

# CONTACTO NORMAL ENTRE UN MEDIO ELASTO-PLÁSTICO CONTINUO Y UNA ESFERA RÍGIDA : OBSERVACIONES EXPERIMENTALES Y COMPUTACIONALES

NORMAL CONTACT BETWEEN AN ELASTOPLASTIC MEDIUM AND A RIGID SPHERE: EXPERIMENTAL AND COMPUTATIONAL OBSERVATIONS

Ángela María Pedraza<sup>a</sup>, Ángela Rocío Guevara<sup>a</sup>, Javier Camacho<sup>b</sup>, y Watson L. Vargas<sup>c</sup>  
Universidad Militar Nueva Granada  
Facultad de Ingeniería  
Bogotá, D.C

## RESUMEN

Se presenta en este trabajo una investigación experimental y numérica del contacto normal de una esfera rígida con una placa plana de material cuyo comportamiento mecánico se asume de tipo elasto-plástico. Los esfuerzos locales bajo el punto de contacto se han obtenido experimentalmente mediante visualización foto-elástica. Se ha evaluado numéricamente la evolución de los bulbos de esfuerzo bajo el punto de contacto como función del tiempo y se ha efectuado la comparación con las observaciones experimentales. Los resultados indican que un modelo elasto-plástico tridimensional reproduce de manera apropiada las características principales observadas en los experimentos físicos.

Este ejercicio puramente académico y de carácter didáctico enfatiza en el enorme potencial de los elementos finitos en la solución de problemas de deformación bajo diferentes tipos de modelos constitutivos y pone de manifiesto la enorme utilidad del modelamiento matemático y computacional basado en aproximaciones continuas de la materia.

Palabras clave: Elementos finitos, fotoelasticidad, modelos constitutivos

## ABSTRACT

This work presents an experimental and numerical investigation on the normal contact between a rigid sphere and a plane whose mechanical behaviour has been assumed to be elastoplastic. The stresses in the region of contact have been accessed by means of photo-elastic visualization. The evolution of the stress bulbs below the point of contact has been evaluated numerically and a comparison with experimental observations has been performed. The results indicate that a tridimensional elastoplastic model can

---

<sup>a</sup> Estudiante séptimo semestre de Ingeniería Civil, Semillero de investigación Grupos: Sistemas Particulados Complejos -- Geotécnica

<sup>b</sup> Autor corresponsal: Ingeniero Civil, MSc. Jefe área de Geotecnia. e-mail: [jcamacho@umng.edu.co](mailto:jcamacho@umng.edu.co)

<sup>c</sup> Profesor Asociado, BSc, MSc, Ph.D. Ingeniería Química e-mail: [wvargas@etb.net.co](mailto:wvargas@etb.net.co)

capture the main features observed in the physical experiments. This academic exercise emphasizes the potential of the finite element method on the solution of deformation problems considering different constitutive models, it also shows the importance of mathematical and computational modelling based on continuous approaches.

Keywords: FEM, photo-elasticity, constitutive models

## I. INTRODUCCIÓN

La deformación de materiales es un tópico de importancia en muchos campos de la ciencia y la ingeniería. Por ejemplo, los modelos simplificados cubiertos en este artículo tienen aplicaciones en ingeniería estructural, ciencia de materiales, sismología, geotecnia, tecnología de sensores y bioingeniería. El presente artículo cubre dos modelos simples: (i) deformación elástica y (ii) deformación elasto-plástica de una placa continua con y sin presencia de una perturbación. El modelamiento matemático de las deformaciones elásticas en un medio continuo se basa en la solución de las ecuaciones de la segunda ley de Newton y las correspondientes relaciones constitutivas entre el esfuerzo y la deformación. La solución de las ecuaciones mediante la técnica de elementos finitos es un procedimiento muy bien establecido en la literatura y disponible en muchos paquetes computacionales comerciales. El enorme éxito de los elementos finitos ha jugado un papel fundamental en la promoción del modelamiento matemático y el uso de las herramientas computacionales en ingeniería. Muchas aplicaciones en ingeniería involucran deformaciones plásticas permanentes más allá del régimen elástico. Dichos problemas requieren la simulación combinada de efectos elásticos y plásticos, usando los denominados modelos elasto-plásticos.

La deformación de un material sólido es usualmente puramente elástica cuando el esfuerzo aplicado se encuentra por debajo de cierto nivel crítico, denominado el *esfuerzo de fluencia*, YS (Yield Stress, por sus siglas en inglés). Cuando los esfuerzos están por encima de dicho nivel, ocurren deformaciones que son una combinación de deformaciones elásticas y plásticas, donde el último tipo de deformación se reconoce por ser permanente. La simulación de la deformación elasto-plástica es fundamental en muchas disciplinas de la ingeniería, y el método de elementos finitos ha sido aplicado con éxito a esta área particular por más de tres décadas<sup>1</sup>.

Dentro de las aplicaciones en ingeniería se puede mencionar el diseño de elementos mecánicos de maquinaria, aeronaves y automóviles. En ingeniería civil es de uso corriente en el diseño de estructuras de concreto reforzado y acero para lo cual se utilizan programas específicos con los que se logra mayor eficiencia y seguridad en el comportamiento de dichas estructuras ante cargas estáticas y dinámicas, incluyendo el diseño inelástico de los elementos. En ingeniería geotécnica se viene implementando su uso, debido a que pueden incorporarse dentro de la técnica de elementos finitos, modelos constitutivos que describen de manera adecuada el comportamiento complejo

del suelo, siendo utilizados para el diseño de estructuras de cimentación, de soporte de tierras y en excavaciones subterráneas.

