UTILIZACIÓN DEL GEOGEBRA EN EL PRIMER AÑO DE CARRERAS UNIVERSITARIAS. EJEMPLOS Y CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS

USE OF GEOGEBRA IN THE FIRST YEAR OF UNIVERSITY CAREERS. EXAMPLES AND DIDACTIC CONSIDERATIONS

Dr. C. Carlos Manuel Hernández Hechavarría

carlosmhh@uo.edu.cu

M. Sc. Aracelis Revilla Ocejo

aracelis@uo.edu.cu

Universidad de Oriente, Cuba

Resumen

El GeoGebra brinda la posibilidad de crear múltiples alternativas para el perfeccionamiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, entre otras, la integración de contenidos de distintas áreas del conocimiento, la profundización en aspectos geométricos y la relación con procedimientos algebraicos, también para la atención a las particularidades de los escolares con vistas a estimular y desarrollar adecuadamente su creatividad.Considerando el desconocimiento e ínfimo aprovechamiento de las posibilidades que ofrece este software para el perfeccionamiento de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en el primer año de carreras universitarias y, la necesidad de brindarle una atención diferenciada a los escolares atendiendo sus conocimientos previos, habilidades y actitudes para que puedan enfrentar las exigencias del nuevo nivel educacional, se muestran ejemplos vinculados a varios contenidos y consideraciones didácticas.Se ilustra la utilización del GeoGebra en la consulta a un alumno y de los deslizadores para variar las funciones y con ello ampliar la cantidad y variedad de ejemplos, con disímiles niveles de exigencias y posibilidades de atender las diferencias individuales de los escolares en distintas formas organizativas de la enseñanza – aprendizaje. Se expone un tratamiento didáctico para la derivada como función a partir del GeoGegra en Matemática I y el aprovechamiento de las construcciones realizadas para la profundización, sistematización de contenidos y el reconocimiento de relaciones geométricas y algebraicas involucradas en el análisis de funciones. Los ejemplos y consideraciones expuestas contribuyeron a resolver problemas diagnosticados.

Palabras Clave:GeoGebra, didáctica, matemática, ejemplos.

Abstract

GeoGebra offers the possibility of creating multiple alternatives for the improvement of teaching and learning of mathematics, among others, the integration of contents of different areas of knowledge, the deepening of geometric aspects and the relationship with algebraic procedures, also for the Attention to the particularities of schoolchildren with a view to stimulating and properly developing their creativity.Considering the lack of knowledge and small use of the possibilities offered by this software for the improvement of the teaching and learning of mathematics in the first year of university careers and the need to provide a differentiated attention to the students attending their previous knowledge, skills And attitudes so that they can meet the demands of the new educational level, are shown examples linked to various content and didactic considerations.It illustrates the use of GeoGebra in the consultation of a student and of the sliders to vary the functions and with it to increase the quantity and variety of examples, with different levels of exigencies and possibilities of attending the individual differences of the students in different organizational forms of teaching - learning. It presents a didactic treatment for the derivative as a function from GeoGebra in Mathematics I and the use of the constructions made for the deepening, systematization of contents and the recognition of geometric and algebraic relations involved in the analysis of functions. The examples and considerations discussed helped to solve diagnosed problems.

Keywords:GeoGebra, didactics, mathematics, examples.

1. Introducción

El mejoramiento de la enseñanza – aprendizaje de la matemática en carreras universitarias es uno de los propósitos fundamentales en Cuba y en este sentido se invierten cuantiosos recursos humanos y materiales que generalmente no son suficientemente aprovechados, por ejemplo el acceso internet para obtener informaciones y software libres gratuitos de alta calidad que pueden contribuir notoriamente a la enseñanza - aprendizaje de la matemática.

La utilización de software con las particularidades antes mencionadas es marcadamente insuficiente, en algunas carreras y años la situación es crítica pues los docentes, por diversas razones, prefieren la enseñanza tradicional con pizarra y tiza, soslayando las concepciones actuales basadas en las nuevas tecnologías que indudablemente son superiores.

En la literatura científica y sobre didáctica de la matemática se reconoce la importancia de la geometría dinámica y que no se limita a un nivel educativo, a un software en particular, a un aspecto o área específica de la geometría. Entre otros criterios acerca de sus usos Gutiérrez y Jaime (2015) afirman:

> Uno de los principales usos de los entornos de geometría dinámica plana es promover el desarrollo del razonamiento matemático de los estudiantes y el aprendizaje de la demostración. Los resultados de McClintock et al. (2002) y Mithalal (2010a, 2010b) parecen indicar que sí es posible aprovechar también los programas de geometría dinámica espacial con dichos objetivos. (p.57)

En la afirmación anterior se mencionan dos propósitos importantes de la geometría dinámica y muchos otros pueden encontrarse en distintas fuentes. Los autores de este trabajo han constatado la utilidad del software GeoGebra para el tratamiento de contenidos en las distintas enseñanzas, algunos ejemplos aparecen en los artículos “Consideraciones para el uso del GeoGebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones” (Hernández, 2013) y “Actividad investigativa escolar y ejercicios en matemáticas: El papalote” (Hernández, 2015), también otros en artículos inéditos y materiales docentes.

