning. They were conceived as a convenient way to write down transition amplitudes, making manifest the manipulation (matrix) rules governing matrix mechanics. Again, we meet here the discrepancy of past and old conceptions. Today we think of matrices, and of the associated operations (multiplication, trace, determinant) as derived concepts, making those of linear spaces and linear mapping as the fundamental ones. The former are mere 'numerical' consequences of the latter as soon as a basis has been chosen. Such a

[49] Pauli and Schrödinger criticized Lanczos' contribution invoking the curious argument that in Lanczos' theory, instead of the eigenvalues, there appeared their inverses. Indeed, such was the case because of the mathematical tradition in writing down the Fredholm problem. However, this was of a purely notational importance, and besides, Lanczos himself stated in his paper on p. 816 the correct relation with the energy eigenvalues.

point of view was certainly foreign to the founding fathers of quantum mechanics. Moreover, and more importantly, they lacked any physical motivation to ask for the substrate on which one could think the action of the matrices. This is where the issue of the physical meaning of the wave function enters the stage.

As brilliant as was London's mathematical understanding of the situation, he missed the full story. Although he correctly identified the transformation equations between the amplitudes, he did not realize their physical meaning. One should however not consider this as London's lack of insight. At the time of London's paper, Born's statistical interpretation of the squared modulus of the wave function was hardly known. We thus come to the next crucial event, which made finally possible Dirac's and Jordan's full accounts, physically and mathematically, of the transformation theory.

The context of Born's proposal is well known and I shall not recall here the details. Let us however notice that Born's interpretation emerged, almost as a mere byproduct, out of a longstanding interest of Born to reformulate the theory in order to be able to handle typically non periodic situations where the spectra were continuous. The operator theory that he developed together with Wiener (the one that I alluded to above) was explicitely within this program. It is remarkable that Born's persistance in dealing with the problem eventually make him hit on this crucial ingredient of the theory. The statistical interpretation was merely mentioned in the preliminary notice[50], but in his subsequent paper[51], Born made his proposal explicit. In case of a superposition of Schrödinger eigenfunctions:

$$\psi = \sum_n c_n \psi_n, \tag{20}$$

Born interpreted the square moduli $|c_n|^2$ as the probability for the system to be in the state n. Going to to the continuous case, and using the Fourier expansion

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int c(k) e^{ikx} \, \mathrm{d}k,$$

[50] Born 1926a, submitted June 25.
[51] Born 1926b, submitted July 21.

he again interpreted $|c(k)|^2$ as a relative frequency for the interval $(2\pi)^{-1}dk$ centered at k. One will however not find directly in Born's paper the emblematic statement that $|\psi(x)|^2$ yields a density of probability. Within Born's logic at that time, this would have required to consider an improper expansion of the type

$$\psi(x) = \int \psi(x)\delta(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

which he did not. This is certainly related to the fact that Born did not grant (20) the meaning of a representative of a state. It was for him rather something of a statistical mixture[52].

Because of this, an important step had still to be made, namely characterize directly $|\psi(x)|^2$as a density of probability, and then generalize this intepretation to other quantities obtained from the wave function. This had to be Wolfgang Pauli's contribution. In his paper on transformation theory that we shall comment shortly, Jordan acknowledges indeed Pauli's generalization of Born's insight refering to a note in a paper by Pauli still in print at that time[53]. What Pauli had in mind is exposed more explicitely in his letter to Heisenberg[54]. There, Pauli first extends Born's interpretation to the squared modulus of the wave function *in momentum space* and then considers even more general possibilities. Let me quote him extensively[55]:

> «Die historische Entwicklung hat es mit sich gebracht, daß die Verknüpfung der Matrixelemente mit der Beobachtung zugänglichen Daten auf dem Umweg über die emittierte Strahlung vorgenommen wird. Ich bin aber jetzt mit der ganzen Inbrunst meines Herzens davon überzeugt, daß *die Matrixelemente mit prinzipiell beobachtbaren kinematischen (vielleicht statistischen) Daten der betreffenden Teilchen in den stationären Zuständen verknüpft sein müssen* [...] Nun ist es so: alle *Diagonal*elemente der Matrizen (wenigstens von Funktionen der p allein oder der q allein) kann man überhaupt schon jetzt kinematisch deuten. Denn man kann ja zunächst nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß in einem

[52] This is clear in his paper "Das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik" (Born 1926c, pp. 168 – 169).

[53] «Über Gasentartung und Paramagnetismus», Pauli 1927, p. 83.

[54] Pauli to Heisenberg, letter dated October 19, in Hermann, von Meyenn and Weisskopf 1979.

[55] Pauli to Heisenberg, ibid, p. 347.

bestimmten stationären Zustand des Systems die Koor[di]naten q_k seiner Teilchen $(k = 1, .., f)$ zwischen q_k und $q_k + \mathrm{d}q_k$ liegen. Die Antwort hierauf ist

$$\left|\psi(q_1 \dots q_f)\right|^2 \mathrm{d}q_1 \dots \mathrm{d}q_f,$$

wenn ψ die Schrödingersche Eigenfunktion ist [...] Es ist dann klar, daß die Diagonalelemente der Matrix jeder q-Funktion

$$F_{nn} = \int F(q_k) \left|\psi(q_1 \dots q_f)\right|^2 \mathrm{d}q_1 \dots \mathrm{d}q_f,$$

sein müssen, da sie physikalisch "Mittelwert von F im n-ten Zustand" bedeuten. Hier kann man einen mathematischen Witz machen: Es gibt auch eine entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichte im *p-Raum*: Hierzu setze man an (eindimensional formuliert, der Einfachheit halber)

$$p_{ik} = \int p\varphi_i(p)\tilde{\varphi}_k(p)\,\mathrm{d}p;$$

$$\frac{\mathrm{i}}{\hbar} q_{ik} = -\int \varphi_i \frac{\partial \tilde{\varphi}_k}{\partial p}\,\mathrm{d}p = +\int \frac{\partial \varphi_i}{\partial p}\tilde{\varphi}_k\,\mathrm{d}p.$$

(~ bedeutet konjugiert komplexe Größe; es unterscheidet sich im allgemeinen $\tilde{\varphi}_k$ und φ_k nicht nur durch einen konstanten Faktor. Orthogonalität besagt

$$\int \varphi_i \tilde{\varphi}_k\,\mathrm{d}p = \begin{Bmatrix} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{Bmatrix}$$

Multiplikationsregel und Relation $pq - qp = -\mathrm{i}\hbar 1$ sind erfüllt.)

Sie sehen, daß ich gegenüber der gewöhnlichen Vorschrift die Bildungsgesetze für die Matrizenelemente p_{ik} und q_{ik} aus den Eigenfunktionen vertauscht habe. Aus der Matrixrelation des Energiesatzes $p^2/2m + V(q) = E$ gewinnt man

$$\left[\frac{p^2}{2m} + V(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q})\right]\varphi = E\varphi$$

V als Operator gedacht, etwa Potenzreihe in $\frac{\partial}{\partial q}$. Beim harmonischen Oszillator, wo die Hamilton-Funktion symmetrisch in p und q ist, ist auch φ das Hermitesche Polynom [...] Jedenfalls gibt es also auch eine Wahrscheinlichkeit dafür, daß im n -ten Quantenzustand p_k zwischen p_k und $p_k + \mathrm{d}p_k$ liegt, und die ist gegeben durch

$$\left|\varphi_n(p_1 \dots p_f)\right|^2 \mathrm{d}p_1 \dots \mathrm{d}p_f$$

also

$$F(p)_{nn} = \int F(p)\,|\varphi_n(p)|^2\,\mathrm{d}p_1 \ldots \mathrm{d}p_f»$$

According to Pauli, if the system is in a state corresponding to the n-th Schrödinger (normalized) eigenfunction, $\varphi(q)$, the probability for the coordinate q to have a value in the interval q and $q + dq$ is given by $|\varphi(q)|^2\,dq$. Now, rephrasing Pauli's thought, and using a notation closer to what Jordan will use soon (see next section), given two (Hermitian) quantities p and E, one can consider as well the function $\varphi(p, E)$ such that $|\varphi(p, E)|^2\,dp$ be the (relative) probability for p to have a value in the interval between p and $p + dp$, assuming that the value of E was y.

Pauli's thinking was crucial in so far that it drew attention to a possibility of a *systematic* way of obtaining physical information out of quantum computations (one will find precisely this motivation in Dirac's paper on transformation theory, see next section). This eventually ended up the effective bias towards the basis of energy eigenstates making physicists recognize the generality of the eigenvalue problem as associated to *any* physical question. Born's interpretation associates to the n-th Schrödinger wave function, i. e. to the wave function representing a state of energy $E = E_n$, the density of probability of position q defined by the square norm $|\varphi_n(q)|^2$. More generally, one can similarly consider a basis of (function) eigenstates of (any) quantity β, so, instead of definite energy wave functions, one considers definite β wave functions. This had two important consequences on the formal understanding of the situation. First, it emphasized the role of the wave functions which prior to this were considered (unless one granted them physical meaning following the physical picture of an undulatory matter "à la Schrödinger") as mere 'handles' to formulate the eigenvalue problem (but see the discussion at the beginnig of this section). Then, it prompted the necessity to concentrate on the relations between the various amplitudes related to different physical questions. This opened the way to an appreciation of the linear structure underlying the problem from (another) point of view, this time dictated by physical interpretation.

6 The physicists' final appraisal: Jordan's and Dirac's transformation theories

With the acknowledgment of the central role played by wave functions and the understanding of the canonical transformations as implementing unitary transformations in the functional space of the wave functions, the situation was ripe for a final statement refounding the theory on new formal principles and unifying previous apparently disparate approaches. Jordan and Dirac reached more or less simultaneously the same results, but it will come as no surprise for anybody knowing a little of their personalities and contexts, to learn how different their styles and reasonings were.

In what concerns chronology, Dirac's paper came first[56]. It is characteristic of Dirac's scientific style, deceptively simple, yet full of pregnant consequences and insights. Dirac's declared motivation, as already mentioned, was not to study the general scheme of changes of variables, but rather to provide a *systematic* way of obtaining physical information out of quantum computations. Acknowledging the various *ad hoc* prescriptions assigning physical meaning to the c-numbers issued from quantum computations, Dirac proposed the following problem as exhausting the means of quantum theory to provide physical information. Consider a "constant of integration" $\mathbf{g}$ (Dirac's expression for a representative of a physical magnitude), depending on a set of canonically conjugated q-numbers $\boldsymbol{\xi}_r$ and $\boldsymbol{\eta}_r$ parametrizing the system. Because the $\boldsymbol{\xi}_r$ and $\boldsymbol{\eta}_r$ do not commute, one cannot assign in a unique way a numerical value to $\mathbf{g}$ when assigning one to $\boldsymbol{\xi}_r$ and $\boldsymbol{\eta}_r$. Therefore, and taking into account previous prescriptions, the only information one can retrieve, given numerical assignements, say, to the $\boldsymbol{\xi}_r$, is the density of distribution of the $\mathbf{g}$-values on the $\boldsymbol{\eta}_r$-space. Thus, although one cannot follow the transitions in the $\mathbf{g}$-values, it is still possible to specify the fraction of the $\boldsymbol{\eta}_r$-space corresponding to a given value.

In order to work out his proposal, Dirac needed general transformation formulas for passing from a given 'matrix scheme' to another one labelled with the values of a (maximal) commuting set of quantities, like the $\boldsymbol{\xi}_r$ above. This amounts to picking up the basis of $\boldsymbol{\xi}_r$ simultaneous

[56] Dirac 1926c, submitted December 2.

eigenfunctions. Dirac expressed his transformation formulas using the continuous formalism of integral operators, duely mentioning at that point Lanczos' 'field-like' representation[57]. This highly suggestive formalism is possible only at the price of introducing the singular δ-functions and its derivatives, which John von Neumann will refrain from using later (see next section).

I shall not go here more into details about Dirac's paper as the material is nowadays fairly standard. I turn instead to Jordan's contribution whose style since then faded into relative oblivion.

Jordan's paper «Ueber eine neue Begründung der Quantenmechanik»[58] is resolutly of a foundational style. It aims at a unification of previous approaches[59], and uses an axiomatic style together with a rather formal wording. Let us remember that at the time Jordan was at the University of Göttingen, in Max Born's *Institut für theoretische Physik*[60], where he obtained his Ph.D. in 1924 and became privat dozent in 1926. Born had close relations with Hilbert. We know that Jordan, on the other hand, was helping Richard Courant, Hilbert's close friend, in preparing the latter's book, *Methoden der Mathematischen Physik*[61]. Not much is known however about Jordan's possible direct contacts with Hilbert but one can only guess that given Hilbert's fame and Jordan's

[57] It is indeed quite edifying to see Dirac pay this tribute to Lanczos.

[58] Jordan 1926cd. Jordan's paper was received in December 1926, and published in the 1926 volume in 1927. Some results of Jordan's paper were presented at a session of the *Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, on the 14 January 1927. The text of this communication (Jordan 1926c) appeared in the *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* from the year 1926. Jordan's *Zeitschrift für Physik* paper (Jordan 1926d) offers more details but some of the lines from the *Nachrichten* are worth quoting as well.

[59] The issue of deriving a unifying approach to the various quantum formalisms is discussed in Jammer 1966, pp. 293 – 322.

[60] For historical details about the Göttingen Physics Institute and the University, see Mehra and Rechenberg, vol. 1, chapter III.

[61] It is while working on the latter that Jordan got acquainted with the matrix methods. Jordan became Courant's assistent (*Hilfsassistent*) in 1922 to help the latter in his lectures on partial differential equations; he then went to Born. See Reid 1976, pp. 93, 113, also Jammer 1966, p. 207.

own inclinations towards abstraction, Hilbert must have exerted some influence on him[62].

Jordan put forward in his introduction the general problem of the meaning of a change of variables in quantum theory, making explicit the link with his previous works on canonical transformations[63]:

> «Nach Schrödinger ist einer Hamiltonschen Funktion $H(p,q)$ eine Schwingungsgleichung
>
> $$\left\{H(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial y}, y) - W\right\}\varphi(y) = 0$$
>
> zuzuordnen [...] Ich habe mir die folgende Frage vorgelegt: Statt der p, q mögen durch eine kanonische Transformation neue Veränderliche P, Q eingeführt werden, wobei $H(p,q) = \bar{H}(P,Q)$ werden möge. Dann wollen wir mit $\bar{H}$ die neue Wellengleichung
>
> $$\left\{\bar{H}(-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}, x) - W\right\}\psi(x) = 0$$
>
> bilden. Wir erhalten so zu jeder kanonischen Transformation ein besonderes $\psi(x)$. Wie verhalten sich diese $\psi(x)$ zu der ursprünglichen Funktion $\varphi(y)$? Die Beantwortung dieser Frage wird sich aus den späteren Betrachtungen ergeben.
>
> Ihre Untersuchung führte zur Feststellung sehr allgemeiner formaler Zusammenhänge in den quantenmechanischen Gesetzen, welche die in den bisherigen Formulierungen niedergelegten formalen Tatsachen als spezielle Fälle in sich enthalten. Dabei ergab sich auch eine engere Verbindung zwischen den verschiedenen bislang entwickelten Darstellungen der Theorie. Bekanntlich ist die Quantenmechanik in vier verschiedenen, selbständigen Formen entwickelt worden; außer der ursprünglichen Matrizentheorie liegen vor die Theorie von Born und Wiener, die Wellenmechanik und die Theorie der q-Zahlen. Die Beziehungen der letzteren drei Formulierungen zur Matrizentheorie sind bekannt; jede Formulierung führt zu den gleichen Endformeln wie die Matrizentheorie, soweit diese selber reicht. Dabei standen jedoch die drei späteren Formulierungen *untereinander* ohne eigentliche

[62] It seems that Jordan followed all of Hilbert's lectures on physical topics (Mehra and Rechenberg 1982, vol. 3, p. 49) and his taste for philosophical questions should have offered a favorable ground for axiomatics.

[63] Jordan 1926d, pp. 809 – 10.

> innere Verbindung da; es fehlte sogar der allgemeine Beweis, daß sie auch dort, wo sie über die Matrizentheorie hinausgehen, zu äquivalenten Ergebnissen führen.»

Jordan made central in his treatment the notion of the probability amplitude associated to a pair of mechanical quantities: doing so, he was amplifying Wolfgang Pauli's generalization of Born's statistical interpretation of the wave-function as a probability distribution[64]. After characterizing his amplitudes with the help of some postulates[65], Jordan recognized further as a decisive feature of the quantum probability amplitudes their combination law that he dubbed 'interference of probabilities'. Considering the amplitude $\psi(x,y)$ for the pair of quantities Q and q, and φ as above, he showed that $\Phi(x,y)$, the amplitude for a value x of Q, given the value y of β, was related to the former amplitudes by[66]

$$\Phi(x,y) = \int \psi(x,z)\varphi(z,y)\,\mathrm{d}z.$$

Jordan renounced on the other hand to state the canonical commutation rules as part of the fundamental requirements of the theory[67]. He preferred to introduce instead the concept of a canonical pair of quantities in the following definition: If the amplitude $\rho(x,y)$ for a value x of p given a value y of q is

$$\rho(x,y) = \exp(-\mathrm{i}\frac{xy}{\hbar})$$

[64] See the previous section.

[65] Ibid, pp. 813–814.

[66] Following the discussion of Pauli's generalization of Born's interpretation of the square modulus of ψ, the formula below expresses just a change of basis from a basis of q-eigenstates to the basis of Q-eigenstates. In Dirac's bra-ket notation this would run as

$$< x \mid z >= \int \mathrm{d}y < x \mid y >< y \mid z >$$

where $\mid y >$ denotes (the y) element of the q basis, $\mid x >$ denotes (the x) element of the Q basis, and $\mid z >$ is (the z) element of a third basis related to the quantity β. One can view then this formula as a relationship between Q- and q-coordinates of a state function of definite value of β.

[67] See his *Zeitschrift* paper 1926d, p. 812. The canonical commutation rules shall be recovered indirectly using the concept of canonically conjugated quantities, see Jordan's postulate D.

then p is said *canonically conjugated* to q. His next postulate stated then (postulate D, p. 814) that for each q one has an associated conjugated moment p. This has as a consequence that the function $\rho(x,y)$ obeys the following differential equations:

$$\left(x - \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\rho(x,y) = 0$$
$$\left(\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x} - y\right)\rho(x,y) = 0$$

Now, assume that for a mechanical quantity Q the amplitude for $Q = x$ given $q = y$ is $\varphi(x,y)$ and the amplitude for $Q = x$ given $p = y$ is $\Phi(x,y)$. Then, according to the definition of $\rho(x,y)$ above,

$$\varphi(x,y) = \int \Phi(x,z)\rho(z,y)dz$$

which Jordan wrote, introducing the linear operator $T = \int \mathrm{d}z\Phi(x,z)$, as

$$\varphi(x,y) = T\cdot\rho(z,y).$$

It follows that $\varphi(x,y)$ obeys the differential equation

$$\left(-TxT^{-1} - \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x,y) = 0 \tag{21}$$
$$\left(-\mathrm{i}\hbar T\frac{\partial}{\partial x}T^{-1} - y\right)\varphi(x,y) = 0.$$

Keeping fixed a given quantity Q, Jordan associated thus to each other quantity q an operator $-\mathrm{i}\hbar T\frac{\partial}{\partial x}T^{-1}$. He defined then the addition and multiplication of the mechanical quantities using the addition and multiplication of the associated operators. He showed further that when choosing $Q = q$ its associated operator turned out to be x and that of the conjugate momentum P corresponded to $-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}$. Because the operators one might construct out of x and $-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ were very general, Jordan assumed further that any linear operator could be expressed that way, which meant that any mechanical observable could be constructed out of Q and P and that similarly any functional equation of the form (21) could be traded for a differential equation (Jordan acknowledged the possibility of the latter being of infinite order).

Jordan went next to discuss the realization of his axioms and gave some examples to show that indeed his generalized formalism covered all the previous ones. It is for instance easy to see how to recover from the general equations (21) the Schrödinger eigenvalue problem, or his time-dependent equation. The relationship with London's approach is clear as well. Jordan duely mentioned it in the begining of his paper, insisting however on the similarity of *formal* results, thus suggesting that his treatment was physically more elaborated.

Half a year later, Jordan submitted to the *Zeitschrift für Physik* a sequel to his first paper[68]. He aimed at sharpening and generalizing the results obtained previously also in the case where the spectra of the operators were discontinuous[69]. Jordan also acknowledged there an elaboration on his and Dirac's transformation theories published meanwhile by Hilbert, Nordheim and von Neumann, and some recent contributions of John von Neumann which yielded according to him another way of treating in a unified way the case of continuous as well as discontinuous spectra[70].

7 A work of a mathematician-physicist: John von Neumann's Hilbert space theory

The paper by David Hilbert, Lothar Nordheim and John von Neumann in the *Mathematischen Annalen*[71] was an outcome of Hilbert's lectures on

[68] Jordan 1927.

[69] As explained by Jordan in the introduction, associating to conjugated pairs of operators of which one has a discrete spectrum (without an accumulation point) the usual canonical commutation rules

$$\alpha\beta - \beta\alpha = -\mathrm{i}\hbar$$

leads to a contradiction. As we have seen, this difficulty concerns in particular the quantization of action and angle variables, see Jordan 1927, p. 3.

[70] Interestingly, Jordan's attitude towards von Neumann's achievement seems rather devoid of enthusiasm. Although he praises von Neumann's mathematical achievement, he pinpoints some weaknesses in the presentation (the concept of canonicaly conjugated pairs and transformations), but most importantly, he considers von Neumann's starting points as not being sufficiently "natural" from the physical point of view, see Jordan 1927, p. 2.

[71] Hilbert, Nordheim and von Neumann 1927.

quantum theory given in the winter semester 1926/27, and elaborated by Nordheim. The general framework of the paper follows Jordan's account and the latter's axiomatic style (of course it must have delighted Hilbert). The authors rephrased Jordan's and Dirac's transformation theories using the theory of operators in a more mathematically oriented presentation, without however achieving this time as well full rigor. Essentially all the axioms introduced by Jordan were kept and special emphasis was devoted to the analysis of the reality conditions leading to the hermicity conditions on operators.

The paper ended with the recognition that further work was necessary in order to achieve full mathematical rigor. However, no further joint publication followed and John von Neumann took alone the task of a rigorous formulation of quantum theory. As we know, he actually did much more. Von Neumann's approach constitutes an original achievement combining physical insights with bold mathematical syntheses. Together with a foundational statement of a new mathematical field, the abstract theory of Hilbert spaces designed to express in as intrinsic way as possible the equivalence of wave and matrix mechanics (see below), it was as well an unquestionable contribution to the physical grounding of quantum theory: von Neumann's analysis of states of the theory and of the related issue of hidden variables exerted a seminal influence on subsequent works in quantum physics as well as in mathematics.

The first two papers[72] of John von Neumann, the «Mathematische Begründung der Quantenmechanik»[73], and the «Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik»[74] presented quantum mechanics making essential and fully rigorous use of the (abstract) Hilbert space formalism. Together with a third paper, «Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten»[75], they subsequently served as base material for most of von Neumann's 1932 treatise, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*[76] translated into English in 1955 with the title *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Although his

[72] They were announced at the end of Hilbert, Nordheim and von Neumann 1927.
[73] von Neumann 1927a.
[74] von Neumann 1927b.
[75] von Neumann 1927c.
[76] von Neumann 1932.

achievement met a mixed reaction from pure physicists[77] it may still be considered today as one of the best, albeit idiosyncratic, expositions of the formalism.

Von Neumann's first paper was essentially devoted to the study and application to quantum theory of the abstract Hilbert space structure, independently of the peculiarities of its specific realizations known then, namely the (Hilbert) l^2 space of sequences introduced by Hilbert in the framework of his generalization of Fredholm's results on integral equations, and the L^2 space of square-integrable functions[78]. Von Neumann's decision to develop an abstract theory of this structure was motivated by the desire both to overcome the shortcomings of the previous formulations, and to make natural the equivalence of matrix and wave formulations of wave mechanics. In what concerned the shortcomings, von Neumann characterized the situation in the following terms[79]:

> «Das Eigenwertproblem tritt in verschiedenen Erscheinungsformen auf: als Ew. pr. einer unendlichen Matrix (d. i. Transformieren derselben auf die Diagonalform), als solches einer Differentialgleichung. Indessen sind beide Formulierungen einander äquivalent: denn die Matrix (als lineare Transformation angesehen) entsteht aus dem Differential-Operator (der auf die «Wellenfunktion» angewandt, die linke Seite der Diff.-Gleichung ergibt), wenn man von der «Wellenfunktion» zu ihren Entwicklungskoeffizienten für ein vollständiges Orthogonalsystem übergeht. (Die Matrix vermittelt dann die entsprechende Transformation dieser Entwicklungskoeffizienten.)
>
> Beide Behandlungsweisen haben ihre Schwierigkeiten. Bei der Matrizen-Methode steht man eigentlich fast stets vor einem un-

[77] For instance, one can report this passage from a letter of Heisenberg to Pauli, dated 31 July 1928, where Heisenberg writes, presumably referring to von Neumann's *Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten*, «[...] wie in der von Dir so beschimpften Arbeit» (Hermann, von Meyenn and Weisskopf 1979, p. 466). Elsewhere however, Pauli speaks rather respectfully of von Neumann's physical ideas.
Jordan, as already mentioned, didn't like, on the other hand, the lack of "physical insight" of von Neumann's presentations. In general, it appears that von Neumann's approach was judged of little practical use for working physicists.

[78] See Dieudonné 1981, chapt. V, and Steen 1973 for detailed accounts.

[79] Von Neumann 1927a, pp. 151 – 153.

lösbaren Problem: die Energie-Matrix auf die Diagonalform zu transformieren. Dies ist ja nur möglich, wenn kein kontinuierliches Spektrum da ist, d. h. die Behandlungsweise ist einseitig (wenn auch in umgekehrtem Sinne als die klassische Mechanik): nur das Diskontinuierliche (gequantelte) tritt in ihr in Erscheinung (Das Wasserstoff-Atom – das auch ein kontinuierliches Spektrum besitzt – kann also da nicht korrekt behandelt werden). Man kann sich freilich helfen, indem man «kontinuierliche Matrizen» benützt, indessen ist dieses Verfahren (eigentlich ein simultanes Operieren mit Matrizen und Integralgleichungskernen) wohl nur sehr schwer mathematisch streng durchzuführen: muss man doch dabei Begriffsbildungen wie unendlich grosse Matrizen-Elemente oder unendlich nahe benachbarte Diagonalen einführen.

Bei der Behandlung nach der Differential-Gleichungs-Methode waren zunächst die Wahrscheinlichkeits-Ansätze der Matrizen-Methode nicht vorhanden. [...] Dies wurde von Born und später von Pauli und Jordan nachgeholt, indessen ist das vollständige Verfahren, wie es von Jordan zu einem abgeschlossenen Systeme ausgebaut wurde, auch schweren mathematischen Bedenken ausgesetzt. Man kann nämlich nicht vermeiden, auch sog. uneigentliche Eigenfunktionen mit zuzulassen [...]; wie z. B. die zuerst von Dirac benützte Funktion $\delta(x)$, die die folgenden (absurden) Eigenschaften haben soll:

$$\delta(x) = 0, \quad \text{für} \quad x \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

Eine besondere Schwierigkeit bei Jordan ist es, daß man nicht nur seine transformierenden Operatoren (deren Integral-Kerne die «Wahrscheinlichkeits-Amplituden» sind) berechnen muß, sondern auch den Variablen-Bereich, auf den transformiert wird (d. i. das Eigenwertspektrum).»

Von Neumann emphasized next what are the similar features of the eigenvalue problems met in matrix and wave mechanics[80]:

«[Die] Eigenwertprobleme der Quantenmechanik kommen in zwei hauptsächlichen Einkleidungen vor: als Eigenwertprobleme unendlicher Matrizen (oder was dasselbe ist, Bilinearformen), und als Eigenwertprobleme von Differentialgleichungen.

[80] Ibid, p. 154.

Wir wollen beide Erscheinungsformen für sich betrachten, und die gemeinsamen Merkmale hervorheben.

Betrachten wir zunächst die Matrizen-Formulierung. Hier liegt eine unendliche Matrix vor [...], und die Aufgabe ist, sie auf die Diagonalform zu transformieren (denn die Diagonalglieder sind dann die Energie-Niveaus. Nehmen wir an, daß das glatt geht (d. h. daß nur ein Punktspektrum da ist, [...]).

Wir nennen die Energie-Matrix

$$\mathbf{H} = \{h_{\mu\nu}\}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots);$$

sie ist als Hermiteisch anzunehmen, d. h.

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\nu\mu}.$$

Gesucht wird eine Transformations-Matrix

$$\mathbf{S} = \{s_{\mu\nu}\}, (\mu, \nu = 1, 2, \dots);$$

die das Folgende leistet: sie ist orthogonal, d. h.

$$\sum_{\rho=1}^{\infty} s_{\mu\rho}\bar{s}_{\nu\rho} = \begin{Bmatrix} 1, \mu = \nu \\ 0, \mu \neq \nu \end{Bmatrix}$$

und $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{HS}$ hat die Diagonalform.

Wir nennen die Matrix $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{HS}$ $\mathbf{W}$, die Diagonalglieder dieser (Diagonal-)Matrix seien $w_1, w_2, \dots$ Dann wird verlangt:

$$\mathbf{HS} = \mathbf{SW}$$

$$\sum_{\rho=1}^{\infty} h_{\mu\rho}s_{\rho\nu} = s_{\mu\nu}w_\nu$$

D. h. die ν-Spalte von $\mathbf{S}, s_{\nu 1}, s_{\nu 2}, \dots$, wird durch $\mathbf{H}$ in ihr w_ν-faches transformiert. Jede Spalte von $\mathbf{S}$ ist also eine Lösung des Eigenwertproblems: diejenigen Folgen $x_1, x_2, \dots$, ausfindig zu machen, die durch $\mathbf{H}$ in ein Vielfaches – etwa ins w -fache – von sich selbst transformiert werden [...].

Bei der Differentialgleichung-Formulierung ist die Situation noch klarer: es ist von Anfang an ein Eigenwertproblem gegeben. Es liegt ein Differentialoperator $\mathbf{H}$ vor [...] und man sucht eine Funktion ψ für die

$$\mathbf{H}\psi = w\psi$$

ist, d. h. die durch $\mathbf{H}$ in ein Vielfaches von sich selbst transformiert wird [...].

> Was ist der gemeinsame Grundzug aller dieser Fälle ? Offenbar der: Jedesmal ist eine Mannigfaltigkeit von gewissen Größen gegeben (nämlich die aller Zahlenfolgen $x_1, x_2, \ldots$, bezw. die aller Funktionen ψ von zwei Winkeln ϑ, φ, oder von einer Koordinate q, oder von drei Koordinaten x, y, z), und ein linearer Operator $\mathbf{H}$ in dieser Mannigfaltigkeit. Jedesmal wird nach allen Lösungen des zu $\mathbf{H}$ gehörigen Eigenwertproblems gesucht, d. h. nach allen (reellen) Zahlen w, zu denen es ein nichtverschwindendes Element f dieser Mannigfaltigkeit gibt, so daß
>
> $$\mathbf{H}f = wf$$
>
> gilt. Diese Eigenwerte w repräsentieren dann die Energieniveaus.
>
> Es ist nun unsere Aufgabe, von dieser einheitlichen Formulierung zu einem einheitlichen Problem zu gelangen. Dies werden wir ausführen, indem wir nachweisen, daß alle soeben angeführten Mannigfaltigkeiten (sowie überhaupt alle, zu denen man durch die heute üblichen Fragestellungen der Quantenmechanik geführt werden kann), im wesentlichen miteinander identisch sind; d. h. daß sie alle aus einer einzigen Mannigfaltigkeit durch bloße Umbenennung gewonnen werden können. »

Now, the execution of the program just outlined is not as easy as could be initially expected: the similarity of both eigenvalue problems is trickier as could appear at first sight. This is because in the Schrödinger approach, the eigenvalue problem can, at a closer inspection, hardly be written in a form really similar to that of matrix mechanics. In his 1932 treatise, where he gives the topic an exhaustive treatment, von Neumann explains first that, indeed, there is a well-defined class of 'continuous' mathematical problems analogous to matrix theory eigenvalue equation for the columns of the transformation matrix:

$$\sum_{\nu} h_{\mu\nu} x_\nu = \lambda x_\mu \quad (\mu = 1, 2, \ldots) \tag{22}$$

These are the integral equations defined, for a continuous kernel $h(q_1, \ldots, q_k; q'_1, \ldots, q'_k)$ analogous to the discrete $h_{\mu\nu}$,

$$\int_\Omega \cdots \int_\Omega h(q_1, \ldots, q_k; q'_1, \ldots, q'_k) \phi(q'_1, \ldots, q'_k) \mathrm{d}q'_1 \ldots \mathrm{d}'q_k = \lambda \phi(q_1, \ldots, q_k), \tag{23}$$

that have been investigated extensively in mathematics, and can in fact be handled in far reaching analogy to the problem (22).

However, he continues, the wave equation of Schrödinger[81],

> "unfortunately [...] does not have this form, or, rather, it can only be brought into this form if a function $h(q_1, \dots, q_k; q'_1, \dots, q'_k)$ can be found for the differential operator
>
> $$H = H(q_1, \dots, q_k; -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial q_k})$$
>
> such that
>
> $$\mathbf{H}\phi(q_1, \dots, q_k) = \int_\Omega \dots \int_\Omega h(q_1, \dots, q_k; q'_1, \dots, q'_k)\phi(q'_1, \dots, q'_k) dq'_1 \dots d'q_k$$
>
> identically (i. e., for all $\phi(q_1, \dots, q_k)$). This $h(q_1, \dots, q_k; q'_1, \dots, q'_k)$, if it exists, is called the "kernel" of the functional operator $\mathbf{H}$, and $\mathbf{H}$ itself is then called an "integral operator".
>
> Now such a transformation is generally impossible, i. e., differential operators $\mathbf{H}$ are never integral operators."

The action of the Hamiltonian differential operator on the wave function is in general impossible to express as that of an integral operator, interpreting the kernel as related to a continuous matrix and the wave function as a countinuous column vector. To force the analogy can only be pursued, observes von Neumann, at the price of introducing the singular delta-function, and its derivatives (with their help a kernel for the Hamiltonian can indeed be constructed). This is the path followed by Dirac, but that von Neumann prefers to discard, because of its lack of rigor, and because he sees a different way out. For this, one has to remember the Riesz-Fischer $l^2 \equiv L^2$ isomorphy theorem[82]. Indeed[83]:

> "The method sketched [above] resulted in an analogy between the "discrete" space of index values $Z = (1, 2, \dots)$ and the continuous state space Ω of the mechanical system (Ω is k-dimensional, where k is the number of classical mechanical degrees of freedom). That this cannot be achieved without some violence to the formalism

[81] I am quoting from the English translation of von Neumann's 1932 treatise (von Neumann 1955).

[82] For a history of this result, see Dieudonné 1981.

[83] von Neumann 1955, pp. 28 – 33.

and to mathematics is not surprising. The spaces Z and Ω are in reality very different, and every attempt to relate the two must run into great difficulties.

What we do have, however, is not a relation of Z to Ω , but only a relation between the functions in these two spaces, i. e., between the sequences $x_1, x_2, \ldots$ which are the functions in Z, and the wave functions $\phi(q_1, \ldots, q_k)$ which are the functions in Ω. These functions, furthermore, are the entities which enter most essentially into the problems of quantum mechanics.

In the Schrödinger theory, the integral

$$\int_{\Omega} \cdots \int_{\Omega} |\phi(q_1, \ldots, q_k)|^2 \, \mathrm{d}q_1 \ldots \mathrm{d}q_k$$

plays an important role – it must $= 1$, in order that ϕ can be given a physical interpretation [...]. In matrix theory, on the other hand [...], the vector $x_1, x_2, \ldots$ plays the decisive role. The condition of the finiteness of $\sum_\nu |x_\nu|^2$ in the sense of the Hilbert theory of such eigenvalue problems [...], is always imposed on this vector [...] We call the totality of such functions F_z and F_Ω respectively.

Now the following theorem holds: F_z and F_Ω are isomorphic (Fischer and F. Riesz) [...].

We do not intend to pursue any investigation at this point as to how this correspondence is to be established, since this will be of great concern to us in the next chapter. But we should emphasize what its existence means: Z and Ω are very different, and to set up a direct relation between them must lead to great mathematical difficulties. On the other hand, F_z and F_Ω are isomorphic, i. e., identical in their intrinsic structure (they realize the same abstract properties in different mathematical forms) – and since they (and not Z and Ω themselves) are the real analytical substrata of the matrix and wave theories, this isomorphism means that the two theories must always yield the same numerical results. That is, this is the case whenever the isomorphism lets the matrix

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_k; \mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_k)$$

and the operator

$$\mathbf{H} = H(q_1, \ldots, q_k; -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial q_1}, \ldots, -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial q_k})$$

correspond to one another. Since both are obtained by the same algebraic operations from the matrices $\mathbf{Q}_l, \mathbf{P}_l$ $(l = 1, \ldots, k)$ and the functional operators

$$q_l, -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q_l}, (l = 1, \ldots, k)$$

respectively, it suffices to show that q_l ... corresponds to the matrix $\mathbf{Q}_l$ and $-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q_l}$ to the matrix $\mathbf{P}_l$.

Now nothing further was required of the $\mathbf{Q}_l, \mathbf{P}_l$ $(l = 1, \ldots, k)$ than that they satisfy the commutation rules [...]:

$$\mathbf{P}_l\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_k\mathbf{P}_l = \left\{ \begin{array}{c} 0, l \neq k \\ -ih, l = k \end{array} \right\}$$

But the matrices corresponding to the $q_l, -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q_l}$ will certainly do this, because the functional operators $q_l, -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial q_l}$ possess the properties mentioned, and these are not lost in the isomorphic transformation to F_z .

Since the systems F_z and F_Ω are isomorphic, and since the theories of quantum mechanics constructed on them are mathematically equivalent, it is to be expected that a unified theory, independent of the accidents or the formal framework selected at the time, and exhibiting only the really essential elements of quantum mechanics, will then be achieved, if we do this: Investigate the intrinsic properties (common to F_z and F_Ω) of these systems of functions, and choose these properties as a starting point."

We witness now the birth of the "abstract Hilbert space"[84]:

"The system F_z is generally known as "Hilbert space". Therefore, our first problem is to investigate the fundamental properties of Hilbert space, independent of the special form of F_z and F_Ω. The mathematical structure which is described by these properties (which in any specific special case are equivalently represented by calculations within F_z and F_Ω , but for general purposes are easier to handle directly than by such calculations, is called "abstract Hilbert space".

We wish then to describe the abstract Hilbert space, and then to prove rigorously the following points:

[84] Ibid.

> 1. That the abstract Hilbert space is characterized uniquely by the properties specified, i. e., that it admits of no essentially different realizations.
>
> 2. That its properties belong to F_z as well as F_Ω. [...] When this is accomplished, we shall employ the mathematical equipment thus obtained to shape the structure of quantum mechanics."

The study of this structure with the intention to apply it to express the essential structure of quantum mechanics makes indeed the content of von Neumann's *Mathematische Begründung der Quantenmechanik*[85]. Von Neumann gathers and completes there first some basic results on orthogonal systems and related expansions. He introduces then linear operators and, in a most idiosyncratic move, finally trades the eigenvalue problem for the spectral theory of self-adjoint operators. In particular, he generalizes Born's interpretation of $|\psi|^2$ as a probability of the observable "position" for an arbitrary product of commuting physical quantities. Doing so, von Neumann wanted to improve what he judged as inconsequent ways of presenting and using the formalism. Von Neumann's criticism concerned the phase arbitrariness of the eigenfunctions and in general the arbitrary choice of basis in the eigenspaces which he judged unphysical since eventually the final probabilities do not depend on them. As he states on p. 153:

> «Ein gemeinsamer Mangel aller dieser Methoden ist aber, daß sie prinzipiell unbeobachtbare und physikalisch sinnlose Elemente in die Rechnung einführen: [...]. Die als Schlußresultate erscheinenden Wahrscheinlichkeiten sind zwar invariant, es ist aber unbefriedigend und unklar, weshalb der Umweg durch das nichtbeobachtbare und nicht-invariante notwendig ist.
>
> In der vorliegenden Arbeit wird versucht, eine Methode anzugeben, die diesen Mißständen abhilft, und, wie wir glauben, den heute vorhandenen statistischen Standpunkt in der Quantenmechanik einheitlich und konsequent zusammenfaßt. »

Using the projectors of the resolution of unity associated to a given Hermitian operator one can indeed bypass the wave function stage and then dispense with the intermediate unphysical features.

[85] von Neumann 1927a.

For completeness, let me still report that in his next paper, the «Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau...»[86], von Neumann introduces the concept of the "statistical operator" associated with an ensemble, better known today as the density matrix. The main result of the paper is, given a physical quantity $\mathcal{R}$ with its associated operator R, the statistical formula

$$Exp(\mathcal{R}) = Tr(UR) \tag{24}$$

where Exp is the expectation value of $\mathcal{R}$ when one considers measurements on a collective (ensemble) of systems characterized by the statistical operator U. This formula, the conditions of its validity as well as its interpretation were to be later at the core of much of the controversy surrounding the problem of hidden variables, but the latter was however not yet considered in the paper[87]. It was to be fully discussed in von Neumann's 1932 treatise, where the formula (24) was derived again along the lines of the paper, but within a much more epistemologically loaded context. This goes however beyond our present concern.

8 An epilogue: From a formal calculus to a full-fledged 'regulative' theory

Von Neumann's 1927 papers were the culmination of a year of efforts from physicists to clarify the mathematical structure of quantum mechanics. As we saw, they did it groping for solutions to specific problems related to quantization in different sets of variables, that is problems arising directly within their physical (theoretical) practice. This led to the insight of transformation theory, and even if it was the mathematician von Neumann who provided the last word in terms of formal rigor, it is not out of place to consider his motivations as quite physical. This observation and the story that I sketched above, provide, it seems to me, the necessary counterpoint to the narrow (if not partial) account of Dieudonné that I discussed in the introduction. Moreover, and closer

[86] von Neumann 1927b.

