

ESTIMACIÓN DEL EXPONENTE DE HURST Y DIMENSIÓN FRACTAL PARA EL ANÁLISIS DE SERIES DE TIEMPO DE ABSORBANCIA UV-VIS

ESTIMATING HURST EXPONENT AND FRACTAL DIMENSION FOR UV-VIS ABSORBANCE TIME SERIES ANALYSIS

Leonardo Plazas Nossa¹, Miguel Antonio Ávila Angulo², Germán Moncada Méndez³

Fecha de recepción: 17 de julio de 2014

Fecha de aprobación: 1 de octubre de 2014

Referencia: L. Plazas Nossa, M.A. Ávila Angulo, G. Moncada Méndez. (2014). Estimación del exponente de Hurst y dimensión fractal para el análisis de series de tiempo de absorbancia UV-Vis. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*, 24 (2), pp. 133 - 143

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es estimar el exponente o parámetro de Hurst y la dimensión fractal para el análisis de series de tiempo de espectrometría UV-Vis, utilizando el análisis de componentes principales PCA (Principal Component Analysis). El análisis se realiza para comprender si las series de tiempo de absorbancia UV-Vis son persistentes, anti-persistentes, determinísticas o si son ruido blanco. Se utilizaron tres diferentes series de tiempo de absorbancia UV-Vis para tres diferentes sitios de estudio: (i) Planta de tratamiento de aguas residuales Salitre (PTAR) en Bogotá; (ii) Estación elevadora de Gibraltar en Bogotá (EEG); y (iii) Planta de tratamiento de aguas residuales San Fernando (PTAR) en Itagüí (sur de Medellín). Cada una de las series de tiempo tiene igual número de muestras (5705). Se redujo la dimensionalidad de los espectros de absorbancia, dada su alta correlación, con PCA y se utilizó para cada sitio de estudio la primera componente principal. Esta componente principal explicó entre el 82% al 94% de la variabilidad para los tres sitios de estudio. Se determinaron los exponentes de Hurst: (i) 0.8 para PTAR Salitre; (ii) 0.85 para EEG; y (iii) 0.89 para PTAR San Fernando. A partir de los valores de los exponentes de Hurst se determinan las dimensiones fractales para las tres series de tiempo de absorbancia UV-Vis en los tres sitios de estudio y se obtiene en promedio una dimensión fractal de 1.153. Las tres series de tiempo de absorbancia UV-Vis son persistentes y con alta auto-similitud, dado que el exponente de Hurst es mayor a 0.5.

Palabras clave: absorbancia, análisis por componentes principales, captor UV-Vis, dimensión fractal, exponente de Hurst

1. Ingeniero Electrónico, MSc, Facultad de Ingeniería, Docente. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, iplazasn@udistrital.edu.co, plazas-l@javeriana.edu.co
2. Ingeniero Catastral y Geodesta, MSc, Facultad de Ingeniería, Docente. Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, maavila@udistrital.edu.co
3. Ingeniero Electrónico, Esp., Docente Ciencias Básicas. Universidad Piloto de Colombia, Bogotá, Colombia, gmoncada@unipiloto.edu.co

ABSTRACT

The objective of this study is to estimate the exponent or Hurst parameter and the fractal dimension for UV-Vis spectrometry time series analysis, using principal component analysis (PCA). This analysis is performed to understand if the UV-Vis absorbance time series are persistent, anti-persistent, deterministic or white noise. Three different UV-Vis absorbance time series for three different study sites were used: (i) Salitre wastewater treatment plant (WWTP) in Bogotá; (ii) Gibraltar pumping station (GPS) in Bogotá; and (iii) San Fernando WWTP in Itagüí (south of Medellín). Each of these time series had an equal number of samples (5705). The dimensionality of the absorbance spectra, given their high correlation, was reduced using PCA and the first principal component was used for each study site. For the three study sites, this first principal component explained from 82% to 94% of the variability. The Hurst exponents were determined: (i) 0.8 for Salitre WWTP; (ii) 0.85 for GPS; and (iii) 0.89 for San Fernando WWTP. Using Hurst exponent values, for the three UV-Vis absorbance time series at same study sites, fractal dimensions were determined and a fractal dimension average of 1,153 was obtained. The three UV-Vis absorbance time series are persistent and have high self-similarity since the Hurst exponent is greater than 0.5.