En este trabajo se ilustra el mejoramiento de la enseñanza – aprendizaje de la matemática en carreras universitarias de Formación de docentes, Ingeniería y Arquitectura en los últimos años a partir de una muestra de ejercicios y consideraciones didácticas con asistencia del GeoGebra.

Algunos de los ejercicios, soluciones y criterios que se presentan constituyen complementos de otros expuestos en trabajos anteriores, que reflejan variadas necesidades y posibilidades para la transformación de ejercicios, también se retoman, sintéticamente, algunas tendencias señaladas con el propósito de realizar nuevas observaciones.

En algunos casos, como el primer ejercicio, no es nueva su formulación, pero sí la solución del mismo, con marcadas particularidades y de aquí se justica una variante de este ejercicio que cambia notablemente exigencias de orden constructivo y la parte procedimental inicial de solución. También se comentan otras variantes de ejercicios y vías de solución.

Se mantienen o destacan aspectos didácticos novedosos respecto a exigencias de orden, movilidad y construcciones que requieren una atención especial con vista a la atención diferenciada a los estudiantes en busca de la estimulación de su creatividad.

2. Materiales y métodos

Se utiliza el asistente GeoGebra para ilustrar el mejoramiento de la enseñanza - aprendizaje de la matemática en las carreras universitarias mencionadas a partir de una muestra de ejercicios y consideraciones didácticas.

El GeoGebra es un software interactivo que permite abordar e integrar, con carácter dinámico, contenidos de distintas áreas de la matemática con facilidad y exquisita visibilidad, aspectos de particular importancia para la enseñanza - aprendizaje y la estimulación de la creatividad de los docentes y los escolares.

Aunque uno de los aspectos más llamativos de este software es la construcción de figuras geométricas dinámicas asociadas a datos algebraicos, otros no son igualmente importantes, como el cálculo diferencial e integral, el análisis de funciones, la vista gráfica 3D que permite estudiar con profundidad planos, cuerpos y funciones de dos variables, la Vista de Cálculo Simbólico “CAS” permite calcular derivadas, integrales, sistemas de ecuaciones.

La propuesta de consideraciones didácticas y ejercicios, fueron valorados favorablemente entre docentes y estudiantes, en espacios de preparaciones metodológicas, conferencias y consultas ofrecidas por los autores, es decir fueron utilizados esencialmente métodos cualitativos en esta dirección.

3. Resultados y discusión

3.1 GeoGebra en el primer año de carreras universitarias

La proposición de ejercicios de construcción geométrica con exigencias en cuanto al orden en que se realiza, la movilidad de puntos y la realización de construcciones auxiliares es un tema importante que requiere mayor atención en la práctica escolar ya que posibilita potenciar y medir el desarrollo de determinados conocimientos y habilidades, el desarrollo de la imaginación geométrica, el pensamiento lógico y otros aspectos medulares.

Para realizar una construcción geométrica determinada pueden elegirse distintas vías y orden para realizar las acciones constructivas que implica, cuando un ejercicio no tiene tales exigencias, el escolar puede seleccionar la vía que desee, la primera que encuentre sin pensar en otras que pudieran ser más racionales y originales; de esta manera resuelve el ejercicio en menos tiempo y obtiene la máxima puntuación o reconocimiento del docente. Siendo así, es necesario que el docente valore la importancia didáctica de las referidas exigencias, su repercusión en aspectos tan importantes como la racionalidad, la creatividad, el redescubrimiento y la utilización de ciertos contenidos entre otros.

Entre las ventajas más importantes que ofrece el planteamiento de ejercicios con exigencias de orden de construcción está la posibilidad para "el aumento o disminución del nivel de dificultad del ejercicio", por ejemplo, mediante indicaciones de orden constructivo pueden darse ideas o pautas para la realización de construcciones complejas o inimaginables para algunos escolares, de esta manera se baja el nivel de dificultad; por el contrario, si las exigencias excluyen las vías constructivas más sencillas para los escolares, el grado de dificultad aumenta y los obliga a desarrollar una actividad investigativa favorecedora de la obtención de nuevos conocimientos y habilidades. La movilidad de puntos o partes de la figura es otro aspecto que ofrece múltiples ventajas para la enseñanza – aprendizaje de la geometría, sobre todo si se realiza con un software de geometría dinámica.