[87] However, von Neumann did point out that, since for any pure state φ there does exist a Hermitian operator of which φ is not an eigenstate, the associated distribution of values will have dispersion. von Neumann 1927b, p. 222.

to the intention of the editors of this volume, the parallel development of both fields of functional analysis and quantum mechanics with the common underlying issue of properly recognizing and taking advantage of the underlying linear structure, illustrates in my opinion strikingly the complex and stirring links between physics and mathematics. It is appropriate then to end this survey with a reflection on Hilbert and his readiness to marvel at the harmony that physics and mathematics have often displayed along the history of their mutual developments. The Hilbert, Nordheim and von Neumann 1927 paper was to be Hilbert's last publication devoted to physics. Not much is known on what was his further thinking on quantum theory. Some situations are reported where Hilbert expresses his loss of touch with respect to a field in rapid (and complex) development[88], but this appears to be all. It is true that Hilbert was nearing his end, and the last years of his life were rather devoted to pursue his commitment to the fundaments of mathematics[89]. It should finally be noted that in one of his last papers, «Naturerkennen und Logik»[90], where one can find his famous adjunction «Wir müssen wissen, Wir werden wissen», Hilbert did not even bother to mention the most recent formal developments that led to von Neumann's formalism. Commenting on the recent glorious developments of physics, he praised, along with the relativity theory, the discoveries of what one would call today the old quantum theory, but strangely enough did not devote a single line to the new formalism of quantum mechanics. How much this hints at Hilbert's caution with respect to a theory he possibly considered provisional is hard to tell[91]. Nearing to a century of quantum mechanics, we know today that quantum mechanics has fully lived up to its promises and is still going strong with no alternative in sight. In what concerns its basic formal principles and its role as a 'regulative' theory providing rules for the quantization of systems, quantum mechanics witnessed since the early thirties essentially no changes, even not complements. The relativistic equations (Dirac and Klein-Gordon), the understanding of symmetries remarkably implemented in quantum theory because of the linear nature

[88] See Reid 1970, p. 183.
[89] See Reid 1970, also Szanton 1992.
[90] Hilbert 1930.
[91] See Lacki 2000 for some further thoughts.

of the state space, the quantization of fields, all these developments are of course milestones of 20th century theoretical physics, but they do not introduce major changes in the scheme achieved in 1926/27. The possibility of its being overthrown by 'another' theory appears, *from present perspective*, unlikely[92]. But be it as it may, whatever is to come will not fundamentally change the strong links that have been established again, on the occasion of the discovery of its formalism, between physics and mathematics. Even if quantum mechanics should finally turn out as not the *very* last word on the reality of microphenomena, it will stay in science as a powerful resource for stimulating first rank mathematical research.

9 Bibliography

G. Birkhoff and J. von Neumann: The Logic of Quantum Mechanics. Annals of Mathematics, vol. 37 (1936), pp. 823 – 843.

N. Bohr: The Quantum Theory of Line Spectra. Kopenhagener Akademie, reprinted in Niels Bohr's Collected Works, L. Rosenfeld and J. Rud Nielsen (eds.), Amsterdam [et al.]: Elsevier, 1976, vol. 3.

N. Bohr: Atomic Theory and the Description of Nature. Cambridge: Cambridge University Press, 1934.

N. Bohr: Atomic Physics and Human Knowledge. New York: Wiley, 1958.

M. Born and E. Brody: Über die Schwingungen eines mechanischen Systems mit endlicher Amplitude und ihre Quantelung. Zeitschrift für Physik, vol. 6 (1921), pp. 132 – 152.

M. Born and W. Pauli: Über die Quantelung gestörter mechanischer Systeme. Zeitschrift für Physik, vol. 10 (1922), pp. 137 – 158.

M. Born: Quantenmechanik der Stossvorgänge. Zeitschrift für Physik, vol. 37 (1926), pp. 863 – 867.

M. Born: Quantenmechanik der Stossvorgänge. Zeitschrift für Physik, vol. 38 (1926), pp. 803 – 827.

[92] This statement purports to the formalism of quantum mechanics: I am not venturing to make any bids concerning the issue of the ongoing debate on its interpretation, where many conflictual positions have been proposed with fluctuating popularity over time.

M. Born: Das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik. Zeitschrift für Physik, vol. 40 (1926), pp. 167 – 191.

M. Born and P. Jordan: Zur Quantenmechanik. Zeitschrift für Physik, vol. 34 (1925), p. 858.

M. Born and N. Wiener: Eine neue Formulierung der Quantengesetze für periodische und nicht periodische Vorgänge. Zeitschrift für Physik, vol. 36 (1926), p. 174.

M. Born, P. Jordan and W. Heisenberg: Zur Quantenmechanik. II. Zeitschrift für Physik, vol. 35 (1926), p. 557.

L. de Broglie: Recherches sur la théorie des quanta. Annales de Physique, vol. 3 (1925), pp. 22 – 128.

T. Cazzaniga: Rendiconti Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, vol. 34 (1899), p. 510.

O. Darrigol: From c-Numbers to q-Numbers; the classical analogy in the history of quantum theory. Berkeley: Univ. of California Press, 1992.

J. Dieudonné: History of Functional Analysis. Amsterdam [et al.]: North-Holland Publ., 1981.

P. A. M. Dirac: The Fundamental Equations of Quantum Mechanics. Proceedings of the Royal Society London (A), vol. 109 (1925), pp. 642 – 653.

P. A. M. Dirac: Quantum Mechanics and a Preliminary Investigation of the Hydrogen Atom. Proceedings of the Royal Society London (A), vol. 110 (1926), pp. 561 – 579.

P. A. M. Dirac: On the Theory of Quantum Mechanics. Proceedings of the Royal Society London (A), vol. 112 (1926), pp. 661 – 672.

P. A. M. Dirac: The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics. Proceedings of the Royal Society London (A), vol. 113 (1926), pp. 621 – 641.

C. Eckart: The Solution of the Problem of the Simple Oscillator by a Combination of the Schrödinger and Lanczos theories. Proceedings of the National Academy of Sciences (U.S.A.), vol. 12 (1926), pp. 473 – 476, and Operator Calculus and the Solution of the Equations of Quantum Dynamics, Physical Review, vol. 28 (1926), pp. 711 – 726.

P. Epstein: Zur Theorie des Starkeffektes. Annalen der Physik, vol. 50 (1916), pp. 489 – 520.

P. Epstein: Zur Quantentheorie. Annalen der Physik, vol. 51 (1916), pp. 168 – 188.

P. Epstein: Die Störungsrechnung im Dienste der Quantentheorie, I. Zeitschrift für Physik, vol. 8 (1922), pp. 211 – 228, II. p. 305, III. Zeitschrift für Physik vol. 9 (1922), p. 92.

I. Fredholm: Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet. Öfver. Vet. Akad. Förhand, Stockholm, vol. 57 (1900), pp. 39 – 46.

I. Fredholm: Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta Mathematica, vol. 27 (1903), pp. 365 – 390.

H. Goldstein: Classical Mechanics. 2d ed., Reading, Mass.: Addison-Wesley Pub. Co., 1980.

O. Halpern: Notiz über die Quantelung des Rotators und die Koordinatenwahl in der neue Quantenmechanik. Zeitschrift für Physik, vol. 38 (1926), pp. 8 – 11.

W. R. Hamilton: On a General Method of Dynamics. In The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton, Cambridge: University Press, 1931 – 1967.

W. Heisenberg: Ueber quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. Zeitschrift für Physik, vol. 33 (1925), pp. 879 – 893.

D. Hilbert: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Dritte Mitteilung, Fünfte Mitteilung, Göttinger Nachrichten, 1906, pp. 439 – 480.

D. Hilbert: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig: Teubner, 1912.

D. Hilbert, L. Nordheim and J. von Neumann: Ueber die Grundlagen der Quantenmechanik. Mathematische Annalen, vol. 98 (1928), pp. 1 – 30, reprinted in Taub 1961, vol. 1, pp. 104 – 133.

D. Hilbert: Naturerkennen und Logik. Naturwissenschaften, vol. 18 (1930), pp. 959 – 963.

F. Hund: Geschichte der Quantentheorie. Mannheim: Bibliographisches Institut, 1967 (B. I. – Hochschultaschenbücher, 200/200a).

A. Hermann, K. von Meyenn and V. F. Weisskopf (eds.): W. Pauli Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein, Heisenberg u. a. Bd. 1, 1919 – 1929, New York: Springer, 1979.

C. G. J. Jacobi: Vorlesungen über Dynamik. supp. vol. to C. G. J. Jacobi Gesammelte Werke, A. Clebsch (ed.), Berlin: Reimer, 1866, reprint 1969.

M. Jammer: The Conceptual Development of Quantum Mechanics. New York: Mc Graw-Hill Book Company, 1966.

M. Jammer: The Philosophy of Quantum Mechanics. New York: John Wiley and Sons, 1974.

P. Jordan: Ueber kanonische Transformationen in der Quantenmechanik. Zeitschrift für Physik, vol. 37 (1926), pp. 383 – 386.

P. Jordan: Ueber kanonische Transformationen in der Quantenmechanik. II. Zeitschrift für Physik, vol. 38 (1926), pp. 513 – 517.

P. Jordan: Ueber eine neue Begründung der Quantenmechanik. Göttinger Nachrichten, (1926), pp. 162.

P. Jordan: Ueber eine neue Begründung der Quantenmechanik. Zeitschrift für Physik, vol. 40 (1926), pp. 809 – 838.

P. Jordan: Ueber eine neue Begründung der Quantenmechanik. II. Zeitschrift für Physik, vol. 44 (1927), pp. 1 – 25.

J. Lacki: Early Axiomatizations of Quantum Mechanics: Jordan, von Neumann and the continuation of Hilbert's program. Archive for the History of Exact Sciences, vol. 54 (2000), pp. 279 – 318.

C. Lanczos: Über eine feldmässige Darstellung der neuen Quantenmechanik. Zeitschrift für Physik, vol. 35 (1926), pp. 812 – 830.

C. Lanczos: The Variational Principles of Mechanics. 4th ed., New York: Dover Publications, 1986.

P. Lévy: Leçons d'analyse fonctionnelle. Paris: Gauthier-Villars, 1922.

F. London: Über die Jacobischen Transformationen der Quantenmechanik. Zeitschrift für Physik, vol. 37 (1926), pp. 915 – 925.

F. London: Winkelvariable und kanonische Transformationen in der Undulationsmechanik. Zeitschrift für Physik, vol. 40 (1926), pp. 193 – 210.

J. Mehra and H. Recheneberg: The Historical Development of Quantum Theory. New York, Berlin, Heidelberg: Springer, vols. 1 – 4, 1982, vol. 5, 1987.

J. von Neumann: Mathematische Begründung der Quantenmechanik. Göttinger Nachrichten, (1927), pp. 1 – 57, reprinted in Taub 1961, vol. 1, pp. 151 – 207.

J. von Neumann: Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik. Göttinger Nachrichten, (1927), pp. 245 – 272, reprinted in Taub 1961, vol. 1, pp. 208 – 235.

J. von Neumann: Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten. Göttinger Nachrichten, (1927), pp. 273 – 291, reprinted in Taub 1961, vol. 1, pp. 236 – 254.

J. von Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin: Springer, 1932.

J. von Neumann: On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. Matematicheskij Sbornik – Recueil Mathématique, vol. 1 (1936), pp. 415 – 484, reprinted in Taub 1961, vol. 3, pp. 492 – 559.

J. von Neumann: Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Princeton: Princeton Univ. Press, 1955.

W. Pauli: Über Gasentartung und Paramagnetismus. Zeitschrift für Physik, vol. 41 (1927), p. 21.

S. Pincherle: Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif. Mathematische Annalen, vol. 49 (1897), pp. 323 – 382.

S. Pincherle: Funktionaloperationen und Gleichungen. In Encyklopedie der mathematischen Wissenschaften. Leipzig: Teubner, 1906, vol. II. part 1.

C. Reid: Hilbert. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1970.

C. Reid: Courant in Göttingen and New York. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1976.

H. Rund: The Hamilton-Jacobi Theory in the Calculus of Variations. London: Van Nostrand, 1966.

E. Schrödinger: Quantisierung als Eigenwertproblem. a: (Erste Mitteilung). Annalen der Physik, vol. 79 (1926), pp. 361 – 376; b: Zweite Mitteilung, vol. 79, pp. 489 – 527; c: Dritte Mitteilung, vol. 80 (1926), pp. 437 – 490; d: Vierte Mitteilung, vol. 81 (1926), pp. 109 – 139.

E. Schrödinger: Ueber das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen. Annalen der Physik, vol. 79 (1926), pp. 734 – 756.

K. Schwarzschild: Zur Quantenhypothese. Sitzungsber. Preuß. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1916, pp. 548 – 568.

L. A. Steen: Highlights in the history of spectral theory. The American Mathematical Monthly, vol. 80 (1973), pp. 359 – 381.

A. Szanton: The Recollections of Eugene P. Wigner, as told to Andrew Szatnon. New York: Plenum Press, 1992.

I. Tamm: Zur Quantenmechanik des Rotators. Zeitschrift für Physik, vol. 37 (1926), pp. 685 – 698

A. H. Taub (ed.): John von Neumann. Collected Works, Oxford: Pergamon Press, 1961.

Mathematics, Relativity, and Quantum Wave Equations

Helge Kragh

1 Introduction

Mathematical considerations played an important role in the new physics that emerged in the early decades of the twentieth century. This may be best known from the general theory of relativity, but the role of mathematics was no less important in the case of the other revolutionary theory of the period, quantum mechanics. In this paper I exemplify the relationship between mathematics and physics by looking at the development that in the late 1920s led to a relativistic theory of the electron, as described by the Dirac wave equation. The problem that faced the new generation of quantum physicists was to establish a theory that was consistent with the general principles of both quantum mechanics and special relativity; in addition the theory would have to incorporate the spin of the electron which was discovered in 1925 and at first seemed foreign to quantum mechanics. In this process, as it unfolded in the years 1926 – 28, contributions from mathematics were of considerable importance. Likewise, some of the concepts and quantities introduced by the physicists turned out to be of great interest to the pure mathematicians.

2 Schrödinger and his equation

Quantum mechanics took its start with young Werner Heisenberg's *Umdeutung* of atomic mechanics in the early fall of 1925. A couple of months later, the new and mysterious theory was established on a firm basis with the famous *Dreimännerarbeit* of Heisenberg, Max Born and Pascual Jordan. The new abstract mechanics was initially referred to as the Göttingen mechanics, but soon came to be known as the theory of matrix mechanics. Heisenberg was originally uncertain about the meaning of the non-commutative multiplication of quantities that in a symbolic form appeared in his theory. It was only after the intervention of the mathematically accomplished Max Born that it was realized to be a case of matrix calculus and that Heisenberg's quantum variables could similarly be understood as matrices. As Born recalled, he discovered that "Heisenberg's symbolic multiplication was nothing but the matrix

calculus, well known to me since my student days from the lectures of [Jacob] Rosanes in Breslau."[1]

Erwin Schrödinger's route to quantum mechanics was entirely different from the one followed by his colleagues in Germany. He was primarily motivated by an attempt to turn Louis de Broglie's theory of matter waves, as propounded in his *Recherches sur la théorie des quanta* from 1924, into a theory of atomic structure and, at the same time, to use it for a quantum theory of gas statistics.[2] By November 1925 Schrödinger was looking for a wave mechanics of atoms, realizing that he needed a wave equation to govern the behaviour of the still mysterious ψ matter waves. The equation that eventually appeared on the second page of his first communication in *Annalen der Physik*, submitted on 27 January 1926, was the celebrated stationary Schrödinger equation, namely, the eigenvalue equation for the energy of a hydrogen atom.[3] It had the form

$$\Delta\psi + \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0 \tag{1}$$

Where $K \equiv h/2\pi$ (or $\hbar$, to use the notation introduced by Dirac in 1930). However, this was not the equation that Dirac arrived at in mid December. Because his theory was based on de Broglie's ideas of unifying quantum theory and special relativity, it was framed relativistically from the very beginning. As we know from Schrödinger's notebooks, letters and recollections, his original wave equation was relativistically invariant, namely of the form:

$$\Delta\psi + \frac{4\pi}{h^2}m_0^2c^2\left[\left(\frac{E}{m_0c^2} + \frac{e^2}{m_0c^2r}\right)^2 - 1\right]\psi = 0 \tag{2}$$

with $E = h\nu$. In order to solve the equation, he used the standard separation $\psi(\theta, \phi, r) = \Psi(\theta, \phi)\chi(r)$ and focused on the radial equation which would yield the energy spectrum. There was a close mathematical

[1] Born 1975, p. 217. Matrix methods were not unknown in physics in the early twentieth century, but they were not widely used and did only enter quantum theory with the works of Born and Jordan. See Mehra/Rechenberg 1982, pp. 34–44.

[2] Detailed analyses of Schrödinger's route to the wave equation, including references to the primary sources, can be found in Kragh 1982 and Mehra/Rechenberg 1987, pp. 377–419. See also Joas/Lehner 2009.

[3] Schrödinger 1926.

analogy between the case considered by Schrödinger and Arnold Sommerfeld's earlier analysis of the relativistic Bohr atom, which assumedly guided Schrödinger's approach. At any rate, he knew that his energy eigenvalues would have to comply with the result derived by Sommerfeld in 1916. This result, also known as the fine-structure formula, was confirmed experimentally and enjoyed great authority. In terms of the principal and azimuthal quantum numbers (n and k, respectively), Sommerfeld's formula was the following:

$$E(n,k) = m_0c^2 \left\{ 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{\left[(n-k) - \sqrt{k^2 - \alpha^2}\right]^2} \right\}^{-1/2} - m_0c^2 \tag{3}$$

or approximately

$$E(n,k) \cong -\frac{Rhc}{n^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2} \left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4} \right) \right\} \tag{4}$$

Here α denotes the dimensionless fine-structure constant $e^2/\hbar c$, Z is the nuclear charge ($Z = 1$ for hydogen), and R is Rydberg's spectroscopic constant. For the difference in wave numbers ($f = 1/\lambda = E/hc$) between the quantum levels $(n, k) = (2, 2)$ and $(2, 1)$ this gives the experimentally testable fine-structure separation

$$\Delta f = \frac{R\alpha^2 Z^4}{16} = 0.365\,\mathrm{cm}^{-1} \tag{5}$$

for $Z = 1$. It was this prediction which was convincingly confirmed by Friedrich Paschen and other experimentalists.[4]

The calculation of the energy values caused Schrödinger great mathematical difficulties, such as he reported to Wilhelm Wien in a letter of 27 December 1925: "At the moment I am plagued by a new atomic theory. If only I knew more mathematics! ... For the time being I must learn more mathematics to be able to get full hold on the vibration problem – a linear differential equation, not unlike that of Bessel but less familiar

[4] How could the semi-classical, no-spin treatment of Sommerfeld result in the very same formula as later derived on the basis of relativistic spin quantum mechanics? On this question, see Biedenharn 1983.

and exhibiting remarkable boundary conditions."[5] It took Schrödinger a week or two to solve the equation, during which work he was assisted by Hermann Weyl, his friend and colleague at the University of Zurich. (It is unknown with what Weyl helped him.) Although the mathematics of the wave equation was unfamiliar to Schrödinger and most other physicists, it was well known to the mathematicians. Schrödinger relied on the third revised edition of a textbook by Ludwig Schlesinger, a mathematics professor at the University of Giessen, which was originally published in 1900 and contained many of the methods Schrödinger needed.[6] It is possible that he also used Richard Courant and David Hilbert's *Methoden der mathematischen Physik* published in 1924, but he did not actually refer to it in his first communication. On the other hand, he did so repeatedly in his later communications on wave mechanics. It seems that he only began to use the Courant-Hilbert work extensively from the end of 1926, possibly at the instigation of Erwin Fues, his assistant at the institute of theoretical physics in Zurich.[7]

To make a long story short, Schrödinger must have found the result of his laborious calculations disappointing. The good thing was that he obtained a fine-structure formula quite similar to Sommerfeld's, but this was more than canceled by the value derived for the fine-structure splitting: it came out too large by a factor of 8/3, which completely destroyed the agreement between theory and experiment. Something had gone wrong and a frustrated Schrödinger was unable to locate the failure. In a much later letter to the American physicist Wolfgang Yourgrau, Schrödinger referred to his early relativistic theory, which "gives a formal expression of the fine-structure formula of Sommerfeld, but it is incorrect owing to the appearance of half-integers instead of integers." He continued: "My paper in which this is shown has ... never been published; it was withdrawn by me and replaced by the non-relativistic treatment."[8] That is, Schrödinger decided to

[5] Schrödinger to Wien, 27 December 1925, Archive for History of Quantum Physics. See also Mehra/Rechenberg 1987, p. 461.

[6] Schlesinger 1900.

[7] See Mehra/Rechenberg 1987, p. 582, who conclude that "all the steps, which Schrödinger had undertaken in early 1926, seem to demand the application of methods displayed in *Courant-Hilbert*, although apparently he was not aware of it."

[8] Mandelstam/Yourgrau 1958, p. 114.

abandon temporarily the fine-structure problem and instead turn to the non-relativistic approximation which could reproduce the simple Bohr formula for the Balmer spectrum. It was this wave theory of atoms he presented in the *Annalen*, with almost no hints that he had derived it from a more ambitious but empirically problematic theory.

3 The Klein-Gordon equation

Schrödinger only published the relativistic generalization of his wave equation in the fourth of his series of communications on wave mechanics, completed in June 1926. Several other physicists arrived at the same equation, some of them independently and earlier than Schrödinger.[9] For example, in the summer of 1926 de Broglie presented in *Comptes Rendus* the eigenvalue equation and the time-dependent wave equation, both in relativistic form. For an electron bound in the potential ϕ he wrote the latter equation as

$$\left(\hbar c^2 \Delta - \hbar \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2ie\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi = \left(m_0^2 c^4 - e^2 \phi^2\right) \psi \tag{6}$$

Which for a free electron reduces to

$$\left(c^2 \Delta - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \psi = \left(\frac{m_0 c^2}{\hbar}\right)^2 \psi \tag{7}$$

The same equations were discussed a little earlier by Vladimir Fock in Leningrad who was also the first to publish a detailed solution to the eigenvalue equation. Fock realized, as Schrödinger had known for some time, that the equation failed to reproduce the correct fine-structure separation.

Oskar Klein, the young Swedish physicist who at the time worked at Bohr's institute in Copenhagen, was the first to publish what soon became known as the Klein-Gordon equation, which he did in a paper in the *Zeitschrift für Physik* in the spring of 1926. (The other name refers to the German physicist Walter Gordon, who some months later discussed the same equations.) The relativistic equation was not of great importance to Klein, whose main purpose was to suggest an incorporation

[9] Kragh 1984, which includes references to the primary literature.

of quantum theory within the framework of five-dimensional relativity theory. "I started the whole thing in relativistic mechanics because I had this five-dimensional approach," he later recalled. "I never thought that that was any important thing, just to have the relativistic scalar equation after Schrödinger's equation."[10]

According to Klein, the fifth dimension related to the elementary electrical charge. In this way he hoped to explain the atomicity of electricity as a quantum law and also account for the then known basic building blocks of matter, the electron and the proton. Klein conjectured that what we think of as a point in three-dimensional space is really a tiny circle going round the fifth dimension in a loop with a certain period λ. The loop is not in ordinary space, but in a direction that extends it. As he explained, "the origin of Planck's quantum may be sought just in this periodicity in the fifth dimension." As to the period and its relation to the quantum of action, he suggested

$$\lambda = \frac{hc}{e}\sqrt{2\kappa} = \frac{4h}{e}\sqrt{\pi G} \cong 0.84 \times 10^{-32}\,\mathrm{m} \tag{8}$$

which is sometimes known as the Klein length. "The small value of this length ... may explain the non-appearance of the fifth dimension in ordinary experiments as the result of averaging over the fifth dimension," he wrote.[11] That is, like Theodor Kaluza had done earlier, he assumed that the extra dimension was rolled up to a less than microscopic size – compactified, as it was later called.

The Klein-Gordon equation was well known and generally accepted in 1926 – 27. Pauli was among the few physicists who raised objections to the equations, although he did so only in his correspondence. Latest by the end of 1926 he had lost confidence in the second-order wave equation. As he wrote in a letter to Schrödinger, "I do not believe that the relativistic equation of 2. order with the many fathers corresponds to reality."[12] He proposed to replace it by a linear first-order equation

[10] Interview with Klein of 1963, Archive for History of Quantum Physics, as quoted in Kragh 1984, p. 1026.

[11] Klein 1926. On Klein and five-dimensional quantum theory, see Kragh 1984 and Halpern 2007.

[12] Letter of 22 November 1926. Pauli 1979, p. 356.

involving the square-root operator

$$D = \hbar c \sqrt{m^2 c^4 - \Delta} \tag{9}$$

which "though mathematically uncomfortable makes sense *per se* and is also self-adjoint." Although this idea would later prove important in Dirac's derivation of his wave equation, at the time neither Pauli nor others looked seriously into it.

4 The spinning electron

By the end of 1925, the spin of the electron was generally accepted and it was widely recognized that the new phenomenon needed to be taken into account in quantum-mechanical calculations. If relativity alone could not account for the fine structure, perhaps a combination of relativity and spin could solve the problem. In the early months of 1926, Heisenberg and Jordan, assisted by Pauli, attacked the problem by writing the Hamiltonian of the hydrogen atom as the sum of two terms added to the unperturbed energy H_0:[13]

$$H = H_0 + H_1 + H_2 \tag{10}$$

Here H_1 is a relativistic correction to H_0, corresponding to the variation of the electron's mass with its speed, and H_2 is the energy contribution due to the electron's spin. Heisenberg and Jordan succeeded to obtain Sommerfeld's fine-structure formula, albeit only in its first-order approximation. Their result was phenomenologically satisfying in so far that it accounted for all known doublet phenomena, but it failed to provide a proper explanation, that is, a deduction of these phenomena in terms of fundamental theory. Ideally, the physicists wanted a fully relativistic quantum equation from which would follow not only the exact Sommerfeld formula but also the magnetic moment of the electron. In the absence of such an equation, they proceeded less ambitiously.

One might try to make sense of the electron's spin on the basis of the relativistic Klein-Gordon equation, such as did a few physicists, including Eugen Guth in Vienna and Antonio Carelli in Naples. However,

[13] Heisenberg/Jordan 1926.

none of the attempts to establish a connection between spin and the second-order wave equation were fruitful. Nor was this the case with Fritz London's attempt to interpret the spin within the framework of Klein's five-dimensional theory, namely by identifying the canonical conjugate of the fifth dimension with the spin angular momentum.[14]

Following an approach similar to the one adopted by Heisenberg and Jordan, Pauli proposed in 1927 to conceive the Schrödinger wave function as consisting of two components, each corresponding to one of the values of the spin: $\psi = (\psi_+, \psi_-)$.[15] Stating the spin vector as $\vec{s} = (\hbar/2)\vec{\sigma}$, Pauli found that the three components of σ could be written as 2×2 matrices, often known as Pauli matrices:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Although the introduction of the spin matrices was an important innovation, Pauli's theory did not provide an explanation of spin and neither did it go beyond the Heisenberg-Jordan theory with respect to explaining the fine structure or incorporating relativity as more than a correction. With regard to phenomenology the two theories were equivalent, and the same was the case with the slightly later wave-mechanical spin theory presented by Charles G. Darwin. As Darwin expressed it: "The deduction of the Sommerfeld formula for separation ought to be exact and not merely a first approximation. In view of these considerations we cannot regard the theory as at all complete – as, indeed, is true of the whole interconnection of the quantum theory with relativity."[16]

5 A beautiful exercise in pure reason[17]

The problem of a fully relativistic quantum wave equation and its relation to the electron's spin was not much discussed during the fall of 1927. For instance, it did not turn up in the discussions during the Solvay conference in October that year. Most physicists were satisfied

[14] London 1927.

[15] Pauli 1927. For early spin quantum theories, see Van der Waerden 1960.

[16] Darwin 1927, p. 253.

[17] In recollections of 1985, Nevill Mott called Dirac's relativistic wave equation "the most beautiful exercise in pure reason that I have ever seen." See Mott 1987, p. 75.

with using either the Klein-Gordon equation or the Pauli-Darwin spin quantum mechanics, not worried about the lack of consistency between the two theories. However, Paul Dirac realized that the general structure of quantum mechanics, such as given by the recently developed transformation theory, was incompatible with a wave equation of the second order in the time derivative. To his mind, it was all-important that a relativistic generalization of the Schrödinger equation should be of the form

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \tag{12}$$

which excludes the Klein-Gordon equation. Dirac reasoned that linearity in the time derivative was necessary for the probabilistic interpretation of quantum mechanics, and hence that the Hamiltonian must contain energy and momenta in their first order. Fifty years later he recalled:

> "I had the general physical interpretation of quantum mechanics which I felt sure was right, but it required one to work with a wave equation for quantum mechanics which was linear in the operator $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$, giving $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t$ equal to some finite function of ψ. Now, the Klein-Gordon equation involves $\mathrm{d}^2\psi/\mathrm{d}t^2$. This would not fit with my general interpretation. If one tried to fit it in, one was led to a probability which could be sometimes negative, and that of course is physical nonsense."[18]

When Dirac started to look for a linear and relativistic wave equation at the end of 1927, he was thoroughly acquainted with Pauli's spin theory which he exposed in details in his lectures on quantum mechanics that he had prepared during the summer. Indeed, he later claimed that he got the spin matrices independently of Pauli, a claim which however lacks documentary evidence. At any rate, during the creative phase Dirac decided to ignore the spin. "I was not interested in bringing the spin of the electron into the wave equation," he recalled, "It was a great surprise for me when I later on discovered that the simplest possible case did involve the spin."[19] Dirac started out by considering a free

[18] Dirac 1977, p. 141. For more details on Dirac's route to his wave equation, see Kragh 1981, Kragh 1990, pp. 50–66 and Mehra/Rechenberg 2000, pp. 287–299. Steiner 1998 provides an interesting account of how Dirac arrived at his equation, seeing it as an example of what he calls anthropomorphic physics. See also Dirac 1928, the paper in which the equation was first proposed.

[19] Dirac 1977, p. 139.

spinless electron governed by a wave equation of the form

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = c\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2c^2}\psi \tag{13}$$

where $p_1 = -i\hbar\partial/\partial x$, etc. He recognized that to make physical and mathematical sense, the square root had to be linearized, that is, written as

$$\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + m^2c^2} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 mc \tag{14}$$

But how could this be done? At this stage, when Dirac was faced with a purely mathematical problem, he was inspired by a property of the Pauli matrices that he had found by "playing around with mathematics":

> "I was playing around with the three components σ_1, σ_2, σ_3, which I had used to describe the spin of an electron, and I noticed that if you formed the expression $\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3$ and squared it, p_1, p_2 and p_3 being the three components of momentum, you got just $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, the square of the momentum. This was a pretty mathematical result. I was quite excited over it. It seemed that it must be of some importance."[20]

That is, Dirac found that the identity

$$\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3 \tag{15}$$

holds for any commuting numbers p. Obviously, if the identity could be generalized to four squares instead of three, it would indicate a solution. Arguing that the linear wave equation had to contain the Klein-Gordon equation as its square, Dirac derived the following set of conditions for the α-coefficients:

$$\alpha_\mu\alpha_\nu + \alpha_\nu\alpha_\mu = 0 \quad (\mu \neq \nu) \tag{16}$$

$$\alpha_\mu^2 = 1$$

where μ, $\nu = 1, 2, 3, 4$. Dirac knew that similar conditions were fulfilled by the spin matrices, but soon realized that 2×2 matrices would not be of any help. He consequently considered matrices with four rows and

[20] Dirac 1977, p. 142.

columns, arriving at the first version of what came to be known as Dirac matrices, which he expressed as:

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

where $j = 1, 2, 3$. With the new α-matrices he could now formulate the wave equation for a free electron as

$$(p_0 + \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \alpha_4 mc)\psi = 0 \tag{18}$$

where $p_0 = E/c$. The Dirac equation exists in a variety of forms and notations. Modern physicists often use for Dirac's matrices the "gamma matrices" which were introduced by Pauli in 1936 and are related to the α matrices in a simple way.[21] Using Pauli's notation, the Dirac equation can be written in the compact form

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = \frac{mc}{\hbar}\psi \tag{19}$$

Here γ^μ are the four Dirac gamma matrices with $\mu = 0, 1, 2, 3$ satisfying

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{20}$$

where $g^{\mu\nu}$ is the contravariant Lorentz metric.

The crucial step in Dirac's derivation was the reduction of a physical problem to a mathematical one. It was mathematical reasoning that forced him to introduce 4×4 matrices as coefficients and, as a consequence, a four-component wave function

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) \tag{21}$$

"A great deal of my work is just playing with equations and seeing what they give", Dirac said in an interview of 1963. "I think it's a peculiarity of myself that I like to play about with equations, just looking for beautiful relations which maybe can't have any physical meaning at

[21] Pauli 1936.

all. Sometimes they do."[22] He worked for himself, without consulting either mathematicians or other physicists. In this case, where he was trying to find quantities that satisfied the anticommutation relations, mathematicians could have told him that the problem was well known.

The relations (16) define a so-called Clifford algebra, so named after William Kingdon Clifford who introduced his associative but non-commutative "geometric algebra" in a paper of 1878.[23] Two years later the German mathematician Rudolf Lipschitz reinvented the Clifford algebra, on which he gave a full exposition in a book of 1886. With Lipschitz's work it was known that Clifford algebra was isomorphic to the algebra of 4×4 matrices.[24] Without knowing that the general solution was already contained in the algebraic theory, Dirac worked it out in his own way, by "playing with equations." He essentially rediscovered the Clifford algebra. It is possible that Dirac received inspiration from Henry Baker's *Principles of Geometry*, a book of 1922 that he knew well and had earlier influenced him. Although Baker's book did not mention Clifford algebra, it did contain sections on algebraic symbols corresponding to 4×4 matrices.

Having found the wave equation for a free electron, Dirac had of course to show that it really described an electron, and he also had to prove that it was Lorentz invariant. I shall not go into these details except to point out that without introducing the magnetic electron in advance, Dirac was able to show that his equation included a term representing the magnetic moment of the spinning electron. That is, Dirac deduced the correct spin from first principles of relativity and quantum mechanics. In his paper of 1928 he also referred to the four components of the ψ function, of which only two corresponded to the electron. What did the other two components describe? This problem would soon lead to Dirac's celebrated theory of antielectrons, but this is a development outside the scope of this paper.

[22] Archive for History of Quantum Physics, interview of 1963, quoted in Kragh 1990, p. 325.

[23] Clifford 1878. For a brief history of Clifford algebra and its application in physics, see Bolinder 1987.

[24] Lipschitz 1886. On the connection between the Dirac equation and Clifford algebra, see Olive 1997.

6 Dirac, physics, and mathematical beauty

Dirac's approach of 1928 was essentially mathematical or logical, in the sense that he formulated a mathematical problem from basic physical principles and then focused on the solution of this problem, disregarding physics. This approach, together with a willingness to associate formulae with physical meaning, led him to suggest the existence of antiparticles, originally by identifying protons with antielectrons. By 1930 he had reached the conclusion that theoretical physics must follow the route determined by what he later described as "beautiful mathematics." In his influential textbook *Principles of Quantum Mechanics*, he hailed what he called the "symbolic method," namely a formulation of quantum theory that relied only on symbols and which avoided physical interpretation. The symbols, he said, "are used all the time in an abstract way, the algebraic axioms that they satisfy and the connexion between equations involving them and physical conditions being all that is required." On the other hand, while praising mathematics as a most powerful tool in physics, he also made it clear that he favoured a pragmatic attitude: "All the same, the mathematics is only a tool and one should learn to hold the physical ideas in one's mind without reference to the mathematical form."[25]

In his slightly later paper of 1931, in which he introduced the antielectron as a separate particle and also suggested the existence of magnetic monopoles, Dirac extolled the power of pure mathematics stronger than he had done earlier: "The most powerful method of advance that can be suggested at present is to employ all the resources of pure mathematics in attempts to perfect and generalise the mathematical formalism that forms the existing basis of theoretical physics, and *after* each success in this direction, to try to interpret the new mathematical features in terms of physical entities (by a process like Eddington's Principle of Identification)."[26]

Dirac's attitude to the use of mathematics in physics changed over time. He did not strive towards mathematical rigour, an ideal for which he had little respect. In his *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* of 1932, John von Neumann took Dirac to task for his intuitive use of

[25] Dirac 1930, p. 18 and p. vi.
[26] Dirac 1931, p. 60.

mathematics. "The method of Dirac", he said, "in no way satisfies the requirements of mathematical rigour – not even if these are reduced in a natural and proper fashion to the extent common elsewhere in theoretical physics."[27] Instead to follow the mathematicians' advice, Dirac preferred to rely on his intuition and let others, mathematicians or mathematical physicists, present his ideas in rigorous forms. This relaxed attitude is clearly visible in his invention of the Dirac matrices in 1928 and also in his introduction of the so-called δ-function the year before.[28] There is some similarity between the two cases, since in both of them Dirac was unconcerned with the works of the mathematicians. Laurent Schwartz recalled that some time after having established distribution theory in 1945, he became aware of the earlier works of Dirac and other physicists. The physicists, he realized, had made great progress "without the mathematicians 'given them the right'."[29]

Dirac often stressed the value of approximations and related engineering methods, and in general favoured a pragmatic attitude to mathematics. But latest from about 1940 there emerged a tension between his praise of mathematical pragmatism and his increasing emphasis on mathematical beauty as the only sure guide for progress in theoretical physics. In the James Scott Prize Lecture that he gave on 6 February 1939, Dirac spelled out his new ideas of the relationship between mathematics and physics which focused on the concept of mathematical beauty. Many years before his brother in law Eugene Wigner famously problematized the unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences, Dirac discussed the same topic. How is it that the mathematical-deductive method is so remarkably successful in physics? According to Dirac:

> "This must be ascribed to some *mathematical quality in Nature*, a quality which the casual observer of Nature would not suspect, but which nevertheless plays an important role in Nature's scheme. One might describe the mathematical quality in Nature by saying that the universe is so constituted that mathematics is a useful tool in its description. However, recent advances in physical science show that this statement of the case is too trivial. The connection

[27] Von Neumann 1943, p. 2.
[28] On Dirac and the δ-function, see Peters 2004 and Bueno 2005.
[29] Schwartz 1972, p. 180.

> between mathematics and the description of the universe goes far deeper than this."[30]

In his James Scott Lecture and at numerous later occasions, Dirac asserted that the modern history of theoretical physics provides convincing evidence that there is a perfect marriage between the rules that mathematicians find interesting by their own standards and the rules that govern natural phenomena. He thought this was not accidental, but that it might reflect some deep identity between mathematics and physics:

> "Pure mathematics and physics are becoming ever more closely connected, though their methods remain different. One may describe the situation by saying that the mathematician plays a game in which he himself invents the rules while the physicist plays a game in which the rules are provided by Nature, but as time goes on it becomes increasingly evident that the rules which the mathematician finds interesting are the same as those which Nature has chosen. It is difficult to predict what the result of all this will be. Possibly, the two subjects will ultimately unify, every branch of pure mathematics then having its physical application, its importance in physics being proportional to its interest in mathematics."[31]

Dirac suggested that future developments in theoretical physics would lead to the "existence of a scheme in which the whole of the description of the universe has its mathematical counterpart." In accordance with this philosophy, he advised physicists to "begin by choosing that branch of mathematics which one thinks will form the basis of the new theory. One should be influenced very much in this choice by considerations of mathematical beauty. … Having decided on the branch of mathematics, one should proceed to develop it along suitable lines, at the same time looking for that way in which it appears to lend itself naturally to physical interpretation."[32]

Dirac went as far as arguing that mathematical beauty was the hallmark of truth for a physical theory. What amounted to an identification of beauty with truth led him to a one-sided emphasis on the mathematical-aesthetic method at the expense of the empirical-inductive

[30] Dirac 1939, p. 122.
[31] Ibid., p. 124.
[32] Ibid., p. 125.

method. As far as fundamental physics was concerned, he wanted to subordinate experimental tests to the admittedly vague idea of mathematical beauty. At least in some cases, mathematical beauty should be assigned a higher priority than comparison with experimental data, implying that ultimately truth would have to be judged on mathematics. "If the equations of physics are not mathematically beautiful that denotes an imperfection, and it means that the theory is at fault and needs improvement. There are occasions when mathematical beauty should take priority over agreement with experiment."[33] This is obviously a controversial and problematic claim, for other reasons because neither Dirac nor others have been able to come up with a definition of mathematical beauty that can serve as a standard for judging the truth of physical theories. There just is no consensus among either physicists or mathematicians as to which equations and mathematical structures should be singled out as particularly beautiful, elegant and interesting.[34]

I have earlier concluded that the strong version of the principle of mathematical beauty proved to be a failure in Dirac's scientific career, and I see no reason to change that conclusion. In his most creative phase, from about 1925 to 1933, he was only guided by mathematical considerations in a limited and fairly conventional sense.[35] Only after the mid-1930s did he turn into an apostle of mathematical beauty, primarily in his long and unfruitful critique of standard quantum electrodynamics. He mostly applied the principle of mathematical beauty rhetorically and destructively, whereas he did not succeed to build up sustainable alternatives of physics and cosmology on the basis of the principle. Contrary to what Dirac preached, the strong principle of mathematical beauty hampered his scientific creativity.

[33] Conversation with Jagdish Mehra from the late 1960s, in Mehra 1972, p. 39.

[34] An analysis of mathematical beauty with special reference to Dirac's claim can be found in Kragh 1990, pp. 275 – 292 and in McAllister 1990.

[35] Bueno 2005 argues in detail that Dirac's work in the period relied more on physical interpretations of the mathematical formalism than on mathematics itself. Mathematical theories played an important but not an indispensable role to Dirac. On this question, see also Steiner 1998.

