

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΔΟΚΙΜΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΤΛΗΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΠΑΡΟΧΗ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟΥΣ ΥΔΡΟΦΟΡΕΙΣ

Η. Τελόγλου^{1*}, Θ. Ζήσης²

¹Αλεξάνδρειο Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Θεσσαλονίκης, Τμήμα Τεχνολόγων Γεωπόνων, 57400 Σίνδος, Θεσσαλονίκη

²Τομέας Εγγείων Βελτιώσεων, Εδαφολογίας και Γεωργικής Μηχανικής, Τμήμα Γεωπονίας Α.Π.Θ., 54124 Θεσσαλονίκη

*Στοιχεία επικοινωνίας: itelo@cp.teithe.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι αναλυτικές λύσεις σταθερής παροχής άντλησης χρησιμοποιούνται ευρέως για τον προσδιορισμό των υδραυλικών χαρακτηριστικών των υδροφορέων. Ωστόσο, η αντλούμενη παροχή σε φρεάτια που δεν διαθέτουν αυτορρυθμιζόμενο σύστημα ελέγχου, γενικώς μειώνεται με το χρόνο μέχρι την σταθεροποίησή της. Η αγνόηση αυτής της κατάστασης στις δοκιμαστικές αντλήσεις έχει ως συνέπεια την λανθασμένη εκτίμηση των υδρογεωλογικών παραμέτρων. Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μια προσεγγιστική αναλυτική λύση για τον υπολογισμό της πτώσης πιεζομετρικού φορτίου σε κλειστό υδροφορέα λόγω άντλησης με βαθμιαία μεταβαλλόμενη παροχή. Εφαρμογή της λύσης σε πραγματικά δεδομένα δοκιμαστικών αντλήσεων έδωσε πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: κλειστός υδροφορέας, δοκιμαστική άντληση, μεταβαλλόμενη παροχή, υδρογεωλογικές παράμετροι

ANALYSIS OF PUMPING TEST DATA WITH VARIABLE DISCHARGE IN CONFINED AQUIFERS

I. Teloglou^{1*}, T. Zissis²

¹Alexander Technological Educational Institute of Thessaloniki, Department of Agricultural Technology, 57400 Sindos, Thessaloniki

²Department of Hydraulics, Soil Science and Agricultural Engineering, School of Agriculture, A.U.Th., 54124 Thessaloniki

*Corresponding author: itelo@cp.teithe.gr

ABSTRACT

Analytical solutions for constant-rate well pumping tests are widely used to evaluate the aquifer characteristics. However, the discharge of an uncontrolled pumping well generally decreases with time until stabilization. Ignoring this situation in pumping tests, leads to incorrect assessment of the hydrogeological parameters. This paper presents an approximate analytical solution for evaluating drawdown in confined aquifers due to gradually varied discharge. Application of the proposed solution to actual aquifer tests showed very satisfactory results.

KEY WORDS: confined aquifer, pumping test, variable discharge, hydrogeological parameters

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι υδρογεωλογικές παράμετροι ενός υδροφορέα προσδιορίζονται με την προσαρμογή των δεδομένων πιεζομετρικής πτώσης ή πιεζομετρικής επαναφοράς, που καταγράφονται κατά τη διάρκεια δοκιμαστικών αντλήσεων, σε αναλυτικές λύσεις που περιγράφουν την ακτινική ροή προς φρεάτιο άντλησης. Για λόγους μαθηματικής απλούστευσης οι περισσότερες αναλυτικές λύσεις που χρησιμοποιούνται έχουν εξαχθεί για συνθήκες σταθερής παροχής άντλησης. Ωστόσο, η παροχή κατά τη δοκιμαστική άντληση μπορεί να μεταβάλλεται είτε εκ προθέσεως (άντληση κατά βαθμίδες) είτε λόγω τεχνικών δυσκολιών. Σε πολλές περιπτώσεις και κυρίως κατά τα αρχικά στάδια μιας άντλησης παρατηρείται βαθμιαία μείωση της παροχής με τον χρόνο μέχρι την σταθεροποίησή της. Το φαινόμενο αυτό ενδέχεται να οφείλεται στην αυξημένη πιεζομετρική πτώση, στην υπερθέρμανση του κινητήρα, στην αυτορρύθμιση της αντλίας σταθερής ταχύτητας με την μεταβολή της πτώσης στάθμης στο φρεάτιο. Η χρονική διάρκεια που παρατηρείται η φθίνουσα παροχή μπορεί να κυμαίνεται από μερικές δεκάδες λεπτά έως και ημέρες (Hantush, 1964). Η ανάλυση των δεδομένων πιεζομετρικής πτώσης κατά τη διάρκεια άντλησης που εμφανίζει μεταβαλλόμενη παροχή δεν μπορεί να αντιμετωπιστεί με τις κλασικές μεθόδους, καθώς αυτές ισχύουν για συνθήκες σταθερής παροχής άντλησης.

Οι Abu-Zied and Scott (1963) συνειδητοποιώντας την αδυναμία επίλυσης των συγκεκριμένων προβλημάτων με τις συμβατικές μεθόδους, έθεσαν τις βάσεις για μια νέα μέθοδο ανάλυσης θεωρώντας την παροχή να μεταβάλλεται εκθετικά με το χρόνο. Ο Hantush (1964) παρουσίασε αναλυτικές λύσεις υπολογισμού της πιεζομετρικής στάθμης σε ημίκλειστους υδροφορείς χρησιμοποιώντας εκθετικές και υπερβολικές συναρτήσεις για την περιγραφή της μεταβαλλόμενης παροχής. Οι Aron and Scott (1965) εφάρμοσαν μια μέθοδο γραφικού προσδιορισμού των υδρογεωλογικών παραμέτρων κλειστού υδροφορέα υπό συνθήκες μεταβαλλόμενης παροχής άντλησης, η οποία στηρίζεται στην προσεγγιστική λύση των Cooper-Jacob (1946). Αργότερα, οι Lai et al. (1973) και Lai and Su (1974) επέκτειναν την λύση των Papadopoulos and Cooper (1967) περιλαμβάνοντας στις λύσεις τους τη διαρροή από ημίκλειστο υδροφορέα για μεταβαλλόμενη παροχή άντλησης που περιγράφεται από εκθετική και γραμμική συνάρτηση του χρόνου. Οι Butt and McElwee (1985) χρησιμοποίησαν την τεχνική της συνέλιξης στη λύση του Theis (1935) και ακολούθως εφάρμοσαν την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων σε δεδομένα δοκιμαστικής άντλησης μεταβαλλόμενης παροχής για τον προσδιορισμό των παραμέτρων του υδροφορέα. Οι Rasmussen et al. (2003) παρουσίασαν αναλυτικές λύσεις με ημιτονοειδή μεταβολή της παροχής καθώς και τα αποτελέσματα των δοκιμαστικών αντλήσεων που πραγματοποίησαν με σύστημα ελεγχόμενης παρακολούθησης της παροχής και του πιεζομετρικού φορτίου. Οι Sen and Altunkaynak (2004), προέβησαν στη γενίκευση της μεθοδολογίας των Aron and Scott (1965) η οποία αποτελεί μια γραφική προσέγγιση προσδιορισμού των υδραυλικών χαρακτηριστικών κλειστού υδροφορέα. Ο Singh (2009) ανέπτυξε μια διαδικασία βελτιστοποίησης για τον προσδιορισμό των υδρογεωλογικών παραμέτρων προσεγγίζοντας την καμπύλη μεταβαλλόμενης παροχής σαν ένα σύνολο διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων. Οι Mishra et al. (2013) χρησιμοποίησαν τον μετασχηματισμό Laplace στην χρονοσειρά των καταγραφεισών παροχών την οποία προσέγγισαν με μια αλληλουχία γραμμικών μεταβαλλόμενων στοιχείων. Εν συνεχεία, εφάρμοσαν μια αριθμητική μέθοδο αντιστροφής του μετασχηματισμένου πεδίου Laplace προκειμένου να πετύχουν τον προσδιορισμό των υδρογεωλογικών παραμέτρων.