Keywords: absorbance, fractal dimension, Hurst exponent, principal component analysis, UV-Vis sensor.

INTRODUCCIÓN

Los desarrollos en óptica y electrónica en los últimos años han permitido la mezcla o unión de la espectrometría UV-Vis de espectro completo con instrumentos robustos a pequeña escala para el monitoreo en línea de la calidad del agua [1]. Los captoreadores UV-Vis son sondas que registran la atenuación de la luz (absorbancia) y proporcionan resultados de la calidad del agua en relativo tiempo continuo (del orden de una señal/minuto). Para el caso específico de plantas de tratamiento de aguas residuales (PTAR), la espectrometría UV-Vis en línea (219 longitudes de onda en el rango de UV hasta Visible: 200-745 nm, con pasos de 2,5 nm) puede ser utilizada para el monitoreo y control en la entrada y salida de dichas plantas, así como para monitorear las diferentes etapas del tratamiento. Lo anterior

tiene el propósito de determinar las dinámicas de las cargas y eficiencias de remoción de materiales orgánicos (como DQO y DBO5), nitratos, nitritos y sólidos suspendidos totales (SST) [2-3] a escalas temporales adecuadas y eventualmente utilizar esa información para la toma de decisiones en tiempo real. Además de los métodos utilizados para la calibración de los captoreadores [4-5] y el análisis de las series de tiempo de espectros de absorbancia UV-Vis, es necesario conocer si las series de tiempo son persistentes (memoria a largo plazo), si contienen ruido aleatorio (ruido blanco), si tienen un comportamiento determinístico o si son anti-persistentes (no correlacionadas) y comprender el comportamiento del fenómeno que las genera [6].

La dinámica de las series de tiempo puede tener un comportamiento complejo, similar a un

proceso estocástico. Estas se pueden analizar desde la geometría fractal, la cual estudia los aspectos geométricos que son invariantes con el cambio de escala. En la literatura se han propuesto diversas medidas no lineales para estimar la complejidad de una serie de tiempo, tales como: la dimensión de correlación, el exponente mayor de Lyapunov, los índices de información y complejidad, los mapas de Poincaré, el método de los datos subrogados y las entropías, con la intención de identificar la presencia no lineal y posiblemente conductas caóticas de las series de tiempo. Sin embargo, se cuenta con una herramienta para evaluar dos atributos de gran relevancia en el estudio de la geometría fractal, como son el exponente de Hurst y la dimensión fractal Mandelbrot [7]. Estos atributos se relacionan con el grado de rugosidad que puede llegar a presentar las series de tiempo de absorbancia UV-Vis. La dimensión fractal es una magnitud estadística que permite describir matemáticamente los objetos que presentan alto grado de complejidad, de auto-similaridad o caóticos. Con la estimación del exponente de Hurst y la dimensión fractal de las series de tiempo se puede analizar si una serie de tiempo es fractal y se puede comprobar si ésta tiene memoria.

La estimación del exponente de Hurst se ha aplicado en áreas que van desde la biofísica a las redes de computadoras. El método del exponente de Hurst fue desarrollado originalmente para estudios hidrológicos, sin embargo las modernas técnicas para estimar el exponente de Hurst provienen de la matemática fractal. Esta estimación proporciona una medida para comprender si los datos son un camino aleatorio puro o tienen tendencias subyacentes.

El interés de este trabajo es la estimación del exponente de Hurst, con éste obtener

la dimensión fractal y, si estos permiten, estimar el grado de predictibilidad de las series de tiempo de absorbancia UV-Vis. Con los resultados se busca definir si es posible aplicar técnicas de pronóstico de la calidad del agua para apoyar los procesos de toma de decisiones en tiempo real en las plantas de tratamiento de aguas residuales. Este trabajo propone analizar los espectros de las series de tiempo de absorbancia y la información recibida por los captadores UV-Vis instalados en sistemas de saneamiento urbano, aplicando la metodología PCA para reducir la dimensionalidad del problema. El espectro de absorbancia está constituido por 219 longitudes de onda desde el espectro Ultra Violeta hasta el espectro Visible. Estas longitudes de onda se consideran como las variables a tener en cuenta en el análisis por componentes principales, PCA. Dicho análisis se utilizó como base para la estimación del exponente de Hurst [6], y posteriormente el cálculo de la dimensión fractal [8], para la primera componente principal de cada sitio de estudio. El análisis propuesto se realizó para tres bases de datos de espectros de absorbancia UV-Vis adquiridas en los siguientes puntos: (i) afluente a la PTAR-Salitre, Bogotá D.C.; (ii) estación Elevadora Gibraltar, Bogotá D.C.; y (iii) afluente a la PTAR San Fernando, Itagüí (área metropolitana de Medellín).