## II. RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACIÓN PARA UN SÓLIDO ELÁSTICO ISOTRÓPICO

Para un sólido elástico lineal e isotrópico se tiene<sup>2</sup>

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} e_{kk} + 2\mu e_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (1)$$

Donde  $\sigma_{ij}$  y  $e_{ij}$  son los componentes del tensor de esfuerzo y deformación respectivamente. En la Ecuación 1  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé, y  $\nu$  es la relación de Poisson. Las constantes de Lamé están dadas por

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3)$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad de Young. Las constantes de Lamé varían en el espacio para materiales heterogéneos, pero se asumen constantes si el material elástico es homogéneo.

El tensor de deformación se relaciona con los componentes de desplazamiento  $u_i$  mediante la relación.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

Las ecuaciones de movimiento son, en términos de los componentes de esfuerzo,

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + B_i = \rho_o \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (5)$$

Donde  $B_i$  denota los componentes de la fuerza por unidad de volumen. La sustitución de las relaciones esfuerzo-deformación (Ec. 1 y 4) en la Ecuación 5, permite obtener la ecuación de Navier de movimiento

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + B_i = \rho_o \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (6)$$

Donde

$$e = e_{kk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}$$

Es la dilatancia. Para el caso de un sistema estático la Ec. 6 se reduce a

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial e}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial x_j} + B_i = 0 \quad (6a)$$

Estas ecuaciones en general, forman un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no-lineales que son bastante difíciles de resolver analíticamente. Sin embargo, bajo

condiciones simplificadas y en algunos casos mediante el uso de condiciones de frontera no-realistas, es posible obtener soluciones exactas.

En el presente trabajo, se utilizarán soluciones especiales de la ecuación de Navier (Ec. 6) para sólidos elásticos y elasto-plásticos con el propósito de comparar el desempeño de la solución numérica obtenida vía elementos finitos y las observaciones experimentales obtenidas mediante experimentos de fotoelasticidad.

### III. MODELOS CONSTITUTIVOS

En el presente trabajo se utilizaron dos modelos constitutivos para simular el comportamiento del material polimérico. El primero es el modelo elástico que considera que las deformaciones son directas y linealmente proporcionales a los esfuerzos aplicados. En la Figura 1(a) se muestra dicha relación. El módulo de Young ( $E$ ) y la relación de Poisson ( $\nu$ ) son los únicos parámetros del modelo. El segundo modelo es llamado elasto-plástico perfecto (ver Figura 1(b)). Existe un primer rango de deformación dentro del cual se cumple la ley de Hooke con un módulo constante. Una vez se alcanza el esfuerzo de fluencia ( $YS$ ), el material continúa con un incremento en la deformación sin que se requiera incrementos adicionales en el esfuerzo, es decir se comporta como un plástico perfecto. Dicho modelo requiere el valor del esfuerzo de fluencia ( $YS$ ) como parámetro adicional. El segundo modelo tiene mayor aproximación al comportamiento que se evidencia experimentalmente, sin embargo es también una idealización del comportamiento real de los materiales.