A partir de ejercicios, variantes y soluciones de estos, que están estrechamente relacionados pero claramente distinguibles por ciertas peculiaridades, esencialmente de orden, movilidad y construcciones con asistencia del GeoGebra, se ofrecen consideraciones conducentes a un mejor tratamiento didáctico de contenidos geométricos incluyendo, entre otros elementos, la atención a tendencias constructivas desacertadas, la inadecuada aplicación de conceptos y procedimientos, el desarrollo de habilidades; en sentido general contribuyen al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje atendiendo a las particularidades de los escolares.

El ejercicio que se presenta a continuación desde su formulación plantea exigencias de orden constructivo y movilidad; la vía de solución, observaciones didácticas y tendencias constructivas que se revelan suscitan nuevos análisis didácticos en cuanto a variantes de ejercicios y soluciones que no se pretenden agotar en este artículo pero se induce a ello, algunas justificaciones sencillas se omiten por considerarse sencillas, lo cual no significa que sean desatendidas en el orden didáctico por los docentes en la práctica escolar atendiendo a las particularidades de los escolares.

Ejercicio 1: Construya, utilizando el GooGebra, un triángulo isósceles ABC, luego la circunferencia circunscrita a este y finalmente, la circunferencia tangente a la anterior y a los lados iguales del triángulo. La figura debe permitir la movilidad de los vértices del triángulo.

Una de las vías posibles consiste en: situar un punto "A" deslizable en el eje X, pudiera estar inicialmente en (-1,0), luego situar un punto "B" que no esté sobre el eje X, pudiera estar inicialmente en (2,1), y obtener su imagen B´ por simetría axial con respecto al eje X y renombrar B´ por C. Al unir estos puntos se obtiene un triángulo isósceles, con AB=AC, que permite la movilidad de los vértices. Con la opción de circunferencia por tres puntos se traza la circunferencia circunscrita al triángulo.

Para trazar la nueva circunferencia, tangente a la anterior y a los lados iguales del triángulo, se determina el punto de tangencia de ambas "D", mediante la intersección de la primera con el eje X y, se traza la tangente a la circunferencia en este punto (también pudiera ser la paralela a BC, que pasa por D). Posteriormente se prolonga uno de los lados iguales, por ejemplo AB, y se determina su intersección "E" con la tangente. El centro de la nueva circunferencia "F" se determina por la intersección de la bisectriz del ángulo DEA con el eje "X". Finalmente se traza la circunferencia que pasa por D con centro en F.

La construcción descrita aparece en la figura 1, en la que se destaca con colores o tipos de línea elementos importantes como el triángulo y la bisectriz.

Esta construcción permite la movilidad de sus puntos a partir de los puntos libres A y B, al mover el vértice

A se mantiene fijo el lado BC y al mover a B, se mantiene fijo A. Estas particularidades unido a que el eje X se mantiene como eje de simetría del triángulo y coincide con la mediatriz de AB y bisectriz del ángulo BAC, facilitan el análisis conceptual y procedimental de diversos aspectos estáticos y dinámicos sobre triángulos y circunferencias, aplicación de conocimientos sobre ángulos, bisectrices, tangentes, paralelismo y perpendicularidad entre rectas.

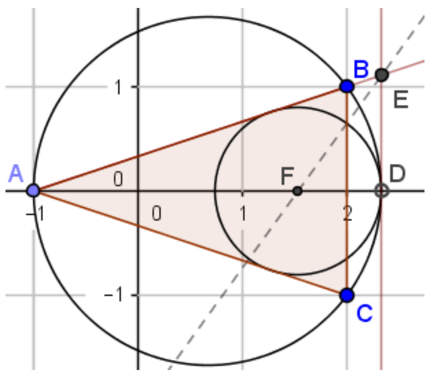

Figura 1. Construcción ejercicio 1

Variante del ejercicio anterior, con respecto al orden de construcción.

Ejercicio 2: Construya, utilizando el GooGebra, una circunferencia, luego un triángulo isósceles ABC inscrita en esta, y finalmente, la circunferencia tangente a la anterior y a los lados iguales del triángulo. La figura debe permitir la movilidad de los vértices del triángulo.

Aunque este ejercicio se diferencia solamente del anterior en una exigencia de orden constructivo, promueve ideas y procedimientos iniciales diferentes a los utilizados en el primero, lo cual constituye un aspecto importante para la estimulación y desarrollo de la creatividad de los escolares.

Uno de dichos procedimientos para la solución de la parte inicial del ejercicio consiste en:

1. Situar un punto O, en el origen de coordenadas.
2. Un punto A sobre el eje Y.
3. La circunferencia que pasa por A con centro O.
4. Situar un punto B sobre la circunferencia.
5. Trazar la recta que pasa por B paralela al eje X (también pudiera ser la perpendicular al eje Y).
6. Determinar el vértice C, punto de intersección de la recta anterior (distinto de B), con la circunferencia.