7 Postscripts

This paper has focused on the Schrödinger equation and the process that led to the relativistic theory for the electron, the celebrated Dirac equation. Schrödinger was among the physicists who considered Dirac's equation a true masterpiece. In 1953 he wrote that "Dirac's relativistic wave equation still stands out as *the* great success that has been scored in this whole subject [relativity and quantum mechanics]."[36] In spite of their very different styles and conceptions of quantum physics, Schrödinger and Dirac had much in common. Dirac acknowledged his mental similarity to Schrödinger, which he ascribed to a shared appreciation of the importance of mathematical beauty in physics: "Schrödinger and I both had a very strong appreciation of mathematical beauty, and this appreciation of mathematical beauty dominated all our work. It was a sort of act of faith with us that any equations which describe fundamental laws of Nature must have great mathematical beauty in them. It was like a religion with us."[37]

The relations between mathematics and physics in the early phase of relativistic quantum theory were reciprocical and not merely an application of mathematical concepts and methods in the domain of quantum physics. On the contrary, the work of the physicists resulted in many ideas that were eagerly explored by both mathematical physicists and pure mathematicians. The operators and matrices introduced by Dirac eventually gave rise to a whole mathematical industry. Early mathematical studies of the Dirac equation and its connection to spinor theory and Clifford algebra included works by John von Neumann (1928), Bartel L. Van der Waerden (1929), Jan A. Schouten (1929), Alexandre Proca (1930), and Richard Brauer and Hermann Weyl (1935). This case of how physics paid back its debts to mathematics has not received much attention among historians of science.

8 Bibliography

Biedenharn, L. C. [1983]: The 'Sommerfeld puzzle' revisited and resolved. Foundations of Physics 13, 13 – 34.

[36] Schrödinger 1953, p. 329.
[37] Dirac 1977, p. 136.

Bolinder, E. Folke [1987]: Clifford algebra: What is it? IEEE Antennas and Propagation Society Newsletter (August), 18 – 23.

Born, Max [1975]: My Life: Recollections of a Nobel Laureate. New York: Charles Scribner's Sons.

Bueno, Otávio [2005]: Dirac and the dispensability of mathematics. Studies in History and Philosophy of Modern Physics 36, 465 – 490.

Clifford, William K. [1878]: Applications of Grassmann's extensive algebra. American Journal of Mathematics 1, 350 – 358.

Darwin, Charles G. [1927]: The electron as a vector wave. Proceedings of the Royal Society A 116, 227 – 253.

Dirac, Paul A. M. [1928]: The quantum theory of the electron. Proceedings of the Royal Society A 117, 610 – 624.

Dirac, Paul A. M. [1930]: Principles of Quantum Mechanics. Oxford: Clarendon Press.

Dirac, Paul A. M. [1931]: Quantised singularities in the electromagnetic field. Proceedings of the Royal Society A 133, 60 – 72.

Dirac, Paul A. M. [1939]: The relation between mathematics and physics. Proceedings of the Royal Society (Edinburgh) 59, 122 – 129.

Dirac, Paul A. M. [1977]: Recollections of an exciting era. In: History of Twentieth Century Physics, ed. Charles Weiner, pp. 109 – 146. New York: Academic Press.

Halpern, Paul [2007]: Klein, Einstein, and five-dimensional unification. Physics in Perspective 9, 390 – 405.

Heisenberg, Werner; Jordan, Pascual [1926]: Anwendung der Quantenmechanik auf das Problem der anomalen Zeemaneffekte. Zeitschrift für Physik 37, 263 – 277.

Joas, Christian; Lehner, Christoph [2009]: The classical roots of wave mechanics: Schrödinger's transformations of the optical-mechanical analogy. Studies in History and Philosophy of Modern Physics 40, 338 – 351.

Klein, Oskar [1926]: The atomicity of electricity as a quantum theory law. Nature 118, 516.

Kragh, Helge [1981]: The genesis of Dirac's relativistic theory of electrons. Archive for History of Exact Sciences 24, 31 – 67.

Kragh, Helge [1982]: Erwin Schrödinger and the wave equation: The crucial phase. Centaurus 41, 154 – 197.

Kragh, Helge [1984]: Equation with the many fathers. The Klein-Gordon equation in 1926. American Journal of Physics 52, 1024 – 1033.

Kragh, Helge [1990]: Dirac: A Scientific Biography. Cambridge: Cambridge University Press.

Lipschitz, Rudolf [1886]: Untersuchungen über die Summen von Quadraten. Bonn: F. Cohen.

London, Fritz [1927]: Über eine Deutungsmöglichkeit der Kleinschen fünfdimensionalen Welt. Naturwissenschaften 15, 15 – 16.

Mandelstam, Stanley; Yourgrau, Wolfgang [1958]: Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory. London: Sir Isaac Pitman & Sons.

McAllister, James W. [1990]: Dirac and the aesthetic evaluation of theories. Methodology and Science 23, 87 – 102.

Mehra, Jagdish [1972]: The golden age of theoretical physics: P. A. M. Dirac's scientific works from 1924 – 1933. In: Aspects of Quantum Theory, eds. Abdus Salam; Eugene P. Wigner, pp. 17 – 59. Cambridge: Cambridge University Press.

Mehra, Jagdish; Rechenberg, Helmut [1982]: The Historical Development of Quantum Theory, Vol. 3. New York: Springer-Verlag.

Mehra, Jagdish; Rechenberg, Helmut [1987]: The Historical Development of Quantum Theory, Vol. 5, Part 2. New York: Springer-Verlag.

Mehra, Jagdish; Rechenberg, Helmut [2000]: The Historical Development of Quantum Theory, Vol. 6, Part 1. New York: Springer-Verlag.

Mott, Nevill [1987]: Learning and teaching quantum mechanics 1926 – 33: Cambridge, Copenhagen and Manchester. In: The Making of Physicists, ed. Rajkumari Williamson, pp. 74 – 76. Bristol: Adam Hilger.

Olive, D. I. [1997]: The relativistic electron. In: Electron: A Centenary Volume, ed. Michael Springford, pp. 39 – 59. Cambridge: Cambridge University Press.

Pauli, Wolfgang [1927]: Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. Zeitschrift für Physik 43, 601 – 623.

Pauli, Wolfgang [1936]: Contributions mathématiques à la théorie des matrices de Dirac. Annales de l'Institut Henri Poincaré 6: 2, 109 – 136.

Pauli, Wolfgang [1979]: Wissenschaftlicher Briefwechsel, Vol. 1, eds. Armin Hermann; Karl von Meyenn; Victor F. Weisskopf. New York: Springer-Verlag.

Peters, Klaus-Heinrich [2004]: Schönheit, Exaktheit, Wahrheit. Der Zusammenhang von Mathematik und Physik am Beispiel der Geschichte der Distributionen. Berlin: GNT-Verlag.

Schlesinger, Ludwig [1900]: Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. Leipzig: G. J. Göschensche Verlagshandlung.

Schrödinger, Erwin [1926]: Quantisierung als Eigenwertproblem. Erste Mitteilung. Annalen der Physik 79, 361 – 376.

Schrödinger, Erwin [1953]: Relativistic quantum theory. British Journal for the Philosophy of Science 4, 328 – 329.

Schwartz, Laurent [1972]: La 'fonction' δ et les noyaux. In: Aspects of Quantum Theory, eds. Abdus Salam; Eugene P. Wigner, pp. 179 – 182. Cambridge: Cambridge University Press.

Steiner, Mark [1998]: The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem. Cambridge. Mass.: Harvard University Press.

Van der Waerden, Bartel L. [1960]: Exclusion principle and spin. In: Theoretical Physics in the Twentieth Century, eds. Markus Fierz; Victor F. Weisskopf, pp. 199 – 244. New York: Interscience.

Von Neumann, Johann [1943]: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. New York: Dover Publications.

Mathematische und phänomenologische Strenge: Distributionen in der Quantenmechanik und -feldtheorie

Klaus-Heinrich Peters

1 Einleitung

1.1 Einführung

Die Geschichte des Gebrauchs der mathematischen Theorie der Distributionen ist immer auch die Geschichte der Frage, wie es in der Physik mit mathematischer Strenge gehalten werden soll. Gerade die Mathematik, die heute unter dem Namen «Theorie der Distributionen» bekannt ist, lässt auch immer die Möglichkeit offen, es mit der Mathematik nicht so exakt zu nehmen und mit Distributionen zu rechnen wie mit normalen Funktionen – allerdings um den Preis mathematischer Strenge. Die Geschichte der theoretischen Physik ist voller Beispiele, wie das nicht-exakte Rechnen mit Distributionen zu mathematischen Problemen auch in allgemein anerkannten physikalischen Theorien führte, und genauso gab es auch immer wieder Anstrengungen, die mathematischen Defizite der Theorien durch exakte Formulierungen zu beheben. Solche Anstrengungen mathematisch orientierter Physiker oder physikalisch orientierter Mathematiker wurden von einem großen Teil der Physiker-Gemeinschaft eher misstrauisch betrachtet, da mathematisch korrekte Reformulierungen selten etwas physikalisch Neues ergeben und den Formalismus im Allgemeinen abstrakter, schwerer verständlich und weniger alltagstauglich machen.

Allerdings ist es auffällig, dass bei einer Vielzahl der Anstrengungen, auch in der theoretischen Physik einen einwandfreien und korrekten Gebrauch der Mathematik einzuklagen, eine starke im philosophischen Sinne phänomenologische Orientierung deutlich wird: Im Ruf nach mathematischer Exaktheit steckt offenbar auch immer ein Ruf nach einer streng phänomenologischen Auslegung der Physik.

Anhand von drei Beispielen aus der Geschichte des Gebrauchs von Distributionen in der Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie sollen hier die Indizien für die enge Verknüpfung von mathematischer und phänomenologischer Strenge dargelegt werden.

Zunächst sollen aber einige begriffliche, mathematische und historische Vorbemerkungen erfolgen.

1.2 Phänomenologische Strenge

Als erstes soll hier präzisiert werden, was der Begriff der «phänomenologischen Strenge» überhaupt bedeuten soll.

Bekanntlich gelang Heisenberg 1925 der Durchbruch zu einem ersten Formalismus der Quantenmechanik[1]. Dabei ging er von dem «philosophischen Prinzip» aus, nur noch beobachtbare Tatsachen in der Theorie zu verknüpfen. Entsprechend war dann die Matrizenmechanik aufgebaut: Die Matrixelemente entsprechen direkt den spektroskopischen Daten, die bei einem konkreten Experiment tatsächlich herauskommen. Dagegen werden Begriffe, die prinzipiell nicht beobachtet werden können, ganz aus der Theorie ausgeschlossen – bestes Beispiel ist der Begriff der «Umlaufbahn eines Elektrons». Dass dies keine falsche Bescheidenheit Heisenbergs, sondern eine in der Physik selbst angelegte Notwendigkeit ist, zeigte sich dann in der weiteren Entwicklung der Quantenmechanik. Dort wurde deutlich, dass man sogar Widersprüche erhält, wenn man auch nur an der hypothetischen Existenz von prinzipiell unbeobachtbaren Begriffen festhält. Beim Doppelspaltexperiment etwa darf man nicht einmal annehmen, dass das Photon zwischen zwei Beobachtungen durch einen der Spalte gegangen ist. Grundidee ist hier offenbar, auf alle idealen, faktisch nicht beobachtbaren Größen ganz zu verzichten, und nur die Phänomene – also die Beobachtungsdaten – untereinander naturgesetzlich zu verknüpfen.

Während die klassische Physik noch darauf beruhte, die Phänomene erst zu überspringen und sie dann aus dahinterliegenden eigentlichen Ursachen zu erklären, erhalten wir nun einen Vorrang der Tatsachen vor den Ursachen: Es wird keine hinter den Phänomenen liegende ideale Wirklichkeit mehr angesetzt. In der Quantenmechanik müssen nun die Phänomene direkt mathematisch beschrieben und untereinander ohne Rückgriff auf eine verborgene Realität verknüpft werden. Dieser Grundzug des Denkens, der in der Kopenhagener Quantenmechanik seinen stärksten Ausdruck findet, soll nun phänomenologische Strenge heißen: *Dass die mathematische Verknüpfung der Tatsachen auch wirklich an den Tatsachen selber ansetzt, ohne sich auf dahinterliegende Ursachen zu beziehen.*

[1] Heisenberg 1925

Ziel der Ausführung wird es also sein, einige Indizien dafür zusammenzustellen, dass und wie mathematische Strenge aufs Engste mit phänomenologischer Strenge in dem so definierten Sinne verknüpft ist.

1.3 Distributionen

Distributionen sind lineare Funktionale über einem linearen metrischen Raum[2]. Betrachtet man beispielsweise den Raum $\mathcal{S}$ der schneller als jede Potenz abfallenden und unendlich oft differenzierbaren Funktionen, dann definiert

$$\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{R}$$

eine Distribution. Ein konkretes Beispiel dafür ist die δ-Distribution

$$\delta(f) := f(0), \quad f \in \mathcal{S},$$

die jeder Funktion ihren Funktionswert an der Stelle 0 zuordnet.

Distributionen können als Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes aufgefasst werden. Denn erstens definiert jede Funktion über die Vorschrift

$$\phi(f) = \int f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

eine Distribution, denn das Integral über das Produkt einer beliebigen Funktion ϕ mit einer Testfunktion genannten Funktion f ist schon einmal ein lineares Funktional. Umgekehrt legen eine Vielzahl von Distributionen auf eben diesem Wege auch eine Funktion ϕ eindeutig fest. Aber nicht jede Distribution definiert auf diese Weise eine Funktion. Das heißt, dass zwar zu jeder Funktion in eineindeutiger Weise eine Distribution existiert, es aber darüber hinaus noch mehr Distributionen gibt, die sich nicht als Funktion fassen lassen. Wenn man beispielsweise versucht, die δ-Distribution als Integral über eine δ-Funktion zu schreiben, also versuchsweise

$$\delta(f) = \int f(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x$$

ansetzt, so erkennt man, dass dieses bestenfalls nur eine symbolische Schreibweise sein kann, denn eine Funktion $\delta(x)$, die dieses leistet, kann nicht konsistent definiert werden.

[2] Schwartz 1950; für eine moderne Darstellung siehe etwa Großmann 1988

Möchte man trotzdem nicht auf diese Schreibweise verzichten, so spricht man von $\delta(x)$ als «uneigentlicher» Funktion. Im Sinne uneigentlicher Funktionen sind Distributionen schon lange in der Physik in Gebrauch.

1.4 Historischer Überblick

In der folgenden Tabelle sind einige Eckwerte zur Geschichte der Distributionen aufgelistet[3].

	Prätheoretischer Gebrauch	
1882	Gustav Kirchhoff	Das Huyghens'sche Princip
1893	Oliver Heaviside	Operational Calculus
1910	Arnold Sommerfeld	Zackenfunktion
1924	Richard Courant	Einheitskraft
1926	Cornelius Lanczos	Einheitskern
	Quasitheoretischer Gebrauch	
1927	Paul A. M. Dirac	δ-Funktion
1928	Pauli und Jordan	relativistische δ-Funktion
1929	Pauli und Heisenberg	Vertauschungsrelationen der QFT
1932	Bohr und Rosenfeld	Prinzipien der QFT
	Theoretischer Gebrauch	
1936	S. Sobolev	Verallgemeinerte Funktionen
1945	Laurent Schwartz	Theorie der Distributionen
$\sim$ 1950	E. C. G. Stückelberg	Mehrere Arbeiten zur S-Matrixtheorie
	A. S. Wightman	Axiomatische Feldtheorie
	N. N. Bogoljubov	Kausale Störungstheorie

In der ersten Phase spreche ich vom prätheoretischen Gebrauch, weil die δ-Funktion in den genannten Arbeiten jeweils nur an einer einzigen Stelle aus Gründen der rechentechnischen Zweckmäßigkeit auftaucht – wobei Heaviside hier sicherlich als Ausnahme gelten dürfte.

Die Ära des quasitheoretischen Gebrauchs beginnt mit Diracs Einführung der δ-Funktion in die Quantenmechanik 1927. Im Unterschied zu seinen Vorläufern gibt Dirac erstmals eine allgemeine Definition der δ-Funktion als eigenständigem mathematischen Objekt und stellt gleich einen ganzen Satz von Rechenregeln zusammen. Weil er aber

[3] für eine genauere Darstellung siehe etwa Peters 2004

keine widerspruchsfreie Definition angeben kann, prägt er den Namen «uneigentliche Funktion». Diracs δ-Funktion begann so ihren Siegeszug in der Physik und schon bald tauchten auch relativistische Verallgemeinerungen der δ-Funktion für den Lichtkegel auf. Mitte der 40er Jahre entwickelte Laurent Schwartz schließlich die Theorie der Distributionen, die ein solides mathematisches Fundament legte. Seit den 50er Jahren sprachen sich die Ergebnisse von Schwartz auch in der Physik herum, und seitdem sehen wir einige Versuche, aus dem nun verstandenen mathematischen Wesen der δ-Funktion und ihrer Verwandten auch physikalisch Kapital zu schlagen.

Aus dieser historischen Entwicklung seien nun drei Beispiele ausgewählt:

1. Die Diskussion um Diracs Deltafunktion in der Quantenmechanik.
2. Die Wightmansche Axiomatisierung der Quantenfeldtheorie.
3. Die Versuche von Stückelberg und Bogoljubov und ihrer Mitarbeiter, eine mathematisch wohldefinierte Störungstheorie zu finden.

An diesen Beispielen soll gezeigt werden, dass die Versuche, aus der quasitheoretischen Formulierung herauszufinden und eine von vorne bis hinten mathematisch wohldefinierte Theorie zu haben, keineswegs, wie oft unterstellt, nur eine mathematische Spitzfindigkeit sind. Vielmehr soll gezeigt werden, dass die mathematische Strenge in jedem dieser Fälle dazu dient, die Theorie physikalischer, realistischer und phänomenologisch strenger zu machen – also auf Unbeobachtbares zu verzichten und die Mathematik direkt an den Tatsachen ansetzen zu lassen.

2 Die δ-Funktion in der Quantenmechanik: Dirac und von Neumann

2.1 Dirac und δ-Funktion in der Quantenmechanik

Dirac stieß im Jahre 1927 auf die δ-Funktion, als er versuchte, Schrödingers Wellenmechanik und Heisenbergs Matrizenmechanik zu einer einheitlichen Theorie zu verschmelzen[4]. In seiner Transformationstheorie versuchte er, Schrödingers Differentialgleichung aus den Matrizen

[4] Dirac 1927

Heisenbergs herzuleiten. Kurz gesagt steht dahinter folgende Idee:[5] Die Eigenwertgleichung ist bei Heisenberg eine Gleichung für Matrizen, bei Schrödinger eine Eigenwertgleichung für einen Differentialoperator.

$$\sum_{\nu} h_{\mu\nu} x_{\nu} = \lambda x_{\mu} \qquad \text{(Heisenberg)} \qquad (1)$$

$$H\psi(q_1, \ldots, q_k) = \lambda\psi(q_1, \ldots, q_k) \qquad \text{(Schrödinger)} \qquad (2)$$

Um nun eine vollständige formale Analogie beider Gleichungen herzustellen, müsste man Schrödingers Differentialoperator in einen Integraloperator umschreiben

$$H\psi(q) = \int_{\Omega} \mathrm{d}q'\, h(q, q')\psi(q')\,,$$

so dass nun (2) die Form

$$\int_{\Omega} \mathrm{d}q'\, h(q, q')\psi(q') = \lambda\psi(q) \quad \text{(Schrödinger-Dirac)} \qquad (3)$$

annimmt.

Die Ausdrücke (1) und (3) sind nun völlig analog, und man kann die zweite Variante einfach als kontinuierliche Verallgemeinerung der ersten ansehen.

Um aber mit solchen Integraloperatoren tatsächlich wie mit kontinuierlichen Matrizen rechnen zu können, braucht es natürlich auch eine – und zwar kontinuierliche – Einheitsmatrix. Von so einer Einheitsmatrix δ wäre dann folgende Eigenschaft zu verlangen:

$$\int f(x)\delta(x - x')\,\mathrm{d}x = f(x')$$

Dirac findet diese Einheitsmatrix in der δ-Funktion, die er folgendermaßen definiert:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{für} \quad x \neq 0 \quad \text{und} \quad \int \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1 \qquad (4)$$

An dieser Definition ist die Tatsache, dass $\delta(x)$ keine ordentliche Funktion sein kann, sehr schön zu erkennen. Das Integral über eine Funktion,

[5] Der Kürze halber folge ich hier nicht Diracs Argumentation, sondern der summarischen Zusammenfassung von Neumann 1932. Diracs eigene Darstellung wird ausführlich in Peters 2004 referiert und diskutiert.

die fast überall 0 ist, kann nämlich im Rahmen der Standardanalysis nicht 1 sein. Die Definition ist also nicht konsistent und die δ-Funktion damit mathematisch in sich widersprüchlich. Die δ-Funktion existiert nicht als Funktion im eigentlichen Sinn.

Da man aber mit der δ-Funktion in weiten Teilen trotz allem sehr erfolgreich, wenn auch «uneigentlich» rechnen kann, hält Dirac am Gebrauch der δ-Funktion fest, und da sie direkt in der Formulierung der Grundlagen der Transformationstheorie auftaucht, wird sie sogar einer der formalen Grundbausteine seiner Theorie.

Da sich Diracs Grundidee für den Formalismus schnell durchsetzte, findet man heute die δ-Funktion an vielen wichtigen Stellen im formalen Aufbau der Quantenmechanik. Die Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelation

$$\int \mathrm{d}x\, \psi_y^*(x)\psi_{y'}(x) = \delta(y-y')$$
$$\sum_n \psi_n^*(x')\psi_n(x) = \delta(x-x')$$

sind extrem wichtig für den praktischen Gebrauch des Formalismus: Durch sie wird die Theorie in ihrer Logik so anschaulich wie lineare Algebra im dreidimensionalen Raum. Als Eigenfunktion z. B. des Ortsoperators

$$x\Psi(x) = x'\Psi(x) \implies \Psi(x) = \delta(x-x')$$

hat die δ-Funktion auch einen gewissen physikalischen Gehalt.

Die δ-Funktion ergibt also trotz, oder eigentlich gerade wegen ihrer mathematischen Defekte den unschätzbaren Vorteil, dass alle Phänomene (diskretes und kontinuierliches Spektrum) der Quantenmechanik formal einheitlich beschrieben werden können. Mit dem Formalismus kann relativ leicht und anschaulich gerechnet werden, und gerade das macht die vielzitierte Eleganz und Durchsichtigkeit von Diracs Formalismus aus.

2.2 Von Neumann und die Spektraltheorie

Wir kommen nun zu dem ersten Beispiel für einen mathematisch korrekten Gegenentwurf, der die mathematischen Defekte des Rechnens mit uneigentlichen Funktionen vermeidet. Von Neumann entwickelte seine

Spektraltheorie ab 1927[6]. Die Spektraltheorie unbeschränkter Operatoren auf dem Hilbertraum ist aber keine Explizierung und Präzisierung der Diracschen Methoden, sondern bedient sich von vornherein eines ganz anders gearteten Aufbaus. In dieser historischen Phase besteht die mathematisch korrekte Behandlung also nicht darin, den Fehler in Diracs Theorie damit zu beheben, die δ-Funktion mathematisch korrekt zu definieren und damit mathematisch korrekt zu rechnen. Vielmehr wählt von Neumann einen ganz anderen Weg, bei dem die δ-Funktion von vornherein gar nicht erst auftaucht und zum Problem werden kann.

Weil aber Diracs Formalismus so elegant war, führte von Neumanns Gegendarstellung verbreitet zu der Meinung, es ginge den Mathematikern um unnötige Spitzfindigkeiten, die mit Physik nichts zu tun hätten. Deshalb hielten die Physiker, und tun es im Grunde bis heute, am nur quasitheoretischen Gebrauch der δ-Funktion fest. Ich möchte demgegenüber im Folgenden zeigen, dass und wie von Neumanns Theorie gemäß meiner Ausgangsthese bis in die Einzelheiten seiner mathematischen Argumentation von der Grundidee durchzogen ist, dass die mathematischen Defekte auch jeweils physikalische Defekte sind, sofern man die Kopenhagener Forderung nach phänomenologischer Strenge ernst nimmt. Dabei werden wir sehen, wie sich die mathematischen Probleme lösen, sobald man versucht, den Formalismus streng entlang der beobachtbaren Tatsachen der Physik aufzubauen.

Von Neumann beschreibt seine Motivation 1927 folgendermaßen:

> «Ein gemeinsamer Mangel aller dieser Methoden ist aber, dass sie prinzipiell unbeobachtbare und physikalisch sinnlose Elemente in die Rechnung einführen [...]. Die als Schlußresultate erscheinenden Wahrscheinlichkeiten sind zwar invariant, es ist aber unbefriedigend und unklar, weshalb der Umweg durch das nicht-beobachtbare und nicht-invariante notwendig ist.»[7]

Von Neumanns Spektraltheorie ist also Ausdruck seiner Suche nach dem, was anfangs «phänomenologische Strenge» genannt wurde.

Das soll nun an der Argumentation von Neumanns im Einzelnen verdeutlicht werden[8]. Setzen wir an der Stelle ein, wo auch Diracs Trans-

[6] von Neumann 1927
[7] von Neumann 1927
[8] Ich folge hier der Darstellung in von Neumann 1932

formationstheorie beginnt: der Vereinheitlichung des Schrödingerschen und Heisenbergschen Ansatzes.

Von Neumann zeigt, dass der Unterschied der beiden Formulierungen (1) und (2) vor allem in der Benutzung unterschiedlicher Funktionenräume besteht, nämlich des Raumes quadratsummabler Folgen ℓ_2 bei Heisenberg, und des Raumes quadratintegrabler Funktionen $\mathcal{L}_2$ bei Schrödinger. Entscheidend ist nun die Erkenntnis, dass diese verschiedenen Funktionenräume physikalisch schon äquivalent sind, d. h. phänomenologisch kein Unterschied zwischen ihnen besteht. Während Dirac an dieser Stelle noch versucht, mithilfe der δ-Funktion den Differentialoperator in einen Integraloperator umzuschreiben, zeigt von Neumann, dass es hier keiner Brücke und keiner Analogie bedarf. Denn wenn physikalisch gar nichts daran liegt, ob man in einem Raum von Funktionen oder aber von Folgen arbeitet, ist der den Tatsachen angemessene mathematische Begriff eben eine Abstraktionsstufe höher gelegen. So führt von Neumann den abstrakten Hilbertraum ein, zu dem Heisenbergs und Schrödingers Formulierungen nur spezielle Darstellungen sind. Die Hilbertraumformulierung ist nun mathematisch wohldefiniert, und eine Theorie kontinuierlicher Matrizen und damit wird die Einführung der δ-Funktion von vornherein überflüssig.

Nun trifft aber auch die Formulierung des Eigenwertproblems im Hilbertraum

$$Hf = \lambda f$$

noch nicht ganz das physikalische Problem. Denn die Eigenvektoren f entsprechen auch in dieser Formulierung noch nicht dem phänomenologisch in der Physik Gegebenen, da die Zuordnung nicht eindeutig erfolgen kann. Denn erstens sind die Eigenfunktionen durch diese Gleichung nur bis auf einen nicht-observablen Phasenfaktor $e^{i\phi}$ festgelegt, und zweitens sind auch verschiedene Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert physikalisch nicht zu unterscheiden.

Von Neumann löst dieses Problem damit, dass er sich fragt, was denn die physikalisch sinnvollen und unterscheidbaren Grundeinheiten wären. Wiederum liegt die Antwort eine mathematische Abstraktionsstufe höher: Erst der gesamte Unterraum der zu einem Eigenwert gehörigen Eigenvektoren entspricht den physikalisch vorliegenden

Objekten. Daher macht er eben diese Unterräume mit der Definition der Spektralprojektoren zu den Grundbausteinen seiner Theorie.

Die Einführung der Spektralprojektoren stützt sich damit vor allem auf die Eliminierung unphysikalischer Freiheitsgrade. Dabei zeigt sich, dass auf dem so gewonnenen Abstraktionsniveau auch das mathematische Problem wohldefiniert wird.

Auch die Eigenfunktionen zum Ortsoperator, die mit der δ-Funktion dargestellt werden, haben physikalisch keinerlei Bedeutung, sondern entsprechen Zuständen mit 100 % scharf definiertem Ort, was bekanntlich prinzipiell kein mögliches Messergebnis ist. In der Spektraltheorie kommt auch dieser Begriff gar nicht erst vor. Von Neumann schreibt hierzu:

> «(Nebenbei sei erwähnt, dass die [...] Einführung «uneigentlicher» oder nicht zum Hilbertschen Raume gehöriger Eigenfunktionen [...] gerade hier die Wirklichkeit schlechter wiedergibt als unser Verfahren. Denn sie täuscht die Existenz solcher Zustände vor, in denen Größen mit Streckenspektrum gewisse Werte genau annehmen, obwohl gerade dies nie vorkommt. Wir glauben, neben ihrer mathematischen Unhaltbarkeit, auch aus diesem Grunde derartige Idealisationen ablehnen zu müssen, obwohl diese mehrfach vorgeschlagen wurden.)»[9]

Insgesamt zeigt sich, dass die mathematische Idealisation der δ-Funktion in allen Fällen einer nicht-beobachtbaren physikalischen Idealisierung entspricht. Die mathematische konsistente Formulierung wird gerade dadurch erreicht, dass die «Umwege durch das Unbeobachtbare» vermieden werden. Mathematische Strenge entsteht hier aus phänomenologischer Strenge und umgekehrt.

Dafür, dass diese Aussage für von Neumanns gesamte Einstellung zu Mathematik und Physik charakteristisch ist, gibt es starke historische Hinweise[10]. Dabei stellt sich aber nun die Frage, ob sich in dieser biographischen vielleicht auch eine *sachliche* Tatsache über den inneren Zusammenhang von Mathematik und Physik verbirgt. Diese Möglichkeit aufzuzeigen, ist Aufgabe des nächsten Abschnitts, der zwei weitere, aber anders geartete Beispiele darstellt.

[9] von Neumann 1932, S.117

[10] Rédei 1996; siehe auch die Diskussion des Themas in Peters 2004

3 Distributionen in der Quantenfeldtheorie

Betreten wir nun den Bereich der Quantenfeldtheorie, so zeigt sich, dass sich das mathematische Problem der δ-Funktion in der Physik noch entschieden verschärft: Sobald Felder quantisiert werden sollen, müssen die Vertauschungsrelationen für unendlich viele Freiheitsgrade formuliert werden. Daher taucht die δ-Funktion schon in den Vertauschungsrelationen der Feldgrößen auf[11]:

$$[P_r(t,\vec{x}), Q_s(t,\vec{x})] = \mathrm{i}\hbar\delta_{rs}\delta(\vec{x}-\vec{x'})$$

Damit ist die Deltafunktion nun endgültig ins Herz der Theorie gerutscht, denn die Vertauschungsrelationen definieren die gesamte Observablenalgebra. Da uneigentliche Funktionen nun am Anfang der Theorie stehen, sind mathematische Probleme natürlich vorprogrammiert. Das bekannteste dieser Probleme ist sicher das Divergenzproblem in der Quantenelektrodynamik, das unter dem Stichwort Renormierung bekannt ist.

3.1 Bohr und Rosenfeld: Verschmierte Felder

In dem betrachteten Zusammenhang stellt sich nun zuerst die Frage, was nun in der Quantenfeldtheorie «phänomenologisch streng» bedeuten soll. Was sind in der Feldtheorie die messbaren Tatsachen und welche klassischen Größen erweisen sich als prinzipiell unbeobachtbar?

Die Analyse, was in der quantisierten Feldtheorie eigentlich messbar ist und was nicht, geht auf eine berühmte Arbeit von Bohr und Rosenfeld aus dem Jahre 1933 zurück[12]. Bohr und Rosenfeld stellen sich der Frage, inwieweit sich die Prinzipien der Quantentheorie in der Feldtheorie auswirken.

Ein klassisches Feld ordnet bekanntlich jedem Raumzeitpunkt x bestimmte Feldkomponenten ϕ zu und wird deshalb durch eine an jedem Raumzeitpunkt definierte Funktion $\phi(x)$ beschrieben. Die Idee dieses punktweise definierten Feldes beruht nun offenbar auf der Idealisation, das Feld sei auch punktweise, also durch Punktladungen auszumessen.

[11] Heisenberg und Pauli 1929

[12] Bohr und Rosenfeld 1933; siehe auch Heisenberg 1931

In der Quantenmechanik muss demgegenüber beachtet werden, dass die Messungen in Wirklichkeit nur mit hinreichend grossen Probekörpern gemacht werden können. Probekörper endlicher Ausdehnung messen aber nur Mittelwerte in bestimmten Raum-Zeit-Gebieten. Die klassische Idee des Feldes als punktweise definiertem Objekt ist also nicht eins zu eins in die Quantentheorie übertragbar, da das Feld faktisch gar nicht punktweise auszumessen ist.

> «Dieser Umstand findet seinen sinngemäßen Ausdruck gerade im quantenelektromagnetischen Formalismus, in welchem die Feldgrößen nicht mehr durch eigentliche Punktfunktionen dargestellt werden, sondern durch Funktionen von Raumzeitgebieten, die formal den Mittelwerten der idealisierten Feldkomponenten über die betreffenden Gebiete entsprechen.»[13]

Dem punktweise definierten Feld $\phi(x)$, das mathematisch durch eine Funktion beschrieben wird, bleibt bestenfalls eine rein formale, korrespondenzmäßige Bedeutung. Die physikalische Grundtatsache ist nun das «verschmierte Feld»

$$\int f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x,$$

welches den Mittelwert der Feldkomponenten formal als gewichtetes Integral über bestimmte Gebiete der Raumzeit beschreibt.

3.2 Wightman und die Axiomatisierung der Quantenfeldtheorie

Sobald nun geschichtlich der Begriff der Distribution vorliegt, erkennt man sofort, dass dieses «verschmierte Feld» nichts anderes als eben eine Distribution ist. Es liegt damit nahe, die Quantenfeldtheorie gemäß der Bohrschen Analyse direkt im Distributionssinne und damit sowohl phänomenologisch als auch mathematisch korrekt zu formulieren.

Nicht der erste, aber doch der bekannteste Versuch dieser Art ist die axiomatische Feldtheorie von Arthur Wightman[14]. Wightman und seine Mitarbeiter nahmen die Ideen Bohrs und Rosenfelds Anfang der

[13] Bohr und Rosenfeld 1933
[14] Wightman und Garding 1964

50er Jahre auf und begannen mit ihrer strengen Umsetzung. Ausgangspunkt des axiomatischen Aufbaus ist jetzt das verschmierte Feld als operatorwertige Distribution

$$\phi(f) \equiv \int f(x)\phi(x)\,\mathrm{d}^4x.$$

Der entscheidende Umschwung wird deutlich, wenn man beachtet, dass nur die linke Seite eine direkte mathematische Bedeutung besitzt und die Integraldarstellung auf der rechten Seite der Gleichung nur heuristischen Wert hat. Es wird jetzt nicht mehr zunächst das ideale punktweise Feld betrachtet und dann mit einer Testfunktion verschmiert, sondern das Feld ist jetzt von vornherein eine Distribution und die Integraldarstellung auf der rechten Seite ist nichts weiter als eine begriffliche Reminiszenz an das Korrespondenzprinzip.

Von dem Feld als Distribution ausgehend entwickelt Wightman dann einen abstrakten und mathematisch korrekten Aufbau der Quantenfeldtheorie. Da bei dem hier dargelegten Ausgangspunkt die mathematischen Eigenheiten der Distributionen beachtet werden müssen, ergibt sich natürlicherweise eine enorme Komplexitätssteigerung der Mathematik. Hier zeigt sich wieder, wie vorher schon bei von Neumann, dass das phänomenologisch Gegebene mathematisch nicht notwendigerweise einfach ist, so dass dem Phänomenologen nichts anderes übrig bleibt, als sich die Mathematik, so komplex sie auch sei, von der Natur der Sache diktieren zu lassen. So schreiben Streater und Wightman in ihrem Buch[15] *PCT, Spin and Statics and all that* in der Einleitung:

> "Later on in the book there is a good deal of muttering about domains of unbounded operators. There is a general feeling among physicists that anything that depends in an important way on such matters cannot be physics. We would like to offer some arguments to the contrary."[16]

3.3 Stückelberg und Bogoljubov: Kausale Störungstheorie

Das dritte Beispiel zur Veranschaulichung der Parallelität von mathematischer und phänomenologischer Strenge kommt aus der angewandten Quantenfeldtheorie, wobei «angewandt» hier den Zweig

[15] Streater und Wightman 1964
[16] Streater und Wightman 1964

meint, der tatsächlich die Ausgänge von Experimenten berechnet, etwa die Quantenelektrodynamik mit ihrer Berechnung von Lamb-Shift etc. Diese Phänomene führen im gewöhnlichen Formalismus bekanntlich zu Divergenzen, das heißt, die ausgerechneten Größen sind unendlich groß. In der auf Feynman[17], Schwinger[18] und Dyson[19] zurückgehenden Lösung werden die Divergenzen dadurch bereinigt, dass man die entsprechenden Ausdrücke regularisiert, also die Unendlichkeiten im Nachhinein so von den Ergebnissen abzieht, dass ganz am Ende die Ergebnisse wieder mit den Messwerten übereinstimmen.

In dieser Problematik zeigt sich wieder einmal zweierlei: Erstens ist die mathematische Behandlung des Problems unbefriedigend und zweitens dreht sich das Ganze ohnehin um etwas prinzipiell Unbeobachtbares.

Nun gibt es zwei Ansätze, das mathematische Problem durch korrektes Rechnen mit Distributionen zu lösen und bezeichnenderweise beruhen beide Ansätze wiederum auf einem phänomenologisch strengen Ausgangspunkt. Gemeint sind die Arbeiten von Stückelberg und Mitarbeitern[20] einerseits und Bogoljubov und Mitarbeitern[21] andererseits, die hier summarisch als «kausale Störungstheorie»[22] bezeichnet werden sollen. Die kausale Störungstheorie beginnt mit einer alten phänomenologischen Idee Heisenbergs, der S-Matrix[23].

Um wenigstens einen ungefähren Eindruck der grundlegenden Ideen zu erhalten, betrachten wir einige stark vereinfachte Skizzen. Gegeben sei zum Beispiel eine experimentelle Situation in der Elementarteilchenphysik (Abbildung 1).

Wir sehen dort Felder, die in einen Wechselwirkungsbereich hineinlaufen, und die gestreuten Felder, die in irgendeiner Richtung wieder aus der Zone herauskommen.

---

[17] Feynman 1948 – 1949 b
[18] Schwinger 1948a - 1949 b
[19] Dyson 1949
[20] siehe dazu Stückelberg 1947, Stückelberg und Rivier 1948, 1950a, 1950 b, Stückelberg und Petermann 1953, Wanders 1956
[21] Bogoljubov und Shirkov 1955
[22] Eine moderne Darstellung der kausalen Störungstheorie für die Quantenelektrodynamik findet sich bei Scharf 1995
[23] Heisenberg 1943

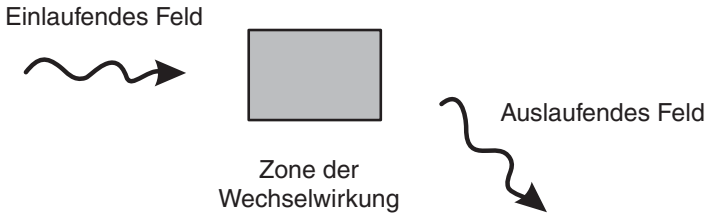


Abbildung 1
Skizze zur S-Matrix

Die gewöhnliche störungstheoretische Beschreibung des Streuvorgangs läuft de facto darauf hinaus, Ordnung für Ordnung detailliert aufzuschlüsseln, was in der Wechselwirkungszone passiert.

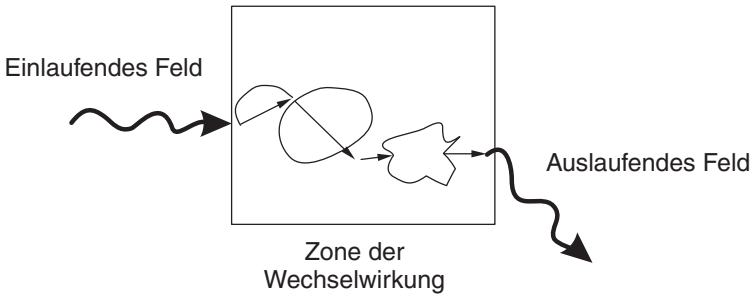


Abbildung 2
S-Matrix bei der Standardmethode

Wird sozusagen, wie in Abbildung 2 angedeutet, ein Vergrößerungsglas über die Wechselwirkung gehalten, so treten all die hier mit Feynman-Diagrammen skizzierten Prozesse zutage, die die bekannten Unendlichkeiten ergeben.

Die ursprüngliche Grundidee Heisenbergs kommt allerdings in der kausalen Störungstheorie besser zur Geltung. Die S-Matrix verknüpft die einlaufenden freien Felder mit den auslaufenden freien, gestreuten Feldern, die Wechselwirkungszone ist hier eine black box (Abbildung 3).

Der Idee nach sollten hier nur die tatsächlich in einem Streuexperiment beobachtbaren Größen – die ein- und auslaufenden freien Felder – in der Formulierung auftauchen und die intermediären, divergenten und unbeobachtbaren Prozesse gar nicht erst in der Theorie auftauchen. Dem Geiste nach führt diese Theorie Heisenbergs ursprüngliche Matrizenme-

Abbildung 3
S-Matrix in der kausalen Störungstheorie

chanik fort: Was nicht beobachtet werden kann, hat in der Physik nichts zu suchen.

Kausale Störungstheorie bezeichnet nun grob gesprochen den Ansatz, die S-Matrix nicht aus einer detaillierten Lösung der Bewegungsgleichungen herzuleiten, sondern aus drei allgemeinen Prinzipien, nämlich Kausalität, Lorentzinvarianz und Unitarität.

Es zeigt sich, dass unter diesen Bedingungen eine störungstheoretische Entwicklung möglich ist und die S-Matrix tatsächlich Ordnung für Ordnung berechnet werden kann. Beim Durchführen der dafür nötigen Berechnungen zeigt sich aber dann deutlich, dass sich die unphysikalischen Divergenzen notwendig ergeben müssen, so lange man mit den auftretenden Distributionen nicht mathematisch korrekt umgeht.