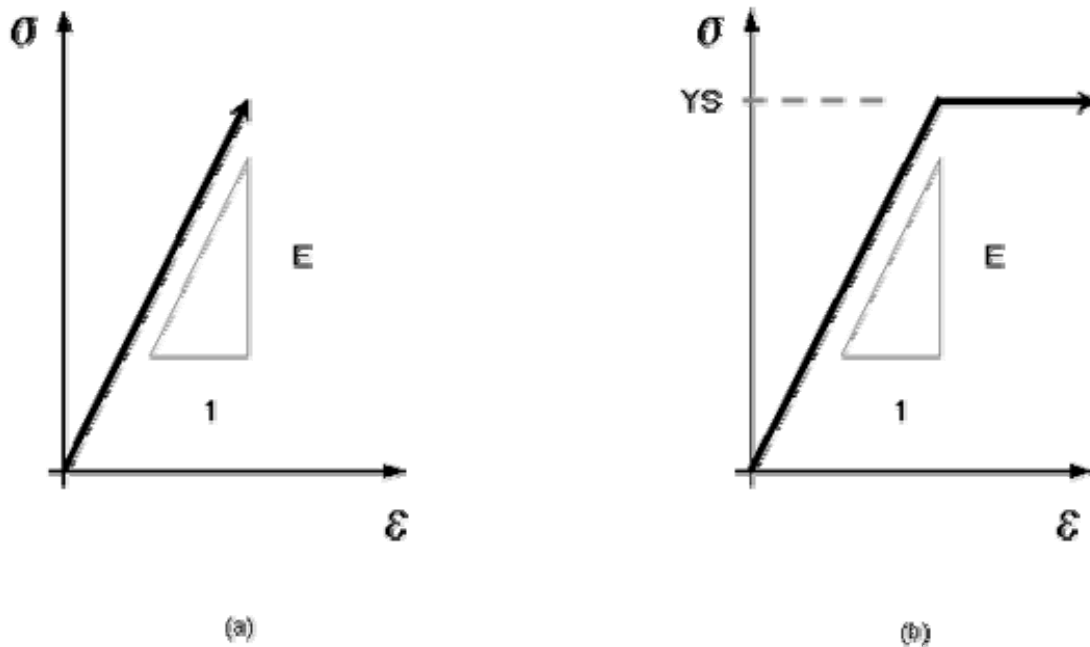


Figura 1. (a) Modelo elástico y (b) Modelo elasto-plástico

### IV. ELEMENTOS FINITOS

En general, el método de los elementos finitos (FEM, de sus siglas en inglés) es hoy día la técnica numérica dominante para discretizar ecuaciones diferenciales parciales. El análisis por elementos finitos es el método numérico de subdividir un sistema complejo en pequeñas piezas de un tamaño seleccionado por el usuario denominadas *elementos*. El método implementa ecuaciones diferenciales que gobiernan los fenómenos de transporte y por tanto el comportamiento de tales elementos y los soluciona simultáneamente, creando entonces una explicación comprensible de como el sistema actúa como un todo. Los resultados obtenidos pueden presentarse de manera tabular, gráfica o animada. Este tipo de análisis se utiliza primordialmente para el diseño y optimización así como para el estudio e investigación de sistemas cuyo nivel de complejidad es tal que su solución manual es prácticamente imposible. Los sistemas que se ajustan a esta descripción presentan niveles de complejidad debido a su geometría, escala o al acoplamiento de las ecuaciones diferenciales gobernantes. En este estudio específico se hará uso de ANSYS, un paquete computacional de elementos finitos de propósito genérico. Las aplicaciones básicas del paquete ANSYS incluyen análisis estructural, análisis térmico, dinámica computacional de fluidos (CFD), análisis electromagnético al igual que análisis acústicos y de vibraciones. En este artículo específicamente, se centrará la atención en la aplicación de las herramientas de análisis estructural, aplicadas en la solución de algunos problemas elementales de la mecánica de superficies.

## V. EXPERIMENTAL

El problema de la penetración de un medio elástico por una esfera rígida es un problema clásico de la mecánica del continuo. La Figura 2, ilustra el montaje experimental para observar el campo de esfuerzos que se desarrolla en el espécimen en torno a una zona bajo carga aplicando el método de fotoelasticidad. La fotoelasticidad es un fenómeno óptico que se genera cuando se aplica un esfuerzo a polímeros fotoelásticos transparentes. Técnicamente se trata de una anisotropía óptica inducida, que provoca un cambio en el índice de refracción del material. En el proceso, se generan una serie de franjas cromáticas, debidas a la luz polarizada, que muestran la distribución de esfuerzos a lo largo del espécimen que ha sido sometido a carga y que pueden utilizarse además de la visualización como medio para cuantificar la magnitud de los esfuerzos aplicando técnicas de análisis de imagen.

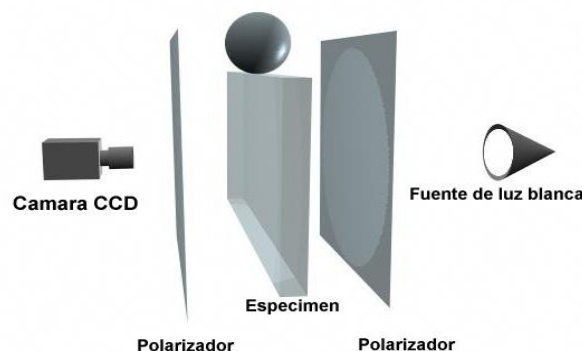


Figura 2. Esquema del montaje experimental para la captura de imágenes por el método de fotoelasticidad.

Basándose en el anterior principio, los experimentos se efectuaron utilizando un polimero tipo polimetil-metacrilato comercialmente conocido como acrílico o plexiglass. Se realizaron dos experimentos con variaciones ligeras de la geometría de los especímenes. En la Figura 3 se indican las dimensiones de cada espécimen y de la esfera utilizada para aplicar la carga. El primer experimento corresponde a una lámina de acrílico continua como la mostrada en la Figura 3(a); en el segundo experimento se utiliza una lámina de las mismas dimensiones pero con un orificio circular en el centro tal y como se ilustra en la Figura 3(b). Dicha orificio circular en el espécimen dos se efectuó con el propósito de evaluar la influencia de la perturbación sobre la distribución de esfuerzos bajo el punto de contacto.