La figura 2 muestra el resultado alcanzado con el procedimiento anterior, pero también pudo alcanzarse por otras vías, incluyendo algunas que no respeten el orden de construcción, por tanto es de extraordinaria importancia que el docente preste especial atención a los procedimientos utilizados; en este sentido pudiera revisar el protocolo de construcción del ejercicio, aspecto que puede potenciarse con el aprovechamiento de las nuevas tecnologías de la información y comunicación disponibles, por ejemplo de aulas virtuales, el correo electrónico y otros medios que posibilitan la socialización y evaluación de los ficheros GeoGebra e informes elaborados por los escolares.

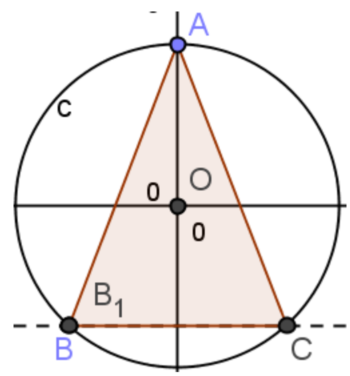

Figura 2. Construcción ejercicio 2

Muchas otras variantes de ejercicios y vías de solución pudieran requerirse en el procesos de enseñanza aprendizaje acorde con las particularidades de los escolares, por ejemplo, a diferencia de las anteriores, dejar el completamiento de la construcción del triángulo para el final, con diferentes niveles de previsión o asociación con construcciones anteriores.

Para ilustrar lo antes expuesto se presenta la siguiente vía que deja para el final el trazado del triángulo aunque esté muy ligada a la construcción de las circunferencias involucradas:

1. Trazar un segmento cualquiera AW y determinar su punto medio O.
2. Trazar las rectas perpendiculares a este segmento que pasan por A y W.
3. Situar un punto X sobre la recta perpendicular al segmento AW que pasa por W.
4. Trazar el segmento AX y la circunferencia que pasa por A con centro en O. Determinar

el vértice B en la intersección de este segmento y circunferencia.

5. Trazar la bisectriz de WXA y determinar su intersección O_1con el segmento AW, que es el centro de la circunferencia tangente a la anterior y a los lados iguales del triángulo isósceles ABC.

El vértice C se puede obtener por simetría axial de B sobre el segmento AW u otra vía. En la figura 3 se muestra la figura obtenida con el procedimiento anterior, exceptuando la determinación del vértice C y el trazado del triángulo con el propósito de destacar los aspectos esenciales de esta vía, y que no es difícil el procedimiento obviado para completar la figura con asistencia del GeoGebra.

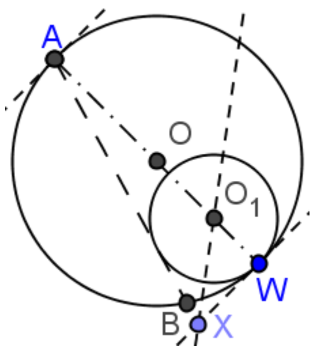

Figura 3. Deja triángulo para el final

Si bien los ejercicios, soluciones y criterios anteriores ilustran variantes interesantes no agotan las necesidades de la práctica escolar en cuanto a la atención a las particularidades de los escolares y de superación de docentes sobre matemática dinámica y creatividad, por tanto se sugiere la consulta de otros trabajos, entre ellos "Ejercicios geométricos con exigencias de orden, movilidad y construcción con asistencia del GeoGebra: ejemplos y observaciones didácticas"(Hernández, 2017) del cual se toman algunos fragmentos para ilustrar lo antes planteado.

En dicho trabajo se expone una solución del primer ejercicio con el siguiente orden: segmento [A, B], mediatriz del segmento [A, B], punto sobre C, sobre la mediatriz; triángulo A, B, C, circunferencia que pasa por A, B, C, intersección de la mediatriz con la circunferencia (D y E), tangente a la circunferencia que pasa por E, semirrecta desde C que pasa por B, punto de intersección de la tangente y la semirrecta "F", bisectriz del ángulo B, F, E, punto de intersección de la bisectriz con la mediatriz "G", circunferencia con centro en G y punto E. la que da como resultado la figura 4.

También se exponen criterios y tendencias constructivas negativas para determinar el centro de la circunferencia tangente a los lados iguales del triángulo y a la circunscrita a dicho triángulo asociadas a:

- ✓ La situación de un punto G en la mediatriz del lado AB y procedimientos sin comprobar o valorar la exactitud por vías no limitadas a la observación visual o estática de la figura. Vías que no garantizan una posición exacta de G, pues queda a la apreciación visual, cuestión que tampoco es reconocida por los escolares y por tanto no emprenden otras vías que justifiquen una posición exacta de G.