Στην εργασία αυτή επιλύεται η διαφορική εξίσωση κίνησης του υπόγειου νερού προς φρεάτιο άντλησης σε κλειστό υδροφορέα με την ολοκληρωματική μέθοδο του Goodman, η οποία αποτελεί μερική περίπτωση της μεθόδου των ροπών (Crank, 1975). Η μέθοδος έχει χρησιμοποιηθεί στην επίλυση προβλημάτων μεταφοράς θερμότητας από το 1958 και συνεχώς γίνονται προσπάθειες βελτίωσής της (Wood 2001; Hristov 2009; Mitchell and Myers, 2010;

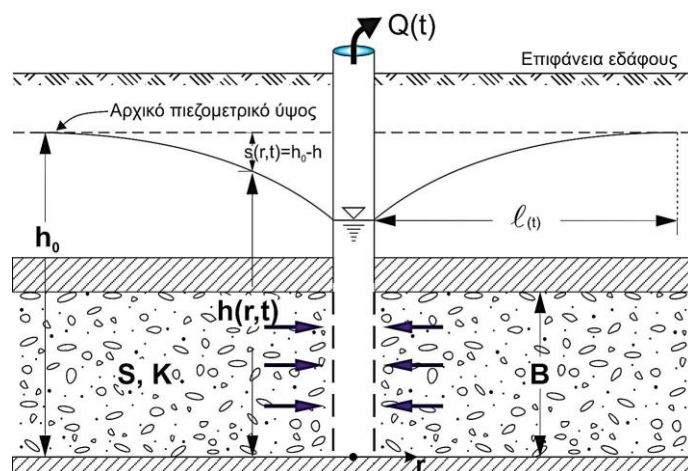
2012). Εξ' όσων γνωρίζουν οι συγγραφείς δεν έχει εφαρμοστεί σε προβλήματα άντλησης υδροφορέων. Η μέθοδος παρέχει την δυνατότητα χρησιμοποίησης κάθε συνεχούς και ολοκληρώσιμης συνάρτησης για την περιγραφή των οριακών συνθηκών και εν προκειμένω της μεταβαλλόμενης παροχής. Η προκύπτουσα αναλυτική λύση είναι απλή, εύκολη στην χρήση της και ισχύει τόσο για την περίπτωση μεταβαλλόμενης παροχής άντλησης όσο και για εκείνη της σταθερής παροχής. Η σύγκρισή της με γνωστές αναλυτικές λύσεις επαληθεύει την ακρίβειά της. Επίσης, η εφαρμογή της προτεινόμενης λύσης σε πραγματικά δεδομένα δοκιμαστικών αντλήσεων μεταβαλλόμενης παροχής που ελήφθησαν από τη διεθνή βιβλιογραφία, έδωσε αξιόπιστα και συγκρίσιμα αποτελέσματα.

2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΚΑΙ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Στο Σχήμα 1 παρουσιάζεται διαγραμματικά ένα φρεάτιο άντλησης που διαπερνά πλήρως έναν ομογενή και ισότροπο κλειστό υδροφόρο μεγάλης έκτασης. Η ακτινική ροή του υπόγειου νερού προς το φρεάτιο άντλησης είναι ασταθής ή μη μόνιμη και περιγράφεται μαθηματικά από τη μερική διαφορική εξίσωση (Τερζίδης και Καραμούζης, 1985):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) = \frac{S}{KB} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.1)$$

όπου $h=h(r,t)$ είναι το πιεζομετρικό φορτίο σε μια απόσταση r από το φρεάτιο και σε χρόνο t μετά από την έναρξη της άντλησης, K , S είναι οι συντελεστές υδραυλικής αγωγιμότητας και αποθήκευσης (storage coefficient), αντίστοιχα και B είναι το πάχος του κλειστού υδροφόρου στρώματος.



Σχήμα 1. Ροή προς φρεάτιο άντλησης σε κλειστό υδροφόρο ημιάπειρης έκτασης

Οι βοηθητικές συνθήκες στις οποίες υπόκειται η εξίσωση (2.1) για την περιγραφή του προβλήματος της ακτινικής ροής προς φρεάτιο άντλησης, δίνονται από τις σχέσεις:

$$h(r, 0) = h_0, \quad 0 \leq r \leq \infty, \quad t = 0 \quad (2.2\alpha)$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[r \frac{\partial h(r, t)}{\partial r} \right] = \frac{Q(t)}{2\pi KB}, \quad t > 0 \quad (2.2\beta)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [h(r, t)] = h_0, \quad t \geq 0 \quad (2.2\gamma)$$

όπου $Q(t)$ είναι η μεταβαλλόμενη παροχή άντλησης.