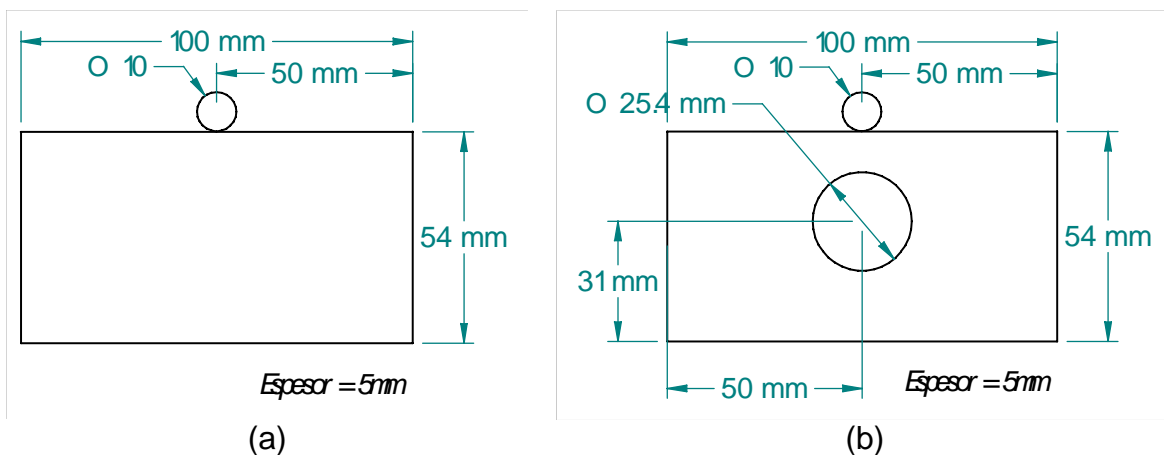


Figura 3. Dimensiones de las láminas de acrílico utilizadas (a) experimento 1 y (b) experimento 2

El montaje experimental se efectuó en un marco de carga como el mostrado en la Figura 4(a) que permite un incremento de la deformación y captura computacional de la deformación aplicada y la carga ejercida sobre el espécimen. Se acondicionó un anillo de carga de capacidad nominal de 5kN sobre la esfera y la lámina de acrílico, aumentando progresivamente la deformación mientras se observa (mediante efecto foto-elástico) como se generan sobre la lámina franjas cromáticas como las observadas en la Figura 4(b). Las imágenes se capturaron utilizando una cámara digital tipo CCD convencional. Se tomaron además lecturas de deformación y carga para trazar gráficas como las mostradas en la Figura 5. Las Figuras 5(a) y 5(b) muestra la deformación y la carga en función del tiempo, respectivamente. Esta información posteriormente se utilizó para introducir las cargas en el modelo computacional.

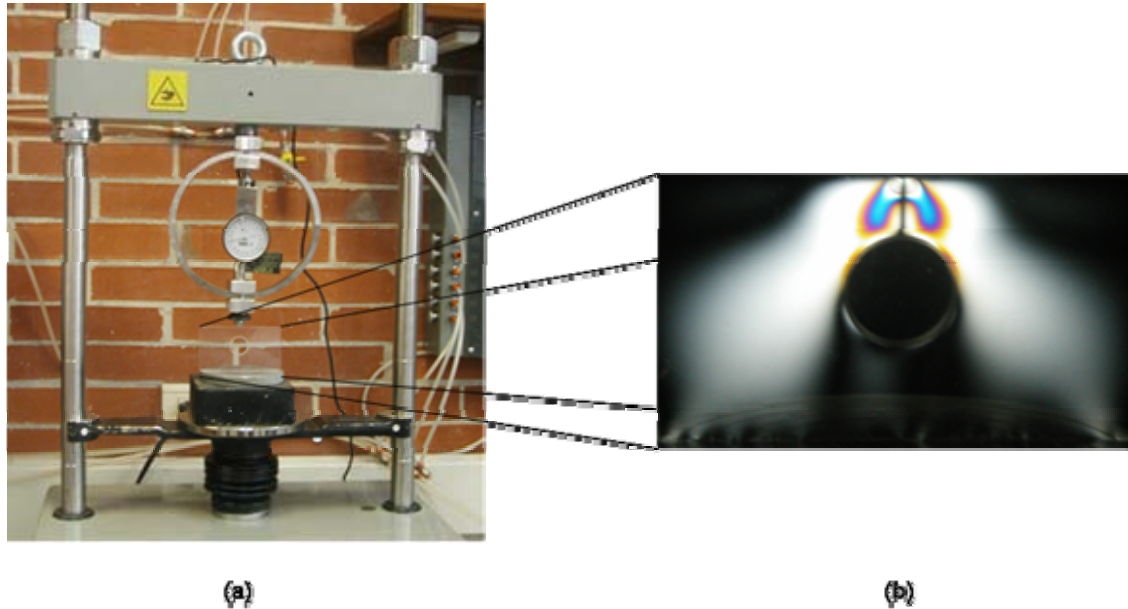


Figura 4. (a) Montaje del experimento en el marco de carga y (b) Distribución de esfuerzos en un material fotoelástico.