1. MATERIALES Y MÉTODOS

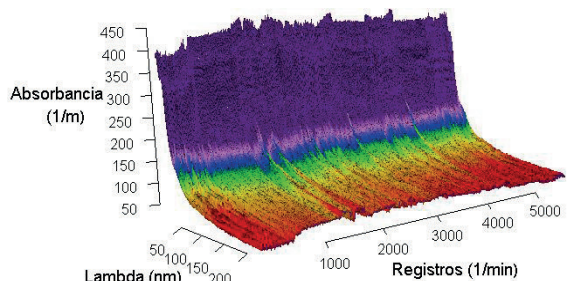
1.1. CAPTORES UV-Vis

Los captadores UV-Vis utilizados (spectro::lyser™) son sondas sumergibles de 64,7 cm de longitud y 44 mm de diámetro, los cuales registran la atenuación de la luz (absorbancia) en tiempo continuo (del orden de una señal/minuto) a partir de una fuente luminosa proporcionada por una lámpara de xenón.

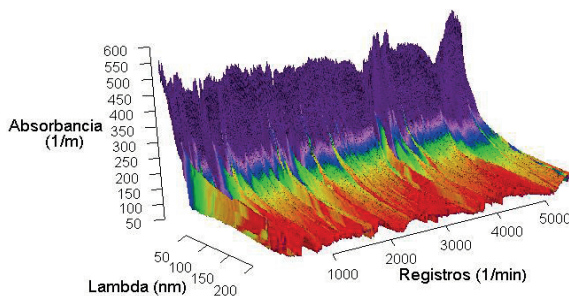
Los valores del espectro se encuentran entre 200 nm y 750 nm de longitud de onda, con intervalos de 2,5 nm [9]. El análisis que se presenta a continuación se realizó para las series de tiempo de espectros de absorbancia compuestas por 5705 registros en cada sitio de muestreo: (i) para PTAR-Salitre (Bogotá D.C.) del 29 de junio de 2011 a las 09:03 h al 3 de julio de 2011 a las 17:33 h (una muestra por minuto); (ii) para la Estación Elevadora de Gibraltar (EEG) del 18 de octubre de 2011 a las 11:08 h al 22 de octubre de 2011 a las 15:21 h (una muestra por minuto) y (iii) PTAR San Fernando de 24 de septiembre de 2011 a las 06:04 h a 2 de octubre de 2011 a las 9:16 h (una muestra cada dos minutos) como se observa en la Figura 1.

1.2. ANÁLISIS POR COMPONENTES PRINCIPALES (PCA)

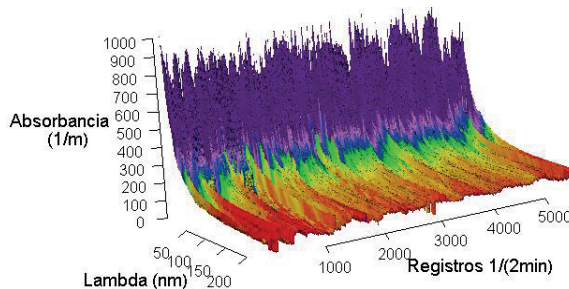
El PCA realiza una transformación lineal, encontrando un nuevo sistema de coordenadas a partir del conjunto original de datos. En este nuevo sistema de coordenadas, la varianza de mayor valor del conjunto de datos es capturada por el primer eje, llamado primer componente principal; la segunda mayor varianza es capturada por el segundo eje y así sucesivamente. Para construir esta transformación lineal se debe construir primero la matriz de covarianza o la matriz de coeficientes de correlación [10]. El objetivo es transformar un conjunto dado de X datos con dimensiones n x m, a otro conjunto de



a)



b)



c)

Figura 1. Series de tiempo de Absorbancia para PTAR Salitre (a), EEG (b) y PTAR San Fernando (c).

$$COV(S_{xy}) = \frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N [(x(n) - \bar{X})(y(n) - \bar{Y})] \tag{1}$$

$$Datos_Ajustados = X_i - \bar{X} \quad i = 1, \dots, n \tag{2}$$

datos de menor dimensión $n \times l$, con la menor pérdida posible de cantidad de información útil haciendo uso de la matriz de covarianza como lo indica la Ecuación 1.