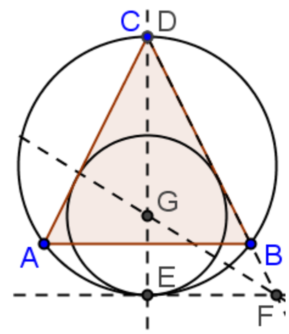

Figura 4. Construcción ejercicio 1

- ✓ No considerar todas las exigencias en cuanto a la movilidad de puntos, en particular la dinámica de la figura al mover los vértices del triángulo. En esta tendencia se incluyen los casos de construcciones particulares de triángulos u otras figuras que, por las razones entre sus lados, amplitudes de ángulos, la fijación de puntos con la opción del GeoGebra y otras particularidades permiten obtener con facilidad al centro de la circunferencia menor "G" sin garantizar las propiedades de la figura al mover algunos de sus puntos.
- ✓ Realizar construcciones sin el orden exigido por la carencia de ciertos conocimientos, habilidades o la creencia de que el orden no tiene mayor importancia.
- ✓ Tendencia a la ejecución inmediata sin considerar conceptos y definiciones vinculados a los datos, exigencias del ejercicio, es decir, sin los fundamentos matemáticos pertinentes.
- ✓ En la fase inicial, cuando están buscando ideas de solución, no realizan figuras de análisis convenientes ni descomponen el problema en subproblemas para analizar aspectos específicos

obviando momentáneamente algunas exigencias de orden constructivo.

Se subraya que las referidas tendencias reflejan insuficiencias que presentan los escolares y la importancia del planteamiento y análisis de soluciones de ejercicios con exigencias constructivas en cuanto al orden que se realiza, la movilidad de puntos y la realización de construcciones auxiliares. Que no se niega la importancia o conveniencia de que los docentes planteen ejercicios con otras características o planteen nuevas interrogantes e ideas novedosas a partir de las vías utilizadas y figuras obtenidas, por ejemplo: ¿se les ocurre alguna vía de construcción novedosa para obtener una figura semejante a la Figura 4 sin tener en cuenta las exigencias de orden constructivo y de movilidad de los vértices del triángulo del ejercicio?

Como vía posible se encuentra la siguiente: trazar un ángulo KFM con una amplitud aproximada a la del ángulo BFE de la Figura 4 (no hace falta que sea igual), por ejemplo K = (1, 2), F = (2, 0) y M = (-2, 0), denotar al punto de intersección de los ejes X e Y o punto medio de MF por E = (0, 0), trazar las semirrectas FK y FE, trazar la recta que pasa por E perpendicular a FM y denotar la intersección de esta con la semirrecta FK por C. Trazar la circunferencia que pasa por E con centro en el punto medio de CE (será la circunscrita al triángulo ABC, denotar por B al punto de intersección de FK con la circunferencia, trazar por B una paralela a FE y denotar por A al punto de intersección de esta con la circunferencia. Trazar la bisectriz del ángulo KFM y denotar con G la intersección de esta con CE, trazar la circunferencia que pasa por E con centro G.

La importancia del GeoGebra para el desarrollo de la vía de solución anterior es evidente, tanto desde una dinámica total como parcial, es decir con posibilidad de fijar algunos puntos u otros elementos para determinados análisis.

También se muestran ejercicios, como el siguiente, estrechamente relacionados con los anteriores, con variantes de formulación, exigencias y vías de solución que promueven y respaldan comparaciones y reflexiones didácticas.

Ejercicio 3: Un triángulo isósceles HJG de base HJ está inscrito en una circunferencia de diámetro 1, una circunferencia de radio menor es tangente a los lados iguales del triángulo y a la circunferencia circunscrita a este. Si la razón entre la altura y la base del triángulo es 1, determine la longitud del radio de la circunferencia menor con el GeoGebra.

En este se hace notar diferencias esenciales con el anterior, en este no existen exigencias para la construcción de una figura y por tanto se puede realizar de distintas maneras, entre otras, utilizando una figura de análisis, una figura incompleta o no realizar ninguna construcción bajo determinadas justificaciones o procedimientos que permitan omitirla sin afectar la explicación de la solución, pues es un ejercicio geométrico de cálculo, donde el propósito es determinar la longitud del radio de una circunferencia.

La omisión de figuras o partes de ellas generalmente demanda el desarrollo de ciertas capacidades, habilidades y conocimientos, en particular, de imaginación geométrica y representación mental, el establecimiento de vínculos entre distintos contenidos matemáticos y el aprovechamiento de las facilidades constructivas del software o medios a utilizar. Una vía de solución que puede ilustrar lo antes expuesto y tomada como punto de partida para reflexiones didácticas es la que se muestra en el protocolo de construcción (Tabla 1), y la Figura 5 que es la resultante.