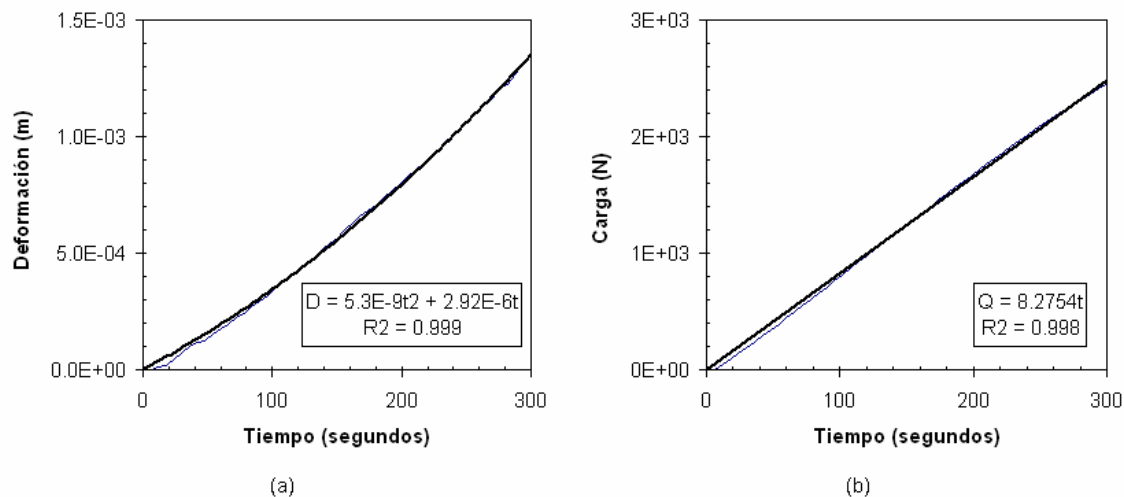


Figura 5. (a) Deformación en función del tiempo y (b) Carga en función del tiempo

## VI. MODELO NUMÉRICO

El modelo numérico de las deformaciones se basa en el modelamiento matemático de la segunda ley de Newton en conjunto con las relaciones constitutivas correspondientes tal y como se indicó en la Sección II. En este trabajo se considera que las propiedades mecánicas del acrílico son de tipo elástico o elasto – plástico aún cuando el comportamiento de dicho material es más complejo. Las propiedades mecánicas de los materiales utilizados se indican en la Tabla 1.

Tabla 1. Propiedades mecánicas de los materiales utilizados <sup>3</sup>

Descripción	Unidad	Acero	Acrílico
Módulo de elasticidad	N/m <sup>2</sup>	200E9	2.9E9
Relación de Poisson	--	0.20	0.38
Módulo cortante	N/m <sup>2</sup>		1.23E9
Esfuerzo de fluencia	N/m <sup>2</sup>		80E6
Coefficiente de fricción		0.20	

El modelamiento numérico incluyó la utilización de elementos tipo contacto para simular el proceso de penetración de la esfera dentro del acrílico, así como la aplicación de la deformación en función del tiempo (*i.e.*, simulación transiente).

Las condiciones de frontera corresponden exactamente a las aplicadas al modelo físico. Se ejecutaron tres modelos de diferente grado de complejidad, para cada uno de los dos experimentos:

- Material elástico y modelo bidimensional
- Material elasto-plástico y modelo bidimensional
- Material elasto-plástico y modelo tridimensional

## VII. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Luego de realizados los experimentos en el laboratorio y los modelos numéricos partiendo del modelo más simple posible (elástico bidimensional) al modelo relativamente más complejo (elasto-plástico tridimensional), se hicieron las comparaciones correspondientes obteniendo las siguientes observaciones:

La Figura 6 muestra la imagen de la placa de acrílico sin orificio, junto con los tres modelos simulados en ANSYS. El modelo elástico bidimensional de la Figura 6(b) presenta una distribución de esfuerzos que no coincide en forma e intensidad con lo observado experimentalmente (Figura 6(a)). El modelo presenta mayores intensidades de esfuerzo en la superficie de contacto.

El modelo elasto-plástico bidimensional presentado en la Figura 6(c) se aproxima más al resultado experimental, sin embargo aún se presentan deformaciones excesivas hacia el centro de la placa, en la superficie de contacto. La forma de los bulbos se curva en la parte superior, formando contornos de área cerradas. Posiblemente, un refinamiento de la malla utilizada para la simulación no mejora esta condición.

El modelo elasto-plástico tridimensional, mostrado en la Figura 6(d), manifiesta una gran similitud tanto en la distribución de esfuerzos como en la magnitud de las deformaciones alrededor del punto de contacto disminuyendo el grado de dispersión hacia las zonas más alejadas. Los esfuerzos más elevados se presentan con mayor intensidad en una zona próxima al contacto y no sobre este, asemejándose a lo observado experimentalmente.



El modelo elasto-plástico tridimensional resulta más adecuado ya que simula el contacto esférico, que comienza siendo puntual, en tanto que el modelo bidimensional lo supone como línea perpendicular al plano. En general, el modelo elasto-plástico permite que se presenten mayores deformaciones locales en la zona de contacto, ya que el acrílico sufre deformaciones plásticas en esta región.