Bei Durchführung der Rechnungen stößt man nämlich auf folgendes Problem: Die auftretenden Distributionen[24] müssen in einen avancierten und retardierten Anteil aufgespalten werden oder, anders gesagt, mit einer Stufenfunktion multipliziert werden. Das mathematische Problem liegt also in der Bildung von Produkten von Distributionen, eine Operation die zunächst einmal nicht definiert ist. Eine naive Multiplikation im Funktionssinne führt an dieser Stelle wieder zu den bekannten Divergenzen. Werden jedoch die mathematischen Eigenheiten von Distributionen beachtet, so kann es unter bestimmten Voraussetzungen gelingen, auch ein sinnvolles Produkt im Distributionssinne zu definieren[25] und die S-Matrix ohne Umweg durch das Unendliche zu berechnen. Auf diese Art und Weise kann die Störungstheorie von Anfang bis Ende endlich bleiben und in diesem Sinne gleichzeitig mathematisch korrekt

[24] genauer gesagt, die (Anti-)Kommutatorfunktionen der Felder
[25] Epstein und Glaser 1973; Scharf 1995

aufgebaut werden. Wie schon bei der axiomatischen Feldtheorie treten jedoch subtile mathematische Probleme auf, so dass dieses Programm erst von Epstein und Glaser 1973[26] erfolgreich ausgeführt werden konnte.

4 Zusammenfassung und Ausblick

Alle drei vorgestellten Beispiele zeigen, dass die Versuche, die Physik mathematisch streng zu formulieren immer Hand in Hand mit einer phänomenologisch strengen Formulierung der Physik gehen und beide Aspekte nur zwei Seiten der gleichen Medaille zu sein scheinen. Einerseits zeigen die phänomenologischen Ansätze, dass das, was man für gewöhnlich für eine einfache Wahrnehmung der Wirklichkeit hält, von konzeptionellem Denken durchtränkt ist. Strenge zeigt sich hier als die Idee, denkerische Konzeptionen von der physikalischen Realität zu subtrahieren – hin zu reiner Wahrnehmung. Umgekehrt bedeutet Strenge für den gedanklich-konzeptionellen Bereich die Befreiung des Denkens von Wahrnehmungsinhalten – hin zu reinem Denken. Ersteres sehen wir in der Kopenhagener Deutung und da insbesondere in den Bohrschen Analysen am Werk; letzteres ist die Grundidee der formalen Axiomatik im Hilbertschen Sinne. In den diskutierten Beispielen zeigt sich nun, wie sich in der Idee der Strenge Wahrnehmung und Denken wechselseitig entmischen, und dass beides dadurch nicht nur voneinander sondern geradezu zueinander befreit wird.

Gesetzt den Fall, diese Beobachtungen ließen sich weiter erhärten: Welche Bedeutung hätte dann dieser Befund?

Ganz allgemein fällt hier etwas Befremdendes ins Auge. Denn unser Alltagsverständnis des Verhältnisses von Mathematik und Physik wird durch das Gesagte sozusagen auf den Kopf gestellt. Die Karikaturen vom weltfernen Mathematiker im Wolkenkuckucksheim und vom bodenständigen in der Realität lebenden Physiker tauschen hier offenbar die Rollen. Gerade die pragmatischen Physiker erscheinen hier als weltfremd und realitätsfern. Sie hantieren mit idealen Größen, die weder mathematisch einwandfrei sind, noch in Wirklichkeit beobachtet werden können. Schlimmer noch, die trockene, abstrakte mathematische Strenge

[26] Epstein und Glaser 1973

wird geradezu zu einem Kriterium für den prinzipiellen Realitätsgehalt der Theorie. In diesem Sinne könnte dieser Befund Motivation sein, das Verhältnis von Mathematik und Physik und ihren inneren Zusammenhang erneut zu durchdenken.

Dass und wie hier Wahrnehmung und Denken erst in ihrer schärfsten Trennung am Innigsten zueinander finden, könnte für künftige Forschungen ein fruchtbarer Anhaltspunkt sein, sich zu der Kardinalfrage der mathematischen Naturwissenschaft vorzutasten, die von Einstein einst so formuliert wurde[27]:

> «An dieser Stelle nun taucht ein Rätsel auf, das Forscher aller Zeiten so beunruhigt hat. Wie ist es möglich, dass die Mathematik, die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt menschlichen Denkens ist, auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich passt? Kann denn die menschliche Vernunft ohne Erfahrung durch bloßes Denken Eigenschaften der wirklichen Dinge ergründen?»

5 Literaturverzeichnis

Bogoljubov, N. N.; Shirkov, D. V.: Probleme der Quantentheorie der Felder, dt. Übersetzung. In: Fortschritte der Physik 3: 439, 1955. Original erschienen in: Uspechi Fiz.Nauk 55: 149, 1955.

Bohr, N.; Rosenfeld, L.: Zur Frage der Messbarkeit der elektromagnetischen Feldgrössen In: Kongelige Danske Videnskabernes Selskab, Mathematisk-Fysiske Meddelelser 12 No. 8, 1933.

Dirac, P. A. M.: The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics. In: Proceedings of the Royal Society London A113: 621 – 641, 1927.

Dyson, F.: The Radiation Theories of Tomonaga, Schwinger and Feynman. In: Physical Review 75: 486, 1949.

Dyson, F.: The S-Matrix in Quantum Electrodynamics. In: Physical Review 75: 1736, 1949.

Epstein, H.; Glaser, V.: The Role of Locality in Pertubation Theory. In: Annales de l'Institut Poincaré A19: 211, 1973

Feynman, R. P.: Relativistic cut-off for quantum electrodynamics. In: Physical Review 74: 939, 1948.

[27] Albert Einstein am 27.11.1921 vor der preußischen Akademie der Wissenschaften

Feynman, R. P.: The theory of positrons. In: Physical Review 76: 749, 1949.

Feynman, R. P.: Space-time approach to quantum electrodynamics. In: Physical Review 76: 769, 1949.

Großmann, Siegfried: Funktionalanalysis. 4. Auflage; Wiesbaden: Aula Verlag 1988.

Heisenberg, W.: Über die quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. In: Zeitschrift für Physik 33: 879, 1925. Wiedergedruckt in Born, M.; Heisenberg, W. und Jordan, P.: Begründung der Quantenmechanik. Stuttgart: Battenberg, 1962.

Heisenberg, W.: Über Energieschwankungen in einem Strahlungsfeld. In: Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften Leipzig, Mathematisch-physische Klasse 86: 317, 1931.

Heisenberg, W.: Die beobachtbaren Größen in der Theorie der Elementarteilchen. Zeitschrift für Physik 120: 513, 1943.

Heisenberg, W. und Pauli, W.: Zur Quantenelektrodynamik der Wellenfelder I. In: Zeitschrift für Physik 56: 1, 1929.

Neumann, John von: Mathematische Begründung der Quantenmechanik. In: Göttinger Nachrichten 1 – 57, 1927.

Neumann, Johann von: Die mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin: Verlag von Julius Springer 1932.

Peters, Klaus-Heinrich: Schönheit, Exaktheit, Wahrheit. Der Zusammenhang von Mathematik und Physik am Beispiel der Geschichte der Distributionen. Berlin, Diepholz: GNT-Verlag 2004.

Rédei, M.: Why John von Neumann did not Like the Hilbert Space Formalism of Quantum Mechanics (and what he Liked Instead). In: Studies in the History and Philosophy of Modern Physics 27: 493, 1996.

Scharf, G.: Finite Quantum Electrodynamics. 2nd ed. Berlin, Heidelberg New York: Springer 1995.

Schwartz, L.: Theorie des distributions. Paris: Hermann 1950.

Schwinger, J.: On quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron In: Physical Review 73: 416, 1948.

Schwinger, J.: Quantum Electrodynamics I. In: Physical Review 74: 1439, 1948.

Schwinger, J.: Quantum Electrodynamics II. In: Physical Review 75: 651, 1949.

Schwinger, J.: Quantum Electrodynamics III. In: Physical Review 76: 790, 1949.

Streater, R. F.: Wightman, A. S.: PCT, Spin and Statistics and all that. New York, Amsterdam: W. A. Benjamin 1964.

Stückelberg, E. C. G.: The present state of the S-Operator theory. In: Report of an International Conference on fundamental particles ... London: The Physical Society 1947

Stückelberg, E. C. G.; Rivier, D.: A convergent expression for the magnetic moment of the neutron (Letter). In: Physical Review 74: 218 und (Erratum) 986, 1948.

Stückelberg, E. C. G.; Rivier, D.: Causalité et structure de matrice S. In: Helvetica Physica Acta 23: 215, 1950.

Stückelberg, E. C. G.; Rivier, D.: A propos des divergences en theorie des champs quantifies. In: Helvetica Physica Acta 23: 236, 1950.

Stückelberg, E. C. G.; Petermann, A.: La normalisation des constantes dans la theorie des quanta. In: Helvetica Physica Acta 26: 499, 1953.

Wanders, G.: Kausale Formulierung der S-Matrixtheorie. In: Fortschritte der Physik 4: 611, 1956.

Wightman, A. S.: Quantum Field Theory in Terms of Vacuum Expectation Values. In: Physical Review 101: 860, 1956.

Wightman, A. S.; Garding, L.: Fields as operator-valued distributions in relativistic quantum theory. In: Arkiv for Fysik 28 nr 13: 129, 1964.

Angular Momentum between Physics and Mathematics

Arianna Borrelli

1 Introduction

Angular momentum is one of the fundamental notions of modern physics. It can be defined in classical mechanics, electromagnetism, quantum mechanics and quantum field theory and, although the mathematical expressions and observable phenomena linked to it are in each case different, the conservation of angular momentum is regarded as holding for any system which is invariant under rotation. It is not my intention to discuss here the differences between the various notions of angular momentum, but rather to underscore how, despite those differences, that concept today maintains a strong identity as the "same" physical quantity. To quote a view from the scientific community:

> "The concept of angular momentum, defined initially as the moment of momentum ($L = r \times p$), originated very early in classical mechanics (Kepler's second law, in fact, contains precisely this concept). Nevertheless, angular momentum had, for the development of classical mechanics, nothing like the central role this concept enjoyes in quantum physics. Wigner[1] notes, for example that most books on mechanics written around the turn of the century (and even later) do not mention the general theorem of the conservation of angular momentum. In fact, Cajori's well-known 'History of physics'[2] (1929 edition) gives exactly half a line to angular momentum conservation. That the concept of angular momentum may be of greater importance in quantum mechanics is almost self-evident. The Planck quantum of action has precisely the dimensions of an angular momentum, and, moreover, the Bohr quantisation hypothesis specified the unit of (orbital) angular momentum to be $h/2\pi$. Angular momentum and quantum physics are thus clearly linked."[3]

In this passage angular momentum is presented as a physical entity with a classical and a quantum incarnation. This situation is not peculiar to that notion, and there are a number of classical mechanical concepts which have been taken over into quantum theory without losing connection to their classical selves. I believe this to be a very important aspect of the relationship between mathematics and physics and in particular of

[1] Wigner 1967, p. 14.
[2] Cajori 1929.
[3] Biedenharn, Louck and Carruthers 1981, p. 1.

the complex nature of physical-mathematical notions. Historically, such concepts do not appear because a physical content meets a mathematical form, but rather emerge from a coevolution of mathematics and physics making evident both the multiplicity within each discipline and the close correlation – at times even indistinguishability – between specific aspects of physical and mathematical practice, as well as of the philosophical and technological contexts in which they are embedded. It is because of this complex, composite character that physical-mathematical notions can be perceived by scientists as possessing a specific identity behind the many representation they can be encountered in – from Kepler's area law to the quantum numbers of the Bohr-Sommerfeld atom. In the following pages, I shall tentatively explore this constellation by sketching the emergence of classical angular momentum and its translation into quantum-theoretical terms.

2 Johannes Kepler's area law and Isaac Newton's parallelogram of forces

Other than linear motion, rotations have attracted the attention of mathematically-minded philosophers since Antiquity. Although this was largely due to the evident regularities and outstanding cultural significance of heavenly motion, one must not forget that the stability of rotating bodies could also be inferred from everyday experience and was at the basis of simple tools such as the potter's wheel or the spinning top, whose use is attested well before the emergence of geometrical or numerical representations of celestial motion.[4] The practice of discus-throwing presupposed a highly refined understanding of the rotation of rigid bodies and flywheels were employed already in Antiquity to stabilize the motion of machines of various kind.[5] Thus, it is not surprising that in pre-modern natural philosophical systems, especially but not only the Aristotelian one, circular motion had a special status as a "perfect" movement which pertained to celestial entities.[6] The geometrical models of celestial motion based on circles were the

[4] Hurschmann 1999; Scheibler 1999.
[5] Decker 1997; Krafft 1999, esp. col. 1087.
[6] Daxelmüller 1999.

starting point for the development of modern mechanics and Newtonian gravitation – a development which ironically led to the rejection of the idea of the perfection of rotation in favour of a higher consideration of linear movement. While Nicolaus Copernicus had still adhered to the notion that celestial movements had a circular form, Johannes Kepler expressed them by means of ellipses.[7] In his model, the stability of the Ptolemaic spherical cosmos found a new expression in the statement that the elliptical orbits of the planets were fixed both in shape and space orientation. Moreover, the movement of celestial bodies along their path was such, that the areas spanned by the line connecting a planet to the Sun were proportional to the time elapsed, despite the fact that the distance between the two bodies and the velocity of the planet constantly changed. As we shall see, the habit of expressing the constancy of rotational motion in terms of areas will remain alive until the 19th century, so that what is today referred to as the conservation of angular momentum at that time took the form of a principle of conservation of areas.

Before proceeding in our exploration of the methods employed in the early modern period to formalize and analyse rotations, we have to make a clear distinction between the graphic representation of mechanical and dynamical quantitites, their analytical expressions and the abstract mathematical structure which are associated with them today.[8] The angular momentum of a classical mechanical system is mathematically represented today by an axial vector in three-dimensional space, which can be manipulated according to the rules of vector algebra and is graphically depicted as an oriented segment in space. Vector algebra was only developed from the middle of the 19th century onward and played no role in the emergence of classical mechanics, but the representation and manipulations of some physical quantities (motion, force) by means of oriented segments was current already in the 17th century.

The composition of forces with the parallelogram rule had been in use since the Renaissance and was further developed by Isaac Newton.[9]

[7] Dugas 1988, p. 110 – 119; Kepler 1628, p. 410 – 412.

[8] This is a very complex subject that has been extensively treated in the historical literature (Caparrini 1999, 2002; Crowe 1985) and I will only deal with it as far as necessary for the present investigation.

[9] Dugas 1988, p. 123 – 127, 151 – 153, 207 – 209.

To compose the effect of two forces acting on the same body, Newton represented them by two segments, each with length and direction corresponding to the motion which the force would impart on the body by acting on it for a given time.[10] The segments were drawn as the sides of a parallelogram whose diagonal represented the combined effect of the two forces. In this procedure force was represented and manipulated geometrically as the motion it could impart to a body and this was in turn connected to an idea of force which Newton had taken over from medieval tradition. It is not here the place to discuss Newton's complex and at times ambiguous idea of force: suffice to say that, while innovative, it still embedded the earlier concept of a discrete "impetus" which, when transmitted to a body, set it into a motion of direction and extension corresponding to its own entity.[11]

Although Newton employed a geometrical representation of forces and motions, he never used it for angular momentum, for the very simple reason that no such notion can be found in his work – not even where he discussed the problem of the precession of the Earth's axis.[12] According to the analysis of Clifford Truesdell, the first author to speak not only of a "moment of rotational motion", but also of its "conservation" ("conservationem momentii motus rotatorii") was Daniel Bernoulli, who did so in a letter written in February 1744.[13] Bernoulli had discussed the motion of a ball sliding within a rotating tube, demonstrating that what we regard as the absolute value of the angular momentum of the whole system could not be changed by the mutual interaction of its parts. By referring to these results as a conservation of "moment of rotational motion", he was using an expression, the "moment" of a force, which had been developed in the context of the theory of the lever. The effect of a force of intensity I acting on a lever is proportional both to I and to the distance L of its point of application from the fulcrum. The "moment" of that force acting in that specific configuration is equal to the product IL and gives a scalar measure of the effect of the force. In the late Renaissance this notion was extended to indicate the effect of a force acting not only on a lever, but on a generic body of which a

[10] Dugas 1988, p. 208 – 209; Kutschmann 1983, p. 126 – 127.
[11] Kutschmann 1983, p. 18 – 19, 120 – 129.
[12] Dobson 1998, especially p. 132 – 133, 136 – 138; Truesdell 1964b, p. 244 – 245.
[13] Truesdell 1964b, p. 254 – 256, quote from Bernoulli 1744, p. 549.

point remained fixed (e. g. a pendulum).[14] Daniel Bernoulli extended it further, but still regarded the moment of rotational motion as a scalar quantity and did not associate any direction to it.

3 Leonard Euler on the rotation of rigid bodies

While Kepler and Newton had mainly dealt with systems of mass points interacting with each other, mathematicians of the 18th century took up the task of mathematizing the motions of extended bodies on which forces could be applied at the same time at different places. Decisive contributions to this field were given by Leonard Euler, who was the first to write down the general equations of motion for an extended body.[15] Starting from the recognition that any infinitesimal motion of a body can be decomposed into a translation and a rotation, Euler developed in a series of papers the mathematical analysis of the movement of rigid bodies and wrote down the differential equations governing it. In his writing he offered different derivations of his results, and I shall focus on the latest one (1775), which was also the most accomplished. To express mathematically the state of a body Euler introduced the three angles which today still bear his name, and thanks to which a parametrisation of any rotational motion is possible.[16] These new quantities allowed him to transform a geometrical description given in terms of axes of rotation and space positions into an analytical one based on trigonometric functions. This was a very important step, because it allowed Euler and later authors to at least partly discard the geometrical language of rotation in favour of the purely algebraical ("analytical") one. It is not necessary for us to follow Euler's derivation and it will suffice to state the equations as he wrote them in 1775:

- $\mathrm{d}M(\mathrm{dd}x/\mathrm{d}t^2) = \mathrm{i}P$
- $\mathrm{d}M(\mathrm{dd}y/\mathrm{d}t^2) = \mathrm{i}Q$
- $\mathrm{d}M(\mathrm{dd}z/\mathrm{d}t^2) = \mathrm{i}R$

[14] Truesdell 1964b, p. 248 – 252.

[15] Blanc 1968; Caparrini 1999; Truesdell 1964a, 1964b, on which the following discussion is largely based.

[16] Euler 1775, p. 208 – 211, i. e. p.103 – 104.

- $z\mathrm{d}M(\mathrm{dd}y/\mathrm{d}t^2) - y\mathrm{d}M(\mathrm{dd}z/\mathrm{d}t^2) = \mathrm{i}S$
- $x\mathrm{d}M(\mathrm{dd}z/\mathrm{d}t^2) - z\mathrm{d}M(\mathrm{dd}x/\mathrm{d}t^2) = \mathrm{i}T$
- $y\mathrm{d}M(\mathrm{dd}x/\mathrm{d}t^2) - x\mathrm{d}M(\mathrm{dd}y/\mathrm{d}t^2) = \mathrm{i}U$[17]

In these formulas dM represents an infinitesimal mass element of the body at the position with Cartesian coordinates (x, y, z); $\mathrm{dd}x/\mathrm{d}t^2$ (i. e. $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$) etc. are the corresponding accelerations; P, Q and R are the resultant external forces acting in the directions of the three axes x, y and z; S, T and U are the resultant "moments" of the external forces, again taken in the directions x, y and z.

Euler used here the notion of "moment" like Daniel Bernoulli had done, i. e. in a scalar sense, and so did not regard S, T, and U as components of a single physical entity, but rather as three separate moments computed with respect to the three axes. Euler's first three formulas state the relationship between force, mass and acceleration, while the last three expressions formally correspond to what we today describe as the relationship between the (vectorial) moment of external force (M_x, M_y, M_z) and the time derivative of (vectorial) angular momentum (J_x, J_y, J_z), whose components are defined in the same way as in Euler's equations.[18] Therefore, from a purely analytical point of view, one may claim that Euler had written down both the expression and the dynamics of the angular momentum of a solid body. Moreover, the equations implied that, in absence of external moments of force, the value of the angular momentum would be conserved.

However, Euler did not consider the equations as referring to the evolution of the three components of the same quantitiy. Indeed, he did not even seem to regard the individual expressions as particularly significant. In a later paper he discussed the fact that the effects of the moments S, T and U could indeed be composed in the same way as forces, i. e. using the rule of the parallelogram.[19] Thus, it seems that he was becoming aware that his analytical expressions could be somehow translated back into a geometrical form. However, at that time Euler was already very old and blind and therefore could not further pursue this

[17] Euler 1775, p. 224 – 225, i. e. 113.
[18] Davis 2002, esp. p. 255 – 256.
[19] Caparrini 2002, p. 154 – 155.

research. The fact that the great mathematician only became aware at such a late date of this aspect of the subject which he had studied for so long is in my opinion the best evidence that such changes of perspective are anything but trivial.

4 "Conservation of area" and "invariable plane" in French mathematics (1788 – 1790)

Euler's equations were later taken up by other authors, embedded in new systems of mechanics and eventually rederived according to new principles.[20] In his *Mechanique analytique* (1788) Joseph Louis Lagrange expressed them in the formalism that still carries his name and in which the "vectorial" character of the equations was less evident than in Euler's original form.[21] However, Lagrange noted that the new formalism allowed to deduce a number of principles of conservation which had hitherto been regarded separately: "the conservation of living force, the conservation of the movement of the centre of gravity, the conservation of the moment of rotation or principle of the areas and the principle of least action".[22] Lagrange went on to explain that the principle of conservation of moment of rotation (i. e. of areas) had been derived independently by Leonard Euler, Daniel Bernoulli and Patrick d'Arcy.[23] We have already seen what Euler and Bernoulli had worked on. According to Lagrange, d'Arcy had formulated a special case of this result in terms of areas: "la somme des produits de la masse de chaque corps par l'aire que son rayon vecteur décrit autour d'un centre fixe sur un même plan de projection est toujours proportionelle au temps".[24] Lagrange regarded d'Arcy's formulation as "généralisation du beau théorème de Newton", which in turn was a generalisation of Kepler's law of areas, and, when

[20] Grattan-Guinness 1990, p. 270 – 301.

[21] Truesdell 1964b, p. 245 – 246.

[22] «théorème connus sous les noms de conservation des forces vives, conservation du mouvement du centre de gravité, de conservation des moments de rotation ou principe des aires, et de principe de la moindre quantité d'action» Lagrange 1853, p. 257. I quote from a later edition of Lagrange's work, which however does not present relevant difference to the first one as far as our subject is concerned.

[23] Lagrange 1853, p. 259 – 261.

[24] Lagrange 1853, p. 260.

deriving the result with his own methods, he referred to it as "principle of areas".[25] Thus, by the late 18th century, the notion that a freely rotating system was subject to a specific conservation law was present, but the law was mainly regarded as concerning one or more scalar quantities. It was Pierre Simon Laplace who drew attention to the fact that the principle of areas also implied the conservation of a preferred direction of the system, and he expressed this fact geometrically in terms of an "invariable plane" of rotation, which for us corresponds to the plane perpendicular to angular momentum.[26]

As Euler had done, Laplace wrote down the expression of what we regard as the three components of angular momentum and noted that they were constant in absence of external moments of force. He also remarked, like Lagrange had done, that these quantites could be interpreted in terms of areas and that one could choose the coordinate system in such a way that two of the constant quantities would be zero, while the third one had the highest possible value of any of them. It is easy to interpret this result by conceiving of the three quantities as components of a vector, but Laplace chose to adhere to the "area" interpretation. This may appear somehow forced to a modern reader, but for someone like Laplace who had been working many years on celestial mechanics the connection between his new result and Kepler's law probably appeared rather intuitive, while the notion of associating an oriented segment to some rather abstract analytical expression did not. It would be incorrect to say that Laplace rejected geometrical interpretations of his analytical formulas: he only chose a different one that we do today. As we shall see in the next section, the first one to propose a geometrical interpretation similar to the modern one was the French mathematician Louis Poinsot.

[25] Lagrange 1853, p. 260, 278 – 288.

[26] Laplace 1799, p. 65 – 69. Laplace's work is discussed by Caparrini 2002, p. 156 – 157; Grattan-Guinness 1990, p. 317 – 318, 360. Grattan-Guinness writes that Laplace had "in effect" shown some properties of angular momentum – it is important to note that Laplace made no use of such notion.

5 Louis Poinsot's statics and the notion of a couple (1803)

Louis Poinsot had set out to become an engineer first at the École Politechnique and then at the École des Ponts et Chaussés, but he eventually gave up his study to pursue his interest in mathematics and in 1804 became a teacher of that discipline at the Lycée Bonaparte.[27] In 1803 he published a "Treatise on Statics" which, although written for candidates to the École Polytechnique, was much appreciated by all engineers and also by some French academics.[28] Thanks to that work and to a series of memoirs on rotational motion, in 1809 he obtained the post of inspector general at the University and in 1813 was elected to the Academy. He remained active in research and teaching at the university and the École Polytechnique, but was often in opposition to the analytical school of mathematics because of his geometrical approach to mechanics. In the course of the 19th century his work found increasing appreciation among French mathematicians. In 1858 Joseph Louis François Bertrand stated in a discourse:[29]

> «Nul oserait [...] aujourd'hui contester l'importance et la hauteur des travaux mécaniques de Poinsot: il semble évident déja que la postérité doit placer l'illustre auteur de la 'Statique' bien au-dessus des contemporaines, jadis plus célèbre, qui l'ont si longtemps méconnu. Poisson disait, au sein même, je crois, du Bureau des longitudes: 'si Poinsot se présentait á l'École polytechnique, ma conscience ne me permetterait pas de l'y admettre'»[30]

Poinsot's "Treatise on Statics", which reached its 12th edition in 1877, almost twenty years after the death of its author, offered a formulation of classical mechanics relying on geometrical representations, as advocated by Gaspard Monge of whom Poinsot was a follower. However, Poinsot not only gave a different presentation to old material, but also used the new form to develop innovative and heuristically fruitful physical mathematical notions.

[27] On Poinsot's life and work see: Grattan-Guinness 1990, p. 190 – 191, 358 – 364, 1154 – 1157, 1233 – 1236; Taton 1975.

[28] Poinsot 1803.

[29] Bertrand 1878. For the context of the text see: Tobin 2003, p. 242 – 244.

[30] Bertrand 1878, p. vii-viii.

At the centre of the book stood the concept of a couple, i. e. a system of two equal and opposite forces acting on two points of the same body. The effect of a couple could never be reduced to that of a single force, as it corresponded to a rotation around an axis perpendicular to the plane of the two forces.[31] The intensity of the effect of a couple was measured by the (scalar) moment of the couple (i. e. intensity of the forces times their distance) and Poinsot proposed to represent that moment geometrically, by means of an oriented segment perpendicular to the plane of the couple.[32] Poinsot showed how, thanks to this representation, the effect of two couples could be composed by using the rule of the parallelogram, exactly as in the case of forces. Using the notion of a couple Poinsot showed that the total effect of a system of forces on a body could always be represented as the combination of a single resultant force and a single resultant couple. We do not need to go further into his theory, but it is important to stress that, despite its geometrical form, it was by no means "intuitive" in the sense that it appealed to some notions immediately linked to everyday experience, as in the case of force and linear motion. While the representation of forces by means of oriented segments was immediately suggested by the motion they impressed, no such obvious interpretation existed for couples and rotations. As we have seen, momenta were usually conceived as scalar quantities. Like Laplace's "principle of areas" and "invariable plane", Poinsot's theory was the translation into geometrical forms of a complex, abstract notion that had been developed by analytical means. Neither of the alternative "geometrisations" of the dynamics of rotating bodies was more immediate and intuitive than the other: they were simply linked to different physical systems which the authors had in mind, on the one side the Solar system, on the other the spinning top. Poinsot's theory proved immediately succesful with engineers, who were capable of dealing well with geometrical entities, while Laplace's method was more appreciated by mathematicians.

[31] Poinsot 1803, p. 47.
[32] Poinsot 1803, p. 58 – 59.

6 Louis Poinsot's dynamics and the "conservation of forces and moments" (1806)

As befit its subject, the treatise on statics only dealt with bodies in equilibrium, but already in 1806 Poinsot started applying his approach to dynamics. In a memoir presented to the Academy he summarized his theory of couples, stressing how the geometrical representation of the moments of a couple could be used to represent and manipulate the moments of any force.[33] He showed how his method allowed to reproduce all results present in Laplace's mechanics and finally claimed that, thanks to the new formalism, "hidden forces" had emerged: "Que ces sortes de produits qu'on appelle momens n'étaient au fond que la mesure de certaines forces cachées que les couples ont mises en évidence."[34]

The meaning of this statement became somehow clearer in the third part of the essay, where the theory was applied to dynamics.[35] When a body moves freely in space in a straight line, said Poinsot, the "force" animating it remains constant in intensity and direction, and the same applies to its moment. This "conservation of forces" and "conservation of moments" was valid for any system of bodies interacting only with each other. At this point, the term "force" was used in a slightly different meaning than in the treatment of statics, but Poinsot did not elaborate on this and offered a purely verbal "raisonnement" to prove the conservation.[36] The reasonement was based on the idea that, in each mutual interaction, the elements of the system only exchanged forces and moments with each other, so that the sum remained constant:

> «On voit donc que, dans un système de corps qui ont reçu des impulsions primitives, et qui réagissant d'une manière quelconque les unes sur les autres, la somme de toutes les forces qui les animent, estimées suivant une même droit, est la somme de leurs momens par rapport à un même axe fixe quelconque, demeurent constamment les mêmes.»[37]

[33] Poinsot 1806.
[34] Poinsot 1806, p. 345.
[35] Poinsot 1806, p. 359 – 365.
[36] Poinsot 1806, p. 360 – 361. For a discussion of Poinsot's proof see Caparrini 1999, p. 51 – 53.
[37] Poinsot 1806, p. 361.

Poinsot stated that this conservation corresponded to two analytical principles: the conservation of the motion of the centre of gravity and the conservation of areas. These conserved quantities were expressions of "powers" ("puissances") imparted to the bodies and conserved in them.[38] Poinsot used a notion of "force" or "power" similar the one we found in Newton and such "Newtonian" concepts were not uncommon in France: Laplace, for example, used them.[39] The novelty of Poinsot's approach was that he had extended that treatment to moments of forces and in doing so he had revealed new, "hidden forces", i. e. physical entities analogous to impulse but linked to rotational motion and capable of being represented by a directed segment. In this way, the conservation of area became the conservation of a new physical mathematical quantity. Poinsot did not regard analytical expressions as defining the quantity, but only as giving its measure.[40] To sum up, Poinsot had taken the results of the analytical investigations of rotations and transformed them into a new geometrical form which brought to light an analogy between linear motion and rotation. He interpreted this analogy as the discovery of a "hidden" physical entity whose measure was given by the moment of the "force" animating a rotating body.

7 Reception and critique of the theory of couples. Poinsot's "New theory of rotational motion" (1834)

French mathematicians appreciated Poinsot's approach, but not his geometrical formalism or his physical interpretation, and tried to give alternative analytical formulations of his results. Silvio Caparrini has given a thorough account of how, in studying rotation, scholars started developing an analytical formalism which in many ways corresponded to vector algebra, and I shall only sum up his remarks, which offer a clear example of coevolution of physics and mathematics.[41] Simeon Denis Poisson hardly mentioned couples and gave no importance to the

[38] Poinsot 1806, p. 346.
[39] Dugas 1988, p. 354 – 360.
[40] Poinsot 1806, p. 362.
[41] Caparrini 2002.

notion of "momentum", Jacques Philippe Marie Binet introduced the notion of "aeorial velocities", Jacques Frédéric Français developed an analytical theory employing Poinsot's idea of the conservation of couples and mentioned the conservation of moments of rotation, but only in terms of the three components.[42] Thus, while Poinsot's results were slowly embedded in the analytical context, his idea of a new physical mathematical notion found little attention.

In 1826 Augustine Louis Cauchy published a series of essays on his new theory of "momens linéaires", in which he reformulated and partly generalized Poinsot's geometrical theory of moments of force.[43] Cauchy showed hot to construct the "vectorial" moment of any quantity represented by a directed segment and mentioned the quantity of motion as an example, although he only treated extensively the case of moments of forces.[44] Poinsot accused him of having simply translated his own theory of couples and moments into another form and a dispute ensued in whose course Poisson defended Cauchy by claiming that Poinsot's result had already been obtained by Euler and Laplace. Poinsot replied to this accusation by underscoring the importance of giving physical content to analytical expressions. He summed up the results by Euler and Laplace and then stated:

> «Mais il faut bien remarquer ici que ces théorèmes ne constituent point la composition proprement dite des moments. Cette composition n'a été, et je dirai même, n'a pu être connue que par la théorie des couples. Et en effet, ce qu'on appelait le moment d'une force par rapport à un point, ou un axe fixe, n'était jusque-là, pour les géomètre, qu'une simple expression de calcul, un produit abstrait de deux nombres, dont l'un marque une certain force, et l'autre une certaine ligne; et il me semble qu'il ne pouvait venir à personne l'idée de chercher des lois de composition, c'est-à-dire, des lois d'équilibre entre de tels produits. [...] il fallait une notion statique, qui manquait alors aux géomètres, et cette notion est celle du couple.»[45]

[42] Caparrini 2002, p. 160 – 162, 167 – 170; Grattan-Guinness 1990, p. 364 – 365, 368 – 370; Français 1813, p. 21 – 23.
[43] Caparrini 2002, p. 171 – 172, Grattan-Guinness 1990, p. 1154 – 1157.
[44] Cauchy 1826.
[45] Poinsot 1827, p. 4 – 5.

Poinsot was here of course arguing "pro domo sua", but the best proof that his geometrical physical interpretation of previous analytical results was an original, fruitful contribution to the science of mechanics was the fact that, thanks to it, he could bring forward a "New theory of the rotation of bodies" (*Théorie nouvelle de la rotation des corps*, 1834) for which he is mostly remembered today. In 1834 Poinsot presented his work to the Paris Academy and then published it as a short memoir in which he only made use of geometrical arguments expressed in verbal form: no analytical formulas were present.[46] In this text he employed his methods of geometrical representation to express the motion of a freely rotating body in terms of two cones along which the instantaneous axis of rotation of the body moved. Almost twenty years later, in 1851, he published a book with the same title of the memoir in which the previous results were expressed also in analytical form and expanded upon.[47] In this later text Poinsot took up again the subject of conservation of forces and moments, which he here referred to as "conservation of forces and of couples".[48]

French mathematicians once again showed more interest in translating Poinsot's theory into analytical terms than in further developing his geometrical approach and his ideas of new conserved "forces" associated to rotations. However, the new theory of rotational motion was appreciated by engineers and won special praise from Léon Foucault, best known for his demonstration of the rotation of the Earth by means of a pendulum.[49] Two of Foucault's devices – the pendulum and the gyroscope – play a very important role in our story and I shall discuss them in the next section.

[46] Grattan-Guinness 1990, p. 1233 – 1235; Poinsot 1834a.
[47] Poinsot 1851b.
[48] Poinsot 1851b, p. 45 – 49.
[49] Tobin 2003, here especially p. 150 – 151, 161.

8 Foucault's pendulum, his gyroscope and the English reception of Poinsot's theory (1851 – 1855)

Jean Bernard Léon Foucault, self-taught natural philosopher and inventor, had achieved his first natural philosophical recognition thanks to experiments on the velocity of light.[50] Around 1850 he conceived the idea of building a large pendulum whose plane of oscillation would slowly change in orientation with respect to a terrestial observer because of the rotation of the Earth. Foucault experimented at first in his own basement, but was then allowed to set up his pendulum at the Paris Observatory and in February 1851 presented his results to the Academy: the measured daily deviation of the oscillation plane from the terrestrial vertical was given by a simple formula in which the sine of the angle expressing the local latitude appeared. Foucault's result were greeted with interest and the experiment was repeated in the Paris Pantheon for the broader public: the experiment was an instant success and was soon replicated both in France and abroad. A pendulum was swinging in London already in early April, a few months later also in many other British towns.

However, Foucault's pendulum was much more than a popular demonstration in which a scientific theory could be shown to correspond to experience: while the motion of the pendulum did indeed represent well-established astronomical and mechanical knowledge, it did so in a particulary simple form which not only was immediately evident to the eye (as long as the pendulum was long enough), but could also be expressed in a very elementary mathematical form, i. e. a sinus factor. Yet the analytical theories of rotations showed none of that simplicity and French mathematicians felt challenged to relate the simplicity of the pendulum to the complexity of the formulas. In other words, a tension between two different representations of the laws of rotation – the pendulum and the equations – had been constructed and now had to be resolved, possibly without declaring either the equations or

[50] The following discussion of Foucault's pendulum and gyroscope is based on: Broelmann 2002, p. 42 – 50; Tobin 2003, p. 137 – 160.

the pendulum as wrong. As we shall see, this was possible thanks to Poinsot's theory of rotations.

In the short memoir discussing his experiments, Foucault had only offered a very sketchy argument to justify the sine factor: a pendulum at the Pole would have an oscillating plane which remained constant while the earth rotated under it, and thus would appear to a terrestrial observer a making a complete 360° rotation each day.[51] However, a pendulum standing at a generic latitude would be forced to rotate along with the earth, and thus would have a more complex motion, which Foucault regarded as a problem for mathematicians to solve: "Mais quand on descend vers nos latitude, le phénomène se complique d'un élément assez difficile à apprécier et sur le quel je souhaite bien vivement l'attention des géomètres."[52] He claimed to have performed an approximate computation leading to the prediction of the sinus factor which the experiment confirmed. A few days later Jacques Binet, who as we saw had written a treatise on rotational motion, published a short note in which he, as a representative of the "géomètres", rose to the challenge posed by Foucault.[53] He described Foucault's results as "unexpected" ("inattendu"), and continued: "En me consultant, l'auteur [i. e. Foucault] désirait savoir à quel point le résultant mécanique auquel il arrivait s'accordait avec la theorie mathématique et avec les déductions obtenues par les géomètres."[54] Binet explained that Laplace had devoted some attention to similar subjects, but without deriving any relevant results and that: "Poisson a traité ce sujet [...]; cependant ce nétait pas l'object spécial de ce grand géomètre, et il ne s'est pas occupe qu'incidemment".[55] After this cautionary statement, he went on to state – possibly not without some embarrassment – that Poisson had claimed that the force perpendicular to the plane of oscillation was too small to have an appreciable effect on the pendulum, and concluded somehow lamely:

> «Cette conclusion parait contraire aux expériences de M. Foucault; mais le passage que je viens de citer permet un doute: Poisson

[51] Foucault 1851.
[52] Foucault 1851, p. 136.
[53] Binet 1851.
[54] Binet 1851, p. 157.
[55] Binet 1851, p. 157.

> ne rapporte pas le calcule de la force dont il parle, et d'ailleurs il n'est pas suffisant d'avoir reconnu qu'une force perturbatrice est très-petite pour conclure qu'elle ne produira qu'un effet insensible après un grand nombre d'oscillations.»[56]

He then started an analysis of the problem in verbal form in which he made use of Poinsot's methods, considering the rotation of the pendulum as represented by a vector which could be decomposed into two parts, one of which was linked to fictive centrifugal forces that could be regarded as causing the pendulum to deviate.[57] One week later Binet complemented his first memoir with the relevant analytical formulas written in Poisson's notations, and recovered the desired sine factor.[58]

At the same time, Poinsot published a short note in which he offered no formulas, but a physical interpretation of the pendulum experiment in terms of the notions on which he had built his dynamics of rotation: he explained that it was misleading to regard the movement of the pendulum as due to some force because the phenomenon did not "fundamentally" ("au fond") depend on gravity or any other force.[59] The key feature of the pendulum, explained Poinsot, was not that its plane of oscillation moved, but that it remained constant, or rather attempted to remain as constant as possible under given conditions. It would be interesting, he continued, to construct a device whose plane of rotation would remain perfectly invariant with respect to "absolute space".[60] He described such an instrument, which involved an oscillating spring, and explained that, in this case, the "couple animating [the device] in the beginning" would be conserved.[61]

Thus, Poinsot interpreted Foucault's pendulum as a partial expression of the conservation of couples on which he had long since attracted attention, and proposed a new experiment demonstrating the conservation in perfect form. Foucault apparently did not build Poinsot's spring-contrivance, but he did construct an instrument which represented Poinsot's conservation of couples in the most perfect form:

[56] Binet 1851, p. 157 – 158.
[57] Binet 1851, p. 158.
[58] Binet 1851, p. 197 – 205.
[59] Poinsot 1851a, p. 206.
[60] Poinsot 1851a, p. 206.
[61] Poinsot 1851a, p. 207.

the gyroscope. Foucault realized this device one year after the pendulum, in 1852, and he did so by employing Poinsot's theory of rotation, and possibly also by discussing the problem with him in person.[62] The gyroscope, which had already been conceived by other authors, is an instrument which is build and set up in a frame in such a way, as to be able (at least ideally) to rotate free from the action of gravity and of friction. Under such ideal conditions, of which Foucault managed to give an extremely good approximation, the "couple" of the device remained constant in intensity and direction, and therefore the instrument could be seen to maintain always the same orientation with respect to the fixed stars. The idea of the gyroscope was not new, and other scholars and practitioners worked at building one, yet Foucault was the first one to present a working model to the Paris Academy and in 1854 he travelled to England and demonstrated the device at a meeting of the British Association for the Advancement of Science.[63]

Foucault's experiments had started an interest in rotations both in academic circles and among the broader public and brought attention also to Poinsot's theory of rotation: as we have seen, the expanded version of his treatise on the subject was published in 1851, possibly in context of the enthusiasm for the pendulum, and a second printing came out a year later, as the gyroscope appeared.[64] However, the physical notions that Poinsot had associated to his formalism did not gain any followers in France and so, to follow the emergence of angular momentum, we shall have to move our attention to Britain.