Για την επίλυση του προβλήματος οριακών τιμών που περιγράφεται από τις εξισώσεις (2.1) και (2.2α,β,γ), αρχικά θεωρούμε, ότι ο υδροφορέας βρίσκεται σε ισορροπία και η πιεζομετρική στάθμη είναι οριζόντια. Αμέσως μετά την έναρξη της άντλησης δημιουργείται μια ζώνη κατάπτωσης του πιεζομετρικού φορτίου γύρω από το φρεάτιο, η οποία εκτείνεται σταδιακά με το χρόνο μέχρι ένα χαρακτηριστικό μήκος $\ell(t)$. Σε μια απόσταση $r > \ell(t)$, δεν υπάρχει επηρεασμός της ροής και το πιεζομετρικό φορτίο παραμένει αμετάβλητο. Εξ' αυτής της παραδοχής προκύπτουν οι εξής βοηθητικές συνθήκες:

$$h|_{r=\ell} = h_0, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial r} \right|_{r=\ell} = 0 \quad (2.3\alpha, \beta)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των ροπών (1^{ης} τάξης) στην εξίσωση (2.1), θα έχουμε:

$$r \left. \frac{\partial h}{\partial r} \right|_{r=\ell} - r \left. \frac{\partial h}{\partial r} \right|_{r=0} = \frac{1}{\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\ell} h r \, dr - r h \Big|_{r=\ell} \frac{\partial \ell}{\partial t} \right] \quad (2.4)$$

όπου $\alpha = KB/S = T/S$ και T είναι η διοχετευτικότητα ή μεταβιβαστικότητα (Transmissivity) του υδροφορέα

Λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές συνθήκες (2.2β) και (2.3α,β), προκύπτει:

$$\frac{Q(t)}{2\pi KB} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_0^{\ell} h r \, dr - \frac{h_0 \ell^2}{2} \right] \quad (2.5)$$

Λύνοντας την εξίσωση (2.1) για την κατάσταση της σταθερής ροής, $\partial h / \partial t \equiv 0$, μπορούμε να προβλέψουμε την μορφή της εξίσωσης η οποία θα περιγράφει την καμπύλη του πιεζομετρικού φορτίου μεταξύ του φρεατίου άντλησης και του χαρακτηριστικού μήκους $\ell(t)$. Αρχικά, κάνοντας την παραδοχή ότι η παράγωγος του γινομένου της απόστασης r επί την υδραυλική κλίση στην περιοχή $0 < r < \ell(t)$ παραμένει σταθερή, λύνουμε την εξίσωση

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) = c_1 \quad (2.6)$$

σε συνδυασμό με τις βοηθητικές συνθήκες (2.2β), (2.3α,β) και παίρνουμε σε πρώτη προσέγγιση το προφίλ της πιεζομετρικής στάθμης

$$h^*(r, t) = h_0 + \frac{Q(t)}{2\pi KB} \left[1 - \frac{r}{\ell(t)} + \ln \left(\frac{r}{\ell(t)} \right) \right] \quad (2.7)$$

Η μεταβλητή $\ell(t)$ προκύπτει με αντικατάσταση της εξίσωσης (2.7) στην (2.5) και δίνεται από τη σχέση:

$$\ell(t) = \sqrt{\frac{12\alpha}{Q(t)} \int_0^t Q(t') \, dt'} = \sqrt{12\alpha t} \, I_{(0)} \quad (2.8)$$

$$\text{όπου } I_{(t)} = \frac{1}{t} \int_0^t Q(t') dt'$$

Εισάγοντας την αδιάστατη μεταβλητή $u = \frac{r^2 S}{4Tt}$, η εξίσωση (2.7) γράφεται με τη μορφή:

$$h^*(r,t) = h_0 - \frac{Q(t)}{4\pi KB} \left[-2 - \ln \left(\frac{u}{3 I_{(t)}} \right) + \sqrt{\frac{4u}{3 I_{(t)}}} \right] \quad (2.9)$$

Στη συνέχεια, θεωρώντας ότι η παράγωγος του γινομένου της απόστασης r επί την υδραυλική κλίση στην περιοχή $0 < r < \ell(t)$ μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση r , επιλύουμε την εξίσωση

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) = c_1 r \quad (2.10)$$

σε συνδυασμό με τις βοηθητικές συνθήκες (2.2β) και (2.3α,β) και παίρνουμε μια δεύτερη προσέγγιση του προφίλ της πιεζομετρικής στάθμης

$$h^{**}(r,t) = h_0 + \frac{Q(t)}{4\pi KB} \left[1 - \left(\frac{r}{\ell(t)} \right)^2 + 2 \ln \left(\frac{r}{\ell(t)} \right) \right] \quad (2.11)$$

Εισάγοντας την εξίσωση (2.11) στην (2.5), προκύπτει:

$$\ell(t) = \sqrt{\frac{8\alpha}{Q(t)} \int_0^t Q(t') dt'} = \sqrt{8\alpha t} I_{(t)} \quad (2.12)$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (2.12) στην (2.11), θα έχουμε:

$$h^{**}(r,t) = h_0 - \frac{Q(t)}{4\pi KB} \left[-1 - \ln \left(\frac{u}{2 I_{(t)}} \right) + \frac{u}{2 I_{(t)}} \right] \quad (2.13)$$

Η τελική λύση προκύπτει από την μέση τιμή των προσεγγιστικών εξισώσεων (2.9) και (2.13)

$$h(r,t) = h_0 - \frac{Q(t)}{4\pi KB} \left[-0.60412 - \ln \left(\frac{u}{I_{(t)}} \right) + \sqrt{\frac{u}{3 I_{(t)}}} + \frac{u}{4 I_{(t)}} \right] \quad (2.14)$$

Στην περίπτωση που η παροχή άντλησης θεωρηθεί σταθερή, δηλαδή $Q(t) = Q_0$, τότε $I_{(t)} \rightarrow 1$ και η εξίσωση (2.14) μπορεί να γραφεί με εξαρτημένη μεταβλητή την πιεζομετρική πτώση $s(r,t) = h_0 - h(r,t)$:

$$s(r,t) = \frac{Q_0}{4\pi KB} F(u) \quad (2.15)$$

$$\text{όπου } F(u) = \left[-0.60412 - \ln(u) + \sqrt{\frac{u}{3} + \frac{u}{4}} \right] \quad (2.16)$$

Η αναλυτική λύση, για σταθερή παροχή άντλησης σε κλειστό υδροφορέα δόθηκε από τον Theis (1935):

$$s(r,t) = \frac{Q_0}{4\pi KB} W(u) \quad (2.17)$$

$$\text{όπου } W(u) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \quad (2.18)$$

Το εκθετικό ολοκλήρωμα $W(u)$ που ονομάζεται και συνάρτηση φρεατίου του Theis, μπορεί να υπολογισθεί από την παρακάτω συγκλίνουσα σειρά

$$W(u) \equiv -\gamma - \ln u - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n u^n}{n n!} \quad (2.19)$$

και η παράμετρος γ συμβολίζει τη σταθερά του Euler ($\approx 0.577215\dots$)

Οι Cooper and Jacob (1946) παρατηρώντας ότι για μικρές τιμές του $u < 0.01$ οι όροι του αθροίσματος είναι ασήμαντοι, εισήγαγαν την προσεγγιστική εξίσωση της (2.19) η οποία γράφεται:

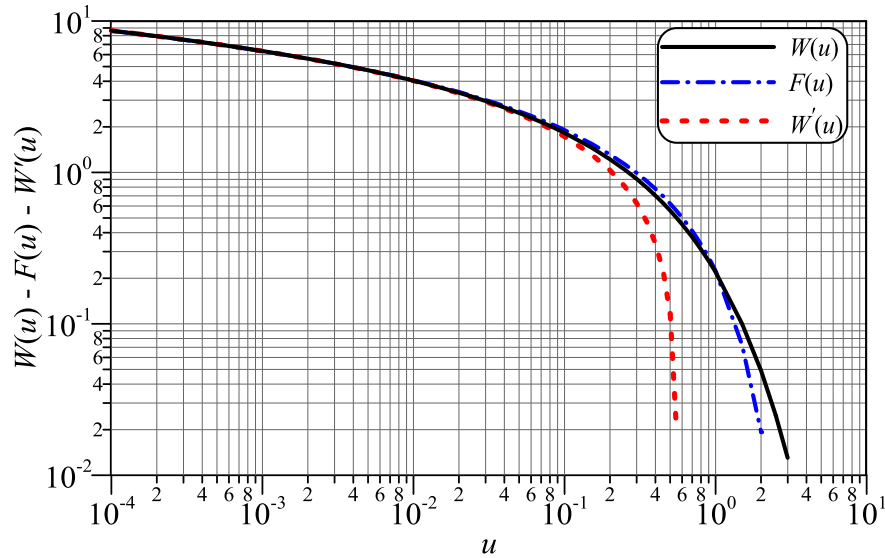
$$s(r,t) = \frac{Q_0}{4\pi KB} W'(u) \quad (2.20)$$

$$\text{όπου } W'(u) = [-0.5772 - \ln(u)] \quad (2.21)$$

Στο Σχήμα 2 συγκρίνονται η συνάρτηση $W(u)$ του Theis (εξίσωση 2.18) με την προτεινόμενη συνάρτηση $F(u)$ (εξίσωση 2.16) και την προσέγγιση $W'(u)$ των Cooper-Jacob, (εξίσωση 2.21). Είναι προφανές από το σχήμα ότι για τιμές του $u > 0.1$ η συνάρτηση $W'(u)$ αποκλίνει σημαντικά ενώ η $F(u)$ συνεχίζει να προσεγγίζει την $W(u)$ με μεγαλύτερη ακρίβεια έως την τιμή $u=1$.

3. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΗΣ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗΣ ΛΥΣΗΣ ΜΕ ΤΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΤΟΥ HANTUSH

Ο Huntush (1964) παρουσίασε αναλυτικές λύσεις υπολογισμού της πιεζομετρικής πτώσης σε ημίκλειστους υδροφορείς υπό συνθήκες μεταβαλλόμενης παροχής άντλησης. Για να περιγράψει την παρατηρούμενη μεταβολή στην παροχή κατά τις δοκιμαστικές αντλήσεις, χρησιμοποίησε τις παρακάτω μαθηματικές συναρτήσεις εκθετικής και υπερβολικής μορφής:



Σχήμα 2. Σύγκριση της $W(u)$ με τις προσεγγιστικές εξισώσεις (2.16) και (2.21)

$$Q_1(t) = Q_s \left[1 + \delta e^{-t/t^*} \right], \quad Q_2(t) = Q_s \left[1 + \frac{\delta}{1+t/t^*} \right], \quad Q_3(t) = Q_s \left[1 + \frac{\delta}{\sqrt{1+t/t^*}} \right] \quad (3.1\alpha,\beta,\gamma)$$

όπου Q_s είναι η τελική τιμή της παροχής άντλησης και οι σταθερές δ και t^* είναι εμπειρικές παράμετροι που προσδιορίζονται με τη διαδικασία της παλινδρόμησης ως προς τις μετρημένες τιμές της παροχής.

Οι αντίστοιχες λύσεις που πέτυχε ο Hantush (1964) χρησιμοποιώντας τους μετασχηματισμούς Laplace, περιέχουν εκθετικά ολοκληρώματα ο υπολογισμός των οποίων είναι χρονοβόρος. Ειδικότερα, για την περίπτωση των κλειστών υδροφορέων, οι λύσεις αυτές απλοποιούνται περαιτέρω και δίνονται με την παρακάτω μορφή:

$$s_1(r,t) = \frac{Q_s}{4\pi T} \left\{ W(u) + \delta e^{-t/t^*} \int_u^\infty \frac{1}{y} e^{-y + \frac{u}{y}} dy \right\} \quad (3.2)$$

$$s_2(r,t) = \frac{Q_s}{4\pi T} \left\{ W(u) + \frac{\delta}{1+(t/t^*)} e^{\frac{(t/t^*)u}{1+(t/t^*)}} W\left(\frac{u}{1+(t/t^*)}\right) \right\} \quad (3.3)$$

$$s_3(r,t) = \frac{Q_s}{4\pi T} \left\{ W(u) + \frac{\delta}{\sqrt{1+t/t^*}} e^{-\frac{u}{2(1+t/t^*)}} \left[K_0\left(\frac{u}{2(1+t^*/t)}\right) + E\left(\frac{u}{2(1+t^*/t)}, \frac{u}{\sqrt{1+t/t^*}}\right) - \cosh^{-1}(1+2t^*/t) \right] \right\} \quad (3.4)$$

$$\text{όπου: } u^* = \frac{r^2 S}{4Tt^*}, \quad E(\alpha, x) = \int_0^x \frac{1 - e^{-\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} d\beta \quad (3.5\alpha,\beta)$$

K_0 είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel μηδενικής τάξης, δεύτερου είδους

Αν χρησιμοποιηθεί η προτεινόμενη προσεγγιστική λύση (2.14) σε συνδυασμό με τις (3.1α,β,γ), προκύπτουν οι παρακάτω ρητές εξισώσεις υπολογισμού της πτώσης πιεζομετρικού φορτίου

$$s_1(r,t) = \frac{Q_s (1 + \delta e^{-t/t^*})}{4\pi KB} \left[-0.60412 + \sqrt{\frac{u}{3I_{1(t)}}} + \frac{u}{4I_{1(t)}} - \ln\left(\frac{u}{I_{1(t)}}\right) \right] \quad (3.6)$$

$$\text{όπου } I_{1(t)} = \frac{t + \delta t^* (1 - e^{-t/t^*})}{t (1 + \delta e^{-t/t^*})}$$