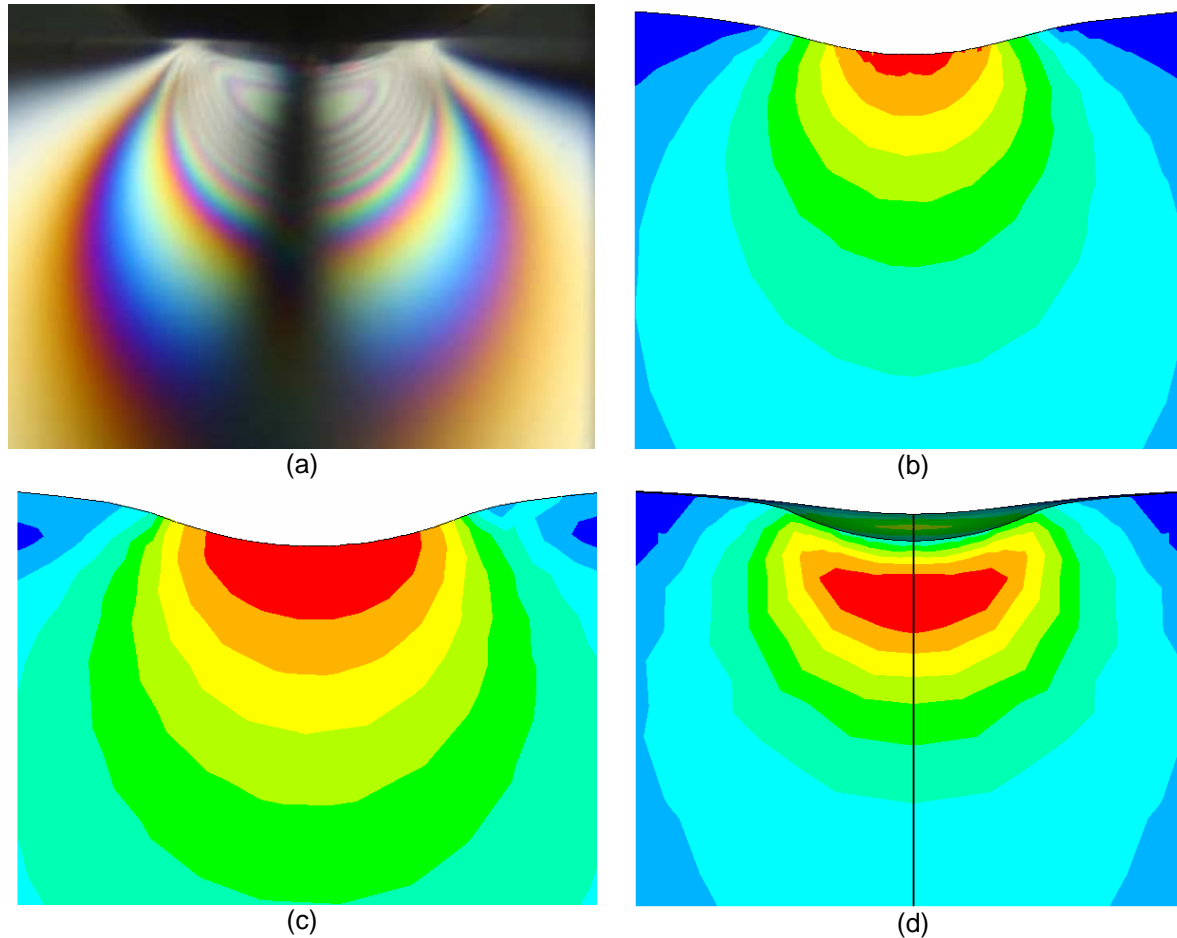


Figura 6. Resultados del experimento con el espécimen 1 (a) Imagen digital, (b) Modelo elástico bidimensional, (c) Modelo elasto - plástico bidimensional, (d) Modelo elasto - plástico tridimensional.

En la Figura 7 se presentan resultados experimentales y numéricos para el segundo experimento, en donde se somete a prueba la placa hueca. En la Figura 7(a) se presenta la observación experimental por medio de fotoelasticidad. A diferencia del experimento con el espécimen continuo, la presencia del agujero por debajo del punto de aplicación de la carga, hace que los patrones de distribución de esfuerzos sean significativamente diferentes, esto es tendiendo a rodear el orificio. Los modelos numéricos confirman lo observado en el ejercicio anterior, al mostrar de manera cualitativa que el modelo elasto-plástico tridimensional tiene un mejor desempeño que los demás. La forma de la zona de deformación plástica predicha por el modelo elasto-plástico 3D es similar en el modelo computacional y en el experimento físico.