Tabla 1.Protocolo de construcción de la Figura 2

nº	Nombre	Definición	Valor
1	Punto A	Punto de intersección de EjeX, EjeY	A = (0, 0)
2	Punto B	Punto sobre EjeX	B = (1, 0)
3	Polígono polígono1	Polígono[A, B, 4]	polígono1 = 1
3	Segmento a	Segmento [A, B] de Polígono polígono1	a = 1
3	Segmento b	Segmento [B, C] de Polígono polígono1	b = 1
3	Punto C	Polígono[A, B, 4]	C = (1, 1)
3	Punto D	Polígono[A, B, 4]	D = (0, 1)
3	Segmento c	Segmento [C, D] de Polígono polígono1	c = 1
3	Segmento d	Segmento [D, A] de Polígono polígono1	d = 1
4	Punto E	Punto medio de c	E = (0.5, 1)
5	Recta e	Bisectriz de B, A, E	e: -0.53x + 0.85y = 0
6	Recta f	Bisectriz de A, B, E	f: -0.53x - 0.85y = -0.53
7	Punto F	Punto de intersección de e, f	F = (0.5, 0.31)
8	Número distanciaFa	Distancia de F a a	distanciaFa = 0.31

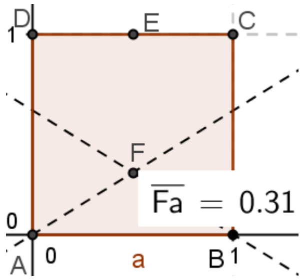

Figura 5. Construcción ejercicio 3

Como puede apreciarse en la vía anterior se omiten figuras involucradas y justificaciones, sin que afecte el objetivo de determinar el radio de la circunferencia menor con el GeoGebra, que es la distancia de F al lado AB (0.31). La no representación de figuras declaradas en el enunciado del ejercicio y justificaciones no significa que dejaron de considerarse.

El análisis de la vía anterior por los docentes puede suscitar diversos criterios didácticos y valoraciones sobre su obtención y utilización en distintos contextos e instituciones escolares. Es muy probable que los primeros criterios estén referidos a la racionalidad de la vía de solución presentada, la omisión de figuras involucradas, la ubicación y notación de puntos, la justificación de procedimientos y otros aspectos formales, el nivel de complejidad del ejercicio y dificultades para su comprensión. También puede revelar creencias de docentes y necesidades en cuanto a la preparación metodológica.

La racionalidad y omisiones en esta vía de solución tienen un carácter intencional, dirigido a la estimulación de los docentes para la realización de análisis constructivos y didácticos con vista al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje, pues los contenidos y procedimientos matemáticos necesarios son básicos, al igual que los concernientes al GeoGebra. El autor de este artículo, en cursos impartidos e intercambios sostenidos con docentes, ha constatado el favorable impacto de la presentación y análisis de soluciones con tales características.

Con el GeoGebra resulta muy sencillo y rápido representar todas las figuras involucradas, destacar elementos mediante colores, grosor de líneas y otros aspectos que obviamente facilitan su comprensión y explicación; ejemplos de estos complementos se muestran en la Figura 6: con línea continua el triángulo y las dos circunferencias, con líneas discontinuas construcciones auxiliares y con color rojo los radios de tangencia de la circunferencia menor con la mayor y los lados iguales del triángulo.

Adicionalmente se muestra el centro de la circunferencia mayor y la distancia entre los centros de ambas circunferencias calculados con el GeoGebra.

La Figura 6 supera en detalles a la Figura 5, permite esclarecer y facilitar la explicación de aspectos y fundamentos no revelados de manera explícita anteriormente, en especial: la construcción del triángulo HJG y la circunferencia mayor a partir del cuadrado ABCD, igualmente el trazado de las bisectrices y la circunferencia menor.

La exigencia de que “la razón entre la altura y la base del triángulo es 1”, estimula ideas y análisis que posibilitan “la construcción del triángulo HJG y la circunferencia mayor a partir de un cuadrado de lado 1”, en este caso situando a G en el punto medio del lado CD, determinando el centro de la circunferencia inscrita “X” aprovechando la opción de punto medio del GeoGebra y trazando la circunferencia con centro en este que pasa por G.

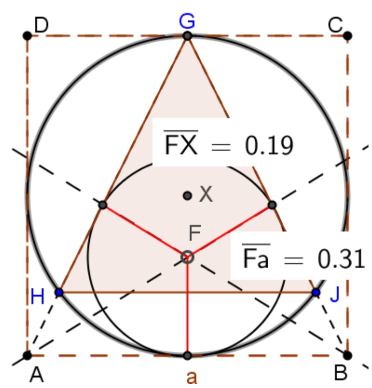

Figura 6. Con figuras involucradas y complementos

Los vértices H y J pueden obtenerse mediante la intersección de los segmentos GA y GB con la circunferencia pues de esta manera se garantiza que esté inscrito en la circunferencia y, por su semejanza con el triángulo ABC, que sea isósceles y la razón entre la base y la altura. El trazado de dos bisectrices del triángulo ABG permite determinar, en su intersección, el centro de la circunferencia menor “F”, es decir, de la que es tangente a los lados iguales y a la circunferencia mayor. Los radios de tangencia se destacan en la figura con color rojo.