9 The theory of couples in Great Britain and the definition of "angular momentum" by Robert Baldwin Hayward (1856)

In the same year in which the French original of Poinsot's "New theory of the rotation of bodies" (1834) was published, an English version of the work appeared under the title *Outlines of a new theory of rotatory motion*.[65] The English translator had added a commentary

[62] Foucault 1852; Tobin 2003, p. 161.
[63] Tobin 2003, p. 166 – 167.
[64] Poinsot 1852.
[65] Poinsot 1834b.

and also appended to the booklet the translation of those passages or Poinsot's memoir from the year 1806 which dealt with the conservation of forces and moments. Poinsot's avoidance of analytical computations made his work particularly suitable for Brisish readers. An early reception of Poinsot's theory of rotation took place in Ireland, where a reform of mathematics had been started in 1813.[66] In 1844 James MacCullagh lectured at Dublin university on the theory of couples and also expanded on Poinsot's results.[67] He made use of analytical methods, but also took over the Frenchman's interpretation of rotational motion in terms of a conserved couple.[68] In 1845 and 1848 and William Rowan Hamilton presented to the Royal Irish Academy two papers in which he discussed the application of his method of quaternions to Poinsot's and MacCullagh's results.[69] The theory of couples also appeared in other works, as for example *The mathematical principles of mechanical philosophy* (1836) by John Henry Pratt.[70] However, in these works no particular emphasis was put on the physical quantity which Poinsot had claimed to have discovered and which he had referred to as a conserved "force", "moment" or "couple" associated to the rotational motion of a body. Indeed, both MacCullagh and Hamilton followed rather an analytical than a geometrical approach. The first author to give prominence – and a new name – to Poinsot's "conserved couple" was the mathematician Robert Baldwin Hayward.[71] Hayward had studied in London and Cambridge and had been 4th wrangler in the 1850 Tripos, thus being fully immersed in the Cambridge style of mathematical and physical education, which gave particular prominence to Newton's geometrical approach to calculus and to the notion of force as impulse.[72] Hayward would later become a schoolmaster in mathematics, but in 1856 he was in Cambridge presenting to the Philosophical Society a paper on rotational motion in which he introduced "angular momentum", discussing Foucault's pendulum as an example.[73] His paper started with

[66] Grattan-Guinness 1990, p. 432 – 433.
[67] MacCullagh 1849; Moyer 1973.
[68] MacCullagh 1849, p. 335 – 336.
[69] Hamilton 1845, 1848.
[70] Pratt 1836, p. 20.
[71] Anon. 1950; Hayward 1856.
[72] Harman 1998, p. 19 – 27.
[73] Hayward 1856, p. 18 – 20.

two quotations by Poinsot on the necessity of going beyond analytical formulas to pursue science and continued: "My object is not so much to obtain new results, as to regard old ones from a new point of view which renders all our equations directly significant."[74]

Hayward offered a treatment of the motion of a three-dimensional body which made use of analysis, but at the same time he refined and exploited the geometrical-physical notions introduced by Poinsot. The first part of the paper was purely mathematical, showing how to manipulate quantities which we would call vectors and axial vectors.[75] At the beginning of the second part, the author wrote:

> "[...] since every system of forces is reducible to a single force and a single couple, we have to investigate the effects of that force, and the effects of that couple. Now we know that the resultant force determines the motion of the centre of gravity of the system, be the constitution of the system what it may. In like manner the resultant couple determines something relatively to the motion of the system about its centre of gravity, which in the case of an invariable system defines its motion of rotation about that point, but which in other cases is not usually recognized as a definite objective magnitude, and has therefore no received name. This defect will be remedied by adopting momentum as the intermediate term between force and velocity, and by regarding as distinct steps the passage from force to momentum and that from momentum to velocity. In accordance with this idea we proceed to show that as in our first problem we shall be concerned with the magnitudes, force, linear momentum or momentum of translation, and linear velocity or velocity of translation, so in the other we shall be concerned with the corresponding magnitudes, couple, angular momentum or momentum of rotation, and angular velocity or velocity of rotations."[76]

Hayward interpreted Poinsot's theory by resolving what he perceived as a tension between velocity and force (i. e. between movement and its cause) by introducing the notion of momentum, and in particular of angular momentum. In this way he set a new, abstract representation of

[74] Hayward 1856, p. 1.

[75] Hayward 1856, p. 1 – 7. See also Caparrini 2002, p. 176 – 177. As Caparrini notes, in 1892 Hayward published a book on vector algebra.

[76] Hayward 1856, p. 7.

rotational movement which had emerged in analysis and had been geometrized by Poinsot on the same footing as the old idea of the "momentum", i. e. the "impulse" of a moving body. One may imagine that this step was made easier by the growing familiarity with spinning tops, gyroscopes, train wheels and engines offering a three-dimensional, dynamical representation of the force of rotation. Like Poinsot had done, Hayward gave particular prominence to the conservation of linear and angular momentum and underscored the continuity between the two notions by speaking of a "conservation of momentum" which could be applied both to the linear and the angular one, corresponding respectively to the "conservation of motion of the centre of gravity" and to the "principle of the conservation of areas".[77] Hayward remarked that some elements of his theory could be expressed in terms of Hamilton's quanternions.[78]

10 James Clerk Maxwell's spinning tops (1855 – 56)

Hayward's new formulation of the rotation of extended bodies was immediately noticed by a key figure of 19th century science: James Clerk Maxwell.[79] Maxwell had started his studies in his native Scotland, at the University of Edinburgh, and had continued them in Cambridge. In 1849 he had witnessed the experiments performed in Edinburgh by James David Forbes with spinning tops carrying discs painted in sectors of different colours with the aim of studying the composition of colours, and in 1854 – 55 he took up the same line of research.[80] In 1856, possibly after having experimented with the gyroscope, he published a short note "On an instrument to illustrate Poinsot's theory of rotation", where the instrument in question was none other than a spinning top carrying colored discs: "On the upper part of the axis [of the spinning top] is placed a disc of card, on which are drawn four concentric rings. Each ring is divided into four quadrants, which are coloured red, yellow, green, and blue. The spaces between the rings are white. When the top is in motion, it is easy to see in which quadrant the instantaneous

[77] Hayward 1856, p. 9.
[78] Hayward 1856, p. 12.
[79] My discussion of Maxwell's life and work is largely based on Harman 1998.
[80] Harman 1998, p. 37 – 48; Maxwell 1855.

axis is at any moment and the distance between it and the axis of the instrument."[81] Thus, Maxwell had interpreted a rotating instrument he was familiar with as a representation of a geometrical-analytical theory of rotation, like the pendulum or the gyroscope.

One year later Maxwell published a much longer essay "On a dynamical top, for exhibiting the phenomena of the motion of a body of invariable form about a fixed point, with some suggestions as to the Earth's motion."[82] This time, the reference to instruments demonstrating rotational phenomena was very prominent: Maxwell started his paper stating that "To those who study the progress of science, the common spinning top is a symbol of the labours and the perplexities of men who had successfully threaded the mazes of planetary motions." and then went on to praise a series machines which had been used to visually represent the intricacies of rotation, among them the Earth model of Johann Bohnenberger and Foucault's gyroscope.[83] Before describing his spinning top, Maxwell expounded briefly the theory of rotation following the method of Poinsot, which he praised as "the only one which can lead to a true knowledge of the subject".[84] He then acknowledged the "important contribution" made by Hayward, giving the full reference of his paper, and then choosing as the centre of his treatment Hayward's notion of "angular momentum" and of its conservation "in direction and magnitude".[85] In his study of Maxwell's natural philosophy, Peter M. Harman remarks that Maxwell's appreciation of Poinsot's geometrical approach and of the notion of angular momentum can be understood in the context of the "Newtonian" tradition of a geometrical interpretation of calculus and of a mechanics based on the notion of "force" with which Maxwell had come into contact during his study in Edinburgh and Cambridge.[86] Maxwell made use of the notion of angular momentum and its conservation also in the essay on the stability of Saturn's rings written for the Adams prize of

[81] Maxwell 1856, p. 247.
[82] Maxwell 1857.
[83] Maxwell 1857, p. 248. On Bohnenberg's machine, a model of Earth precession see: Broelmann 2002, p. 37 – 41.
[84] Maxwell 1857, p. 250.
[85] Maxwell 1857, p. 250.
[86] Harman 1998, p. 13 – 27, 35 – 36.

the University of Cambridge in 1857.[87] For our subject it is important to remark that also in this case Maxwell built a mechanical instrument whose motion represented the dynamics he was discussing in analytical form.[88] As Harman noted "the abstractions of Cambridge mathematics were rendered visual, and transformed into Scottish physical realism."[89] I would like to underscore the fact that the contribution of mechanical models (spinning top, pendulum, gyroscope, Saturn's rings) were by no means a by-product of the knowledge-building process and instead contributed to shape it in an essential way. As we have seen, such devices did not just "visualize" theories, but rather represented a step along a complex path of physical-mathematical abstraction: they were conceived on the basis of refined analytical notions (e. g. Euler's equations) and complemented them by offering a representation of rotations which could be seen as fitting not only Poinsot's geometrical model, but also his natural philosophical interpretation of the dynamics of bodies based on an extension of the "Newtonian" notion of force. As to the "Scottish physical realism", it is interesting to note that, in his essay on the rings of Saturn, Maxwell put the conservation of angular momentum on the same footing as the conservation of energy, and the same was done more or less at the same time by two other Scottish natural philosophers who most contributed to creating the "science of energy": William Thomson and William John Macquorn Rankine.[90]

11 William J. M. Rankine: angular momentum and applied mechanics (1858)

William John Macquorn Rankine had studied at the University of Edinburgh, but had left without taking a degree and had subsequently worked as an engineer, at first mostly in railway and train construction.[91] He had devoted much attention to rotations and in particular to the stress to which rotating elements such as railroad axles were subjected. Later

[87] Harman 1998, p. 48 – 57, especially p. 55.
[88] Harman 1998, p. 58.
[89] Harman 1998, p. 57.
[90] Smith 1998.
[91] Hutchinson 1981; Parkinson 1975.

on, he published extensively both on engineering and on the theory of matter and heat. Around 1850 he developed a theory of matter, heat and light based on the notion of "molecular vortices".[92] In these essays, no notion similar to angular momentum played an important role, but, as we shall see, they later became the basis for some reflections by William Thomson which are of relevance for the present subject.

In 1858 Rankine published a very influential *Manual of applied mechanics* in which he used both the name and the notion of angular momentum.[93] The book contained both well established results and recent innovation in the field and treated extensively all aspects of material stress and stability. The author set much worth in connecting theory and practice, and therefore at the beginning expounded the general principles that should be applied to the individual cases. Rankine introduced angular momentum when discussing systems of interacting bodies. He explained how to compute the absolute value of the quantity and then stated:

> "Angular momenta are compounded and resolved like forces, each angular momentum being represented by a line whose length is proportional to the magnitude of the angular momentum and whose direction is perpendicular to the plane of the motion of the body and of the fixed point and such, that when the motion of the body is viewed from the extremity of the line, the radius vector of the body seems to have a right-handed rotation."[94]

This definition took care of all possible ambiguities. Rankine demonstrated the conservation of angular momentum for a system of mass points and stated that this law was sometimes called the "principle of the conservation of areas".[95] In the first edition of the manual, Rankine referred to the work on rotation by Poinsot and Maxwell, but he did not mention Hayward.[96] In later editions of the work, however, he acknowledged that "The term angular momentum was introduced by Mr. Hayward".[97]

[92] Rankine 1851a 1851b.
[93] Rankine 1858.
[94] Rankine 1858, p. 505.
[95] Rankine 1858, p. 506 – 507.
[96] Rankine 1858, p. 535.
[97] For example in the fourth edition: Rankine 1868, p. 506.

Later on, he discussed the motion of rigid bodies and right at the beginning stated that the variations of linear momentum were due to the resultant external force, while those of angular momentum were the effect of the resultant couple.[98] After having defined angular momentum for a solid body, Rankine stated that also in this case the conservation law was valid and took this principle together with the conservation of energy as a starting point for his discussion of the motion of a free rotating body.[99]

12 William Thomson's "momentum of momenta" and the magnetic properties of matter (1857)

We now turn to a third representative of the "Scottish physical realism": William Thomson (from 1897 Lord Kelvin). Thomson had learned about Poinsot's theory of couples already in 1839, when he was only fifteen years old, studying at Glasgow college. His teacher John Pringle Nichols, who also introduced him to the work of Jean Baptiste Joseph Fourier on heat transmission, had "recently got hold of a new book – a pamphlet of some eighty pages – on Couples, and made his students write Christmas essays on the Theory of Couples".[100] The pamphlet was either the English translation of Poinsot's book or the French original. In 1840 Thomson bought himself also a copy of another memoir by Poinsot which dealt with the equilibrium conditions.[101] In 1845, when he was at the University of Cambridge, Thomson spent some time both experimenting with rotating bodies and reflecting on the mathematics of rotation.[102] In the following years he did not study the subject further, but in the 1850's he took an interest in the theory of "molecular vortices" which, as already mentioned, Rankine had developed to explain heat phenomena.[103] While Rankine had made no use of the notion of angular momentum, in Thomson's theory it played a key role to bridge the gap between mechanics and electromagnetism.

[98] Rankine 1858, p. 513.
[99] Rankine 1858, p. 529 – 534.
[100] Thomson S. P. 1910, p. 13, 73.
[101] Smith and Wise 1989, p. 366.
[102] Thomson S. P. 1910, p. 124, 737.
[103] Rankine 1851a, 1851b; Thomson 1857.

Rankine had proposed a quite detailed mathematical theory of matter according to which the elements of matter had a more or less spherical form and were constituted by a nucleus and a fluid atmosphere. The fluid in the atmosphere moved in vortices having their axes of rotation directed along the radii of the sphere. It is not necessary for us to go into the details of Rankine's model, but only to note that in 1857 Thomson took it as a starting point to offer a "Dynamical illustration of the magnetic and the helicoidal rotatory effect of transparent bodies on polarized light".[104] In his paper Thomson offered a mechanical explanation of the effect of magnetism on the transmission of polarized light through a transparent medium. Thomson proposed to consider the velocitiy of transmission of light as resulting from the composition of the velocity of the light wave with that of rotational motions internal to the body, such as Rankine's molecular vortices. Thomson recalled that Ampère had already linked magnetism to microscopical circulating electrical currents and stated:

> "Hence it appears that Faraday's optical discovery [i. e. the effect of magnetism on light] affords a demonstration of the reality of Ampère's explanation of the ultimate nature of magnetism; and gives a definition of magnetization in the dynamic theory of heat. The introduction of the principle of moments of momenta ("the conservation of areas") into the mechanical treatment of Mr. Rankine's hypothesis of "molecular vortices", appears to indicate a line perpendicular to the plane of the resultant rotatory momentum ("the invariable plane") of the thermal motions as the magnetic axis of a magnetized body, and suggests the resultant moment of momenta of these motions as the definite measure of the "magnetic moment"."[105]

As we see, Thomson here made use of the notion of angular momentum ("moment of momenta") and of its conservation, for which he quoted in brackets the traditional analytical names, probably for the benefit of some readers. He proposed to identify the "moment of momenta" of the vortical motions with magnetic moment: an idea which survived not only his model, but also classical mechanics and electromagnetism, to be taken over into quantum theory. Thomson offered no mathematical

[104] Thomson 1857.
[105] Thomson 1857, p. 152.

details of how the theory should look like, in contrast to Rankine, who had developed a very detailed hydrodynamical model for the vortices. On the contrary, Thomson professed himself completely agnostic as to the exact mechanism of matter:

> "The explanation of all phenomena of electromagnetic attraction and repulsion, and of electromagnetic induction, is to be looked for simply in the inertia and pressure of the matter of which the motions constitute heat. Whether this matter is or is not electricity, whether it is a continuous fluid interpermeating the space between molecular nuclei, or is itself molecularly grouped; or whether all matter is continuous, and molecular heterogeneousness consists in finite vortical ot other relative motions of contiguous parts of a body, it is impossible to decide, and perhaps in vain to speculate, in the present state of science."[106]

The notion of moment of momentum was particularly fitting to Thomson's attitude: on the one side it was a rigorously defined mathematical-mechanical notion, while on the other it did not require detailed speculations on the mechanical structure of matter.[107] The connection to the magnetic moment appear plausible because that quantity, too, was usually represented by means of an oriented segment and, since angular momentum was known to be conserved, the link could be regarded as valid independently of the continuous movements going on inside matter. Thomson's theory later provided a starting point for Maxwell's electromagnetism and, although the hypothesis of molecular vortices would eventually be discarded, the connection between magnetic moment and angular momentum remained.[108] Thus, Thomson had taken up the idea that behind the conservation of moment of momenta lay a physical quantity of particular relevance and had connected it with a phenomenon of non-mechanical nature: magnetic moment.

In the 1860s Thomson teamed up with another Scottish natural philosopher, Peter Guthrie Tait, to write a *Treatise on natural philosophy* which should offer an overview of that discipline in which mathematics would closely fit physics.[109] Most prominent among their principles of

[106] Thomson 1857, p. 152.
[107] Harman 1982, p. 69 – 71.
[108] Harman 1998, p. 109 – 112, 115 – 124.
[109] Thomson and Tait 1867. On the book see: Smith and Wise 1989, p. 348 – 395.

natural philosophy was the conservation of energy, but Thomson and Tait also made large use of simple machines such as the screw to express the contents of their subject, and supported the geometrical-physical formalisation of mechanics which underscored the significance of vectorial notions like "momentum" and "momentum of momentum".[110] Because of Thomson's oppositions, the book made no use of Hamilton's quaternions, even though Tait was "an ardent disciple of Hamilton", as Maxwell put it, regretting that the manual did not employ that new analytical tool.[111] Once again, we see how the choice of mathematical forms was closely linked to personal images of scientific knowledge: Thomson saw quaternions and vector algebra as a hindrance to physical understanding, rather than as a formalisation which gave prominence to physical meaning, as modern physicists regard it. Following Rankine's example Thomson and Tait stressed the analogy between linear and angular momentum, stating their conservation laws and adding at the end that the conservation of momentum of momentum "is sometimes called Conservation of areas, a very misleading designation".[112]

13 Angular momentum at the crossroad between geometry, natural philosophy and engineering

In the previous sections I have endeavoured to show how the notion of angular momentum emerged from the convergence of a number of factors: the development of the mechanical analysis of rotational motion by French mathematicians; the reinterpretation and expansion of these results in new physical-geometrical terms; some specific natural philosophical ideas of motion and its causes and, finally, the construction, use and discussion of various mechanical instruments representing the properties of rotational motion. Some crucial steps in this process were taken in Britain, where both geometrical formalism and mechanical models were more present in the academical milieu than in other European countries and enjoyed a higher epistemological status. In the context of Victorian natural philosophy the notion of angular momentum

[110] Thomson and Tait 1867, p. 173 – 187; Smith and Wise 1989, p. 365 – 372.
[111] Smith and Wise 1989, p. 365 – 366.
[112] Thomson and Tait 1867, p. 187.

could emerge and thrive because it was supported by different but complementary representations of nature and its regularities.

The example of Thomson's theory of magnetism and molecular vortices has shown how angular momentum, being linked not only to a specific mathematical formalism, but also to a physical picture, could provide a means of exporting analytical mechanical ideas and methods into other areas of science, as was also the case in Maxwell's mathematisation of electromagnetic theory.[113]

During the second half of the 19th century rotating machines of various kinds were used by British scientists not only to demonstrate theoretical models of natural phenomena (atomic structure, heat theory, electromagnetism), but also to translate them into a new formalism which eventually allowed to develop them further, as in the case of Tait's "smoke ring" demonstration of Hermann von Helmholtz's theory of hydrodynamic vortices or Thomson's frequent use of gyrostats to model electromagnetic theories .[114]

Outside of Britain, however, the notion of angular momentum did not have much fortune. In France Jean Marie Constant Duhamel devoted much space in his textbook of mechanics to the theory of couples, but only mentioned as an aside the fact that the moment of the quantitiy of motion was conserved in absence of external forces and moments of forces, and presented this result as an "application of the principle of areas".[115] In Germany Hermann von Helmholtz formulated a refined theory of vortex motion in matter, in which however the notion of angular momentum did not appear, although Helmholtz made use of Poinsot's formalism to compose rotation with the parallelogram rule.[116] Ernst Mach, in his treatise on *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* (1883), explained the law of "conservation of areas" without mentioning angular momentum and only added at the end of the discussion that this was "a generalization of the principle of inertia".[117]

[113] Harman 1998, p. 98 – 112.

[114] Broelmann 2002, p. 77 – 80; Silliman 1963, especially p. 46; Smith and Wise 1989, p. 438 – 439, 473 – 475, 485 – 488.

[115] Duhamel 1863, p. 178 – 179.

[116] Helmholtz 1858. On Helmholtz' theory of hydrodynamic and magnetic vortices see: Silliman 1963, p. 462 – 463.

[117] Mach 1883, p. 171 – 173, 281.

14 The "Theory of the spinning top" by Felix Klein and Arnold Sommerfeld (1897 – 1903)

The first German text in which angular momentum was presented as a physical quantity of relevance was the treatise *Über die Theorie des Kreisels* (1897 – 1910) written by Felix Klein together with Arnold Sommerfeld.[118] The book was due to the initiative of Klein, who had been pursueing the aim of reintroducing geometrical methods into mathematics, and it was an innovative attempt to combine the analytical and the geometrical approach to the study of rotation. It is no chance that the text put at its centre a mechanical device, the spinning top, as representation of rotational motion, since the authors repeatedly quoted and praised Thomson and Tait, and followed them in making use of a "Newtonian" concept of force.[119] They also acknowledged their debt to Poinsot, whose "beautiful methods" («schöne Methoden») they cultivated in their treatise, and giving particular importance to a notion of impulse:

> «Noch wichtiger für uns aber ist die volle Klarheit über die mechanischen Ursachen der Bewegung, über die ins Spiel kommenden Kräfte. Wir werden uns diese möglichst konkret im Raume als Vektoren versinnlichen; besonders Wert legen wir auf die Ausbildung und konsequente Benutzung des Impulsbegriffs, worunter wir diejenige Stosskraft verstehen, welche imstande ist, die jeweilige Bewegung momentan von der Ruhe aus zu erzeugen.»[120]

While one might be tempted to equate the "impulse" with linear momentum, this was only true for point masses: in the case of solid bodies, the impulse was divided into a translational and a rotational part, which Klein and Sommerfeld in the first volume of the work (1897) referred to as "Schiebeimpuls" and "Schraubeimpuls", while in later volumes the term "Drehmoment" was introduced.[121] The authors made clear that their notion of rotational impulse was precisely the one introduced by Poinsot: "Der Begriff des Impulses des Kreisels ist von Poinsot in den mehrfach zitierten Arbeiten vollständig entwickelt worden. Die Bezeichnung Poinsot's lautet etwas umständlich couple

[118] Klein and Sommerfeld 1897 – 1910.
[119] Harman 1982, p. 69 – 70; Klein and Sommerfeld, 1897, p. 69.
[120] Klein and Sommerfeld 1897, p. 4 – 5.
[121] Klein and Sommerfeld 1897, p. 70 – 104; Klein and Sommerfeld 1903, p. 514.

d'impulsion."[122] I would like to suggest that this emphasis on angular momentum as a quantity as physically fundamental as linear momentum may have played a role a few years later, when Sommerfeld tackled the problem of the quantization of atomic motion. In the last part of this paper I shall briefly discuss how the notion of angular momentum was used as a means to bridge the gap between classical and quantum physics.

15 Angular momentum and the quantum: Niels Bohr's atomic model (1913)

In a series of studies published in 1913 Niels Bohr proposed his highly innovative atomic theory.[123] Starting point for his reflections was Ernest Rutherford's model of the atom as a microscopic Solar system with an electron orbiting around a positively charge nucleus. This motion, when treated according to classical mechanics and electromagnetism, was known to give rise to unstable configurations in which the atom would steadily lose energy through radiation and eventually collapse. Bohr's crucial step was to assume the existence of "stationary states" in which atoms did not radiate and therefore maintained a constant value of the energy. Bohr computed the stationary energy values by first making use of classical formulas and then imposing on the result an additional condition involving Planck's constant h and an integer number τ ("quantum number"). The condition was such, that agreement with observed data could be obtained and, for the hydrogen atom, the energy W was bound to have the form:

$$W(\tau) = -(2\pi^2 \cdot m \cdot e^4)/(h^2 \cdot \tau^2).$$ [124]

Here m and e were respectively the mass and charge of the electron. Radiation took place in separate emissions or absorptions associated to the transition of the atom from one stationary state to another. Bohr

[122] Klein and Sommerfeld 1897, p. 104.

[123] For the present study, it suffices to discuss the contents of Bohr's first article Bohr 1913. For a discussion of the early stages of development of quantum theory see for example Jammer 1966, p. 69 – 88.

[124] Bohr 1913, p. 8.

could not offer any formal description of these "jumps" other than the frequency condition $W_{\text{initial}} - W_{\text{final}} = h\nu$, where ν was the frequency of the emitted light.[125]

Bohr's theory could predict the values of the spectral lines of hydrogen and also qualitatively explain the discrete structure of atomic and molecular spectra. Yet he recognized that his model, while successful from the phenomenological point of view, hardly provided a physical explanation for atomic structure, and offered a tentative interpretation of his results in terms of what he called "symbols taken from ordinary mechanics".[126] He pointed out that the quantization condition for the energy took a very simple form when expressed in terms of angular momentum: "If we therefore assume that the orbit of the electron in the stationary states is circular, the result of the calculation on p. 5 [i. e. the formula for W] can be expressed by the simple condition: that the angular momentum of the electron round the nucleus in a stationary state of the system is equal to an entire multiple of a universal value, independent of the charge of the nucleus."[127]

So Bohr obtained for the angular momentum M the condition: $M = \tau h/(2\pi)$, where τ was again an integer quantum number. This expression had the same form of the various quantization conditions that, following the success of Max Planck's black body radiation formula, had been employed in various fields of physics.[128] Bohr's condition corresponded to quantizing the absolute value of angular momentum and his specification that one should assume circular orbits indicates that he was not making any effort to give a detailed physical interpretation of his model: the "self-evident" connection between the physical notion of angular momentum and quantum physics was all but evident to him.

[125] Bohr 1913, p. 8.
[126] Bohr 1913, p. 15.
[127] Bohr 1913, p. 15.
[128] Bohr 1913, p. 15; Jammer 1966, p. 46 – 61.

16 Arnold Sommerfeld's atomic angular momentum and its connection to magnetic moment (1915 – 1919)

While Bohr had regarded the analogy between classical angular momentum and the quantity involved in his atomic model as purely symbolical, Arnold Sommerfeld took the opposite stance. In a series of papers published from 1915 onward he expanded and refined Bohr's theory in such a way as to accomodate three integer quantum numbers instead of only one, and was able to at least partly make sense of the fine structure of atomic spectra as well as of the characteristic of the radiation emitted and absorbed under the influence of magnetic or electric fields.[129] What is of particular interest for us is that Sommerfeld achieved his results not purely on the basis of analytic prowess, but also by following a physical picture of stationary states in which the "mechanical" notion of angular momentum served as a means to bridge the gap between classical and quantum theory.

Like Bohr, Sommerfeld considered the atom as a Keplerian system in which a small electron orbited around a large nucleus, but other than Bohr he deployed the whole apparatus of analytical mechanics to consider the motion of the system, expressing it in terms of the canonical conjugate variables (q, p).[130] The position q was expressed at first in polar coordinates (r, θ), later in spherical ones (r, θ, ψ), and in both cases the generalized momenta p corresponded to angular momentum. In the first case Sommerfeld only took into account the two degrees of freedom of the electron on the plane of the (elliptical) orbit, whose dimensions and eccentricity could vary, and so the angular momentum p was constrained to be in the direction perpendicular to the orbit and only had a single degree of freedom. Thus, even when allowing elliptical orbits, imposing quantization conditions on this classical constellation amounted to quantize only the absolute value of angular momentum, like Bohr had done and, unsurprisingly, Sommerfeld in the end obtained exactly the same result as Bohr had reached. To go beyond, he decided to quantize

[129] Jammer 1966, p. 89 – 96. In the following, I shall discuss Sommerfeld's results as presented in the paper: Sommerfeld 1916.

[130] Sommerfeld 1916, p. 14 – 28.

all three degrees of freedom of p, which amounted to quantizing not only the dimensions and eccentricity of the orbit, but also its orientation in 3-dimensional space – a "space quantization" ("Raumquantisierung"), as it would be called later.[131] This step proved essential for taking into account relativistic effects and so finally going beyond Bohr's model and explaining how fine structure of hydrogen and the multiplet structure of complex spectra depended on two quantum numbers.[132]

Despite the phenomenological success of his model, Sommerfeld felt that space quantisation required some physical justification, since it implied an arbitrary choice of a preferred direction in space – the z-axis of spherical coordinates – to be used when imposing physically relevant quantization conditions. Therefore, he introduced the procedure with these remarks:

> «Es entsteht die Frage, ob sich auch die Lage der Bahn «quanteln» läßt. Dazu muß allerdings wenigstens eine Bezugsebene im Raum ausgezeichnet sein, sei es durch ein äußeres elektrisches oder magnetisches Feld oder durch die Konstitution des Kernes selbst, z. B. einen diesen umgebenden Elektronenring. Bei dem kräftefreien Wasserstoffkern dagegen ist die Lage der Bahnebene aus Mangel an allen Bezugsstücken physikalisch unbestimmt und daher auch nicht quantentheoretisch bestimmbar. Wenn wir trotzdem eine Quantenbedingung für die räumliche Lage der Bahn am Wasserstoffmodell entwickeln werden, so ist dies folgendermassen gemeint: Wir denken uns durch eine (äußere oder innere) physikalische Ursache eine Richtung im Raum ausgezeichnet, lassen aber die Stärke derselben zu Null abnehmen, so daß wir wieder genau diese Ursache quantitativer Verhältnisse haben wie bei der Bewegung im Felde des reinen Wasserstoffkernes, aber mit der Möglichkeit der Orientierung gegen eine Vorzugsrichtung (oder Vorzugsebene). Diese Richtung können wir dann zur Achse, diese Ebene zur Äquatorebene eines räumlichen Polarkoordinatensystems r, θ, ψ wählen.»[133]

Thus, Sommerfeld justified his apparently arbitrary choice of reference frame by imagining that a "physical cause" like a magnetic or electric field, if present, would constrain the motion of the system. He then let the

[131] Sommerfeld 1916, p. 28 – 33.
[132] Sommerfeld 1916, p. 44 – 94.
[133] Sommerfeld 1916, p. 29.

intensity of the imaginary field go to zero, to obtain a preferred direction in space despite the rotational symmetry of the system. Apart from the obvious methodological problems inherent in this kind of "symmetry breaking", what is interesting for us is that here Sommerfeld was assuming that the "quantistic" angular momentum would be affected by electric and magnetic fields like its classical counterpart. In other words, he was implying that the mathematical formulas which were called "angular momentum" in his quantum theory stood in a physical relation, and not just in purely symbolic analogy, to the classical quantity: like classical angular momentum, also the quantistic one determined the behaviour of the atom in an electromagnetic field. Without any support from experiments – which on the contrary suggested that classical theory did not apply to atoms – Sommerfeld was here postulating the validity of the same connection between rotation and magnetization which had been proposed decades earlier by William Thomson. On the basis of this assumption he interpreted the quantum numbers linked to space quantization as establishing the number of possible orientations which "angular momentum" could take with respect to an external magnetic or electric field. For a quantum number $n = 1$ two orientations were possible, for $n = 2$ five, and so on.[134]

In his paper Sommerfeld did not commit himself explicity on whether atomic angular momenta could be considered equivalent to macroscopic ones, but in his textbook *Atombau und Spektrallinien* (1919) he clearly stated his opinion that, like energy, also linear and angular momenta, i. e. "Impuls" and "Impulsmoment" were to be understood as physical quantities whose properties could be expressed both in classical and in quantum terms. In 1918 Wojciech (Adalbert) Rubinowicz, who had formerly been an assistant to Sommerfeld in Munich, had postulated the conservation of "angular momentum" during the interaction between atoms and radiations and had used it to explain some selection rules of atomic spectra.[135] In his textbook Sommerfeld summarized and expanded this idea, giving his full support to Rubinowicz's results: «Wenn bei der Konfigurationsänderung des Atoms sich sein Impuls oder Impulsmoment ändert, so sollen sich diese völlig und

[134] Sommerfeld 1916, p. 32 – 33; Sommerfeld 1919, p. 411 – 415. For a detailed discussion of this issue see: Weinert 1995, p. 80 – 83.

[135] On the explanation of selection rules in the old quantum theory see: Borrelli 2009.

ungeschwächt wiederfinden in dem Impuls und dem Impulsmomente der Strahlung.»[136]

To appreciate the radicality of this statement one has to keep in mind that, at that time, no mathematical formalism for quantum theory existed in whose context the conservation could be formulated, let alone proven. Moreover, in 1918 Bohr had proposed an explanation of selection rules which did not require any physical interpretation of quantum numbers and was in better agreement with experiment than Rubinowicz's proposal. Bohr explicitely cast doubts on the conservation of angular momentum for quantum systems. However, Sommerfeld's physical interpretation of atomic angular momentum was vindicated against Bohr's skepticism by the experiment performed in 1921 – 22 by Otto Stern and Walther Gerlach.

17 The experiment of Otto Stern and Walther Gerlach: the operationalisation of quantum angular momentum (1921 – 22)

In the summer of 1921 Otto Stern wrote a paper proposing "a method to test experimentally the quantization of direction in a magnetic field"[137] Stern took Sommerfeld's idea on atomic angular momentum and its connection to magnetic moment at face value and suggested how they could be put to the test:

> «In der Quantentheorie des Magnetismus und des Zeemaneffekts wird angenommen, daß der Vektor des Impulsmomentes eines Atoms nur ganz bestimmte diskrete Winkel mit der Richtung der magnetischen Feldstärke H bilden kann, derart, daß die Komponente des Impulsmomentes in Richtung von H ein ganzzahliges Vielfaches von $h/2\pi$ ist. Bringen wir also ein Gas aus Atomen, bei denen das gesamte Impulsmoment pro Atom – die vektorielle Summe der Impulsmomente sämtlicher Elektronen des Atoms – den Betrag $h/2\pi$ hat, in ein Magnetfeld, so sind nach dieser Theorie für jedes Atom nur zwei diskrete Lagen möglich, da die

[136] Sommerfeld 1919, p. 381.
[137] Stern 1921. On the Stern-Gerlach experiment and its significance see: Weinert 1995.

> Komponente des Impulsmomentes in Richtung von H nur die beiden Werte $\pm h/2\pi$ annehmen kann.»[138]

On the basis of Sommerfeld's theory Stern treated the quantized angular momentum as a vector quantity J which really existed in space and had a given length, but an as yet undertermined orientation. He further assumed that this vector J was associated to a magnetic moment $M = 1/2e/mJ$, just like in the classical case.[139] When a beam of atoms passed through a magnetic field, their angular momentum was forced to orient itself with respect to the direction of the field in one of the two positions which were allowed by the quantum theory, and this would lead to a splitting of the beam into two parts. In the classical case, instead, the beam would simply spread in a continuous way and so it would be in principle possible to distinguish the two cases. A short time later, helped by Walther Gerlach, Stern performed the experiment with a beam of silver atoms which they assumed to correspond to the case $n = 1$ and therefore to fulfil the conditions described by Stern in his theoretical paper.[140] The beam of atoms split into two parts and thus the authors could announce "that the quantization of direction [of angular momentum] had proved to be a fact" («Die Richtungsquantelung im Magnetfeld [wurde] als Tatsache erwiesen».)[141]

The result was received with some astonishment by the scientific community, as few had actually regarded space quantization as more than a formal device, yet the discrete splitting of the beam offered an impressive evidence of the failure of classical theory and implicitly supported the belief that the quantum formalism for angular momentum indeed represented a physical quantity which was, if not identical, at least very similar to the classical notion bearing the same name. As in the case of Foucault's pendulum, two different representations of what was assumed to be a law of nature had been put near each other, and a new physical notion had emerged from that tension: quantum angular momentum. The fact that atomic angular momentum could be linked to magnetic moment – and vice versa – proved to be of the utmost importance for the later development of quantum theory, because it

[138] Stern 1921, p. 249.
[139] Stern 1921, p. 250 – 251.
[140] Gerlach and Stern 1921 and 1922.
[141] Gerlach and Stern 1922, p. 349.

provided a means to operationalize and investigate the otherwise very abstract notion of atomic angular momentum: studying the behaviour of atoms in magnetic fields (Zeeman, Paschen-Bach effect). Eventually, this led to the emergence of the concept of spin and to the relativistic and quantum-field-theoretical generalisation of angular momentum.

18 Conclusions

Combining the mathematical analysis of motion with the geometrical representation of mechanical entities and with a Newtonian notion of "force", Louis Poinsot developed the physical-mathematical concept of a "conserved moment" which he used to further explore the dynamics of rotation. Around 1850 this idea proved capable of bridging the gap between analytical mechanics and the mechanical devices representing the properties of rotational motion (Foucault's pendulum, the gyroscope). In the context of the British and especially Scottish natural philosophy of the Victorian era, where geometrical reasoning and mechanical models had come to be regarded as having a particularly high epistemological value, Robert B. Hayward formulated the modern definition of "angular momentum", which was promptly taken up by James C. Maxwell and William J. M. Rankine and employed by William Thomson to establish a connection between the structure of matter and its electromagnetic properties. Later on, guided by the classical notion of angular momentum, Arnold Sommerfeld constructed its equivalent in quantum theory, and Otto Stern and Walther Gerlach established an operational definition for it which not only survived the old quantum theory, but eventually became central to quantum mechanics and quantum field theory.

I believe this picture offers an example of how physical-mathematical notions emerge and are constantly supported by the interactions and unresolved tensions between different representations of phenomena, of mathematical structures and of philosophical ideas in words, symbols, graphics, mechanical contrievances or by any other means. Thanks to this multiplicity, the actors making use of the notions can often find one aspect of the composite which fits the present needs, bridging the gap between different phenomena to be interpreted, or different conceptualization of natural laws to be connected with each other.

19 Bibliography

Anonymous [1950]: R. B. Hayward. The mathematical gazette 34, p. 81

Bernoulli, Daniel [1744]: Letter to Leonard Euler, 04 February 1744. In: Fuss, Paul Heinrich (ed.), Correspondence mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle, vol. 2 (Académie impérial des sciences, St. Petersburgh, 1843), p. 548 – 552

Bertrand, Joseph [1878]: Des progrès de la mécanique. In: Foucault, L., Recueil des travaux scientifiques, vol. 1 (Gauthiers-Villars, Paris), p. V-XXVIII

Biedenharn, Lawrence C.; Louck, James D.; Carruthers, Peter A. [1981]: Angular momentum in quantum mechanics. Theory and applications (Addison-Wesley, Reading MA) (Encyclopedia of mathematics and its applications 8)

Binet, Jacques [1851]: Note sur le mouvement du pendule simple en ayant égard à l'influence de la rotation diurne de la terre. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences 32, p. 157 – 160, 195 – 205

Blanc, Charles [1968]: Préface des volumes II 8 et II 9. In: Euler, L., Opera omnia II 9 (Orel Füssli, Basel), p. VII-XXXIX

Bohr, Niels [1913]: On the constitution of atoms and molecules. Part 1, Philosophical magazine 26, p. 1 – 25

Borrelli, Arianna [2009]: The emergence of selection rules and their encounter with group theory: 1913 – 1927. Studies in the history and philosophy of modern physics 40, p. 327 – 337

Broelmann, Jobst [2002]: Intuition und Wissenschaft in der Kreiseltechnik. 1750 – 1930 (Deutsches Museum, München)

Cajori, Florian [1929]: History of physics. (Macmillan, New York)

Caparrini, Silvio [1999]: On the history of the principle of momentum of momentum. Sciences et techniques en perspective 32, p. 47 – 56

Caparrini, Silvio [2002]: The discovery of the vector representation of moments and angular velocity. Archive for history of exact sciences 56, p. 151 – 181

Cauchy, Augustine Louis [1826]: Sur les moments linéaires, Exercise de mathématiques I. p. 66 – 84, repr. in: Cauchy, A. L., Oeuvres Complètes II. 5 (Gauthier-Villars, Paris), p. 89 – 112

Crowe, Michael J. [1985]: A history of vector analysis. The evolution of the idea of a vectorial system. (Dover, New York, orig. 1967)

Davis, A. Douglas [2002]: Mechanics, classical. In: Encyclopaedia of physical sciences and technology. 3rd ed. 9 (Academic Press, San Diego), p. 251 – 258

Daxelmüller, Christoph [1999]: Kreis, Kreissymbolik, Lexikon des Mittelalters 5. (Lexma Verlag, München), col. 1483 – 1485

Decker, Wolfgang [1997]: Diskuswurf. Der Neue Pauly 3 (Metzler, Stuttgart), col. 696 – 697

Dobson, Geoffrey J. [1998]: Newton's problems with rigid body dynamics in the light of his treatment of the precession of the equinoxes. Archive for history of exact sciences 53, p. 125 – 145

Dugas, René [1988]: A history of mechanics. (Dover, New York, orig. 1955)

Duhamel, Jean Marie Constant [1863]: Course de mécanique. vol. 2 (Mallet-Bachelier, Paris)

Euler, Leonard [1775]: Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi. Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 20, p. 29 – 33, 208 – 238, repr. in: Euler, L., Opera omnia II 9 (Orel Füssli, Basel), p. 99 – 125

Foucault, Léon [1851]: Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Academie des Sciences 32, p. 135 – 138

Foucault, Léon [1852]: Sur les phénomènmes d'orientation des corps tournants entrainés par un axe fixe à la surface de la Terre – Noveaux signes sensibles du mouvement diurne. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Academie des Sciences 35, repr. in: Foucault, L., Notices de les travaux de M. L. Foucault (Mallet-Bachelier, Paris, 1862), p. 29 – 32

Français, Jacques Frédéric [1813]: Mémoire sur le mouvement de rotation d'un corp solide libre autour son centre de masse. (Courcier, Paris)

Gerlach, Walther; Stern, Otto [1921]: Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms. Zeitschrift für Physik 8, p. 110 – 111

Gerlach, Walther; Stern, Otto [1922]: Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld. Zeitschrift für Physik 9, p. 349 – 352

Grattan-Guinness, Ivor [1990]: Convolutions in French mathematics. 1800 – 1840 (Birkhäuser, Basel u. a.)