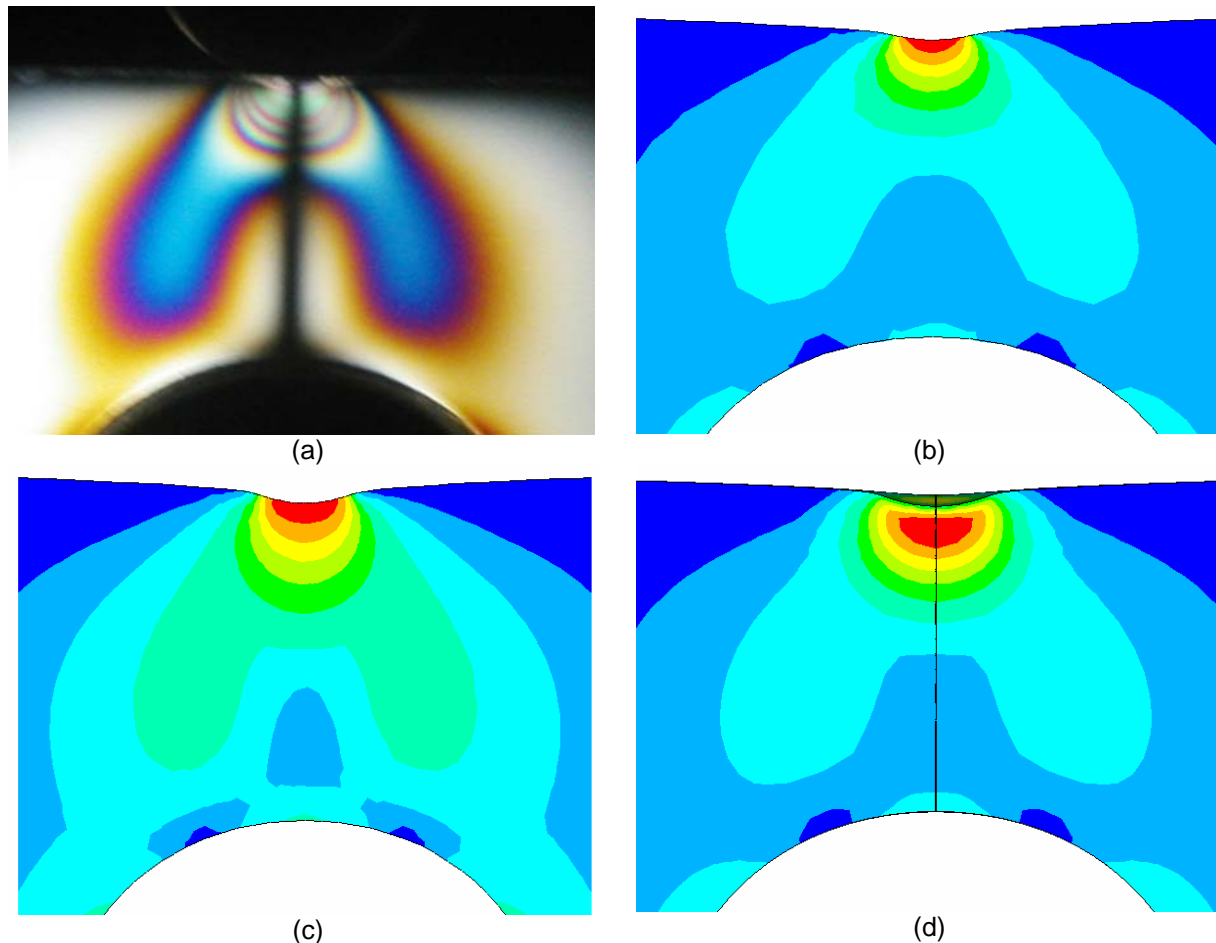


Figura 7. Resultados del experimento con el espécimen 2. (a) Imagen digital, (b) Modelo elástico bidimensional, (c) Modelo elasto-plástico bidimensional, (d) Modelo elasto-plástico tridimensional

En la Figura 8 se presentan las secuencias fotográficas observadas experimentalmente para el comportamiento de los dos especímenes bajo estudio como función del tiempo y la comparación correspondiente con el modelo elasto-plástico tridimensional. Las secuencias de la Figura 8 muestran claramente, que la evolución en el tiempo del tamaño, forma e intensidad de los bulbos se va desarrollando de manera similar en el caso real y el simulado. Para los dos casos considerados se observa un incremento continuo en el orden de las franjas cromáticas como función del tiempo, esto es un comportamiento esperado dado que el orden (número de anillos cromáticos) es función de la carga aplicada la cual se está incrementando como función del tiempo. Cualitativamente, todas las características observadas experimentalmente son reproducidas por el modelo elasto-plástico tridimensional.