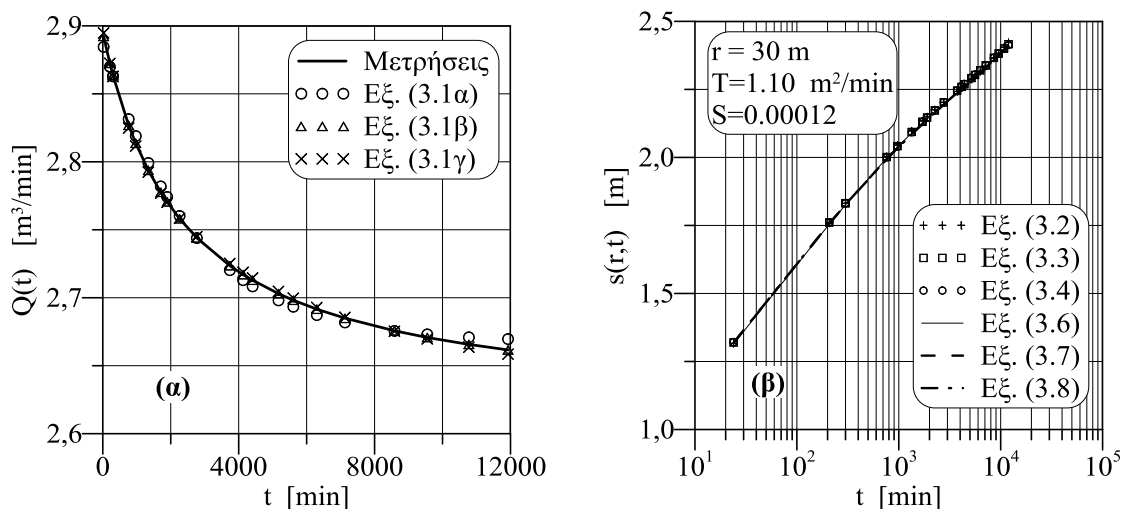
$$s_2(r,t) = \frac{Q_s}{4\pi KB} \left(1 + \frac{\delta}{1 + t/t^*} \right) \left[-0.60412 + \sqrt{\frac{u}{3I_{2(t)}}} + \frac{u}{4I_{2(t)}} - \ln\left(\frac{u}{I_{2(t)}}\right) \right] \quad (3.7)$$

$$\text{όπου } I_{2(t)} = \frac{t + \delta t^* \ln(1 + t/t^*)}{t [1 + \delta(1 + t/t^*)^{-1}]}$$

$$s_3(r,t) = \frac{Q_s}{4\pi KB} \left(1 + \frac{\delta}{\sqrt{1 + t/t^*}} \right) \left[-0.60412 + \sqrt{\frac{u}{3I_{3(t)}}} + \frac{u}{4I_{3(t)}} - \ln\left(\frac{u}{I_{3(t)}}\right) \right] \quad (3.8)$$

$$\text{όπου } I_{3(t)} = \frac{t - 2\delta t^* [1 - (1 + t/t^*)^{1/2}]}{t [1 + \delta(1 + t/t^*)^{-1/2}]}$$

Για τη διερεύνηση της ακρίβειας των προτεινόμενων λύσεων (εξισώσεις 3.6-3.8), αυτές συγκρίνονται με τις αντίστοιχες αναλυτικές λύσεις (εξισώσεις 3.2-3.4), χρησιμοποιώντας τις μετρηθείσες τιμές παροχών (Σχήμα 3α) κατά τη δοκιμαστική άντληση μεγάλης διάρκειας που παρουσιάζονται στην εργασία του Hantush (1964). Επειδή δεν υπάρχουν διαθέσιμα δεδομένα για την πιεζομετρική πτώση, θεωρούμε ένα υποθετικό υδροφορέα με τα εξής χαρακτηριστικά: $T=1.1 \text{ m}^2/\text{min}$, $S=1.2 \times 10^{-4}$ και απόσταση φρεατίου παρατήρησης $r=30 \text{ m}$. Στο Σχήμα 3β, παρουσιάζονται οι υπολογισμένες τιμές της πτώσης πιεζομετρικού φορτίου με τις αναλυτικές λύσεις του Hantush και τις αντίστοιχες προτεινόμενες, αποδεικνύοντας την πολύ ικανοποιητική προσέγγισή τους.



Σχήμα 3. (α) Παρατηρηθείσες τιμές μεταβαλλόμενης παροχής άντλησης **(β)** Υπολογισμένη πτώση πιεζομετρικού φορτίου

4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΟΚΙΜΑΣΤΙΚΩΝ ΑΝΤΛΗΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗ ΠΑΡΟΧΗ

Εφαρμογή 1^η. Για τον έλεγχο της αξιοπιστίας της προτεινόμενης εξίσωσης στον προσδιορισμό των υδραυλικών χαρακτηριστικών ενός κλειστού υδροφορέα που αντλείται με μεταβαλλόμενη παροχή, χρησιμοποιούνται τα συνθετικά δεδομένα δοκιμαστικής άντλησης (Πίνακας 1) των Aron and Scott (1965).

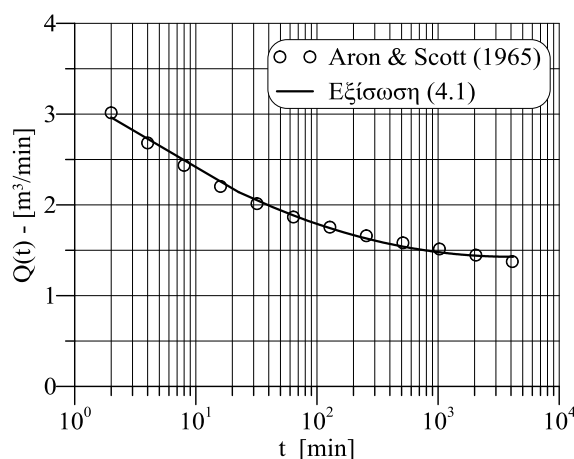
Αρχικά, προσαρμόζονται τα δεδομένα χρόνου-παροχής σε μια κατάλληλη εξίσωση, προσδιορίζεται η παράμετρος $I_{(t)}$ και στη συνέχεια εισάγονται στην εξίσωση (2.14) για τον υπολογισμό των υδρογεωλογικών παραμέτρων T και S του υδροφορέα.

Πίνακας 1. Δεδομένα άντλησης με μεταβαλλόμενη παροχή

t (min)	Q(t) (m ³ /min)	Πιεζομετρική πτώση s (m)		t (min)	Q(t) (m ³ /min)	Πιεζομετρική πτώση s (m)	
		r=7.62 m	r=15.24m			r=7.62 m	r=15.24m
2	3.015	5.218	7.49	128	1.754	9.162	23.46
4	2.682	6.334	11.29	256	1.659	9.626	25.30
8	2.434	7.151	14.60	512	1.582	10.089	27.09
16	2.204	7.745	17.27	1024	1.514	10.528	28.78
32	2.014	8.242	19.51	2048	1.446	11.022	30.59
64	1.866	8.723	21.58	4096	1.375	11.415	32.08

Με βάση τα δεδομένα του Πίνακα 1, η βαθμιαία μεταβαλλόμενη παροχή (Σχήμα 4) περιγράφεται από την εξίσωση:

$$Q(t) = 3.25533 - 0.44026 \ln(t) + 0.02653 \ln^2(t) \quad (R^2 = 0.9957) \quad (4.1)$$