Hamilton, William Rowan [1845]: Additional applications of the theory of algebraic quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy 4 (1847), p. 38 – 56

Hamilton, William Rowan [1848]: On quaternions and the rotations of a solid body. Proceedings of the Royal Irish Academy 3 (1850), p. LI – LX

Harman, Peter M. [1982]: Energy, force and matter. (Cambridge University Press, Cambridge)

Harman, Peter M. [1998]: The natural philosophy of James Clerk Maxwell. (Cambridge University Press, Cambridge)

Hayward, Robert Baldwin [1856]: On a direct method of estimating velocities, accellerations, and all similar quantities with respect to axes moveable in any manner in space, with applications. In: Transactions of the Cambridge Philosophical Society 10 (1864), p. 1 – 20

Helmholtz, Hermann von [1858]: Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Journal für die reine und angewandte Mathematik 55, p. 25 – 55, repr. In: Hermann, H., Zwei hydrodynamische Abhandlungen (Engelmann, Leipzig) p. 3 – 37

Hurschmann, Rolf [1999]: Kreisel. In: Der Neue Pauly 6 (Metzler, Stuttgart), col. 824

Hutchinson, Keith [1981]: W. J. M. Rankine and the rise of thermodynamics. The British journal for the history of science 14, p. 1 – 26

Jammer, Max [1966]: The conceptual development of quantum mechanics. (McGraw-Hill, New York et al.)

Kepler, Johannes [1628]: Epitome astronomiae copernicanae [1628]. In: Kepler, J., Opera omnia. vol. 6 (Heyder & Zimmer, Frankfurt and Erlangen, 1866), p. 113 – 530

Klein, Felix; Sommerfeld, Arnold [1897, 1898, 1903, 1910]: Über die Theorie des Kreisels. vol. 1 (1897), 2 (1898), 3 (1903), 4 (1910) (Teubner, Stuttgart)

Krafft, Fritz [1999]: Mechanik. Der Neue Pauly 7 (Metzler, Stuttgart), col. 1084 – 1088

Kutschmann, Werner [1983]: Die newtonsche Kraft. Metamorphose eines wissenschaftlichen Begriffs. (Franz Steiner Verlag, Wiesbaden)

Lagrange, Joseph Louis [1853]: Mécanique analytique. 3rd edition (Veuve Desaibt, Paris)

Laplace, Pierre Simon [1799]: Mécanique céleste (1799). repr. In: Laplace, P. S., Oeuvres, vol 1 (Imprimerie Royale, Paris, 1843)

MacCullagh, James [1849]: On the rotation of a solid body round a fixed point being an account of the late professor MacCullagh's lectures on that subject.

compiled by the rev. Samuel Haughton, Transactions of the Royal Irish Academy 22, repr. in: MacCullagh, J., Collected works (Hodges, Figgies & Co, Dublin and Longmans, Green &Co., London, 1880), p. 329 – 346

Mach, Ernst [1883]: Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt. (Brockhaus, Leipzig)

Maxwell, James Clerk [1855]: Experiments on colour as perceived by the eye with remarks on colour blindness. Transactions of the Royal Society of Edinburgh 21/2, repr. In: Maxwell, J. C., Scientific papers vol. 1 (Dover, New York, 1965), p. 126 – 154

Maxwell, James Clerk [1856]: On an instrument to illustrate Poinsot's theory of rotation. Reports of the British association (1856), repr. In: Maxwell, J. C., Scientific papers, vol. 1 (Dover, New York, 1965), p. 246 – 247

Maxwell, James Clerk [1857]: On a dynamical top, for exhibiting the phenomena of the motion of a body of invariable form about a fixed point, with some suggestions as to the Earth's motion. Transactions of the Royal Society of Edinburgh 21/4, repr. In: Maxwell, J. C., Scientific papers, vol. 1 (Dover, New York, 1965), p. 248 – 263

Moyer, Don F. [1973]: MacCullagh, James. In: Dictionary of scientific biography 8 (Scribner, New York), p. 291 – 295

Parkinson, E. M. [1975]: Rankine, William John Macquorn. In: Dictionary of scientific biography 11 (Scribner, New York), p. 291 – 295

Poinsot, Louis [1803]: Élémens de statique. (Bachelier, Paris)

Poinsot, Louis [1806]: Mémoire sur la composition des moments et des aires. Journal de l'École Polytechnique 6, cahiers 13, p. 182 – 205, repr. In: Poinsot, L., Élémens de statique suivis de deux mémoires (Bachelier, Paris, 1830)

Poinsot, Louis [1827]: Mémoire sur la composition des momens in mécanique, Bulletin universel des sciences. repr. In: Poinsot, L., Élémens de statique suivis de deux mémoires (Bachelier, Paris, 1830)

Poinsot, Louis [1834a]: Théorie nouvelle de la rotation des corps. (Bachelier, Paris)

Poinsot, Louis [1834b]: Outlines of a new theory of rotatory motion. (Pitt Press, Cambridge)

Poinsot, Louis [1851a]: Remarques de M. Poinsot sur l'ingénieuse expérience imaginée par M. Léon Foucault pour rendre sensible le mouvement de rotation de la terre. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Academie des Sciences 32, p. 206 – 207

Poinsot, Louis [1851b]: Théorie nouvelle de la rotation des corps. Second édition (Bachelier, Paris)

Poinsot, Louis [1852]: Théorie nouvelle de la rotation des corps. Second édition (Bachelier, Paris)

Pratt, John Henry [1836]: The mathematical principles of mechanical philosophy. (J. & J. J. Deighton, Cambridge)

Rankine, William John Macquorn [1851a]: On the centrifugal theory of elasticity, as applied to gases and vapours. Philosophical Magazine Dec. 1851, repr. In: Rankine, W. J. M., Miscellaneous scientific papers (Griffith &Co, London, 1881), p. 16 – 48

Rankine, William John Macquorn [1851b]: On the centrifugal theory of elasticity and its connection with the theory of heat. Transactions of the Royal Society of Edinburgh 20/3 (Dec. 1851), repr. In: Rankine, W. J. M., Miscellaneous scientific papers (Griffin & Co, London, 1881), p. 49 – 101

Rankine, William John Macquorn [1858]: A manual of applied mechanics. (Griffin & Co, London and Glasgow), 4th edition, 1868

Scheibler, Ingeborg [1999]: Keramikherstellung. In: Der Neue Pauly 6 (Metzler, Stuttgart), col. 431 – 438

Silliman, Robert H. [1963]: Smoke rings and nineteenth century atomism. Isis 54, p. 461 – 474

Smith, Crosbie; Wise, M. Norton [1989]: Energy and empire. A biographical study of Lord Kelvin. (Cambridge University Press, Cambridge)

Smith, Crosbie [1998]: The science of energy. A cultural history of energy physics in Victorian Britain. (Chicago University Press, Chicago)

Sommerfeld, Arnold [1916]: Zur Quantentheorie der Spektrallinien. Annalen der Physik, vol. 356, issue 17, p. 1 – 94 and issue 18, p. 125 – 167

Sommerfeld, Arnold [1919]: Atombau und Spektrallinien. (Vieweg & Sohn, Braunschweig)

Stern, Otto [1921]: Ein Weg zur experimentellen Prüfung der Richtungsquantelung im Magnetfeld. Zeitschrift für Physik 7, p. 249 – 253

Taton, René [1975]: Poinsot, Louis. In: Dictionary of scientific biography 11. (Scribner, New York), p. 61 – 62

Thomson, Silvanus P. [1910]: The life of William Thomson, Baron Kelvin of Largs, in two volumes. (Macmillan, London)

Thomson, William [1857]: Dynamical illustration of the magnetic and the helicoidal rotatory effects of transparent bodies on polarized light. Proceedings of the Royal Society of London 1856 – 1857, p. 150 – 159

Thomson, William; Tait, Peter Guthrie [1867]: Treatise on natural philosophy. (Clarendon Press, Oxford)

Tobin, William [2003]: The life and science of Léon Foucault. The man who proved the Earth rotates. (Cambridge University Press, Cambridge)

Truesdell, Clifford [1964a]: Die Entwicklung des Drallsatzes. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 44, p. 149 – 158

Truesdell, Clifford [1964b]: Whence the law of momentum of momentum? In: Histoire de la pensée, vol. 1 (Hermann, Paris), p. 149 – 158, repr. In: Truesdell, C., Essay on the history of mechanics (Springer, Berlin, 1968), p. 239 – 271

Weinert, Friedel [1995]: Wrong theory – right experiment: the significance of the Stern-Gerlach experiment. Studies in the history and philosophy of modern physics 26, p. 75 – 86

Wigner, Eugene [1967]: Symmetries and reflections. (Indiana University Press, Bloomington and London)

Die Entstehung der Feldtheorie: ein ungewöhnlicher Fall der Wechselwirkung von Physik und Mathematik?

Friedrich Steinle

1 Mathematisierung physikalischer Gebiete

Die immer weiter greifende Mathematisierung der physikalischen Wissenschaften hatte ihren Ausgangspunkt in Bereichen, die schon in ihren Anfängen mit Messung und Mathematik zu tun hatten, insbesondere Astronomie und Optik. Auf die Ausweitung der dort gewonnenen Methoden in andere Bereiche, wie etwa Mechanik und Hydrostatik, zielt Jesper Lützen mit der These, dass Mathematik und Physik schon immer sehr eng verbunden waren (s. seinen Beitrag in diesem Band). Allerdings gerät dabei aus dem Blickfeld, dass es durchaus auch Bereiche gab, die ohne jeden Bezug zur Mathematik empirisch-experimentell weit entwickelt waren und in denen erst in einem späten Stadium ein Mathematisierungsprozess einsetzte – Beispiele sind Elektrizität, Magnetismus, Wärme oder Farben. Mein Interesse richtet sich auf diese Forschungsfelder und im Besonderen auf die Frage, wie in solchen Fällen Mathematisierungsprozesse abgelaufen sind.

Wenngleich noch kaum systematisch untersucht wurde, wie solche Prozesse der Mathematisierung typischerweise vonstatten gehen, zeichnet sich in vielen Fällen ein gemeinsames Muster ab: Ausgehend von spezifischen Hypothesen über verborgene Mechanismen setzte die mathematische Analyse auf der mikroskopischen Ebene an und verwendete Verfahren, die aus anderen Bereichen, insbesondere der Mechanik, bekannt waren, die aber möglicherweise für den speziellen Fall noch modifiziert und angepasst werden mussten. Vermutlich stellte gar die Zugänglichkeit der Mechanik zur Mathematisierung und die damit einhergehende Aussicht auf stringente Erklärung einen wichtigen Faktor für den Aufschwung des mechanistischen Weltbildes dar.

Ein solches Muster der Mathematisierung wird etwa bei der ersten Mathematisierung der Elektrizität durch Aepinus[1] sichtbar und lag insbesondere dem im Paris des frühen 19. Jhs. verfolgten Mathematisierungsprogramm zu Grunde, das bisweilen als Laplacesche Schule bezeichnet wird und u. a. in Wärmetheorie, Kapillarität, Elektrizität und Magnetismus große Erfolge erzielte[2]. Auch die erste Mathematisierung des Elektromagnetismus durch Biot und Savart und die durch Ampère und Weber begründete Linie der Elektrodynamik zeigen dieses Muster.

[1] (Aepinus 1759), englische Übersetzung in (Home & Aepinus 1979)
[2] (Fox 1974)

Wenngleich dieses Muster keinesfalls den universellen Weg zur Mathematisierung darstellte – Fouriers Ansatz zur Wärmetheorie, Gauss' Arbeiten zum Geomagnetismus und Neumanns Mathematisierung der Elektrodynamik exemplifizieren andere Ansätze – bezeichnet es doch einen vom 17. bis 19. Jh. besonders prominenten und erfolgreichen Ansatz.

Zur Konturierung gegenüber dem Folgenden seien drei wichtige Charakteristika dieses Ansatzes hervorgehoben. Zum einen waren die verwendeten *mathematischen Verfahren* typischerweise solche, die aus anderen Bereichen, insbesondere Mechanik und Astronomie, bekannt waren, die aber in der Regel für den speziellen Fall noch modifiziert und angepasst werden mussten. Zum anderen wurde das *Experiment* vor dem Hintergrund der mechanischen Spekulation entworfen, spezifiziert und ausgewertet und diente der Verfeinerung und Korrektur dieser Spekulation ebenso wie dem Erheben von Messwerten oder quantitativen Tendenzen. Zum dritten waren die *Akteure* typischerweise in der empirischen und mathematischen Seite gleichermaßen tätig (Newton, Aepinus, Laplace, Biot, Ampère, Weber) und vereinigten physikalische und mathematische Kompetenzen in einer Person.

Im Kontrast dazu nimmt sich die Herausbildung und Entwicklung der Feldtheorie deutlich verschieden aus. Einem allgemeinen Bild zu Folge wurde die experimentelle Seite und die Entwicklung qualitativer Begriffe von Faraday betrieben, wohingegen die eigentliche Mathematisierung davon getrennt und deutlich später durch Thomson und insbesondere Maxwell erfolgte. Schon dieses grobe Bild kontrastiert deutlich zu allen drei zuvor genannten Punkten: Es wurden *neue* mathematische Begriffe und Verfahren entwickelt (etwa mit der Vektoranalysis), das Experiment nahm gerade keinen Bezug auf mikrophysikalische Spekulation, sondern trug weitgehend explorativen Charakter, und experimentelle und mathematische Arbeiten waren personell und zeitlich deutlich getrennt: Genau so wenig, wie Faraday mathematische Verfahren entwickelte, finden sich bei Maxwell experimentell-empirische Arbeiten.

Allerdings wirft dieses Bild die grundsätzliche Frage auf, wie Thomson und Maxwell an Faradays rein qualitativen Begriffen überhaupt ansetzen konnten, wenn hierfür keine mathematischen Werkzeuge existierten. Überdies steht diese Sichtweise in einer deutlichen Spannung zu einigen Bemerkungen Maxwells über den Charakter der Faradayschen

Errungenschaften. Schon gleich zu Anfang seiner Beschäftigung mit Elektrizität und Magnetismus verwahrte er sich gegen die Auffassung, dass Faradays Überlegungen «einen unbestimmten und unmathematischen Charakter» trügen[3]. Noch schärfer formulierte er 1873, im Erscheinungsjahr seiner großen Zusammenfassung der Feldtheorie und im Rückblick auf Faraday: "The way in which Faraday made use of his idea of lines of force ... shows him to have been in reality a mathematician of a very high order"[4]. Wenngleich er das in einem Nachruf auf Faraday schrieb, handelte es sich hier um weit mehr als um eine rhetorische Ehrerbietung an einen großen Forscher, vielmehr stand die allgemeine Frage nach dem Verständnis von Mathematik zur Debatte.

Ein Ziel meines Aufsatzes liegt darin, diesem Maxwellschen Hinweis im Einzelnen nachzugehen und in Folge eine erweiterte Perspektive auf das Verhältnis von Mathematik und Experimentalphysik aufzuweisen. Es wird sich zeigen, dass Maxwell auf sehr handfeste und spezifische Punkte verwies, die mit dem allgemeinen Verständnis von Mathematik zu tun hatten und insbesondere auf ihr Verhältnis zur Physik ein erweiterndes Licht zu werfen geeignet sind. Bei meiner Untersuchung lasse ich mich durch Maxwells eigene Hinweise leiten, der explizit auf zwei Episoden bei Faraday Bezug nahm. Einerseits nannte er Faradays Arbeiten im Umfeld der Entdeckung und Konzeptualisierung des Induktionseffektes 1831/32, in deren Zusammenhang Faraday erstmals den Begriff der Kraftlinien (damals «magnetische Kurven» genannt) verwendete, andererseits verwies Maxwell auf die 26. und 28. Reihe der "Experimental Researches in Electricity" (1851), auf ganz späte Arbeiten Faradays also, in denen er den Begriff der Kraftlinie erstmals in seinen allgemeinen Aspekten diskutiert hatte. Die Untersuchung dieser beiden Episoden werde ich durch einen allgemeineren Blick auf die Rolle der Mathematik im frühen Elektromagnetismus ergänzen und schließlich einige allgemeinere Überlegungen zum Verhältnis von Mathematik und Physik anschließen.

[3] Maxwell in "On Faraday's lines of force", s. (Maxwell 1965), 157. S. dazu auch (Harman 1993), 148 – 149.

[4] (Maxwell 1873), 398

2 Faraday und die Einführung der «magnetischen Kurven»

Faraday war im August 1831 erstmals die Realisierung eines elektromagnetischen Induktionseffektes gelungen[5]. Experimentelles Kernstück war dabei ein massiver Ring aus Weicheisen, der mit zwei elektrisch getrennten Sätzen von Spulen umwickelt war (s. Abbildung 1). Eine der Spulen war an ein Galvanometer angeschlossen, die andere konnte mit einer Batterie verbunden werden. Der entscheidende Befund lag darin, dass beim Herstellen und Unterbrechen des Batteriekontaktes in der mit dem Galvanometer verbundenen Spule ein Stromstoß auftrat – ein Effekt, der unzweifelhaft als elektromagnetischer Induktionseffekt erkennbar war.

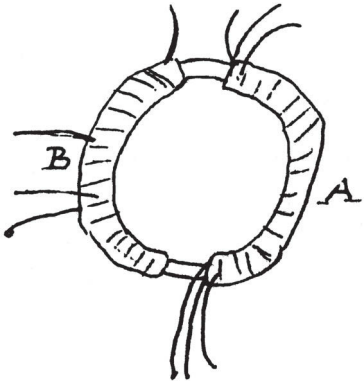


Abbildung 1

Es ist nicht völlig klar, auf welche Weise Faraday genau zu diesem experimentellen Arrangement gelangte – über die allgemeine Kenntnis von Elektromagneten hinaus haben sehr wahrscheinlich die Arbeiten von Joseph Henry zu besonders starken Elektromagneten eine zentrale Rolle für das experimentelle Design gespielt. Klar ist allerdings, dass Faraday sich der enormen Bedeutung seiner Entdeckung sofort bewusst war. Seit Ørsteds Bekanntmachung der Wirkung von Strömen auf Magneten war nach der Umkehrung, also einer Wirkung von Magneten

[5] Zur Situation Faradays in dieser Periode und zu seinen hervorragenden experimentellen Möglichkeiten s. die hervorragenden Einführungen zu (James 1991) und (James 1993).

auf Elektrizität oder Galvanismus vergeblich gesucht worden[6] – diese Suche bildete auch den Hintergrund von Faradays Experimenten – und der nun von Faraday erreichte Erfolg würde auf hohe Aufmerksamkeit stoßen und Faraday spektakuläre Bekanntheit verschaffen. Diesem hohen Anreiz zu rascher Bekanntgabe stand für Faraday allerdings der Umstand entgegen, dass der Befund mehr Fragen aufwarf als löste. Die geometrischen Verhältnisse in der Experimentalanordnung waren komplex, und magnetische und elektrische Effekte waren auf schwer durchschaubare Weise ineinander verwoben. Der verwirrendste Punkt schließlich lag im transienten Charakter des Induktionseffektes: Ein Stromstoß fand nur beim Herstellen und Trennen des Batteriekontaktes statt, nicht aber während des kontinuierlichen Verlaufens des induzierenden Stromes, der ja doch als Ursache des Effektes angesehen werden musste. «Under common circumstances», so rätselte Faraday, sollte demnach auch der Induktionseffekt einen dauerhaften und nicht den beobachteten transienten Charakter haben[7].

Diese Rätselhaftigkeit bewegte Faraday vermutlich dazu, von einer raschen Veröffentlichung abzusehen, seine Entdeckung für die nächsten Monate komplett für sich zu behalten[8] und sich in dieser Zeit (sofern ihm seine sonstigen Pflichten dazu Zeit ließen) der näheren Untersuchung des neuen Effektes zu widmen. Als er im Frühjahr 1832 in kurzer Folge zwei Aufsätze zu dem Thema veröffentlichte[9], hatte sich für ihn der Blick auf den Effekt nachhaltig gewandelt und so weitgehend geklärt, dass er ein allgemeines Gesetz für alle bis dahin gefundenen Induktionseffekte präsentieren konnte. Um diese Untersuchungsperiode – genauer gesagt um einen schmalen Ausschnitt daraus – soll es im folgenden gehen[10].

In seinem Bestreben, elektrische und magnetische Effekte auseinander zu halten, hatte Faraday sehr rasch zwischen unterschiedlichen Typen von Induktion unterschieden: einer «volta-elektrischen», in der Ströme durch Ströme induziert wurden, ohne dass Magnetismus dabei eine Rolle spielte, und einer «magneto-elektrischen», in der die Induktions-

[6] (Ross 1965).
[7] (Faraday 1832b), Par. 60.
[8] Abgesehen von einer kryptischen Notiz an einen Freund, s. (James 1991), 515
[9] (Faraday 1832b), (Faraday 1832a).
[10] Für eine umfassendere Untersuchung s. (Romo & Doncel 1994), (Steinle 1994) und (Steinle 1996).

wirkung ausschließlich durch Magneten erreicht wurde. Er untersuchte beide Typen getrennt, jeweils mit dem Ziel, ein Gesetz zu formulieren. Für die «volta-elektrische» Induktion gelang ihm das relativ rasch[11], die «magneto-elektrische» hingegen stellte sich als deutlich schwieriger dar. In einer von ihm häufig verfolgten ‹explorativen› Arbeitsweise variierte Faraday viele experimentelle Parameter wie etwa Material und Dicke der Drähte, Gestalt, Material und Stärke des Magneten, die räumlichen Verhältnisse und die zeitlichen Abläufe. Das Ziel der Variationen lag darin, den Effekt der unterschiedlichen Faktoren im einzelnen gesetzmäßig zu erfassen. Es wurde ihm rasch deutlich, dass die relative Bewegung zwischen Draft und Magnet – und insbesondere deren Richtung – einen entscheidenden Faktor darstellte. Die Versuche aber, diese Abhängigkeit im Einzelnen experimentell zu ermitteln und zu formulieren, stellten Faraday vor enorme Schwierigkeiten und blieben trotz mehrfacher Anläufe erfolglos.

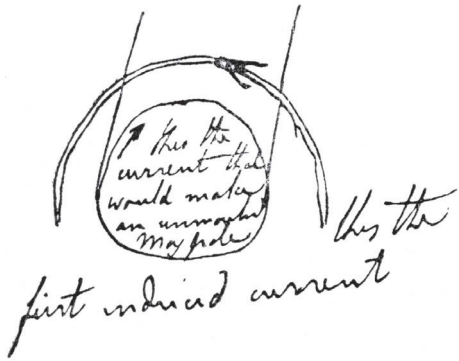


Abbildung 2

Dass die Bezugnahme auf bloße Distanzänderung zwischen Draht und Magnet es nicht erlaubte, experimentelle Resultate kohärent zu formulieren, war sehr rasch deutlich. Faradays Versuch, mit durch die Amperesche Theorie nahegelegten kreisförmigen Konstellationen zu arbeiten, schien zunächst zum Erfolg zu führen (s. Abbildung 2, Laborbucheintrag vom 8. Dez. 1831):[12] In solchen Konstellationen schien die Annäherung zwischen Draht und Magnetpol zu regelmäßigen, gesetzmäßig angebbaren Induktionseffekten zu führen. Dieses Gesetz hatte überdies den Charme einer Analogie zu dem Gesetz für die «volta-

[11] (Faraday 1832b), Par. 26
[12] (Martin 1932 – 6), I, 394

elektrische» Induktion. Allerdings musste Faraday bald feststellen, dass ihm beim Ermitteln der Stromrichtung des induzierten Stromes (eine bei weitem nicht triviale Aufgabe!) systematisch ein Fehler unterlaufen war und dass das Gesetz schon bei relativ einfachen Variationen der räumlichen Verhältnisse (Übergang zu geradlinigen Drahtstücken, s. Abbildung 3, Laborbucheinträge vom 9. Dez. 1831)[13] versagte.

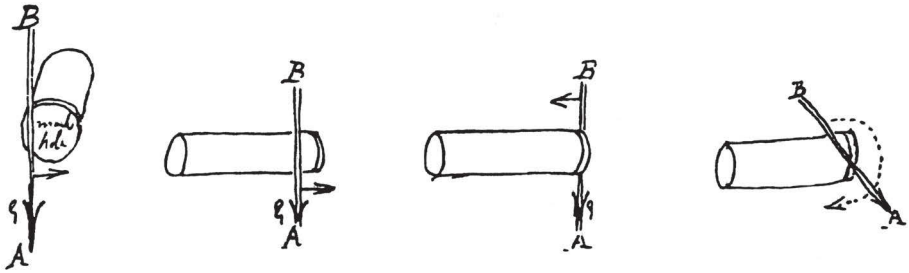


Abbildung 3

Die Schwierigkeit, die sich Faraday hier stellte, lag (modern gesprochen) im Auffinden eines angemessenen räumlichen Bezugssystems, auf welches sich die im Lauf der Arbeit immer zahlreicher werdenden experimentellen Resultate gesetzmäßig formulieren ließen. Die begrifflichen Mittel der Zeit konnten das offenbar nicht leisten. Es ist bemerkenswert, dass Faraday in dieser Lage einer fundamentalen Schwierigkeit schließlich den traditionellen Rahmen entschieden überschritt und den für die Zeit äußerst unorthodoxen Versuch unternahm, die Bewegungen in Bezug auf das System der «magnetischen Kurven» zu betrachten. Diese Kurven waren jedem, der mit Magnetismus zu tun hatte, wohl vertraut, sie wurden ab und an bildlich dargestellt[14] und waren Faraday auch dadurch präsent, dass wenige Monate zuvor in dem von ihm redigierten Hausjournal der Royal Institution ein Aufsatz zu den mathematischen Eigenschaften dieser Kurven erschienen war[15]. Allerdings war niemand auf den Gedanken gekommen, diesen Kurven irgendeine physikalische Relevanz zuzuschreiben – sie galten als das

[13] Ebd.

[14] S. etwa Encyclopedia Britannica, 6. ed. (1823), Artikel «Magnetism»

[15] (Roget 1831). Man kann davon ausgehen, dass der mathematische Gehalt dieses Aufsatzes Faraday verschlossen blieb.

Resultat der Überlagerung von Zentralkräften und insofern als nettes, aber physikalisch doch randständiges Epiphänomen. Der Übergang zu dem neuen Bezugssystem wird in Faradays Labortagebuch durch eine Darstellung dokumentiert, in der er ein früheres Experiment unter diesem neuen Gesichtspunkt wiederholte und in die experimentelle Skizze kleine Pfeile eintrug (s. Abbildung 4 und 5, Laborbucheinträge vom 8. u. 9. Dez. 1831).[16] Deutlich wird daran auch, dass er von Anfang an den «magnetischen Kurven» einen ‹Durchlaufsinn› zuschrieb.

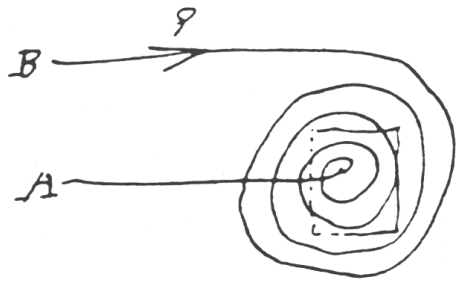


Abbildung 4

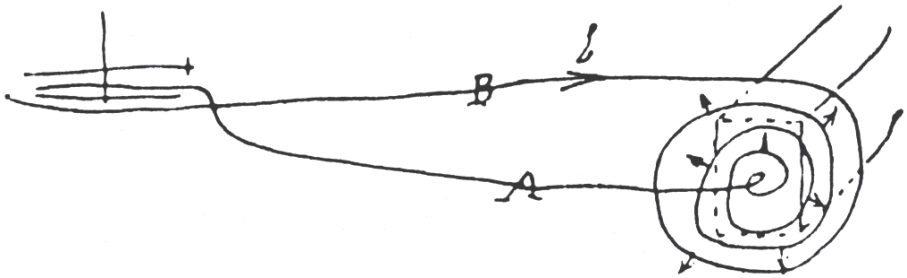


Abbildung 5

Das Unterfangen hatte Erfolg: Die Bezugnahme auf das System der «magnetischen Kurven» erlaubte Faraday, ein Induktionsgesetz zu formulieren, das für einen weiten Bereich seiner bis dato durchgeführten «magneto-elektrischen» Experimente gültig war. Die verbale Formulierung des Gesetzes (114) stellte sich als aufwendig und umständlich dar, so dass Faraday sogleich auf eine bildliche Darstellung verwies, an der sich das Gesetz leichter formulieren ließ (s. Abbildung 6): In das System «magnetischer Kurven» um den Magneten *AB* war der

[16] (Martin 1932 – 6), I, 394.

Querschnitt eines Messers *PN* eingezeichnet. Das Gesetz besagte nun, dass immer dann (und nur dann), wenn dieses Messer (das als Ikone für den Induktionsdraht fungierte) sich so bewegte, dass die magnetischen Kurven «durchschnitten» wurden, ein Induktionseffekt stattfand, dessen Richtung sich aus Bewegungsrichtung, Drahtrichtung und Richtung der magnetischen Kurven eindeutig bestimmte.

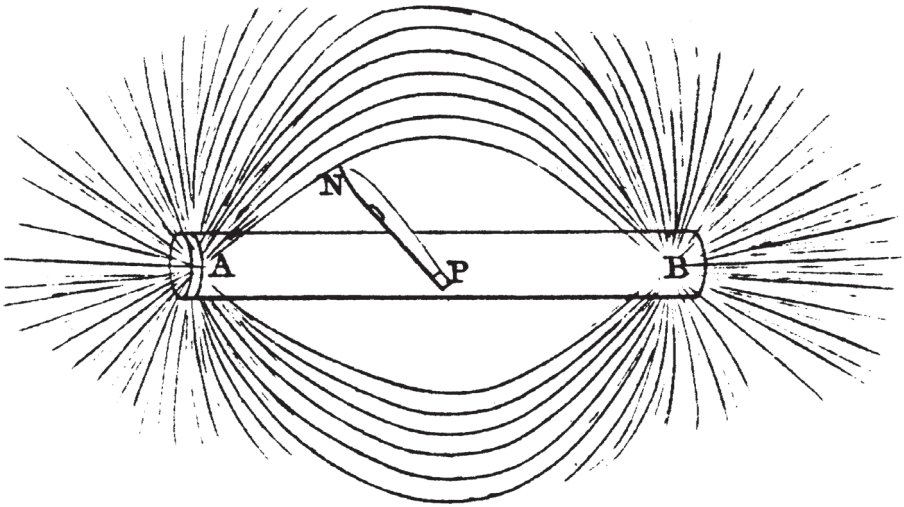


Abbildung 6

Faraday hatte damit genau das erreicht, worum es ihm gegangen war: die gesetzmäßige Formulierung der «magneto-elektrischen» Phänomene. Er war nun auch bereit, seine Befunde zu veröffentlichen, und strukturierte seinen Aufsatz ganz entlang der grundsätzlichen Dichotomie zwischen volta-elektrischen und magneto-elektrischen Induktionseffekten. Diese unterschieden sich in Bezug auf die jeweiligen Gesetze nicht weniger als hinsichtlich der Phänomene selbst: Im Gesetz für die volta-elektrische Induktion war von «magnetischen Kurven» nicht die Rede, auch trat räumliche Bewegung nicht als Faktor auf. Um den transienten Charakter des Effektes verständlich zu machen, also mit den gewöhnlichen Vorstellungen von Kausalität zu vereinbaren, hatte Faraday für diesen Bereich eigens einen immanent «elektrotonischen Zustand» postuliert, dem er in der Veröffentlichung ein eigenes Kapitel widmete.

Noch während der Begutachtungs- und Redaktionsphase dieses Aufsatzes allerdings stieß Faraday – bei Untersuchung einer anderen Frage im Zusammenhang der Induktionseffekte – auf experimentelle Befunde, die diese strikte Trennung zwischen unterschiedlichen Induktionstypen durchkreuzten und bei deren Analyse ihm schrittweise klar wurde, dass bei einer doppelten Ausweitung des Konzeptes der magnetischen Kurven der Geltungsbereich des für magneto-elektrische Effekte formulierten Induktionsgesetzes erweitert werden konnte. Die erste Ausweitung besagte, dass auch um einen stromführenden Draht ringförmige magnetische Kurven angenommen werden könnten, die zweite brachte hinzu, dass man sich diese Kurven im Moment des Einschaltens des Stromes als vom Draht aus radialsymmetrisch in den Raum hinaus expandierend vorstellen könnte und entsprechend beim Ausschalten des Stromes umgekehrt auf den Draht hinzu kontrahierend. Konnte die erste Ausweitung noch durch Bilder mit Eisenfeilspänen plausibel gemacht werden, so ging die zweite weit über alles experimentell Erfahrbare hinaus und stellte eine hochgradig abstrakte, begriffliche Verallgemeinerung dar.

Erreichbar war damit allerdings eine dramatische Erweiterung des Induktionsgesetzes: Faraday konnte dieses Gesetz – mit dem Begriff des Durchschneidens magnetischer Kurven im Zentrum – ausnahmslos für alle Phänomene elektromagnetischer Induktion geltend machen[17]. Diese Erweiterung hatte nicht nur zur Folge, dass die Unterscheidung zwischen «volta-elektrischer» und «magneto-elektrischer» Induktion massiv an Bedeutung verlor, sondern dass insbesondere das Postulat des «elektrotonischen Zustandes» hinfällig und überflüssig wurde. Der transiente Charakter des Induktionseffektes war tief im Gesetz verankert und wurde durch die Expansion bzw. Kontraktion der magnetischen Kurven verständlich. Es ist für Faradays Vorgehen äußerst bezeichnend, dass diese Erweiterung des Gesetzes keinerlei Umformulierung erforderte: sie geschah einzig durch Ausweitung des Begriffes der «magnetischen Kurven» in der geschilderten Weise – eine Ausweitung, die ihrerseits durch das Bestreben einer möglichst breiten Geltung des Gesetzes getrieben war.

[17] Für eine detaillierte Analyse dieser Episode s. (Steinle 1996).

Seinen zum Zeitpunkt dieser Einsichten schon druckfertig gesetzten Aufsatz wollte und konnte Faraday allerdings nicht mehr grundsätzlich revidieren und umstrukturieren. So beschränkte er sich auf eine Fußnote im Kapitel zum elektrotonischen Zustand, die besagte, dass dieses Kapitel nun eigentlich überflüssig geworden sei, und verwies den Leser auf den nur wenige Wochen später veröffentlichten zweiten Aufsatz.[18]

Auf diese beiden Aufsätze, die auffällige Spuren ihres Entstehungsprozesses tragen, nahm Maxwell mit seinem eingangs genannten Hinweis auf die mathematische Natur von Faradays Arbeiten Bezug. Offenbar ging es ihm dabei um einen Begriff von Mathematik, in dem nicht Zahlen und Formeln im Zentrum standen. Denn Messung und Berechnung kam in diesen Arbeiten ja nicht vor, vielmehr ging es um das Formulieren gegenseitiger Lagebeziehungen und Bewegungen in einer Weise, die das Erfassen der experimentellen Befunde in einem allgemeinen Gesetz erlaubte. Dieser besondere Charakter lag nicht etwa daran, dass Faraday zahlenmäßige Erfassung und Präzisionsmessung prinzipiell abgelehnt hätte: Seine äußerst erfolgreichen Arbeiten zu den Gesetzen elektrochemischer Zersetzung (1832/33) und insbesondere zur «specific inductive capacity» (1837, wir würden von relativer Dielektrizitätskonstante sprechen), in der das empfindlichste Messinstrument der Zeit, die Coulombsche Torsionswaage zum Einsatz kam, machen deutlich, dass er dazu sehr wohl imstande war[19]. Im Fall der Induktion aber lag die Herausforderung gerade nicht in diesem Bereich, sondern im Bilden von Begriffen zur Erfassung der räumlichen Komplexität. Der letztliche Erfolg von Faradays Bemühungen lag wesentlich an seiner Einführung des höchst unorthodoxen Bezugssystems der «magnetischen Kurven»[20]. Die Art und Weise, in der das geschah, war von einer durchgehenden Stringenz und begrifflichen Schärfe getragen, zudem von einer entschiedenen Tendenz zur Verallgemeinerung und Abstraktion. Solche Charakteristika waren es wohl, auf die Maxwell mit seinem Hinweis auf den «mathematischen» Charakter von Faradays Arbeiten zielte.

[18] (Faraday 1832b), Fußnote zu Par. 60

[19] Vgl. die 4., 7. und 11. Reihe seiner «Experimental Researches».

[20] Wie ungewohnt diese neuen Begriffe waren, wird nicht zuletzt an der nahezu einhelligen Ablehnung der Fachwelt deutlich, auf die ich noch eingehen werde.

3 Elektromagnetismus und Geometrie: ein kurzer Abriss

Es ist sehr instruktiv und erlaubt eine bessere Situierung von Faradays neuem Ansatz, einen kurzen Blick auf die Entwicklung des Elektromagnetismus zu nehmen, die ja erst zehn Jahre zuvor begonnen hatte. Dass Richtungsbestimmungen für den Elektromagnetismus eine besondere Herausforderung darstellten, war von Anfang an erkennbar. Immerhin galt es drei Richtungen auszudrücken und untereinander in Beziehung zu setzen: die der Elektrizität, des Magnetismus, und der aus der Wirkung resultierenden Bewegung von Magnetpolen oder Draht. Damit stellte sich für jeden Forscher auf dem Feld die Herausforderung, diese Richtungen und ihre Relationen im Einzelnen zu bestimmen – und für beides standen nur unzureichende begriffliche Mittel zur Verfügung. Dieser Befund kann insofern nur rückblickend gemacht werden, als von fast keinem der Autoren das Problem in seiner Allgemeinheit formuliert wurde, von allen aber angesichts der in der jeweiligen Experimentalanordnung entstehenden Herausforderung spezifische Vorschläge gemacht wurden, die als (Teil-)Lösungen des allgemeinen Problems angesehen werden können. Dies sei anhand eines kurzen Blickes auf einige der Forscher verdeutlicht.

3.1 Ørsted

Schon bei der Begründung des Elektromagnetismus durch Ørsted 1820 war die Problematik erkennbar. In langen Passagen bemühte sich Ørsted um eine Artikulation der Richtungsverhältnisse zwischen Draht und Magnetnadel. Dabei wurde die resultierende Bewegung des Magnetpols stets mit Bezug auf die Himmelsrichtungen formuliert, was einer Verallgemeinerung der Befunde harte Grenzen auferlegte. Um zu benennen, dass die Wirkung des Drahtes von der Polarität der Batterie abhing, nahm Ørsted explizit auf ebenjene Bezug – den von anderen durchaus verwendeten Begriff des elektrischen Stromes, der diese Richtungsangabe weniger umständlich hätte leisten können, vermied er, weil er ihm zu stark an Spekulationen über die Vorgänge im Draht gebunden schien. Dementsprechend wurden die Experimentalbe-

schreibungen lang, aufwändig, mühsam zu verstehen und insbesondere kaum verallgemeinerbar, wie folgende Textpassage zeigt:

> «Wird der verbindende Draht *lothrecht* nahe bei dem Pole der Magnetnadel, ihm gegenüber gestellt, und das obere Ende des Drahtes erhält die Electricität von dem negativen Ende des galvanischen Apparates, so bewegt sich dieser Pol nach *Osten*; befindet sich dagegen der Draht nahe bei einem Punkt in der Nadel, der zwischen dem Pole und dem Mittelpunkte der Nadel liegt, so wird sie nach *Westen* getrieben. Erhält das obere Ende des Drahtes die Electricität von dem positiven Ende, so gehen die entgegengesetzten Erscheinungen vor.»[21]

Im letzten Abschnitt seines Aufsatzes allerdings machte Ørsted einen bemerkenswerten Vorschlag.

> «Daß der electrische Conflict nicht in dem leitenden Drahte eingeschlossen, sondern, wie gesagt, zugleich in dem umgebenden Raume ziemlich weithin verbreitet ist, ergiebt sich aus den angeführten Beobachtungen hinlänglich. Es läßt sich auch aus dem, was beobachtet worden schließen, daß dieser Conflict in Kreisen fortgehe; ...»[22]

Den hier genannten «elektrischen Konflikt» hatte er am Anfang seines Aufsatzes kurz als Platzhalter für den unbekannten Vorgang im Draht eingeführt, der so lange besteht, wie der Draht an die Batterie angeschlossen ist und auch als Ursache der elektromagnetischen Wirkung angesehen werden musste. Aus den experimentellen Resultaten schien ihm nun zu folgen (oder vorsichtiger gesprochen: Die experimentellen Resultate schienen ihm am besten unter der Annahme verstehbar), dass dieser Konflikt nicht nur im Draht, sondern auch im Außenraum vorliege, und dass seine Richtung – das ist der springende Punkt – nicht linear in Drahtrichtung angenommen werden müsse, sondern in Kreisen, die in zum Draht senkrechten Ebenen verlaufen. Er präzisierte diese Vorstellung sogleich dahingehend, dass man streng genommen nicht von Kreisen, sondern von Spiralen sprechen, also der Richtung auch eine Komponente in Drahtrichtung geben müsse. Zur Spezifizierung des Drehsinnes dieser Spiralen nahm er auf die in der Botanik eingebürgerte

[21] (Oersted 1820b), 301; Hervorhebungen im Original.
[22] Ebd. 303.

Unterscheidung zwischen rechts- und linksdrehenden («dextrorsum» bzw. «sinistrorsum») Bezug.

Zur Begründung des Vorschlages verwies Ørsted darauf, dass solch eine Vorstellung einen ansonsten rätselhaft erscheinenden experimentellen Befund unmittelbar verständlich machen könne: Die Bewegungsrichtung des Magnetpols drehte sich nämlich um, wenn der Draht bei ansonsten gleich bleibenden Abstandsverhältnissen statt oberhalb nun unterhalb des Drahtes gehalten werde. In der Tat stellte dieser Befund – und das war Ørsted bewusst – für das gesetzmäßige Erfassen der elektromagnetischen Wirkung eine der größten Herausforderungen dar, insbesondere im begrifflichen Rahmen von anziehenden und abstoßenden Kräften[23]. Wie die zahlreichen anderen von Ørsted geschilderten Experimente durch den «Spiral-Ansatz» besser erfasst werden könnten, überließ Ørsted seinen Lesern.