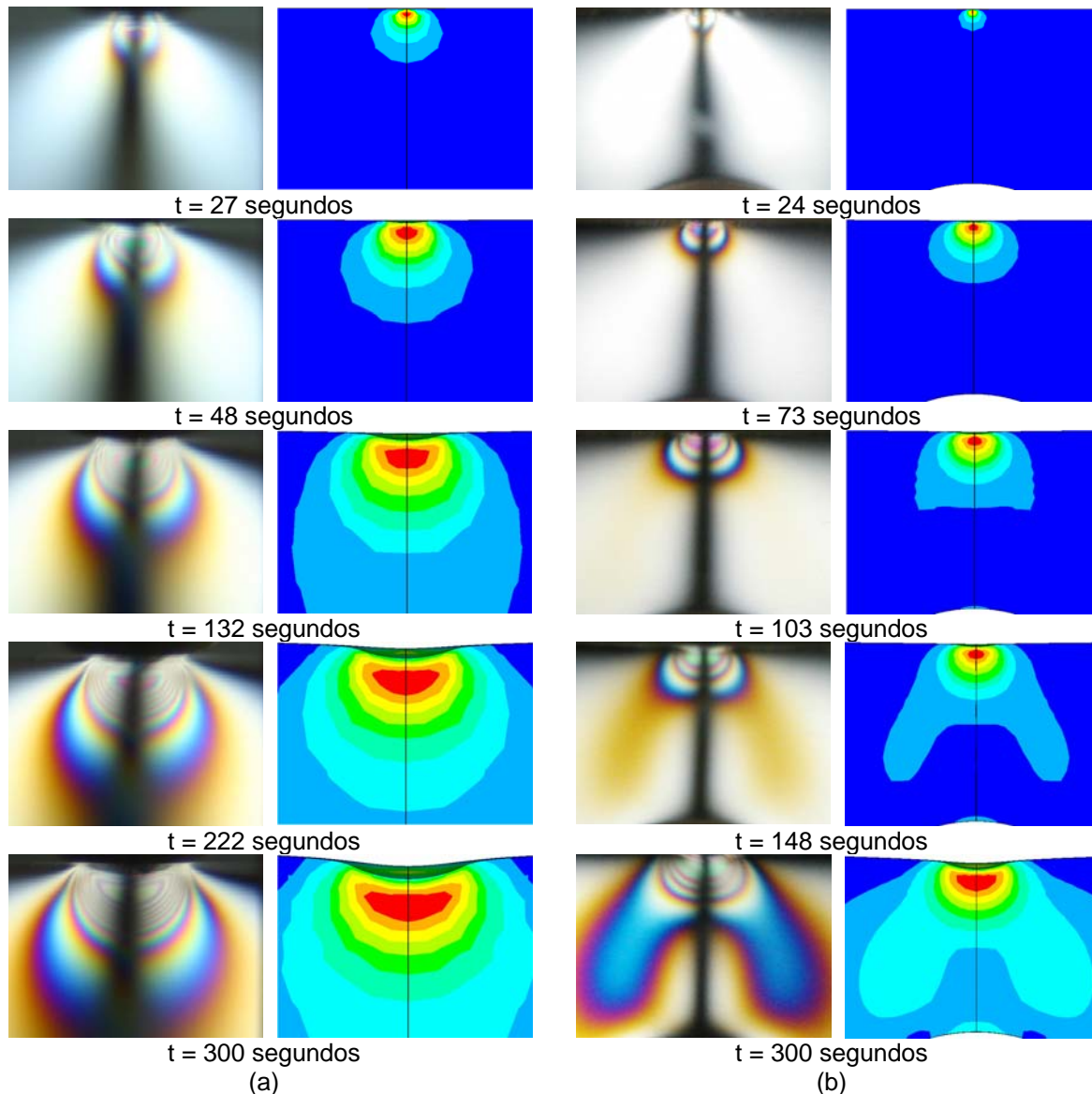


Figura 8: Patrones dinámicos de la distribución de esfuerzos, durante el contacto normal de una esfera rígida con un medio elasto-plástico. (a) Experimento 1 y (b) Experimento 2.

## VIII PERSPECTIVAS

Este ejercicio puramente académico y de carácter didáctico enfatiza sobre el enorme éxito que han tenido los elementos finitos en la solución de problemas de deformación bajo diferentes tipos de modelos constitutivos y pone de manifiesto la enorme utilidad del modelamiento matemático y computacional basado en aproximaciones continuas de la materia. Sin embargo existen situaciones de interés práctico en las cuales las aproximaciones continuas tal y como se han descrito usando las relaciones existentes entre el esfuerzo y el campo de deformaciones no cuentan la historia completa respecto al comportamiento de los materiales. Tal es el caso de los materiales heterogéneos y más concretamente de materiales como los medios granulares donde la energía

expresada en términos microscópicos (*i.e.*, a la escala de los granos) conlleva serias dificultades en la derivación del esfuerzo de respuesta. En el campo de la mecánica del continuo, el comportamiento de un medio granular se ha descrito usualmente como elasto-plástico, sin embargo en años recientes la insuficiencia de las aproximaciones continuas se ha hecho evidente<sup>4</sup>.

En particular, está perfectamente establecido que en un medio granular no cohesivo, la transmisión de esfuerzos ocurre exclusivamente mediante contactos interpartícula, que siguen rutas preferenciales, las denominadas “cadenas de esfuerzo” cuya distribución y microestructura determinan el comportamiento macroscópico del material<sup>5,6,7</sup>. Desde una perspectiva práctica dicho comportamiento tiene implicaciones muy importantes y por tanto merece ser explorado. Experimentos de fotoelasticidad encaminados a evaluar la respuesta local de un medio granular a una perturbación externa (tal como los presentados en este trabajo) así como simulaciones -basadas en el método de elementos discretos (DEM)- se encuentran actualmente en desarrollo y los resultados de dicho ejercicio serán el objeto de una próxima publicación.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al personal de los Laboratorio de Ingeniería Civil de la Universidad Militar Nueva Granada, por su asistencia en la realización de los experimentos.

## REFERENCIAS

- 
- [1 ] Hans Petter Langtangen, *Computational Partial Differential Equations*, 2nd edition (Springer-Verlag, Berlin, 2003), Vol. 2, Chap. 5, p.493.
  - [2] Frederick F. Ling, W. Michael Lai, and Don A. Lucca, *Fundamentals of Surface Mechanics*, 1st edition (Springer-Verlag, New York, 2002), Vol. 1, Chap. 3, p.70.
  - [3] James F. Shackelford, *Introduction to Material Science for Engineers*, 3th edition (McMillan, New York, 1992).
  - [4] Malcolm D. Bolton, *The Role of Micro-Mechanics in Soil Mechanics. International Workshop on Soil Crushability*, Yamaguchi University, Japan (1999).
  - [5] Daniel M. Mueth, Heinrich M. Jaeger, and Sidney R. Nagel, *Force distribution in a granular medium. Phy. Rev. E.* **57**, 3164 (1998).
  - [6] Junfei Geng *et al.*, *Footprints in sand: The response of a granular material to local perturbations. Phy. Rev. Lett.* **87**, 035506-1 (2001).
  - [7] Miguel da Silva and Jean Rajchenbach, *Stress transmission through a model system of cohesionless elastic grains. Nature* **406**, 708 (2000).