El ejercicio 3 y las consideraciones didácticas sobre este posibilitan interesantes comparaciones con los dos primeros pero no las agotan, invitan a continuar profundizando en la formulación de problemas matemáticos acorde con las particularidades de los escolares.

3.2 La función y la función derivada esclarecidas con el GeoGebra.

Derivada como función es tratada de distintas maneras, el GeoGebra ofrece la posibilidad de mejorar sustancialmente la ejemplificación. Presentar la función y la función derivada en un mismo sistema de coordenadas ofrece ventajas visuales y procedimentales que se explican con apoyo de la Figura 7 y su protocolo de construcción (Tabla 2). Mediante construcciones auxiliares, tales como: las rectas perpendiculares al eje X que pasan por los ceros de la función g= f´ (A y B) y su intersección con el gráfico de f (C y D) se facilita considerablemente reconocer la relación entre la monotonía de la función f y el signo de la función deriva a partir de un simple reconocimiento visual de los tramos en que se encuentra por encima o por debajo del eje X. Además permite percatarse de que la función tiene extremos en los puntos en los que f´=0.

Situar un punto desplazable sobre el gráfico de f y la tangente en este (t) es muy sencillo e importante, pues posibilita observar las transformaciones de la pendiente de esta tangente: sus signos en los intervalos determinados por los ceros de la función derivada (g), aspecto que se refuerza con las rectas perpendiculares al eje X que pasan por estos ceros, permite corroborar el comportamiento de f´ en estos ceros y su vecindad, en particular el cambio de signo al pasar de valores anteriores a posteriores, lo que pudiera aprovecharse para inducir el reconocimiento de un criterio para la determinación de extremos de funciones diferenciables.

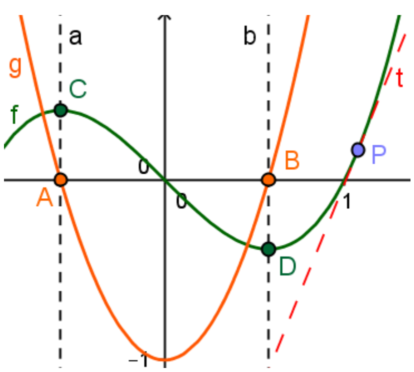

Figura 7. Función y función derivada

Sobre esta construcción también pueden utilizarse otros recursos que ofrece el GeoGebra para la visualización, tales como “rastro” y “animación” para estudiar la tangente a la función f en distintas posiciones de P; pero debe tenerse en cuenta los intervalos y la velocidad con que se realiza, pues no todos los alumnos tienen las mismas capacidades y habilidades para relacionar excesiva información visual, es decir debe valorarse la conveniencia de su utilización en dependencia de las particularidades de los escolares.

Tabla 2. Protocolo de la construcción

nº	Nombre	Definición	Valor
1	Función f		f(x) = x³ - x
2	Función g		g(x) = 3x² - 1
3	Punto A	Punto de intersección de g, EjeX	A = (-0.58, 0)
3	Punto B	Punto de intersección de g, EjeX	B = (0.58, 0)
4	Recta a	Recta que pasa por A perpendicular a EjeX	a: x = -0.58
5	Recta b	Recta que pasa por B perpendicular a EjeX	b: x = 0.58
6	Punto P	Punto sobre f	P = (1.07, 0.16)
7	Recta t	Tangente a f en x = x(P)	t: y = 2.46x - 2.48
8	Punto D	Punto de intersección de f, b	D = (0.58, -0.38)
9	Punto C	Punto de intersección de f, a	C = (-0.58, 0.38)

El aprovechamiento de construcciones realizadas con el GeoGebra es de particular importancia para la indagación por los escolares con vista a redescubrir nuevas relaciones entre contenidos y la sistematización de procedimientos matemáticos, también para que los docentes atiendan las particularidades de los escolares, por ejemplo la construcción mostrada en la Figura 7 puede aprovecharse para establecer nexos, frecuentemente poco estudiados, entre gráficos de funciones, derivadas y concavidad, es decir no limitándose a los algoritmos básicos que generalmente se utilizan.

Para ilustrar lo antes expuesto cabe destacar que en el proceso de enseñanza aprendizaje de la concavidad de una función se constató que, en muchos casos, los alumnos se conforman con aplicar el algoritmo expuesto por el profesor en una conferencia o aprendido en un texto, sin profundizar en relaciones conceptuales y procedimentales que pudieran intervenir satisfactoriamente en su formación matemática. Para corroborar lo antes planteado, se les realizaron preguntas a estudiantes de primer año de ingeniería tales como ¿Cuál procedimiento utiliza para analizar la concavidad de una función? Exponga los fundamentos de ese procedimiento. Puede apoyarse en gráficos u otros recursos.