Los datos para el análisis deben tener media cero, lo que se obtiene al restar cada dato del promedio de cada columna como se indica en la Ecuación 2.

$$\text{Datos}_{\text{Auto-escala}} = \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \quad i = 1, \dots, n \quad (3)$$

$$PC = \text{eigvector}(\text{Cov}(X))^T \times \text{Datos}_{\text{Auto-escala}} \quad (4)$$

Sin embargo, con el fin de estandarizar los datos, se recomienda que los datos estén en valores de auto-escala, los cuales se calculan como se indica en la Ecuación 3.

Entonces es necesario obtener los autovalores (eigenvalues) y autovectores (eigenvectors), con el fin de obtener las componentes principales como se indica en la Ecuación 4.

Para el caso de este trabajo, las 219 longitudes de onda que están presentes en cada espectro de absorbancia y se ilustran en la Figura 1 son las variables a tener en cuenta en este análisis por componentes principales. Esta es la razón en la utilización de PCA, para no analizar y estimar el exponente de Hurst y la dimensión fractal a 219 series de tiempo de absorbancia UV-Vis y proceder con el análisis de la primera componente principal, dada la alta correlación entre cada una de las longitudes de onda de los espectros de absorbancia.

1.3. EXPONENTE DE HURST

El exponente de Hurst es una técnica utilizada para analizar comportamientos de un sistema a lo largo del tiempo. Fue propuesta por el hidrólogo británico Harold Edwin Hurst (1880-1978), quien estudió las fluctuaciones de las alturas del nivel del Río Nilo como herramienta

para distinguir la existencia de series fractales y creó una metodología estadística para determinar si las tendencias de la serie de tiempo tienen o no persistencia después de determinar la duración de ciclos de las series de tiempo y establecer si una serie de tiempo es fractal, o si dicha serie de tiempo tiene "memoria de largo plazo", es decir si eventos de un periodo influyen en todos los siguientes. El cálculo del exponente de Hurst se realiza por medio del análisis del Rango Reescalado (R/S), llamado así por Benoit Mandelbrot (1924-2010), quien generalizó el trabajo de Hurst [11]. El proceso del cálculo del exponente de Hurst consta de varios pasos como sigue:

1- Dividir la serie de datos (N) en particiones (conjuntos de datos más pequeños (n)). Ejemplo: 100%, 75%-(3/4), 50%-(1/2), 25%-(1/4), etc. Para este trabajo se utilizará desde la serie de tiempo completa como primera partición hasta el valor de dividir el tamaño de la serie de tiempo en tres, es decir, se obtendrán 1901 particiones, cada una de tres valores.

2- Calcular la media de cada partición \bar{X} , la desviación de la media y cada valor dentro de cada partición $X = X_i$, la suma acumulada de las desviaciones y finalmente la desviación estándar S, para cada partición.

3- Calcular el rango de cada partición

$$\ln[\text{Reescalado}(R/S)] = \ln(A) + H \times \ln(n) \quad (5)$$

4- Realizar la tabla y gráfica del logaritmo natural del rango de cada partición (n) contra el logaritmo natural del rango dividido entre la desviación estándar (R/S) Reescalado.

5- Determinar la ecuación o modelo de ajuste para la gráfica. La pendiente obtenida en la ecuación es, en este caso, el exponente o parámetro de Hurst (H). El ajuste del modelo se realiza por medio de la regresión lineal como lo indica la Ecuación 5.

Donde $\ln A$ es el intercepto y H es la pendiente de la recta de ajuste y es el exponente de Hurst.

El valor del exponente de Hurst (H) está delimitado entre 0 y 1, lo que explica que el fenómeno se produjo debido a una invariancia del cambio de escala, que es una característica clave en las series de tiempo de tipo fractal.