Ørsteds Vorschlag wurde allerdings meistenteils mit Ablehnung aufgenommen. Dazu mag neben der Ungewohntheit des Vorschlages auch stark der Umstand beigetragen haben, dass Ørsted den Begriff des elektrischen Konfliktes schon 1812 eingeführt hatte, damals allerdings gerade mit ausgeprägten Spekulationen über die Vorgänge im Draht, die überdies stark durch die im deutschsprachigen Raum vertretene «Naturphilosophie» inspiriert waren[24]. Um 1820 hatte sich vielerorten in Kreisen der Experimentalwissenschaft eine ablehnende Stimmung gegenüber dieser Naturphilosophie breit gemacht, die zur Ablehnung eines damit schon terminologisch im Zusammenhang stehenden Vorschlages beitrug. Dass der Begriff des «elektrischen Konfliktes» im Text von 1820 eine deutlich andere und viel spezifischere Gestalt hatte, wurde nicht wahrgenommen.

3.2 Ampère I: die Schwimmerregel

Einer der ersten, die sich intensiv mit dem durch Ørsted eröffneten Forschungsfeld befassten, war André-Marie Ampère, Mathematikprofessor an der Pariser Ecole Polytechnique, und bis dato weder für Interesse an

[23] Dass dies allerorten so gesehen wurde, wird an den Kommentaren Aragos zur französischen Übersetzung von Ørsteds Text deutlich, der genau diesen Befund durch Unterstreichung besonders hervorhob: (Oersted 1820a), 418.

[24] (Oersted 1812).

Elektrizität noch für experimentelles Arbeiten bekannt[25]. In einer ersten Arbeitsphase, über die wir erst seit kurzem Näheres wissen, stand für ihn, ähnlich wie bei Ørsted, die Suche nach Regularitäten und Gesetzen der elektromagnetischen Wirkung im Vordergrund. Als Resultat einer intensiven Phase explorativen Experimentierens gelang es ihm in der Tat, zwei «allgemeine Fakten» zu formulieren, die nichts anderes als genau solche Gesetze darstellen. Für das Problem der Richtung ist insbesondere das erste interessant:

> «*Ausrichtungseffekt*: Wenn ein Magnet und ein galvanischer Leiter aufeinander wirken, und dabei einer der beiden fest ist, der andere sich nur in einer zur kürzesten Abstandslinie zwischen Leiter und Magnetachse senkrechten Ebene drehen kann, dann wird sich der bewegliche derart zu bewegen suchen, dass die Richtungen des Leiters und der Magnetachse einen rechten Winkel bilden und dass der Pol des Magneten, der gewöhnlich nach Norden zeigt, sich zur Linken dessen befindet, was man gewöhnlich den *galvanischen Strom* nennt, . . . , und der entgegengesetzte Pol zur Rechten.»[26]

In der Formulierung des Gesetzes ist zum einen bemerkenswert, dass Ampère im Dienste der straffen Formulierung die Ørstedsche Zurückhaltung bezüglich des Begriffes des elektrischen Stromes aufgab, aber im nächsten Abschnitt ausdrücklich betonte, dass er den Strombegriff nur zur Vereinfachung der Richtungsangabe, nicht als Aussage über Vorgänge im Draht verstanden wissen wollte. Noch wesentlicher aber waren die von Ampère neu geschaffenen Begriffe «rechts bzw. links vom Strom», die im Gesetz eine zentrale Rolle spielten. Ampère erläuterte sie in Analogie zu den Begriffen der rechten und linken Seite eines Flusses:

> «Um die Bedeutung der Worte «rechts» und «links» vom galvanischen Strom zu präzisieren, muss man eine zur Definition von «rechts» und «links» eines Flusses analoge Vorstellung einführen. Ein Mensch sei in Richtung von den Füßen zum Kopf vom galvanischen Strom durchflossen und habe sein Gesicht der Magnetnadel

[25] Für eine Diskussion von Ampères möglichen Motiven s. (Blondel 1982) und (Steinle 2005).

[26] (Ampère 1820b), 197, meine Übersetzung.

mobile AB, dont le pôle austral A regarde le nord, et le pôle boréal B, le sud. (On est convenu d'appeler *pôle boréal* celui des deux pôles d'un aimant qui, saturé de fluide boréal, est attiré par le pôle sud ou pôle austral de la terre, et se dirige vers le sud; et de même, *pôle austral*, celui qui se dirige vers le nord de la terre.) La déviation aura lieu, ainsi que le montre la figure, du nord vers l'ouest, et du sud vers l'est. Si le fil est en bas, la déviation se fera en sens contraire (*fig.* 381).

Pour faciliter l'énoncé de ces résultats, Ampère eut l'idée étrange, mais singulièrement ingénieuse, de personnifier, pour ainsi dire, le courant.

On suppose que le courant traverse un observateur, en entrant par les pieds et en sortant par la tête; ou bien que l'observateur descend au fil du courant. Puis, identifiant

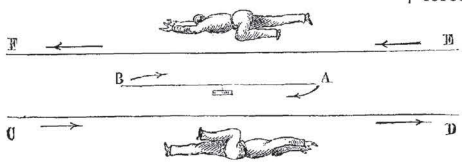


Fig. 382. — Courant électrique personnifié.

ce courant avec l'observateur lui-même, on dit que le courant a une face, un dos, une droite et une gauche; c'est la face, le dos, la droite ou la gauche de l'observateur imaginaire. Il suffit alors de se figurer l'observateur, comme le représente la figure 382, et de le tourner de manière qu'il regarde toujours l'aiguille aimantée AB, pour comprendre tous les phénomènes de déviation dans un énoncé très-simple : *le pôle austral* (pôle nord) *de l'aiguille se dirige toujours vers la gauche du courant.*

Ce singulier énoncé d'Ampère s'accorde avec l'expérience, que le fil soit vertical ou horizontal, qu'il soit au-dessus ou au-dessous de l'aiguille. Il contient en germe la théorie de l'électro-magnétisme, telle qu'elle a été développée par Ampère. Il fournit enfin le moyen de reconnaître immédiatement l'existence et la direction d'un courant galvanique par la déviation qu'il imprime à l'aiguille d'un galvanomètre. En outre, la grandeur de cette déviation mesure l'intensité du courant.

Ces propriétés de déviation des courants doivent, au premier abord, paraître bien singulières. Tout le monde sait qu'un levier qui peut tourner autour d'un pivot fixe, ne se déplacerait pas si on le tirait dans le sens de sa longueur; pour le faire marcher, il faut le pousser transversalement. Or c'est, en apparence du moins, le contraire de ce qui arrive pour les courants mis en présence de l'aiguille d'une boussole. Quand le fil conjonctif que traverse un courant, est placé suivant l'axe longitudinal de l'aiguille, la force déviatrice est à son maximum; quand le courant se présente à l'aiguille dans une direction perpendiculaire au méridien, l'effet est insensible, l'aiguille reste en repos.

« Telle est l'étrangeté de ces faits, dit Arago, que, pour les expliquer, divers physiciens eurent recours à un flux continu de matière électrique circulant autour du fil conjonctif, et produisant la déviation de l'aiguille par voie d'impulsion. Ce n'était rien moins, en petit, que les fameux tourbillons qu'avait imaginés Descartes, pour rendre compte du mouvement général des planètes autour du soleil. Ainsi, la découverte d'Œrsted semblait devoir faire reculer les théories physiques de plus de deux siècles (1). »

C'est Œrsted lui-même qui émit cette hypothèse étrange des tourbillons électriques circulant autour du fil conjonctif, en deux hélices, de directions contraires pour les deux fluides.

Cette théorie a été aussi vite abandonnée que conçue, parce qu'elle donne lieu à trop d'objections. Mais il faut ajouter que jusqu'à ce jour, elle n'a été remplacée par aucune autre qui explique la nature intime des cou-

(1) Arago, *Notice biographique sur Ampère*, vol. II des Œuvres.

Abbildung 7

> zugewandt, dann bezeichne die Seite seiner rechten Hand «rechts» vom Strom und die Seite seiner linken Hand entsprechend links.»[27]

Auf Grund dieser Erläuterung wurde das von Ampère formulierte Gesetz später häufig als «Ampèresche Schwimmerregel» bezeichnet und illustriert (s. Abbildung 7, im Besonderen fig. 382, aus Merveilles de la Science, 1867 – 1891, 715); Ampère selbst hatte eine bildliche Darstellung zwar zwischendurch verwendet, aber nicht veröffentlicht (s. Abbildung 8).[28] Ampère gelang es mit diesen Begriffen, die Bewegung zwischen Magnetpol und Draht nicht mehr auf die Himmelsrichtungen, sondern auf den Draht zu beziehen. Dass ihm das nur durch Einbeziehung des Beobachters gelang, illustriert markant die Größe der Herausforderung.

Abbildung 8

3.3 Ampère II: Elektrodynamik

Ampère gab nach wenigen Wochen sein exploratives Programm auf und wandte sich einem anderen Ziel zu. Hintergrund war seine Entdeckung einer Wechselwirkung zwischen stromführenden Drähten ohne Beteiligung von Magneten. In der damit eröffneten und von ihm so benannten «Elektrodynamik» setzte er sich sehr rasch das Ziel, ein mathematisch formuliertes Gesetz für die Kraftwirkung zwischen zwei infinitesimal gedachten Stromelementen aufzustellen, aus dem sich dann durch Integration die makroskopischen Wirkungen berechnen lassen sollten.

[27] Übersetzung aus der rekonstruierten Version des Vortragsmanuskriptes Ampères vom 25. September 1820, s. (Steinle 2005), 108 Abs. r11. In stark verkürzter Form veröffentlichte Ampère eine solche Beschreibung in (Ampère 1820a), S. 67

[28] Archiv der Académie des Scienes, Paris, Dossier Ampère.

Während er sich damit der Grundstruktur nach ganz im Rahmen des Laplaceschen Programms bewegte, lagen der entscheidende Unterschied und die Herausforderung in dem Umstand, dass die beiden Stromelemente mit einer Richtung versehen waren und damit die zwischen ihnen wirkende Kraft neben dem Abstand r als von drei Winkeln abhängig angenommen werden musste, mit denen ihre Richtungsverhältnisse vollständig bestimmt werden konnten: $F = f(r, \alpha, \beta, \gamma)$ (s. Abbildung 9). Auch in der Elektrodynamik stellte sich damit für Ampère das Problem der Richtungskonstellation, allerdings insofern in vereinfachter Form, als es sich nicht um drei, sondern nur um zwei Richtungen handelte. Ampère war zunächst bestrebt, die Richtungsabhängigkeit der Kraft direkt zu messen, dies erwies sich aber als technisch nicht durchführbar. Nur durch ein starkes, aber ungedecktes physikalisches Postulat zum Charakter der elektrodynamischen Kraft gelang es ihm dennoch, ein solches Grundgesetz zu formulieren – es lautete

$$F = gh/r^2(\sin\alpha \sin\beta \cos\gamma + n/m \cos\alpha \cos\beta).$$ [29]

Damit hatte er für diese vereinfachte Konstellation mit den Mitteln elementarer Trigonometrie einen analytischen Ausdruck aufgestellt. Für die allgemeinere Konstellation des Elektromagnetismus hingegen unternahmen weder er noch jemand anders einen solchen Versuch.

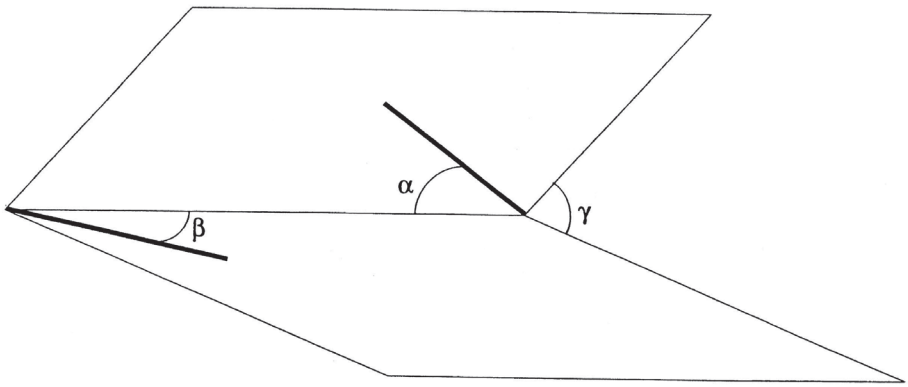


Abbildung 9

[29] S. dazu (Blondel 1982), 94.

3.4 Biot

Unter den ersten Forschern zum Elektromagnetismus stellte Jean Baptiste Biot, Professor am Collège de France, Verfechter der Laplaceschen Physik und heftigster Konkurrent Ampères, insofern eine Ausnahme dar, als er der Einzige war, der von Anfang an gezielt auf eigentliche Messung setzte. Wie alle anderen hatte er mit dem Problem der fehlenden räumlichen Koordinationsbegriffe zu tun, was zu sehr langen und unübersichtlichen Experimentalbeschreibungen führte. Anders als die Anderen war er aber bereit, im Dienste der Messung von der geometrischen Komplexität abzusehen und sich auf wenige hochsymmetrische Konstellationen zu beschränken. In seiner zusammen mit seinem Assistenten Felix Savart entworfenen und betriebenen Messanordnung (s. Abbildung 10, fig. 7) konnte der Magnet AB in einer horizontalen Ebene um seine vertikale Mittelachse Schwingbewegungen ausführen. Der Magnet befand sich dabei unter der Wirkung des im vertikal gespannten Draht CZ verlaufenden Stromes. Das Ziel der Messung lag darin, die Veränderung der Oszillationsfrequenz in Abhängigkeit vom Abstand zwischen Magnet und Draht zu bestimmen. Es handelte sich also dem Prinzip nach um ein klassisches Verfahren, und trotz ganz außerordentlicher experimenteller Schwierigkeiten gelang es Biot und Savart, diese Abhängigkeit zu bestimmen und daraus ein Kraftgesetz zu ermitteln. In einer zweiten Reihe von Experimenten verallgemeinerten die beiden die Anordnung dahingehend, dass die Stromrichtung um einen variablen Winkel gegenüber der Schwingungsebene des Magneten geneigt und damit dem Umstand Rechnung getragen wurde, dass der Strom mit einer räumlichen Richtung versehen werden musste. Das von Biot und Savart in einem mehrstufigen Rechenprozess[30] schließlich aus den Messdaten ermittelte Gesetz für die Kraft zwischen einem (punktförmigen) Element des Magneten und einem (richtungsbehafteten) Element des Stromes enthielt folgerichtig *einen* Winkel: $F \sim 1/r^2 \sin\omega$. Die starke Reduktion der räumlichen Komplexität der experimentellen Anordnung spiegelte sich in einem vergleichsweise einfach strukturierten Elementargesetz wider.

[30] Für eine genauere Analyse s. (Blondel 1982), 58 – 59.

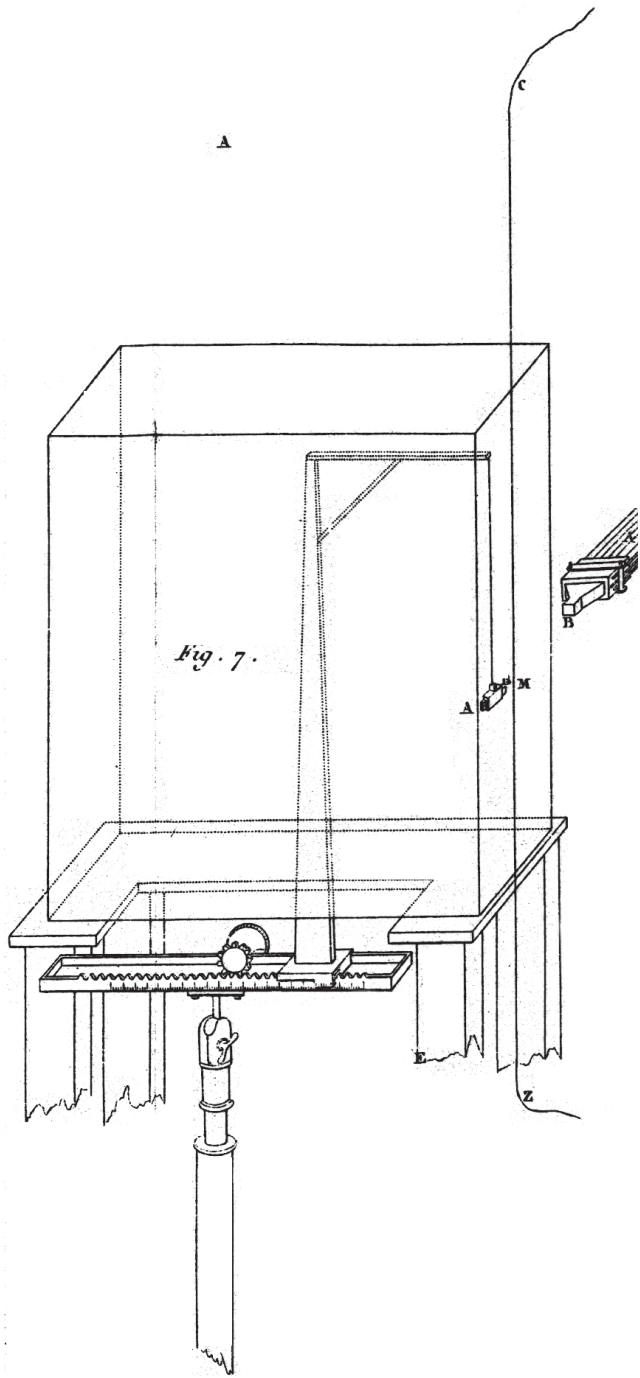


Abbildung 10

3.5 Davy

Auf der anderen Seite des Ärmelkanals waren die Präferenzen der Experimentalforschung deutlich anders gelagert: Weit weniger als in Paris standen hier Messung und Mathematisierung im Vordergrund, stattdessen konnte man sich mit breitem Experimentieren Anerkennung verschaffen. Dies wird auch im Elektromagnetismus sichtbar. Humphry Davy, brillianter Chemiker und Vortragender an der Royal Institution of London, war einer der Ersten, die sich mit dem neuen Forschungsfeld befassten. Die Frage der Richtungsverhältnisse stellte dabei einen Kernpunkt seiner Arbeiten dar und auf ihn geht auch eine einflussreiche Darstellungsform zurück. In einer Experimentalreihe hatte er untersucht, in welcher Position relativ zum Draht Eisennadeln am stärksten durch den Strom magnetisiert werden und welche Orientierung die entstehenden Magneten haben. Die Ergebnisse hatte er in einer der Experimentalanordnung sehr eng angelehnten bildlichen Darstellung präsentiert: Die Magnetnadeln wurden auf eine senkrecht zum Draht angebrachte Drahtscheibe in tangentialen Positionen aufgeklebt und die resultierende magnetische Orientierung durch Pfeile gekennzeichnet. Das Ergebnis wurde erst später durch seinen damaligen Laborassistenten Michael Faraday bildlich dargestellt (s. Abbildung 11, fig. 11, Tafel zu Faradays Historical Sketch), trug aber einen hoch suggestiven Charakter und verwies (ohne dass Davy das hervorhob) auf Ørsteds Vorschlag einer kreisförmigen Kräftekonstellation.[31]

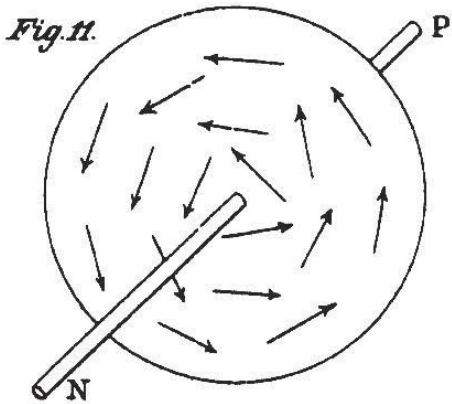


Abbildung 11

[31] Für eine detailliertere Untersuchung s. (Steinle 2005), 216 – 220.

3.6 Faraday I: der «Historical Sketch»

Faraday selbst machte sich im Sommer 1821 an das Erarbeiten eines Übersichtsartikels zu den bisherigen Arbeiten zum Elektromagnetismus. Anlass war die Bitte eines Freundes, der den Artikel in dem von ihm herausgegebenen wissenschaftlichen Journal, der *Annals of Philosophy* veröffentlichen wollte (der Umstand einer solchen Anfrage unterstreicht markant die Bedeutung, die dem gerade ein Jahr bestehenden Forschungsfeld zugemessen wurde). Faraday las alle ihm zugänglichen Artikel und vollzog die darin beschriebenen Experimente größtenteils nach. Darüber hinaus entwickelte er zahlreiche neue Experimente und führte sie durch. Der schließlich veröffentlichte Text ging weit über eine bloße Wiedergabe des bisherigen hinaus, indem er eigenständige Versuche der Systematisierung und Verallgemeinerung präsentierte.[32]

Dabei nahm wieder – und das ist bezeichnend – die Frage der Raumrichtungen und ihrer Relationen eine zentrale Stellung ein. Über die verbale und figürliche Wiedergabe bisheriger Versuche hinaus entwickelte Faraday eigene bildliche Darstellungsweisen. Insbesondere stellte er das Verhältnis von Stromrichtung und magnetischer Bewegung durch Schemata dar (Abbildung 12, fig. 2) und hielt die allgemeine Konstellation gar auf einem Quader aus Glas fest, auf dessen gegenüberliegenden Seiten die Richtungen von Magnetismus und galvanischer Wirkung eingeritzt waren (s. Abbildung 12, fig. 3). Ørsteds Versuche mit einem vertikal gehaltenen Draht, zusammen mit seinen eigenen, darüber hinausgehenden, stellte er in einer Aufsicht dar, in der die relative Bewegungstendenz von Draht und Nadel in den unterschiedlichen relativen Drahtpositionen verbal benannt waren.

In all diesen Darstellungen war die Richtung der magnetischen Wirkung stets durch Richtung der Nadel bezeichnet, die galvanische durch (mit Pfeil oder Batteriepolen ergänzte) Richtung des Drahtes, und die Bewegungsrichtung entweder durch Pfeile oder verbale Ausdrücke. An den Darstellungen wird das für Faraday charakteristische Verfahren deutlich, in Ermangelung geometrischer Raumordnungsbegriffe die Verallgemeinerung und Systematisierung durch visuelle Darstellungen

[32] Für eine detailliertere Untersuchung s. (Steinle 2005), 220 – 230.

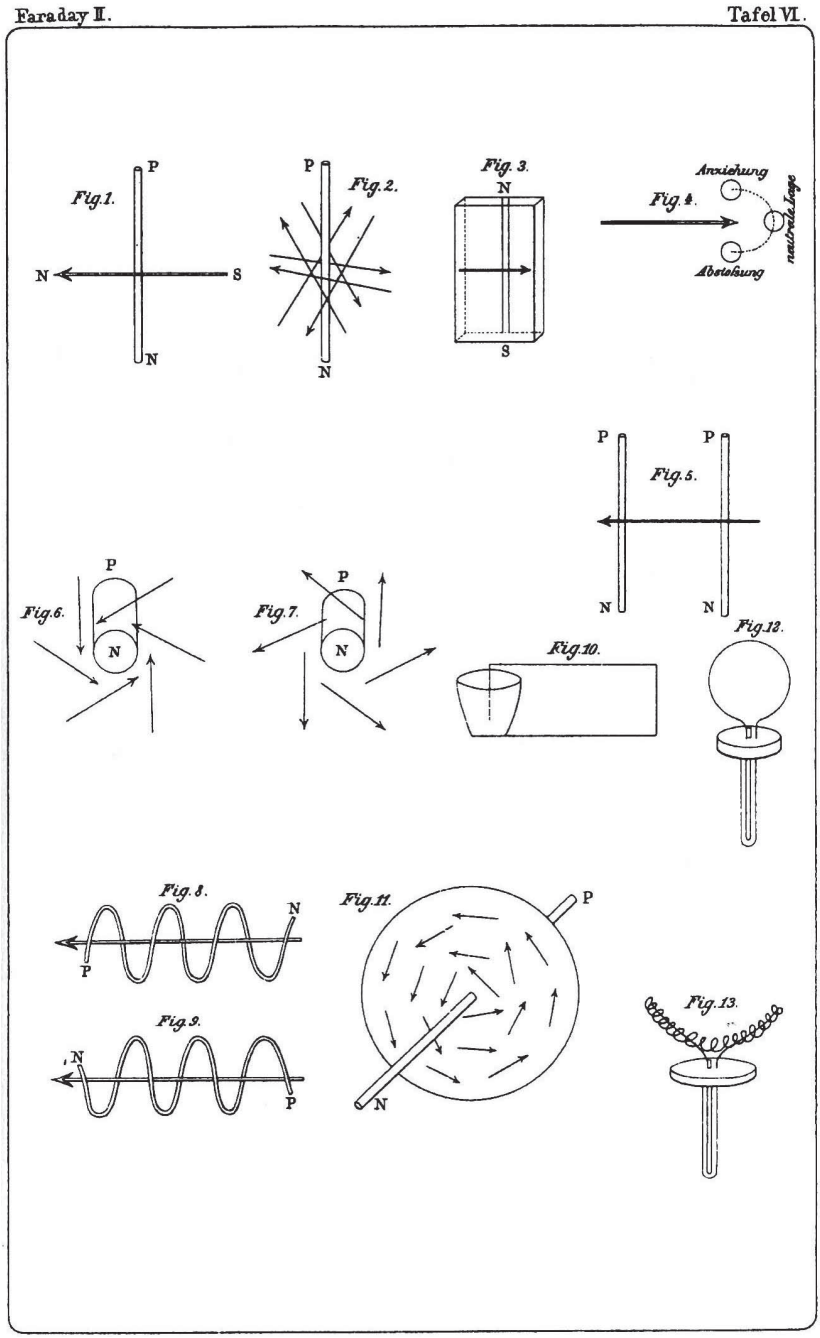


Abbildung 12

zu forcieren. Die Darstellungen waren zum einen Erinnerungshilfen[33], zum anderen stimulierten sie aber auch neue Begriffsbildungen und stellen damit originelle Beiträge zur Behandlung der Richtungsfrage dar. Im Gegensatz zu dem von Ampère zunächst unternommenen Versuch der Richtungsbegriffe, steht bei Faraday weniger das verbale Ausbuchstabieren als mehr die visuelle Darstellung im Vordergrund.

3.7 Faraday II: elektromagnetische Rotationen (1821/22)

Welche Eigendynamik dieses Verfahren haben konnte, wurde an seinen unmittelbar an den ‹Historical Sketch› anschließenden eigenen Untersuchungen deutlich.[34] Im Zentrum stand das Erarbeiten einer Regel auch für die unsymmetrischen Konstellationen mit einer vertikalen Nadel, das Problemfeld also, das bei Ørsted angerissen und bei Ampère weitergeführt worden war, das Ampère aber bei seinem Richtungswechsel unfertig hatte liegen lassen. Faraday experimentierte viel detaillierter als zuvor und bediente sich zur Darstellung der schon im Historical Sketch verwendeten Methode der ‹Aufsicht› im Wechsel mit einer perspektivischen ‹Seitensicht› (s. Abbildung 13, fig. 1, 2 und 3).[35] An einem entscheidenden Punkt ließ sich das in der Aufsicht entstehende, schon hoch verallgemeinerte Bild noch leicht dadurch weiter verallgemeinern, dass eine relative Bewegung von Draht und Magnetpol in Kreisen angenommen wurde: «these indicate motions in circles», vermerkte Faraday in seinem Laborbuch[36] und machte sich sogleich an den Versuch, diese zunächst aus solchen Verallgemeinerungsüberlegungen entwickelten Hypothesen auf ihre Realisierbarkeit zu prüfen.

Damit hatte er rasch Erfolg und konnte auf diese Weise dem schon seit Beginn des Elektromagnetismus wiederholt benannten Verweis auf Kreissymmetrien erstmals einen konkreten experimentellen Ausdruck verleihen: Die Kreise stellten nicht einen unerklärten «elektrischen

[33] Diesen Punkt hebt Gooding besonders klar hervor: (Gooding 1985), (Gooding 1990), ch. 2. Eine zusammenfassende Untersuchung von Faradays «visual reasoning» findet sich in (Gooding 2006).

[34] Für eine ausführlichere Diskussion der Episode s. (Gooding 1990), chs. 5 und 6, (Steinle 2005), Kap. 6.

[35] (Faraday 1821), plate 3.

[36] (Martin 1932 – 6), 1, 50

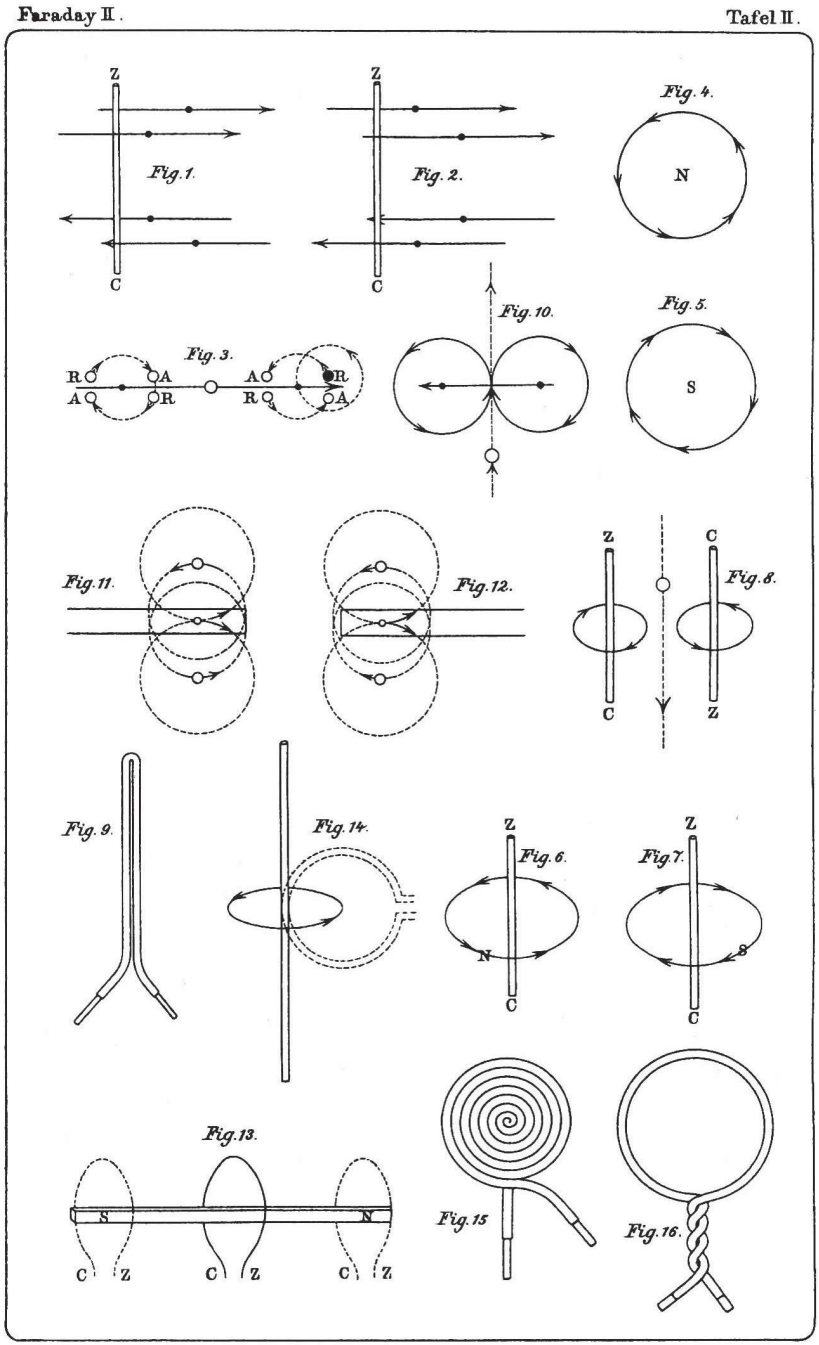


Abbildung 13

Konflikt» (Ørsted) oder einen ebenso unerklärten «electromagnetic current» (Wollaston) dar, sondern bezeichneten konkret den von der Nadel bzw. dem Draht beschriebenen Bewegungspfad (s. Abbildung 12, figs. 4 bis 8 und 10 bis 14). Das wesentliche Novum in diesen Darstellungen liegt darin, dass die Richtungen der Bewegung nicht nur durch lokale Pfeile, sondern durch volle Pfade und geschlossene Linien dargestellt wurden. Faraday konnte damit nicht nur erstmals eine elektromagnetische Rotationsbewegung realisieren, sondern diese Bewegung als das eigentliche Kernelement, den «elementaren Fall» aller elektromagnetischen Wirkungen aufweisen, auf das sich alle anderen Bewegungen «reduzieren» ließen (etwa die geradlinige Bewegung eines Pols zwischen zwei Drähten, Abbildung 13, fig. 8)[37]. Nachvollziehbarerweise legte er dem von ihm entwickelten Rotationsapparat (s. Abbildung 14)[38] hohe Bedeutung bei und drängte auf rasche Veröffentlichung.

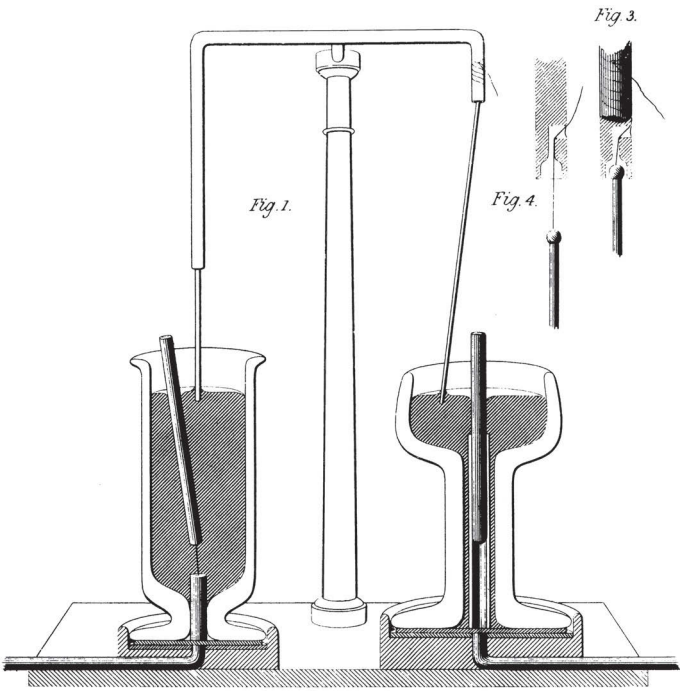


Abbildung 14

[37] Für eine Analyse dieses Verfahrens der «Reduktion» s. (Steinle 2005), 264 – 267 und 323 – 327.

[38] Aus (Faraday 1821).

3.8 Faraday III: elektromagnetische Induktion, 1831/32

Der nächste, entscheidende Schritt der Entwicklung findet sich in den oben diskutierten Untersuchungen Faradays zum elektromagnetischen Induktionseffekt. Vor dem Hintergrund des Rückblickes wird die Bedeutung von Faradays neuen Begriffen besonders deutlich. Während Faraday für die Richtung der Elektrizität nach wie vor die Richtung des Drahtes annahm und die Richtung der Bewegung durch lokale Pfeile angab, hatte er die Richtungsangabe des Magnetismus fundamental geändert: Statt wie bislang durch die Richtung der Nadel oder allgemeiner die Richtung der Verbindungslinie der Pole, gab er sie nun durch die Richtung der «magnetischen Kurven» an. Damit konnte er nicht nur all seine experimentellen Induktionseffekte in ein einziges Gesetz fassen, sondern hatte einen nahe liegenden und gänzlich neuen Ansatz zur Einbeziehung des terrestrischen Magnetismus: Der Begriff der magnetischen Kurve ließ sich hier in sinngemäßer Maßstabsvergrößerung direkt auf die an jedem Ort durch die Inklinationsnadel bezeichnete Richtung übertragen. Faraday unternahm sogleich dementsprechende Experimente, deren Erfolg ihm die Fruchtbarkeit dieser erweiterten Verwendung des Begriffes bestätigte.

Dieser weitgehende Erfolg mit der Einführung eines neuen Bezugssystems regte ihn überdies zu noch weiteren Verallgemeinerungen an, an denen auch deutlich wird, in welch hohem Grade er sich der allgemeinen Problemkonstellation bewusst geworden war. Was er diskutierte, war nämlich nichts weniger als die allgemeinste Form der Richtungsproblematik, zugleich schlug er einen höchst allgemeinen Lösungsansatz vor. Er skizzierte ein Schema von drei räumlich zueinander rechtwinkligen Richtungen (s. Abbildung 15, zum Laborbucheintrag 403) und unterstellte eine höchst allgemeine Regel für das Verhältnis von Elektrizität, Magnetismus und Bewegung:

> "The mutual relation of electricity, magnetism and motion may be represented by three lines at right angles to each other, ... Then if electricity be determined in one line and motion in another, magnetism will be developed in the third; or if electricity be determined in one line and magnetism in another, motion will occur in the third. Or if magnetism be determined first then motion will produce electricity or electricity motion. Or if motion be

the first point determined, magnetism will evolve electricity or electricity magnetism."[39]

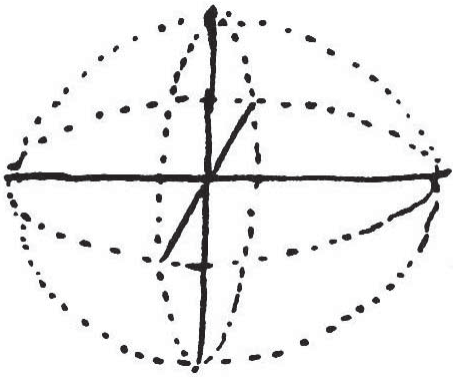


Abbildung 15

Es ist hervorzuheben, dass Faraday diese Regel keinesfalls nur für Induktionseffekte gültig ansah, sondern für alle elektromagnetischen Wirkungen, wie sie seit mehr als einem Jahrzehnt untersucht worden waren. Das Problem der Richtungsbestimmung, das in dieser ganzen Periode mehr oder weniger explizit die Forscher beschäftigt und herausgefordert hatte, fand sich hier erstmals in voller Allgemeinheit formuliert und zugleich gelöst. Faraday konnte nicht nur Ørsteds Regeln, Ampères Schwimmerregel, die Rotationseffekte sowie die Induktion einheitlich erfassen, sondern auch neue Effekte als erwartbar vorhersagen. Möglich geworden war diese Allgemeinheit durch die entscheidende Änderung in der Darstellung des Magnetismus: Die Einführung von «magnetischen Kurven» als Bezugssystem. Umgekehrt wird für Faraday dieser Verallgemeinerungserfolg ein starkes Indiz für die Tragfähigkeit des neuen Bezugssystems geboten haben. Dass er die Skizze nur in seinem Laborbuch durchdachte, nicht aber öffentlich präsentierte, deutet zugeich darauf hin, dass er sich angesichts der Weite des Anspruchs noch nicht sicher genug fühlte.

3.9 Zwischenergebnis

So skizzenhaft der Rundblick auf den frühen Elektromagnetismus auch bleiben muss (es würde sich anbieten, ihn etwa durch Einbeziehung

[39] Eintrag ins Labortagebuch vom 26. März 1832, No. 403: (Martin 1932 – 6), 1, 25.

von Arago oder Wollaston zu erweitern), so deutlich treten doch einige Befunde hervor.

- In allen Fällen stellte die Frage der Darstellung von räumlichen Richtungen und ihrer Verhältnisse eine Herausforderung dar. Eine Herausforderung überdies, zu deren Bewältigung sich die vorhandenen begrifflichen Mittel als unzulänglich erwiesen, sowohl von physikalischer als auch geometrisch-mathematischer Seite.

- In allen Fällen wurde deshalb der vorhandene Begriffsrahmen erweitert, durchaus in unterschiedlicher und für die einzelnen Akteure charakteristischer Weise. Die Entwicklung von geometrischen und physikalischen Begriffen ging dabei stets Hand in Hand.

- Höchst bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang schließlich der Umstand, dass die allgemeinste und abstrakteste Lösung des Problems von demjenigen vorgeschlagen wurde, der unter den beteiligten Forschern am wenigsten (nämlich gar keine!) Kompetenz in den formalen analytischen Methoden der Mathematik seiner Zeit besaß. Offenbar waren es nicht diese Methoden, die angesichts der Vielfalt neuer experimenteller Befunde gut ansetzen konnten und es waren auch nicht die etablierten Verfahren der Mathematisierung, die zur Verallgemeinerung führten. Gleichwohl war, das zeigt der Fall Faradays deutlich, präzise Abstraktion und Verallgemeinerung auf andere Weise wohl möglich. Maxwells späterer Hinweis gerade auf diese Arbeitsphase Faradays mag hier ihren Ansatzpunkt gefunden haben.