Σχήμα 4. Προσαρμοσμένη εξίσωση στα δεδομένα μεταβαλλόμενης παροχής

και η παράμετρος $I_{(t)}$ θα ισούται με

$$I_{(t)} = \frac{1}{t Q(t)} \int_0^t Q(t') dt' = \frac{3.74865 - 0.49332 \ln(t) + 0.02653 \ln^2(t)}{3.25533 - 0.44026 \ln(t) + 0.02653 \ln^2(t)} \quad (4.2)$$

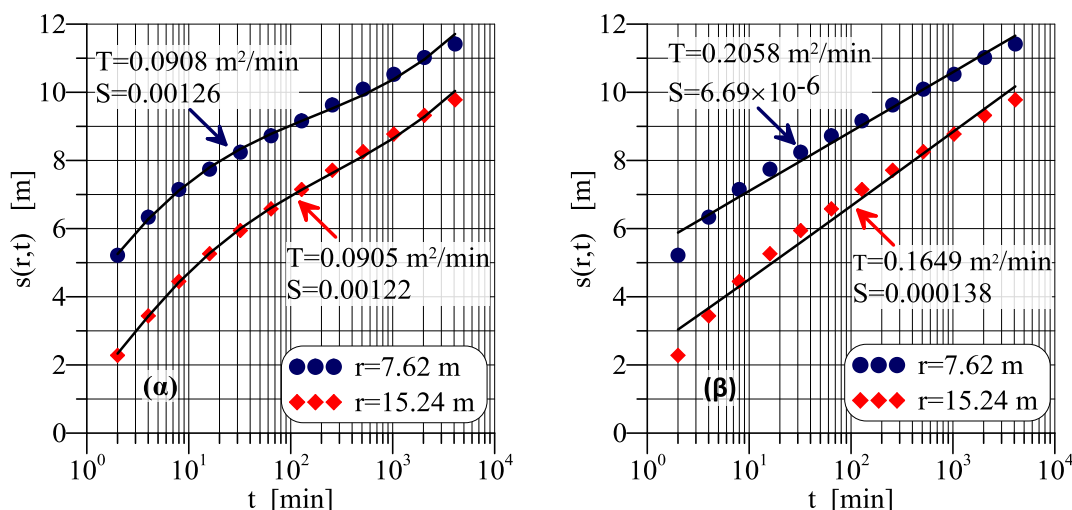
Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (4.1) και (4.2) στην (2.14) και εφαρμόζοντας τη διαδικασία της μη γραμμικής βελτιστοποίησης προσδιορίζονται οι υδρογεωλογικές παράμετροι του

υδροφορέα T και S. Στον συγκριτικό Πίνακα 2 παρουσιάζονται οι τιμές των παραμέτρων όπως υπολογίστηκαν με τρεις διαφορετικές μεθόδους καθώς και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Πίνακας 2. Υπολογισμένες τιμές υδρογεωλογικών παραμέτρων

Φρεάτιο	Γραφική μέθοδος Aron and Scott			Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων Butt and McElwee			Προτεινόμενη εξίσωση (2.14)		
	r [m]	T [m ² /min]	S	T [m ² /min]	S	RMSE [m]	T [m ² /min]	S	RMSE [m]
	1	7.62	0.0975	0.00087	0.0938	0.001036	0.070	0.0908	0.00126
2	15.24	0.0994	0.00088	0.0941	0.001006	0.057	0.0905	0.00122	0.0982

Αν για τον προσδιορισμό των υδρογεωλογικών παραμέτρων ελαμβάνετο η μέση τιμή της παροχής άντλησης $\bar{Q}_0 = 1.962 \text{ m}^3/\text{min}$, τότε οι τιμές των παραμέτρων T, S θα διέφεραν σημαντικά όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5. Υπολογισμός των υδρογεωλογικών παραμέτρων T, S με α) μεταβαλλόμενη παροχή και β) τη μέση τιμή παροχής άντλησης

Εφαρμογή 2^η. Στον Πίνακα 3 δίνονται δύο ζεύγη δεδομένων χρόνου - παροχής άντλησης (Singh, 2009) με τις αντίστοιχες πτώσεις πιεζομετρικού φορτίου $s(r,t)$. Το φρεάτιο παρατήρησης βρίσκεται σε απόσταση $r=600 \text{ m}$.

Πίνακας 3. Δεδομένα αντλήσεων με μεταβαλλόμενη παροχή

1 ^η άντληση		2 ^η άντληση		1 ^η άντληση		2 ^η άντληση			
t (min)	Q(t) (m ³ /min)	s (m)	Q(t) (m ³ /min)	s (m)	t (min)	Q(t) (m ³ /min)	s (m)	Q(t) (m ³ /min)	s (m)
10	4.238	0.046	4.313	0.046	70	2.957	0.597	3.325	0.632
20	3.991	0.179	4.133	0.181	100	2.470	0.686	2.911	0.747
30	3.759	0.303	3.959	0.310	130	2.063	0.719	2.546	0.805
50	3.334	0.484	3.630	0.503	160	1.723	0.721	2.227	0.828

Στην πρώτη άντληση, η μεταβαλλόμενη παροχή (Σχήμα 6α) και η παράμετρος $I_{(t)}$ περιγράφονται αντίστοιχα από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$Q(t) = 4.5 e^{-0.006t} \quad (R^2=1) \quad (4.3)$$

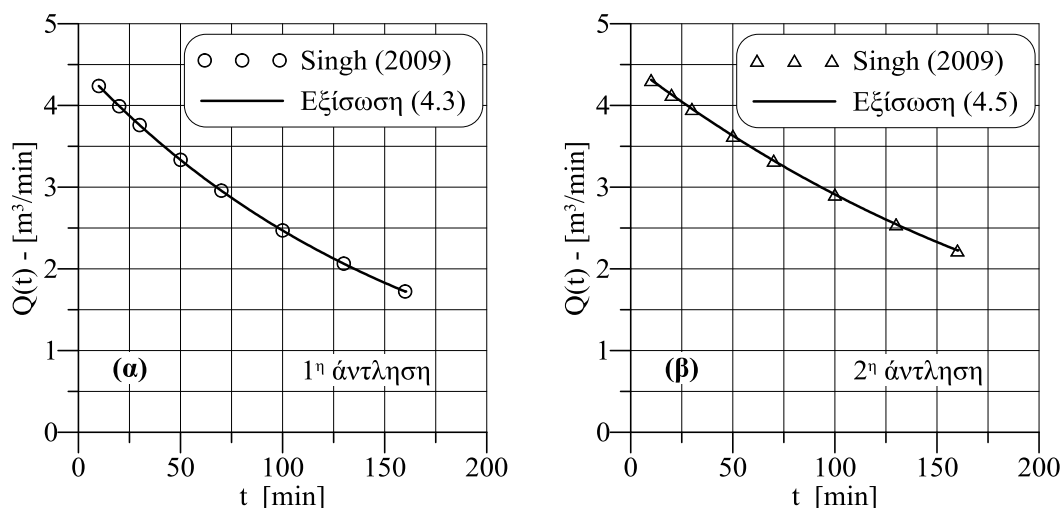
$$I_{(t)} = \frac{1}{t} \int_0^t Q(t') dt' = \frac{e^{0.006t} - 1}{0.006 t} \quad (4.4)$$

Αντικατάσταση των εξισώσεων (4.3) και (4.4) στην (2.14) και εφαρμογή της διαδικασίας μη γραμμικής βελτιστοποίησης δίνουν τις τιμές των υδρογεωλογικών παραμέτρων $T=0.4065 \text{ m}^2/\text{min}$ και $S=1.05 \times 10^{-4}$.