El significado de los valores del exponente de Hurst [12] se reporta a continuación:

$0 \leq H < 0.5$, corresponde a un comportamiento de anti-persistencia o anti-correlacional en series de tiempo. Un aumento en los eventos del pasado supone un descenso en los eventos futuros y viceversa. Un sistema anti-persistente tiende a regresar constantemente a su lugar de origen y tiene la particularidad de que se trata de señales muy irregulares. Este tipo de comportamiento es conocido también como ruido rosa y se caracteriza porque es abundante en la naturaleza y se relaciona con los procesos de turbulencia. Si $H = 0$, entonces la serie es aleatoria y

corresponde a ruido blanco, significa que es un movimiento browniano. Implica un proceso totalmente aleatorio e independiente, con la ausencia de correlación entre incrementos de la señal.

Si $0.5 < H < 1$, se trata de series de tiempo que presentan persistencia o procesos correlacionados (un período de crecimiento es seguido por otro similar) y tienen una apariencia suave. Una serie de tiempo persistente se caracteriza por efectos de memoria a largo plazo. Teóricamente lo que sucede en el presente afectará el futuro para siempre, todos los cambios actuales están correlacionados con todos los cambios futuros. Las series persistentes son las más comunes en la naturaleza (Ruido negro).

$H = 1$, indica un comportamiento determinista. También se atribuye a este comportamiento como ruido negro, está relacionado con procesos cíclicos a largo plazo, como niveles de los ríos, cambios de precios en la bolsa de valores, etc.

1.4. CÁLCULO DE LA DIMENSIÓN FRACTAL D

El concepto de dimensión fractal se introduce respecto al hecho que la mayoría de los objetos de la naturaleza no tiene una dimensión entera, sino que están en una dimensión fraccionada y esta dimensión debe ser mayor que su dimensión topológica. Por esto, la dimensión fractal en sentido genérico es el número que sirve para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto geométrico o de

un objeto natural [13]. El exponente de Hurst está relacionado con la dimensión fractal D , de la siguiente manera: (i) para perfiles; para superficies y para volúmenes.

2. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

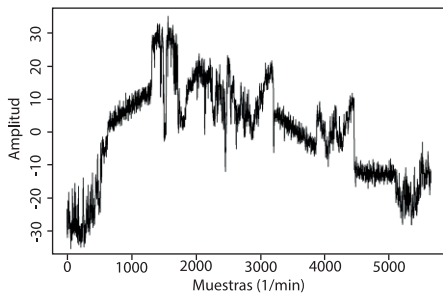
La Tabla 1 muestra los valores de las primeras componentes principales y el porcentaje de

variabilidad capturado por cada componente en las tres series de tiempo utilizadas.

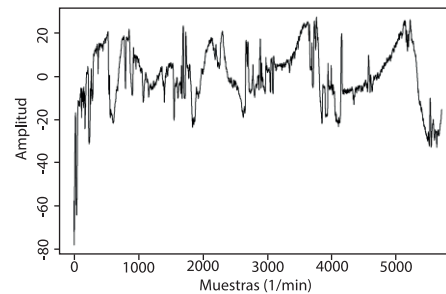
Se aplica el proceso para la determinación del exponente de Hurst a la primera componente principal, dado que es la que captura la mayor variabilidad en cada una de las tres bases de datos de espectros de absorbancia UV-Vis. La Figura 2 muestra la primera componente principal de cada uno de los tres sitios de estudio.

Tabla 1. Número de componente principal y porcentaje de

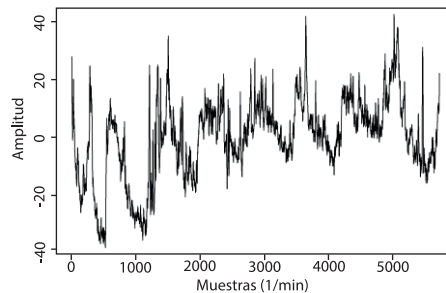
Componente Principal	Sitio de estudio		
	PTAR Salitre	EEG	PTAR San Fernando
	(% Variabilidad Capturada)		
1	94.2	82.7	85.9
2	2.9	10.5	7.1
3	0.6	2.7	2.0



a)



b)



c)

Figura 2. Primera componente principal para (a) PTAR Salitre, (b) EEG y (c) PTAR San Fernando.