En intercambios sostenidos con docentes se constató que algunos utilizan vías inductivas para ilustrar la relación entre concavidad y el signo de la segunda derivada, pero no promueven una adecuada actividad indagativa de los escolares a partir de un diagnóstico apropiado de las necesidades y potencialidades de estos, generalmente se evalúa el resultado del procedimiento y no sus fundamentos.

La construcción mostrada en la Figura 8 posibilita estudiar la concavidad considerando diversos contenidos, conjugar observaciones de comportamiento de la recta tangente a la función f en el punto P y la monotonía que puede apreciarse en la gráfica de la función g=f´. Puede apreciarse que en el intervalo conde f es cóncava hacia abajo la función g=f´ es decreciente, que la pendiente de la recta tangente a g es negativa y modularmente decreciente, pues es creciente atendiendo a su signo en el intervalo de concavidad referido y, viceversa cuando f es cóncava hacia arriba. También pudiera enriquecerse la construcción anterior mostrando, como en la Figura 6, simultáneamente las tangentes a f y a g para los mismos argumentos de manera dinámica, aspecto que permite realizar interesantes asociaciones e inferencias.

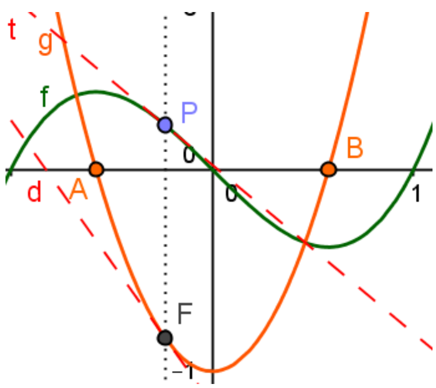

Figura 8. Función y función derivada

3.3 GeoGebra como herramienta de comprobación

Además de facilitar las construcciones geométricas el GeoGebra puede utilizarse como herramienta de explicación y comprobación, para ilustrarlo se presenta el ejercicio inicial utilizado en la primera conferencia para ilustrar el procedimiento. Ejercicio: Calcular el área entre las parábolas $y=x^2-4x+5$. Represente el área solicitada y compruebe el resultado con el GeoGebra. También el protocolo de la construcción en la Tabla 3 y el gráfico, Figura 9.

Teniendo en cuenta la sencillez del ejercicio y la intención didáctica no se abunda, aspecto que no niega su utilidad como procedimiento y para cálculos que involucren funciones más complejas o laboriosas.

Tabla 3. Protocolo de la construcción

nº	Nombre	Definición	Valor
1	Función f		$f(x) = x^2$
2	Función g		$g(x) = x^2 - 4x + 5$
3	Recta a		a: x = 1
4	Número A	IntegralEntre[g, f, 0, 1]	A = 3

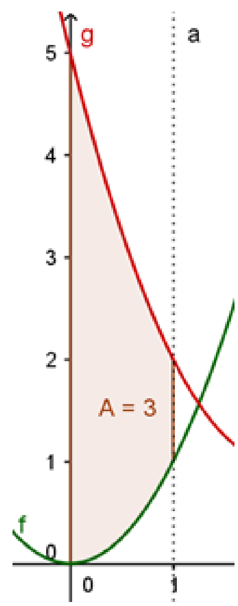

Figura 9. Representación del área

4. Conclusiones

Este trabajo reviste importancia didáctica al mostrar variantes de ejercicios matemáticos y explicaciones didácticas con respecto a exigencias de orden, movilidad y construcción con asistencia del GeoGebra. Las observaciones didácticas expuestas contribuyen a solucionar problemas identificados en la enseñanza – aprendizaje de la geometría y el cálculo en el primer año de carreras universitarias.

También promueven nuevos análisis en cuanto a variantes de ejercicios, vías de solución y tratamiento didáctico favorecedor de la atención diferenciada a los escolares y la estimulación de su creatividad. Se ilustran ventajas visuales y procedimentales que ofrece el GeoGebra para la integración de contenidos matemáticos.

5. Referencias bibliográficas

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2015). Análisis del aprendizaje de geometría espacial en un entorno de geometría dinámica 3-dimensional. *PNA, 9(2)*, 53-83.

Hernández, C. M. (2013). Consideraciones para el uso del GeoGebra en ecuaciones, inecuaciones, sistemas y funciones. Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 82, 115-129. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros

Hernández H, C. M. (2015). Actividad investigativa escolar y ejercicios en matemáticas: El papalote. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 42*, 95-113. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/42/42

Hernández H, C. M. (2017). Ejercicios geométricos con exigencias de orden, movilidad y construcción con asistencia del GeoGebra: ejemplos y observaciones didácticas (inédito).

Fecha de recepción: 14 de abril de 2017

Fecha de aceptación: 20 de junio de 2017