Στην δεύτερη άντληση, η μεταβαλλόμενη παροχή (Σχήμα 6β) και η παράμετρος $I_{(t)}$ γράφονται αντίστοιχα:

$$Q(t) = 4.5 - 0.019t + 3.3 \times 10^{-5} t^2 - 1.9 \times 10^{-8} t^3 \quad (R^2=1) \quad (4.5)$$

$$I_{(t)} = \frac{54 - 0.114t + 1.32 \times 10^{-4} t^2 - 5.7 \times 10^{-8} t^3}{54 - 0.228t + 3.96 \times 10^{-4} t^2 - 2.28 \times 10^{-7} t^3} \quad (4.6)$$

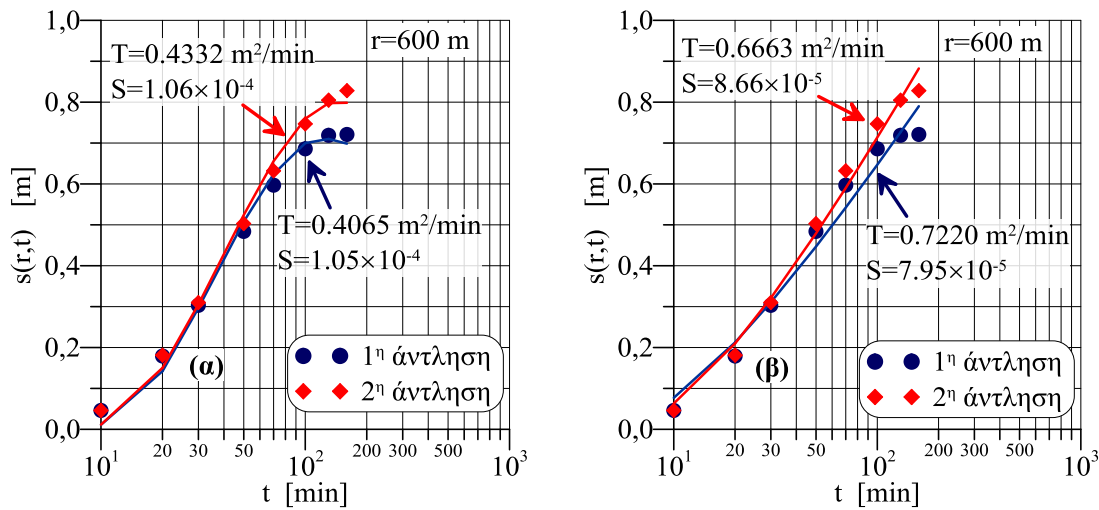


Σχήμα 6. Παρατηρούμενες φθίνουσες παροχές άντλησης

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (4.5),(4.6) στην (2.14) και λύνοντας το αντίστροφο πρόβλημα με τη διαδικασία της μη γραμμικής βελτιστοποίησης προκύπτουν οι τιμές των υδρογεωλογικών παραμέτρων $T=0.4332 \text{ m}^2/\text{min}$ και $S=1.06 \times 10^{-4}$. Οι αντίστοιχες υπολογισμένες τιμές από τον Singh (2009) είναι: $T=0.5 \text{ m}^2/\text{min}$ και $S=1 \times 10^{-4}$. Παρατηρούμε ότι ακόμη και στη συγκεκριμένη περίπτωση που το φρεάτιο παρατήρησης βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση ($r=600 \text{ m}$) και επομένως η μεταβλητή $u > 0.01$, οι υδρογεωλογικές παράμετροι του υδροφορέα υπολογίζονται με ικανοποιητική ακρίβεια.

Αν οι παροχές άντλησης εθεωρούντο σταθερές και ίσες με τις μέσες τιμές $\bar{Q}_{01} = 3.067 \text{ m}^3/\text{min}$ και $\bar{Q}_{02} = 3.381 \text{ m}^3/\text{min}$, αντίστοιχα, οι τιμές των υδρογεωλογικών παραμέτρων T, S θα

διέφεραν σημαντικά όπως φαίνεται και στο Σχήμα 7. Ειδικότερα, παρατηρείται υπερεκτίμηση της διοχετευτικότητας T και υποεκτίμηση του συντελεστή αποθήκευσης S .



Σχήμα 7. Υπολογισμός των υδρογεωλογικών παραμέτρων T , S με **α)** μεταβαλλόμενη παροχή και **β)** τη μέση τιμή παροχής άντλησης

Εφαρμογή 3^η. Οι Mishra et al. (2013), ενσωμάτωσαν στη λύση του Hantush (1964) μια ημιτονοειδή συνάρτηση για την περιγραφή της μεταβαλλόμενης παροχής άντλησης και υπολόγισαν αριθμητικά την πτώση του πιεζομετρικού φορτίου σε απόσταση $r=1$ m από τη γεώτρηση. Τα υδραυλικά χαρακτηριστικά του ομογενούς και ισότροπου κλειστού υδροφορέα είναι: $T=10$ m²/d και $S=1 \times 10^{-5}$ και η παροχή άντλησης περιγράφεται από την εξίσωση:

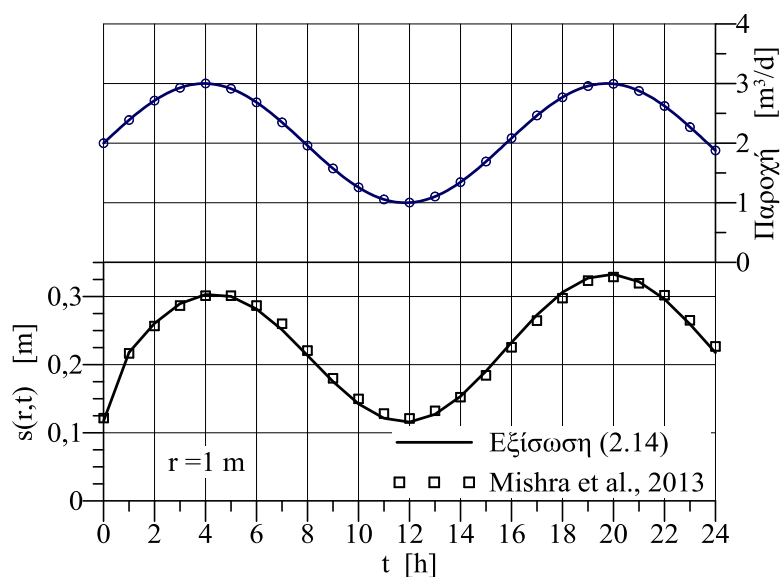
$$Q(t) = 2 + \sin\left(\frac{30t}{24\pi}\right), \quad [\text{m}^3/\text{d}] \tag{4.7}$$

Προκειμένου να αποδειχθεί η αξιοπιστία της προτεινόμενης εξίσωσης (2.14) επιλύεται το αντίστροφο πρόβλημα υπολογισμού των υδρογεωλογικών παραμέτρων T και S του υδροφορέα σε συνδυασμό με την εξίσωση (4.7).