A partir de estas tres series de tiempo (primera componente principal) de cada uno de los tres sitios de estudio se aplica el proceso para obtener el exponente de Hurst como se describió en el aparte 2.3. Los resultados se observan en la Figura 3.

La Figura 3 muestra las gráficas del logaritmo natural del rango de cada partición (n) contra el logaritmo natural del rango dividido entre la desviación estándar (R/S) Reescalado (círculos negros) y la ecuación de ajuste (línea azul) por medio de la regresión lineal utilizando la Ecuación 5, para cada uno de los tres sitios de estudio. Por lo tanto el valor del exponente de Hurst es: (i) 0.8 para PTAR Salitre, (ii) 0.85 para EEG y (iii) 0.89 para PTAR San Fernando. Sin embargo, para el sitio de estudio PTAR Salitre,

Figura 3(a), se observan mayores desviaciones para valores de mayores a seis. Para este caso el comportamiento puede ser de tipo bifractal. En la Tabla 2 se muestra la estadística del análisis de regresión.

Con los valores de los exponentes de Hurst, se procede a calcular la dimensión fractal a partir de lo indicado en el apartado 2.4, utilizando la relación para perfiles (ver resumen en Tabla 3).

La Tabla 3 muestra que para los tres sitios de estudio y después de haber realizado el proceso del análisis por componentes principales, sólo se utiliza la primera componente principal que captura una variabilidad de 94.2% para PTAR Salitre, 82.7% para EEG y 85.9% para PTAR San Fernando. El valor del exponente de Hurst

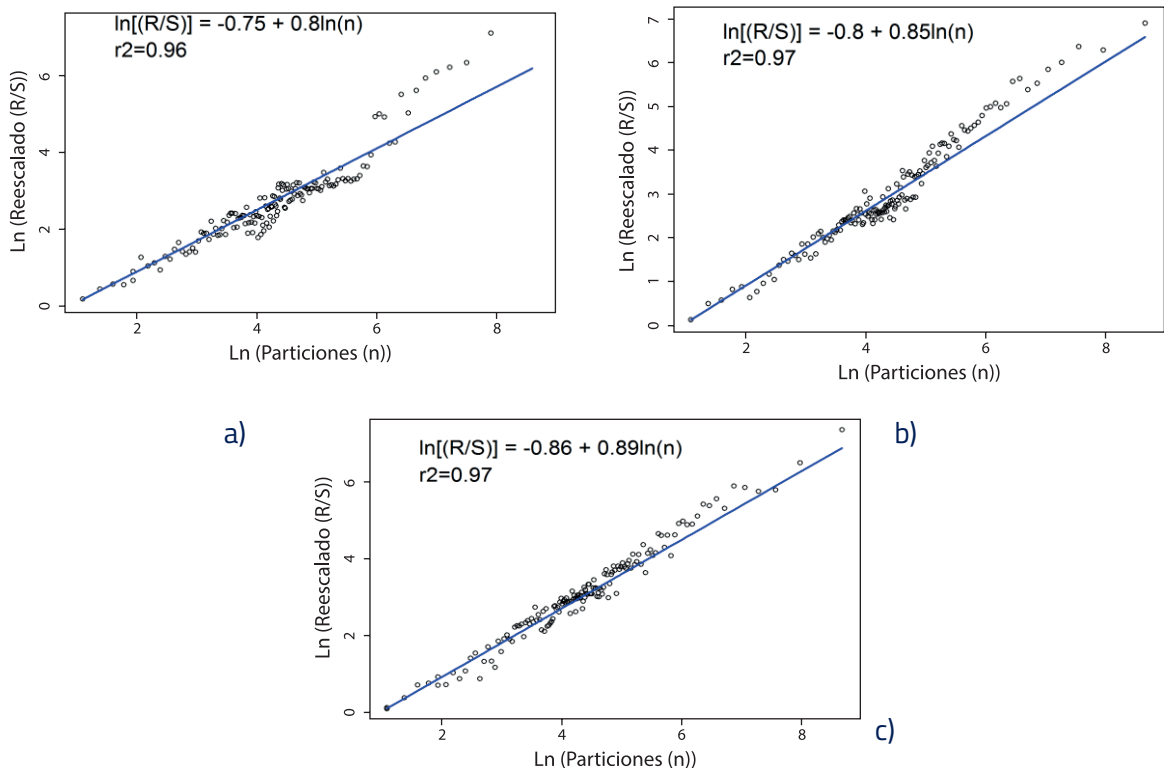


Figura 3. Ajuste por regresión lineal para (a) PTAR Salitre, (b) EEG y (c) PTAR San Fernando.