4 Der entwickelte Begriff der Kraftlinie

Im letzten Teil der Fallstudie möchte ich auf die von Maxwell genannten späten Reihen der "Experimental Researches" eingehen, die Faraday in den 1850er Jahren erarbeitet und veröffentlicht hatte. In den dazwischen liegenden zwei Jahrzehnten hatte er vielfältigste Arbeiten unternommen[40]. Für den Kraftlinienbegriff waren insbesondere seine Untersuchungen zur Elektrostatik (1835 – 1839) wichtig, bei denen er,

[40] Für eine Übersicht s. meine Zusammenstellung in (Steinle 2004).

wiederum in Ansehung eines sehr großen Bereiches neuer Experimente und Messungen, zum Schluss kam, dass sie statt mit dem Begriff der Zentralkraft besser durch die Vorstellung von «induction in curved lines» und den daran entwickelten Begriff der «Induktionslinien» behandelt werden sollten. Entscheidend wurde seine Entdeckung des magneto-optischen Effektes und sein Erfolg der Formulierung eines Gesetzes mit Hilfe des Begriffes der "lines of (magnetic) force". Wenig später entdeckte er überdies das dem üblichen magnetischen Eigenschaften widersprechende Verhalten von Wismut, benannte es als «diamagnetisch», und stellte fest, dass es sich nicht in den Begriffen von magnetischer Polarität, wohl aber in Begriffen von Kraftlinien gesetzmäßig formulieren ließ. In Ansehung dieser Befunde stellte er schließlich sehr allgemeine Überlegungen zum Magnetismus an und unternahm den Versuch, alle magnetischen Wirkungen mit Hilfe von magnetischen Kraftlinien und unterschiedlichen «Leitfähigkeiten» für solche Linien der im «magnetischen Feld» befindlichen Körper zu beschreiben[41]. Hier entstand ein allgemeines Bild von magnetischen Kraftlinien, die er auch im Einzelnen systematisch charakterisierte. Dieses Bild diente Maxwell als Ausgangspunkt für seine eigenen Arbeiten, und hierauf nahm er in dem eingangs genannten Zitat Bezug.

Es ist sehr aufschlussreich, die Eigenschaften zusammenzustellen, die Faraday hier den Kraftlinien beilegte:

- Kraftlinien haben in jedem Punkt eine wohlbestimmte Richtung und zeigen entgegengesetzte Eigenschaften in die beiden entgegengesetzten Durchlaufrichtungen (3072).[42]

- Die Dichte der Kraftlinien in einem Raumgebiet kann als Maß der magnetischen Intensität gelten. Damit lässt sich durch Kraftlinien die Natur, Bedingung, Richtung und relative Stärke magnetischer Kräfte präzise darstellen (3074).

- Die Zahl der Linien (und damit die magnetische Gesamtintensität) in einem beliebigen Querschnitt eines gegebenen Volumens bleibt

[41] Für diese Themen s. die Reihen 11, 19, 20, 21, 23, 25, 26 und 28 seiner "Experimental Researches".

[42] Die Nummern beziehen sich auf die von Faraday durchnummerierten Absätze in den «Experimental Researches.»

konstant, wenn man den Querschnitt so verschiebt, dass keine Linie den Rand durchschneidet. Anders gesagt, gilt für die Linien ein Erhaltungsprinzip: Sie erscheinen oder verschwinden nicht einfach. In Faradays Worten: "... the sum of power contained in any one section of a given portion of the lines is exactly equal to the sum of power in any other section of the same lines, however altered in form, or however convergent or divergent they may be in the second place" (3073). Und er machte sich anheischig, diesen zentralen Punkt durch Experimente geradezu «beweisen» zu können (3073, 3109).

- Unterschiedliche Materialien haben unterschiedliche Leitfähigkeiten (heute: Suszeptibilitäten μ, analog zu den spezifischen Dielektrizitätskonstanten ε): Paramagnetische Körper haben höhere, diamagnetische kleinere Suszeptibilitäten als der leere Raum. Zusammen mit dem Erhaltungssatz heißt das, dass in das Feld

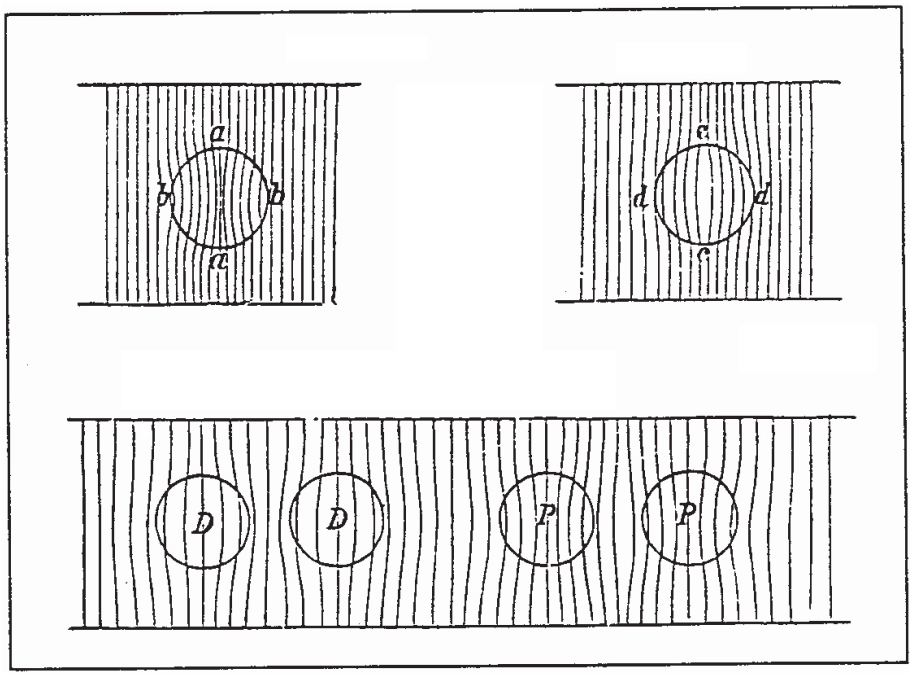


Abbildung 16

eingebrachte Körper die Gestalt des Feldes verändern, aber nicht die Zahl der Kraftlinien. Ein paramagnetischer Körper etwa (mit hoher Leitfähigkeit) zieht viele Linien in sich hinein, damit verringert sich die Zahl der Linien in der unmittelbaren Umgebung und das Feld wird dort schwächer (2797 – 2817, s. Abbildung 16).

- Alle magnetischen Bewegungen werden aus dem Prinzip verständlich, dass sich von Kraftlinien durchzogene Körper immer in Richtung des schwächeren Feldes bewegen. Welche Bewegung erfolgt, ist damit ein relativer, durch den Unterschied der Leitungsfähigkeiten bewirkter Effekt (2806 ff.).

- Der Begriff der Polarität verliert seine fundamentale Bedeutung. Wenngleich er beim Handhaben paramagnetischer Körper praktisch nützlich ist, wäre er im Prinzip verzichtbar und durch die Begriffe der Kraftlinie und der Leitfähigkeit ersetzbar (3155ff). Die traditionelle Polarität stellt sich als Effekt der Leitfähigkeiten, als «conduction polarity» dar (2818 – 2827).

- Erst zu diesem Zeitpunkt gab Faraday schließlich seine zwei Jahrzehnte lang beibehaltene agnostische Haltung gegenüber dem Realitätsstatus der Kraftlinien auf und argumentierte für die physikalische Realität dieser Linien.[43]

- In einem zur selben Zeit veröffentlichten Aufsatz ging Faraday noch weiter und stellte eine bildliche Darstellung des allgemeinen

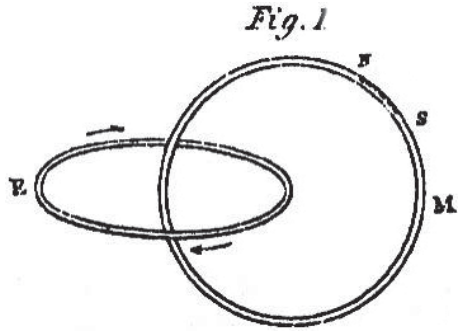


Abbildung 17

[43] (Faraday 1852b), reprint in (Faraday 1855), 407 – 437.

Verhältnisses zwischen magnetischen Kraftlinien und elektrischen Induktionslinien vor (s. Abbildung 17, fig. 1).[44]

- In demselben Aufsatz schließlich schrieb er magnetischen Kraftlinien die Tendenz zu, sich in der Länge zu verkürzen und sich in paralleler Position gegenseitig anzuziehen.[45]

Insgesamt wird deutlich, dass er damit die zentralen Elemente der Feldtheorie formuliert hatte. Es handelte sich um ein hoch elaboriertes und zugleich hoch abstraktes System von Begriffen und zugehörigen Gesetzen. Wiederum spielten Messung und Berechnung eine allenfalls untergeordnete Rolle. Statt eines analytischen Formelapparates gab es geometrische Konstellationen und dazu gehörige Sätze, allen voran eine Art Erhaltungssatz. Man sollte sich immer vor Augen halten, dass Faraday dieses hoch abstrakte Schema vor dem Hintergrund von Tausenden von Experimenten entwickelt hatte, auf die er mit Hilfe seines Labortagebuches beständig zurückgriff, und die er, so sein Anspruch, ausnahmslos mit diesem Schema erfassen, also gesetzmäßig erklären und einordnen konnte.

5 Thomson, Maxwell und das Verhältnis von Mathematik und Physik

Im letzten Abschnitt möchte ich mich der Art und Weise zuwenden, in der mathematisch versierte Forscher mit Faradays Ansatz umgingen. Dabei wird schließlich auch deutlich werden, in welcher Weise Maxwell diesen Ansatz als von eminent mathematischem Charakter bezeichnen konnte.

Auf dem europäischen Kontinent blieb Faradays begrifflicher Ansatz (ganz im Gegensatz zu seinen experimentellen Resultaten) unbeachtet oder wurde abgelehnt. Wenn Wilhelm Weber in seinen 1846 erschienenen «Elektrodynamischen Maassbestimmungen» Faraday als Entdecker des Induktionseffektes pries, zugleich aber darauf verwies, dass bis dato kein

[44] (Faraday 1852a), reprint in (Faraday 1855), 438 – 443. § 3265. Um den Anschluss an die "Experimental Researches" zu betonen, setzte Faraday hier die Absatznummerierung direkt fort.

[45] Ebd., § 3266 – 3267.

Induktions*gesetz* formuliert worden sei[46], war das ein bewusster Affront gegenüber einer als nicht diskussionswürdig erachteten Begrifflichkeit. Der Begriff der Kraftlinie taucht bei Weber nicht auf, das sollte in der kontinentalen Physik noch einige Jahrzehnte so bleiben. Auch in Großbritannien wurden die Begriffe zunächst kühl aufgenommen – der junge William Thomson, ganz in Begeisterung für die mathematische Physik, empfand beim Lesen von Faradays Ansatz zunächst «disgust»[47]. Bald aber änderte Thomson seine Auffassung: Nicht nur begann er, sich ernsthaft mit Faradays Begriffen auseinanderzusetzen, sondern er begeisterte auch seinen jüngeren Freund James Clerk Maxwell dafür.

Thomson nahm seinen Ausgangspunkt von der von ihm schon 1842 festgestellten formalen Äquivalenz zwischen der mathematischen Darstellung unterschiedlicher physikalischer Gebiete: Der Wärmeleitung und der Elektrostatik. Ganz in diesem Sinne zeigte er, dass die gekrümmten «Induktions»-linien, in denen Faraday die Elektrostatik behandelte, mathematisch durch Potentialfunktionen mit ihren Gradientenlinien und Äquipotentialflächen dargestellt werden konnten (und widerlegte damit u. a. Faradays Auffassung, wonach seine Elektrostatik inkompatibel mit der klassischen, auf Zentralkräfte rekurrierenden sei). Weitergehende physikalische Folgerungen zog er aus dieser Analogie aber nicht.

1853 griff er dann Faradays Gedanken der unterschiedlichen Leitfähigkeit für magnetische Kraftlinien auf, entwickelte auch dafür eine mathematische Darstellung und zeigte damit, dass die Darstellungen des Magnetismus durch Kraftlinien und Leitfähigkeiten einerseits und durch Fernkräfte andererseits mathematisch ineinander transformiert werden konnten. Physikalisch legte er sich nicht fest, sondern verwendete je nach Korrespondenzpartner unterschiedliche physikalische Vorstellungen[48].

Insbesondere im letzten Fall gewann Thomson überdies zunehmende Hochachtung vor Faradays Vorgehensweise, die ihm, ohne je die klassischen mathematischen Werkzeuge zu verwenden, doch auf mathematische Aussagen hinauszulaufen schien. Im Fall des o. g. Erhaltungssatzes schien Faraday ihm geradezu einen physikalischen Beweis für einen mathematischen Satz geliefert zu haben:

[46] (Weber 1846)
[47] Zitiert nach (Darrigol 2000), 116
[48] Für die ganze Entwicklung s. (Darrigol 2000), Ch. 3.6.

> "It is thus that Faraday arrives at some of the most important of the general theorems, which, from their nature, seemed destined never to be perceived except as mathematical truths."[49]

Maxwell ging noch deutlich weiter als Thomson: Er war offenbar von der inneren Struktur des Faradayschen Begriffssystems tief fasziniert. Seiner generellen Bevorzugung von geometrischen vor analytischen Methoden kam es ohnehin entgegen[50], und so ging es ihm weniger darum, ihr Verhältnis zu den traditionellen analytischen Methoden aufzuweisen, als mehr darum, ihre volle Reichhaltigkeit zu erfassen und auszuschöpfen. Er suchte eine mathematische Form, die zur inneren Struktur der Faradayschen Begriffe passte und erlauben würde, ihre Reichhaltigkeit auszudrücken. Schon sehr früh war ihm bewusst, dass Faradays Begriffe streng und höchst präzise formuliert waren und eben nicht den «unbestimmten und unmathematischen Charakter» besaßen, den manche darin sahen. Aber dieser mathematische Charakter hatte doch eine für die Zeit weitgehend unzugängliche Form. Hier eine zugänglichere Form zu entwickeln, war sein Ziel.

Sein berühmt gewordenes Verfahren lag darin, hydrodynamische Vorstellungen zu entwickeln, die strukturelle Analogien zu den Eigenschaften der Kraftlinien aufwiesen. In seiner ersten Arbeit («On Faraday's Lines of Force», 1855/56) verwendete er die Vorstellung von in der Längsrichtung durchströmten Röhren, in der zweiten («On physical Lines of Force», 1861/62), in der es auch um elektromagnetische Induktion ging, die Vorstellung von um die Längsachse rotierenden Wirbelfäden.[51] Schon die Inkompatibilität dieser beiden Vorstellungen macht deutlich, dass es ihm nicht um physikalische Realitätsbehauptungen ging, sondern um das Herausarbeiten von strukturellen Analogien, die aber doch die zentralen Strukturelemente umfassen. Und diese waren durch die obige Liste von präzis formulierten Eigenschaften der Kraftlinien gegeben. Mit dem Verfahren der hydrodynamischen Analogien konnte er schrittweise analytische Gleichungen entwickeln und schließlich zu einem ganzen System zusammenfügen, das später nach ihm benannt wurde. Weder in der mathematischen Form noch den

[49] (Thomson 1845), reprint in (Thomson 1872), cf. p. 30.

[50] S. etwa (Harman 1993)

[51] Die beiden Arbeiten sind in (Maxwell 1965) wieder abgedruckt: 155 – 229 bzw. 451 – 488

physikalischen Grundbegriffen hatte dieses Gleichungssystems mit der traditionellen Fernwirkungstheorie vieles gemein.

Maxwells Erfolg stellt auch dadurch eine der bemerkenswertesten Entwicklungen in der Physikgeschichte dar, da hier eine mathematisch formulierte Theorie entwickelt wurde, die außerordentlich erfolgreich ein großes Erscheinungsgebiet abdeckte, ohne dass der Forscher selbst (um nur wenig zu überspitzen) auch nur ein einziges Experiment dazu durchführen musste. Möglich war das nur dadurch, dass der durchgehende Bezug zur Empirie schon in den ihm als Ausgangspunkt dienenden Begriffen verankert war und dass diese überdies in all ihrer Abstraktheit höchste Strenge und Exaktheit besaßen.

In Zusammenhang der eingangs zitierten Bemerkung von 1873 griff Maxwell weiter aus.

> "It is true that no one can essentially cultivate any exact science without understanding the mathematics of that science. But we are not to suppose that the calculations and equations which mathematicians find so useful constitute the whole of mathematics. The calculus is but a part of mathematics. The geometry of position is an example of a mathematical science established without the aid of a single calculation."[52]

Maxwell protegierte hier einen weiteren Begriff von Mathematik als üblicherweise verwendet. Wenn er schon in den 1850er Jahren Faradays Ansatz einen mathematischen Charakter zugeschrieben hatte, spezifizierte er diesen nun durch Verweis auf die Strömung, die sich als «Geometrie der Lage» inzwischen deutliches Gehör verschafft hatte. In den Bemerkungen von 1855 dagegen ist kein Hinweis auf eine solche konkrete Zuordnung erkennbar. Es wäre im Einzelnen noch zu untersuchen, wann Maxwell diesen Zweig der Geometrie stärker zur Kenntnis nahm. Darstellungen, die konsequent auf alle metrischen Elemente verzichtet hatten, waren 1832 von Steiner und 1847 von G. v. Staudt veröffentlicht worden[53].

1873 jedenfalls verortete er Faradays Überlegungen per Analogie genau in diesem Bereich:

> "Now Faraday's lines of force occupy the same position in electromagnetic science that pencils of lines do in the geometry of

[52] (Maxwell 1873), 398.

[53] (Steiner 1832), (Staudt 1847), s. auch (Gray 2007), 238.

> position. They furnish a method of building up an exact mental image of the thing we are reasoning about."

Strahlenbüschel («pencils of lines») zählten bei v. Staudt zu den «Elementargebilden» und hatten eine ähnlich grundlegende Stellung für das ganze System wie die Kraftlinien in Faradays elektromagnetischem System. Noch stärker trat der grundlegende Aspekt für die Konstruktion bei Jakob Steiner hervor, der Strahlenbündel als den Ausgangspunkt für die synthetische Erzeugung von Kegelschnitten verwendete und sich gegen eine Algebraisierung wandte[54]. Besonders eine solche konstruktive Verwendung mag Maxwell bei seiner Analogie vor Augen gehabt haben.

Maxwell stellte hier eine ähnliche Behauptung auf wie Thomson, indem er die physikalischen Überlegungen Faradays zugleich als mathematische identifizierte, allerdings nicht wie Thomson als solche der dreidimensionalen Analysis, sondern der Geometrie der Lage. Maxwell fuhr dann in dem schon oben genannten Zitat fort:

> "The way in which Faraday made use of his idea of lines of force in co-ordinating the phenomena of magneto-electric induction* shows him to have been in reality a mathematician of a very high order – one from whom the mathematicians of the future may derive valuable and fertile methods, [...]"[55]

Mit der Einordnung Faradays als Mathematiker zielte er eben auf den weiteren Begriff von Mathematik, der auch so etwas maß- und zahlfreies, aber doch hochexaktes wie die Geometrie der Lage umfasste.

Maxwell erläuterte schließlich auch den letzten Halbsatz des Zitates, den Verweis darauf, dass Faraday für zukünftige Mathematiker ein methodisches Vorbild darstelle:

> "For the advance of the exact sciences depends upon the discovery and development of appropriate and exact ideas, by means of which we may form a mental representation of the facts, sufficiently general, on the hand, to stand for any particular case, and sufficiently exact, on the other, to warrant the deductions we may draw from them by the application of mathematical reasoning."[56]

[54] S. dazu (Kline 1990), 846 – 849 oder (Blåsjö 2009).
[55] (Maxwell 1873), 398
[56] (Maxwell 1873), 398/399.

Für die zu formenden Ideen forderte er zum einen Angemessenheit (vermutlich zu den empirischen Befunden) und Exaktheit (wahrscheinlich so etwas wie Wohlbestimmtheit und Trennschärfe), für die damit entwickelten Darstellungen («mental representations») des Forschungsfeldes nannte er als wesentliche Kriterien zum einen die hinreichende Allgemeinheit (vermutlich im Sinne breiter Anwendbarkeit) und zum anderen nochmals die hinreichende Exaktheit (vermutlich wiederum Wohlbestimmtheit und Trennschärfe). Nur durch beides zusammen sah er die Tragfähigkeit der Darstellung insofern garantiert, als aus ihr (mit mathematischen Methoden) brauchbare Schlüsse gezogen werden konnten. Diese Eigenschaften sah er als notwendig und hinreichend für diejenigen mathematischen Ansätze an, die auf die exakten Naturwissenschaften zielten. Maß und Zahl gehörten dazu nicht, jedenfalls nicht im ersten, grundlegenden Schritt. In Faradays Bild der Kraftlinien fand er alle diese Elemente verwirklicht, und das ist es, was er als eminent «mathematisch» charakterisierte. Neben der erkennbar avisierten Neubewertung Faradays ging es Maxwell auch um das Betonen einer weiteren Auffassung von Mathematik.

Vor dem Hintergrund dieser Maxwellschen Begriffe stellt sich seine eigene Leistung in der Mathematisierung des Elektromagnetismus in neuer Weise dar. Anstelle einer Mathematisierung einer zuvor durch Faraday vermeintlich nur qualitativ entwickelten Begrifflichkeit liegt seine (nicht geringere!) Leistung darin, für ein hochabstraktes, hochpräzises, und mathematisch in einer der Lagegeometrie verwandten Begrifflichkeit formuliertes System eine neue mathematische, raumgeometrisch inspirierte mathematische Begrifflichkeit entwickelt zu haben, die der üblichen Mathematik seiner Zeit leichter zugänglich war, aber zugleich den vollen Reichtum der Ursprungsbegrifflichkeit er- und enthielt.

6 Epilog

Maxwells nachdrücklicher Verweis auf den mathematischen Charakter von Faradays Begriffen und sein weit gefasster Mathematikbegriff kann für Überlegungen zur Mathematisierung physikalischer Felder anregend sein. In noch nicht mathematisierten Feldern der Experimentalforschung richtet sich das Forschungsinteresse typischerweise, sobald es über eine sammelnde «Experimentalgeschichte» hinaus geht, auf allgemeinere

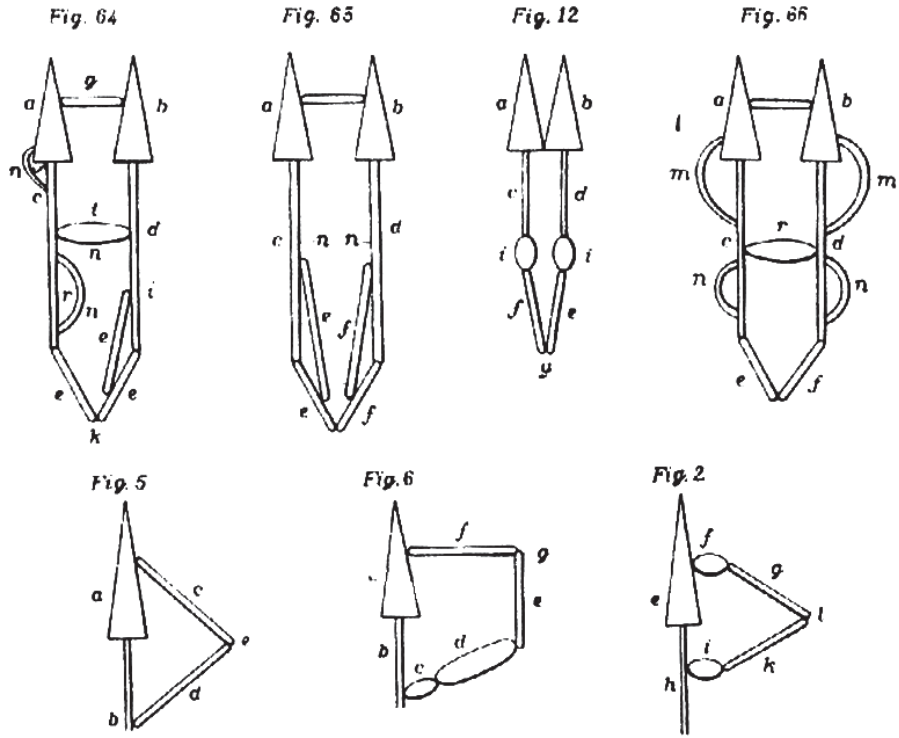


Abbildung 18

Strukturen innerhalb des Forschungsfeldes. Nicht selten werden diese in hinter der Erscheinungsebene liegenden, «verborgenen» Mechanismen, Prozessen und Entitäten gesucht, deren Strukturen leichter formal erfassbar scheinen. In anderen Fällen allerdings steht auch ein eher phänomenologischer Ansatz im Vordergrund, und hier wird sich die Suche nach Strukturen oft neuer Darstellungsmittel und begrifflicher Konstruktionen bedienen müssen. Zwei im Gegenstand stark unterschiedliche Beispiele (neben den zahlreichen weiteren, die der Fall Faraday noch bereitstellen könnte) wären Ritters Schematisierung des Galvanismus (s. Abbildung 18)[57] und Chevreuls geometrisches Schema der Komplementärfarben (s. Abbildung 19).[58] In beiden Fällen waren die Schemata sehr eng an der Empirie entwickelt worden und dienten

[57] Aus (Ritter 1798), für eine Untersuchung der Entwicklung zu zunehmender Abstraktion s. (Trumpler 1999).

[58] Aus (Chevreul 1839).

der Strukturierung und Systematisierung, und in beiden Fällen handelte es sich um abstrakte formale Strukturen, die nicht in analytischer Form daherkamen.

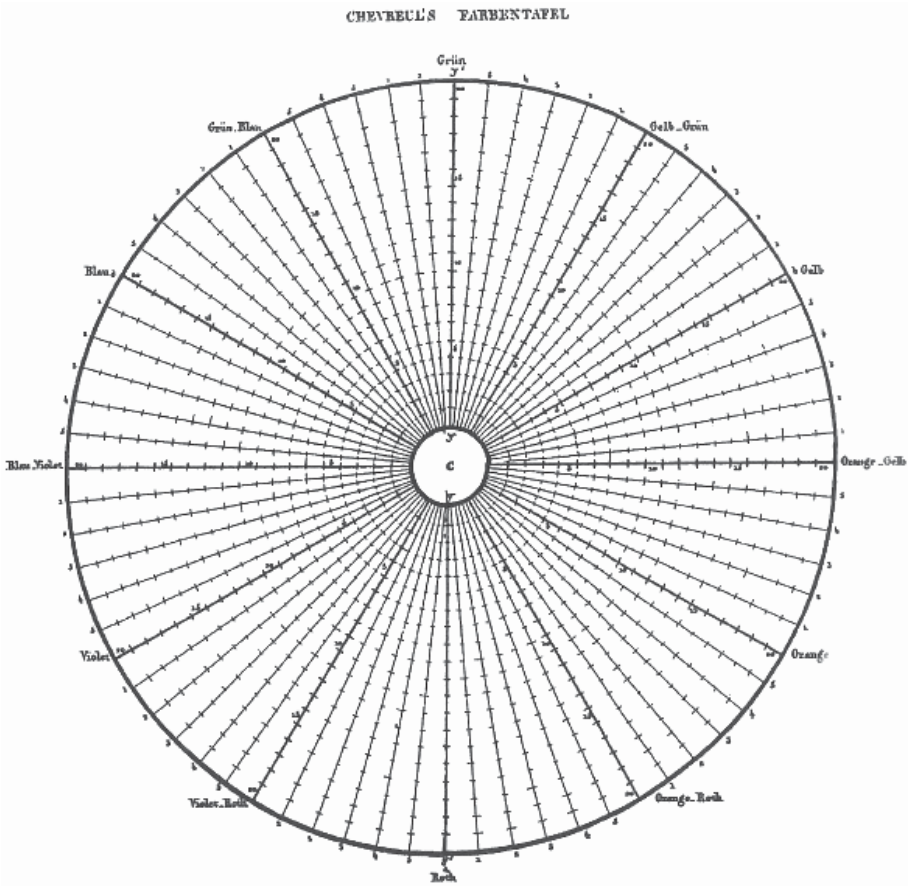


Abbildung 19

Wenn man mit Norbert Wiener das Wesentliche an der Mathematik darin sieht, Ordnung in der Unordnung zu entdecken[59] und dafür angemessene Werkzeuge zu entwickeln, wären solche Versuche schon per se als Versuche der Mathematisierung zu charakterisieren. Maxwell würde zusätzlich noch explizit (begriffliche) Exaktheit und empirische Allgemeinheit fordern. Deutlich wird aber in jedem Fall, dass sich zwischen

[59] Zitiert nach (Heims 1980), 68.

allgemein formalen und eigentlich mathematischen Strukturierungen keine scharfen Grenzen, sondern nur graduelle Übergänge benennen lassen. Für Untersuchungen zum Verhältnis von Experimentalphysik und Mathematisierung tut sich hier, angeregt durch Maxwell, eine fruchtbare Perspektive auf, die es erst noch auszuarbeiten gilt.

7 Literaturverzeichnis

Aepinus, Franz Ulrich Theodosius (1759): Tentamen theoriae electricitatis et magnetismi. Petropoli: Typ. Acad. Scientiarum.

Ampère, André-Marie (1820a): Mémoire présenté à l'Académie Royale des Sciences, le 2 octobre 1820, ou se trouve compris le résumé de ce qui avait été lu à la même Académie les 18 et 25 septembre 1820, sur les effets des courants électriques, Annales de Chimie et de Physique. 15 (septembre): 59 – 76.

Ampère, André-Marie (1820b): Suite du Mémoire sur l'Action mutuelle entre deux courants électriques, entre un courant électrique et un aimant ou le globe terrestre, et entre deux aimants, Annales de Chimie et de Physique 15 (octobre): 170 – 218.

Blåsjö, Viktor (2009): Jakob Steiner's Systematische Entwickelung: The Culmination of Classical Geometry. The Mathematical Intelligencer 31 (1): 21 – 9.

Blondel, Christine (1982): A.-M. Ampère et la création de l'électrodynamique (1820 – 1827). Mémoires de la section de sciences. Comités des travaux historiques et scientifiques. Ministère de l'éducation nationale: 10. Paris: Bibliothèque Nationale.

Chevreul, Michel Eugène (1839): De la loi de contraste simultané des couleurs et de l'assortiment des objets colorés. Paris: Pitois-Levrault.

Darrigol, Olivier (2000): Electrodynamics from Ampère to Einstein. Studies in History and Philosophy of Science. Oxford: Oxford University Press.

Faraday, Michael (1821): On some new electro-magnetical motions, and on the theory of magnetism. Quarterly Journal of Science 12: 74 – 96.

Faraday, Michael (1832a): Experimental Researches in Electricity. – Second Series. The Bakerian Lecture. §5. Terrestrial Magneto-electric Induction. §6. Force and Direction of Magneto-electric Induction generally. Philosophical Transactions 122: 163 – 94.

Faraday, Michael (1832b): Experimental Researches in Electricity. §1. On the Induction of Electric Currents. §2. On the Evolution of Electricity from Magnetism. §3. On a new Electrical Condition of Matter. §4. On Arago's Magnetic Phenomena. Philosophical Transactions 122: 125 – 62.

Faraday, Michael (1852a): On the Physical Character of the Lines of Magnetic Force. Philosophical Magazine, 4th ser., 3: 401 – 428.

Faraday, Michael (1852b): On the Physical Lines of Magnetic Force. Royal Institution Proceedings (June 11, 1852).

Faraday, Michael (1855): Experimental Researches in Electricity. Volume III. London: Taylor & Francis.

Fox, Robert (1974): The Rise and Fall of Laplacian Physics. Historical Studies in the Physical Sciences 4: 89 – 136.

Gooding, David C. (1985): In Nature's School': Faraday as an experimentalist. In: David C. Gooding & Frank A. J. L. James (Hg.): Faraday Rediscovered: Essays on the life and work of Michael Faraday. 1791 – 1867. Basingstoke: Macmillan [u. a.], 105 – 35.

Gooding, David C. (1990): Experiment and the making of meaning: Human agency in scientific observation and experiment. Dordrecht: Kluwer.

Gooding, David C. (2006): From Phenomenology to Field Theory: Faraday's Visual Reasoning. Perspectives on Science 14 (1): 40 – 65.

Gray, Jeremy J. (2007): Worlds out of nothing. A course in the history of geometry in the 19th century. Springer undergraduate mathematics series. London: Springer.

Harman, Peter M. (1993): Maxwell and Faraday. European Journal of Physics 14: 148 – 54.

Heims, Steve J. (1980): John von Neumann and Norbert Wiener: from mathematics to the technologies of life and death. Cambridge, MA: MIT Press.

Home, Roderick W. & Aepinus, Franz Ulrich Theodosius (1979): Aepinus's Essay on the theory of electricity and magnetism. Princeton: Princeton University Press.

James, Frank A. J. L., (Hg.) (1991): The Correspondence of Michael Faraday. Volume 1, 1811 – December 1831, Letters 1 – 524. London: Institution of Electrical Engineers.

James, Frank A. J. L. (Hg.) (1993): The Correspondence of Michael Faraday, Volume 2, 1832 – December 1840, Letters 525 – 1333. London: Institution of Electrical Engineers.

Kline, Morris (1990): Mathematical thought from ancient to modern times. New York [u. a.]: Oxford University Press.

Martin, Thomas, (Hg.) (1932 – 6): Faraday's Diary. Being the various philosophical notes of experimental investigation made by Michael Faraday, DCL, FRS, during the years 1820 – 1862 and bequeathed by him to the Royal Institution of Great Britain. London, G.Bell & Sons.

Maxwell, James Clerk (1873): Scientific Worthies I. – Faraday. Nature 8 (Sept. 18, 1873): 397 – 9.

Maxwell, James Clerk (1965): The scientific papers of James Clerk Maxwell. ed. by W. D. Niven. Two vol. bound as one. Unabridged and unaltered republ. of the work, London, 1890. New York: Dover Publ.

Oersted, Hans Christian (1812): Ansicht der chemischen Naturgesetze, durch die neueren Entdeckungen gewonnen. Berlin: Realschulbuchhandlung.

Oersted, Hans Christian (1820a): Experimenta circa effectum, etc. Expériences sur l'effet du conflict électrique sur l'aiguille aimantée. Par Mr. H. Chr. Oersted, Professeur de physique dans l'Université de Copenhague. Traduction. Annales de Chimie et de Physique 14 (août): 417 – 25.

Oersted, Hans Christian (1820b): Versuche über die Wirkung des elektrischen Conflicts auf die Magnetnadel. Annalen der Physik (Gilbert) 66 (11. Stück (November)): 295 – 304.

Ritter, Johann Wilhelm (1798): Beweis, dass ein beständiger Galvanismus den Lebensprocess in dem Thierreich begleite. Nebst neuen Versuchen und Bemerkungen über den Galvanismus. Weimar: Industrie-Comptoir.

Roget, Peter M. (1831): On the geometric properties of the magnetic curve, with an account of an instrument for its mechanical description. Journal of the Royal Institution of Great Britain 1 (February): 311 – 9.

Romo, J. & Doncel, Manuel. G. (1994): Faraday's Initial Mistake Concerning the Direction of Induced Currents, and the Manuscript of Series I of his Researches. Archive for History of Exact Sciences 47: 291 – 385.

Ross, Sydney (1965): The Search for Electromagnetic Induction 1820 – 1831, Notes and Records of the Royal Society of London 20: 184 – 219.

Staudt, Karl Georg Christian von (1847): Geometrie der Lage. Nürnberg: Korn.

Steiner, Jakob (1832): Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten voneinander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projectionsmethoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität, etc. Berlin: Fincke.

Steinle, Friedrich (1994): Experiment, Speculation and Law: Faraday's analysis of Arago's wheel. In: David Hull, Michael Forbes & Richard M. Burian (Hg.): PSA 1994. Proceedings of the 1994 Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association. East Lansing: Philosophy of Science Association vol. 1, 293 – 303.

Steinle, Friedrich (1996): Work, Finish, Publish? The formation of the second series of Faraday's 'Experimental Researches in Electricity'. Physis 33: 141 – 220.

Steinle, Friedrich (2004): Einleitung: Michael Faraday und seine 'Experimental Researches in Electricity' (Hg.): Experimental-Untersuchungen über Elektricität von Michael Faraday, in drei Bänden. Erster Band. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften 292, Frankfurt: Verlag Harri Deutsch. iv-xxxii.

Steinle, Friedrich (2005): Explorative Experimente. Ampère, Faraday und die Ursprünge der Elektrodynamik. Boethius 50. Stuttgart: Franz Steiner Verlag.

Thomson, William (1845): On the Mathematical Theory of Electricity in Equilibrium. Cambridge and Dublin Mathematical Journal 1: 75 – 95.

Thomson, William (1872): Reprint of papers on electrostatics and magnetism. London: Macmillan.

Trumpler, Maria (1999): From tabletops to triangles: increasing abstraction in the depiction of experiments in animal electricity from Galvani to Ritter. In: Marco Bresadola & Guiliano Pancaldi (Hg.): Luigi Galvani: International workshop – proceedings. Bologna: CIS: Dipartimento di Filosofia, Università de Bologna, 115 – 45.

Weber, Wilhelm (1846): Elektrodynamische Maassbestimmungen. Leipzig: Weidmann'sche Buchhandlung.

Vortragsprogramm

Übersicht über das Programm der Tagung "Mathematics meets physics – General and local aspects", Sächsische Akademie der Wissenschaften, Leipzig, 22. – 25. März 2010

Eröffnung | Introduction

Pirmin Stekeler-Weithofer (President of the Saxon Academy of Sciences): Welcome

Sektion 1: Allgemeine Entwicklungen | General developments

Jesper Lützen: Examples of and reflections on the interplay between mathematics and physics in the 19th and 20th century

Juraj Šebesta: Mathematics as one of the basic pillars of physical theory: historical and epistemological survey

Jan Lacki: From q-numbers to Hilbert spaces: The interplay of mathematics and physics in the rise of quantum mechanics

Arne Schirrmacher: Good reasons for and against a mathematization of physics: On forms of theoretical physics of Max Planck, Max Born and Werner Heisenberg

Sektion 2: Lokale Kontexte | Local contexts

K.-H. Schlote/M. Schneider: Zum Wechselverhältnis von Mathematik und Physik an den Universitäten Leipzig, Halle und Jena – ein Vergleich

Karin Reich: Die theoretische Physik an der Universität Hamburg in den Jahren 1921 – 1959

Jim Ritter: Geometry as physics: Oswald Veblen and the Princeton School in the 1920s

Charlotte Bigg: Mathematics meets physics in early twentieth century Paris: the case of Brownian motion

Sektion 3: Wissenschaftler | Scientists

Scott Walter: Theoretical physics and relativity in Paris during the Belle Époque

Tom Archibald: Poincaré and Saturn's Rings: Equilibrium figures and the prestige of mathematics circa 1900

Reinhard Siegmund-Schultze: Probability and statistics as connecting links between mathematics and physics: the approach of Richard von Mises in the 1920s

Tilman Sauer: Einsteins Verhältnis zur Mathematik

Erhard Scholz: Weyls Verständnis vom Verhältnis der Mathematik zur Physik

Sektion 4: Entwicklung von Konzepten und Theorien | Development of concepts and theories

Friedrich Steinle: The unusual interaction of physics and mathematics in the formation of field theory

Arianna Borrelli: Der Begriff von «Drehimpuls» zwischen Mathematik und Physik

Klaus-Heinrich Peters: Mathematische und phänomenologische Strenge: Distributionen in Quantenmechanik und Quantenfeldtheorie

Helge Kragh: The role of mathematics in the construction of the relativistic quantum mechanics

Christoph Lehner: Mathematical foundations and physical visions: Pascual Jordan and the quantum field theory program

Podiumsdiskussion | Panel

On the interrelationship between mathematics and physics – continuities and discontinuities (Einführende Kurzbeiträge: Eberhard Zeidler, Jim Ritter, Bodo Geyer, Moderation: Erhard Scholz)

Liste der Autoren

Dr. Arianna Borrelli
Fachbereich C Physik und
Interdisziplinäres Zentrum für Wissenschafts- und Technikforschung (IZWT)
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20,
42119 Wuppertal
Germany
borrelli@uni-wuppertal.de

Helge Kragh, Professor of History of Science
Department of Science Studies, Building 1110
University of Aarhus,
8000 Aarhus
Denmark
helge.kragh@ivs.au.dk

Prof. Dr. Jan Lacki
Université de Genève
Faculté des Sciences
Ecole de Physique
24, Quai Ernest Ansermet
1211 Genève 4
Switzerland
jan.lacki@unige.ch

Dr. Christoph Lehner
Max Planck Institut für Wissenschaftsgeschichte
Boltzmannstraße 22
14195 Berlin
Germany
lehner@mpiwg-berlin.mpg.de

Professor Jesper Lützen
Department of Mathematical Sciences
University of Copenhagen
Universitetsparken 5
DK-2100 Copenhagen O
Denmark
lutzen@math.ku.dk

Dr. Klaus-Heinrich Peters
Barnerstraße 49
22765 Hamburg
Germany
khp@chenghsin.de

Prof. Dr. Karin Reich
Department Mathematik
Universität Hamburg
Bundesstr.55,
20146 Hamburg
Germany
reich@math.uni-hamburg.de

Prof. Dr. Jim Ritter
Université Paris 8
Départment de Mathématiques et d' Histoire des Sciences
2, rue de la Liberté
93526 Saint-Denis Cedex
France
Jim.ritter@wanadoo.fr

Dr. Karl-Heinz Schlote
Elie-Wiesel-Str. 55
04600 Altenburg
Germany
schlote49@yahoo.de

Dr. Martina Schneider
AG für Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
Universität Mainz
Staudinger Weg 9
55099 Mainz
Germany
mschneider@mathematik.uni-mainz.de

Prof. Dr. Erhard Scholz
Bergische Universität Wuppertal
Fachbereich C – Mathematik
Gaußstraße 20
42119 Wuppertal
Germany
Scholz@math.uni-wuppertal.de

Prof. Dr. Juraj Šebesta
Department of Theoretical Physics and Physics Education
Comenius University,
Mlynská dolina,
842 48 Bratislava
Slovakia
sebesta@fmph.uniba.sk

Prof. Dr. Reinhard Siegmund-Schultze
University of Agder
Faculty of Engineering and Science
Gimlemoen, Postboks 422
4604 Kristiansand S
Norway
reinhard.siegmund-schultze@uia.no

Prof. Dr. Friedrich Steinle
Technische Universität Berlin
Institut für Philosophie, Literatur-, Wissenschafts- und Technikgeschichte
Sekr. H 72
Straße des 17. Juni 135
10623 Berlin
Germany
friedrich.steinle@tu-berlin.de

Prof. Dr. Scott Walter
LHSP-Archives Henri Poincaré (CNRS, UMR 7117)
Université Nancy 2
91 avenue de la Libération
B.P. 454
54001 Nancy Cedex
France
Scott.Walter@univ-nancy2.fr

Personenverzeichnis

C