Η παράμετρος $I(t)$ δίνεται από τη σχέση:

$$I_{(t)} = \frac{2t + (8/5)\pi \sin^2(5t/8\pi)}{2t + t \sin(5t/4\pi)} \tag{4.8}$$

Συνδυάζοντας την εξίσωση (2.14) με τις σχέσεις (4.7), (4.8) και εφαρμόζοντας τη διαδικασία της μη γραμμικής βελτιστοποίησης, προκύπτουν οι εξής τιμές των υδρογεωλογικών παραμέτρων, $T=11.04$ m²/d και $S=2.91 \times 10^{-6}$ οι οποίες προσεγγίζουν ικανοποιητικά τις πραγματικές τιμές. Στο Σχήμα 8, παρουσιάζονται η μεταβολή της παροχής άντλησης και οι υπολογισμένες τιμές της πιεζομετρικής πτώσης μετά τη βελτιστοποίηση των παραμέτρων.



Σχήμα 8. Σύγκριση των αριθμητικά υπολογισμένων τιμών πτώσης πιεζομετρικής στάθμης από τους Mishra et al.(2013) και από την προτεινόμενη εξίσωση υπό συνθήκες μεταβαλλόμενης παροχής άντλησης.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην εργασία αυτή παρουσιάστηκε μια νέα προσεγγιστική λύση που περιγράφει την πτώση της πιεζομετρικής στάθμης σε κλειστό υδροφορέα λόγω άντλησης με μεταβαλλόμενη παροχή. Η προτεινόμενη λύση δίνει τη δυνατότητα ενσωμάτωσης κάθε συνεχούς και ολοκληρώσιμης συνάρτησης ως οριακής συνθήκης, η οποία ταυτόχρονα περιγράφει ικανοποιητικά την βαθμιαία μεταβαλλόμενη παροχή άντλησης. Λόγω της απλής μορφής της, καθώς δεν περιέχει γενικευμένα ολοκληρώματα, μπορεί να χρησιμοποιηθεί εύκολα για τον προσδιορισμό των υδρογεωλογικών παραμέτρων ενός κλειστού υδροφορέα. Σύγκριση της προτεινόμενης λύσης με γνωστές αναλυτικές λύσεις της βιβλιογραφίας, καθώς και εφαρμογή της σε πραγματικά δεδομένα δοκιμαστικών αντλήσεων, αποδεικνύει την πολύ ικανοποιητική ακρίβεια της. Επιπλέον, από την εφαρμογή της προτεινόμενης λύσης σε πραγματικά δεδομένα δοκιμαστικών αντλήσεων με μεταβαλλόμενη παροχή, προκύπτει πως η χρήση εξισώσεων που βασίζονται στην παραδοχή της σταθερής παροχής άντλησης έχουν ως αποτέλεσμα την υπερεκτίμηση της διοχετευτικότητας T και την υποεκτίμηση του συντελεστή αποθήκευσης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Abu-Zied, M.A., and V. H. Scott, 1963. *Nonsteady flow for wells with decreasing discharge*, Proc. of the American Society of Civil Engineers. 89(HY3), 119-132.
- Aron, G. and Scott, V. H., 1965. *Simplified solution for decreasing flow in wells*. Proc. of the American Society of Civil Engineers. 91(HY5), 1-11.
- Butt M. A. and McElwee C. D., 1985. *Aquifer-Parameter evaluation from variable-rate pumping tests using convolution and sensitivity analysis*. Ground Water, 23(2), 212-219.
- Cooper, H., and Jacob C., 1946. *A generalized graphical method for evaluation formation constants and summarizing well-field history*. Transactions, American Geophysical Union, 27(iv), 526-534.
- Crank, J., 1975. *The mathematics of diffusion*. Oxford University Press, 414 pp.

- Hantush, M.S., 1964. *Drawdown around wells of variable discharge*. J. of Geophysical Research, 69(20), 4221-4235.
- Hristov, J., 2009. *The heat-balance integral method by a parabolic profile with unspecified exponent: Analysis and benchmark exercises*. Thermal Science, 13(2), 27-48.
- Lai, R.Y., G.M. Karadi, and R.A. Williams, 1973. *Drawdown at time-dependent flowrate*. Water Resources Bulletin 9(5), 892-900.
- Lai, R., and C. Su., 1974. *Nonsteady flow to a large well in a leaky aquifer*. Journal of Hydrology, 22(3-4), 333-345.
- Mishra P. K., Vessilinov V., Gupta H., 2013. *On Simulation and analysis of variable-rate pumping tests*. Groundwater, 51(3), 469-473.
- Mitchell S.L., Myers, T.G., 2010. *Improving the accuracy of heat balance integral methods applied to thermal problems with time dependent boundary conditions*. International Journal of Heat and Mass Transfer, 53, 3540-3551.
- Mitchell S.L., Myers, T.G., 2012. *Application of Heat Balance Integral Methods to One-Dimensional Phase Change Problems*. International Journal of Differential Equations, 2012, Article ID 187902, 1-22.
- Papadopoulos, I. S., and Cooper, H.H., Jr., 1967. *Drawdown in a well of large diameter*. Water Resources Research, 3(1), 241-244.
- Rasmussen, T., K. Haborak, and M. Young. 2003. *Estimating aquifer hydraulic properties using sinusoidal pumping at the Savannah River site, South Carolina, USA*. Hydrogeology Journal 11(4): 466-482.
- Sen, Z. and Altunkaynak A. A., 2004. *Variable discharge type curve solutions for confined aquifers*. J. Am. Water Resour. Assoc., 40(5), 1189-1196.
- Singh, SK., 2009. *Drawdown due to temporally varying pumping discharge: inversely estimating aquifer parameters*. J. Irrigation and Drainage Engineering, 135(2), 257-260.
- Τερζίδης, Γ., Καραμούζης Δ., 1985. *Υδραυλική υπόγειων νερών*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 352 σελ.
- Theis, C. V., 1935. *The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and duration of a well using ground-water storage*. Transactions of the American Geophysical Union, 16, 519-524.
- Wood, A.S., 2001. *A new look at the heat balance integral method*. Applied Mathematical Modelling, 25, 815-824