Tabla 2. Valores de estadística análisis de regresión.

Sitio de estudio	Coef. Ajuste (r^2)	Intercepto $\ln(A)$		Pendiente (H)	
		Valor	Error estándar	Valor	Error estándar
PTAR Salitre	0.96	-0.75	0.0083	0.8	0.0037
EEG	0.97	-0.8	0.076	0.85	0.0033
PTAR San Fernando	0.97	-0.86	0.0081	0.89	0.0035

Tabla 3. Valores del exponente de Hurst y Dimensión fractal.

Sitio de estudio	Exponente de Hurst	Dimensión Fractal
PTAR Salitre	0.8	1.2
EEG	0.85	1.15
PTAR San Fernando	0.89	1.11

es mayor a 0.8 y menor a 0.9, indicando que se trata de series de tiempo persistentes o procesos correlacionados, caracterizadas por efectos de memoria a largo plazo y son de tipo ruido negro. También se establece la dimensión fractal, que es el número que cuantifica el grado de irregularidad y fragmentación de las series de tiempo: (i) 1.2 para PTAR Salitre, (ii) 1.15 para EEG y (iii) 1.11 para PTAR San Fernando. Se refleja la medida topológica a escalas distintas, la dimensión fractal se acerca a una línea que tiene un aspecto de suavidad y con menor cantidad de picos.

3. CONCLUSIONES

Al aplicar el procedimiento PCA a las series de tiempo de absorbancia para reducir la dimensionalidad, sólo se utiliza la primera componente principal para los tres sitios de estudio PTAR-Salitre, EEG y PTAR San Fernando. Por lo tanto, al utilizar las componentes principales, éstas explican en conjunto entre el 82% al 94% de la variabilidad para todos los sitios de estudio. Esto implica

la reducción en el tiempo de procesamiento, en vez de calcular el exponente de Hurst y la dimensión fractal de cada una de las series de tiempo de los espectros de absorbancia UV-Vis, y puede ser aplicado en el procesamiento de series de tiempo de absorbancia UV-Vis en tiempo real.

Se establecieron, por medio del método de Rango Reescalado (R/S), los exponentes de Hurst para las tres series de tiempo de absorbancia UV-Vis. Para la serie de tiempo de la PTAR Salitre el valor de $H=0.8$, para la EEG el valor de $H=0.85$ y para la PTAR San Fernando el valor de $H=0.89$. Esto significa que las tres series de tiempo de absorbancia UV-Vis son persistentes dado que el exponente de Hurst es mayor a 0.5, lo que implica que tienen memoria y comportamientos similares en el futuro (ruido negro - mayor probabilidad a que el aumento en los valores sea seguido por un aumento en los valores a corto plazo y una disminución en los valores tiene mayor probabilidad que sea seguida por la disminución de los valores a corto plazo) e indica que a largo plazo podrían tener la misma tendencia

o que pueden repetir este comportamiento en el futuro. La determinación del exponente de Hurst es un método estadístico utilizado para deducir las propiedades de una serie de tiempo de absorbancia UV-Vis sin realizar suposiciones respecto a la estacionariedad o no de las mismas.

A partir de los valores de los exponentes de Hurst se determinan las dimensiones fractales para las tres series de tiempo de absorbancia UV-Vis en los tres sitios de estudio, obteniendo en promedio una dimensión fractal de 1.153. Esto implica que para la longitud de 5705 muestras, 4 días y 8 horas aproximadamente para PTAR Salitre y EEG, y 8 días y 3 horas aproximadamente para PTAR San Fernando, las tres series de tiempo tienen una estructura fractal. Estas series de tiempo analizadas presentan persistencia y con alta auto-similitud. Esto implica que un aumento en el valor de absorbancia es seguido por otro similar y que una disminución en el valor de absorbancia es seguida por otra similar. Estas series de tiempo persistentes se caracterizan por efectos de memoria a largo plazo.

Los anteriores resultados, estimación del exponente de Hurst y la dimensión fractal, indican que se puede continuar con el análisis espectral de las series de tiempo de absorbancia UV-Vis para los tres sitios de estudio y realizar por medio de técnicas de inteligencia artificial el pronóstico de los valores de absorbancia UV-Vis y la calidad del agua para apoyar los procesos toma de decisiones en tiempo real en las plantas de tratamiento de aguas residuales.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Empresa de Acueducto y Alcantarillado de Bogotá – EAAB

(Contrato Administrativo No. 9-0725100-0763-2010) y a Empresas Públicas de Medellín – EPM) por proveer la información utilizada en esta investigación. Este trabajo se ha realizado con la colaboración del Centro de Computación de Alto Desempeño (CECAD) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá D.C., Colombia. (<http://cecad.udistrital.edu.co>).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] van den Broeke, J. (2007). On-line and In-situ UV/Vis Spectroscopy: Real time multi parameter measurements with a single instrument. *AWE International*, 55-59.
- [2] Gruber, G., Bertrand-Krajewski, J.-L., De Beneditis, J., Hochedlinger, M. & Lettl, W. (2006). Practical aspects, experiences and strategies by using UV/VIS sensors for long-term sewer monitoring. *Water Practice & Technology*, 1-8. doi:10.2166/WPT.2006020.
- [3] Rieger, L., Langergraber, G., Thomann, M., Fleischmann, N. & Siegrist, H. (2004). Spectral in-situ analysis of NO₂, NO₃, COD, DOC and TSS in the effluent of a WWTP. *AutMoNet – 2nd IWA Conference on Automation in Water Quality Monitoring* (pp.29-36). Viena: IWA Conference on Automation in Water Quality Monitoring.
- [4] Salgado, R., Pinheiro, H.M., Ferreira, F., Saldanha, J. & Louren, N. (2013). In situ UV-Vis spectroscopy to estimate COD and TSS in wastewater drainage systems. *Urban Water Journal*, 1-12. doi:10.1080/1573062X.2013.783087.
- [5] Torres, A., Lepot, M. & Bertrand-Krajewski, J.-L. (2013). Local calibration for a UV/Vis

- spectrometer: PLS vs. SVM. A case study in a WWTP. Proceedings of 7th International Conference on Sewer Processes & Networks. Sheffield, Reino Unido.
- [6] Rodríguez, E. (2012). Hidrología de Hurst y Box Counting para el análisis de persistencia, volatilidad y riesgo en dos series de tiempo colombianas. Cuadernos Latinoamericanos de Administración, VIII(14), pp.41-50.
- [7] Mandelbrot, B. (1988). Los objetos fractales: forma, azar y dimensión. España: TusQuets Editores.
- [8] Quintero, O. & Delgado, J. (2011). Estimación del Exponente de Hurst y la dimensión Fractal de una superficie topográfica a través de la extracción de perfiles. Geomática UD.GEO, 5, pp.84-91.
- [9] Langergraber, G., Fleischmann, N., Hofstaedter, F. & Weingartner, A. (2004). Monitoring of a paper mill wastewater treatment plant using UV/VIS spectroscopy. IWA Water Science and Technology, 49(1), pp.9-14.
- [10] Shlens, J. (2009). A Tutorial on Principal Component Analysis. La Jolla, California, EE.UU.: Salk Institute for Biological Studies.
- [11] Alvarez-Ramirez, J., Echeverria, J. & Rodriguez, E. (2008). Performance of a high-dimensional R/S method for Hurst exponent estimation. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. doi:10.1016/j.physa.2008.08.014.
- [12] Carr. J. (1997). Statistical self-affinity, fractal dimension, and geologic interpretation. Engineering Geology, 48, pp.269-282.
- [13] Rehman, S. & Siddiqi, A. (2009). Wavelet based Hurst exponent and fractal dimensional analysis of Saudi climatic dynamics. Chaos, Solitons and Fractals, 40, pp.1081-1090. doi:10.1016/j.chaos.2007.08.063.