

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΓΙΑ ΕΛΕΓΧΟ ΜΕΘΟΔΩΝ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΤΩΝ ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ

Κ. Α. Κατσιφαράκης¹ και Δ. Καρπούζος²

¹Τομέας Υδραυλικής και Τεχνικής Περιβάλλοντος, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

²Τομέας Εγγείων Βελτιώσεων, Εδαφολογίας και Γεωργικής Μηχανικής, Τμήμα Γεωπονίας
Α.Π.Θ. 54124, Θεσσαλονίκη

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται και διερευνώνται δύο προβλήματα βελτιστοποίησης, που σχετίζονται με θέματα διαχείρισης υδατικών πόρων και έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: α) Το ολικό βέλτιστο είναι γνωστό β) Η περιοχή διακύμανσης των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης είναι γνωστή γ) Παρουσιάζουν άπειρα τοπικά ακρότατα δ) Η εφαρμογή τους είναι εύκολη και ε) Ο υπολογιστικός όγκος για την εύρεση τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης είναι περιορισμένος. Επιπλέον, ο βαθμός δυσκολίας του ενός από αυτά είναι μεταβλητός και μπορεί να ρυθμιστεί μέσω των δεδομένων, χωρίς να αλλάξει το ολικό βέλτιστο. Λόγω αυτών των χαρακτηριστικών, τα παρουσιαζόμενα προβλήματα είναι κατάλληλα για την αξιολόγηση μεθόδων βελτιστοποίησης, ιδιαίτερα μάλιστα κατά την εφαρμογή τους σε θέματα διαχείρισης υδατικών πόρων.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Βελτιστοποίηση, πρόβλημα αναφοράς, διαχείριση υδατικών πόρων, σημείο Φερμά, γενετικοί αλγόριθμοι, διαδοχικός τετραγωνικός προγραμματισμός

BENCHMARK PROBLEMS FOR TESTING OPTIMIZATION METHODS APPLIED AT WATER RESOURCES MANAGEMENT PROBLEMS

K. L. Katsifarakis¹ and D.K. Karpouzos²

¹Division of Hydraulics and Environmental Engineering, Dept. of Civil Engineering,

²Dept. of Hydraulics, Soil Science and Agricultural Engineering, School of Agriculture
Aristotle University of Thessaloniki, GR-54124 Thessaloniki, Greece

SUMMARY

In this paper, two problems are presented and investigated, which are relevant to water resources management. These problems have the following features: a) Their global optimum is known b) The range of the values of the objective function is known c) The number of local optima is infinite d) Their application is easy and e) The computational effort that is required for the calculation of objective function values is low. Moreover, the difficulty of one of them can be adjusted, through the input parameters, without changing global optimum. Due to these favourite features, the two presented problems are suitable for evaluation of the performance of optimization techniques, in particular when applied to water resources management issues.

KEY WORDS: Optimization, benchmark problem, water resources management, Fermat point, genetic algorithms, sequential quadratic programming

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Προβλήματα βελτιστοποίησης εμφανίζονται, αμέσως ή εμμέσως, σε όλα σχεδόν τα επιστημονικά πεδία, ακόμη και σε περιπτώσεις όπου δεν χρησιμοποιείται ο συγκεκριμένος όρος. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο ορισμός της αρετής ως «μεσότητος» μεταξύ μιας υπερβολής και μιας έλλειψης, στο έργο του Αριστοτέλη Ηθικά Νικομάχεια. Μάλιστα ο μεγάλος φιλόσοφος διευκρινίζει ότι η μεσότης δεν είναι ο μέσος όρος μεταξύ των δύο άκρων, όπως συμβαίνει στην αριθμητική, ενώ αναφέρει σαφώς ότι η μεσότης είναι «ἀκρότης» ως προς την ποιότητα («κατά τό ἄριστον καί τό εὖ»). Μοιάζει δηλαδή να περιγράφει μια συνάρτηση με ένα μέγιστο (Katsifarakis, 2012).

Η ποικιλία των προβλημάτων βελτιστοποίησης και του βαθμού δυσκολίας τους είχε ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη πολλών μεθόδων για την αντιμετώπισή τους. Καμμία από αυτές δεν είναι καλύτερη από όλες τις άλλες για όλα τα προβλήματα (π.χ. Reeves and Raw, 2003). Επιπλέον, δεν υπάρχει κάποιος γενικός κανόνας για την επιλογή της καλύτερης μεθόδου για κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα, ούτε καν για την επιλογή των πιο κατάλληλων παραμέτρων μιας μεθόδου (π.χ. Wu and Walski, 2005). Η εμπειρία και η διαίσθηση είναι οπωσδήποτε χρήσιμες, αν και συχνά η επιλογή βασίζεται στη συνήθεια ή στον βαθμό γνώσης συγκεκριμένων μεθόδων. Μια πιο αντικειμενική επιλογή μπορεί να γίνει με αξιολόγηση διαφόρων μεθόδων βελτιστοποίησης, μέσω της εφαρμογής τους σε προβλήματα αναφοράς, που έχουν χαρακτηριστικά παρόμοια με αυτά των εξεταζόμενων προβλημάτων (π.χ. Younis and Dong, 2010).

Στη βιβλιογραφία μπορούν να βρεθούν πολλά προβλήματα αναφοράς, με ποικίλα χαρακτηριστικά (π.χ. Schoen, 1993; Floudas et al. 1999; Gaviano et al. 2003; Shcherbina et al. 2003; Addis and Locatelli, 2007). Όμως λίγα μόνον είναι βασισμένα σε προβλήματα διαχείρισης υδατικών πόρων (Mayer et al, 2002; Karpouzos and Katsifarakis, 2013). Καθώς η διαχείριση των υδατικών πόρων συνδέεται στενά με την έννοια της βελτιστοποίησης (π.χ. Singh, 2012), η παρουσίαση πρόσθετων συναφών προβλημάτων αναφοράς είναι χρήσιμη.

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται δύο προβλήματα βασισμένα σε θέματα διαχείρισης υδατικών πόρων, τα οποία έχουν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- α) Το ολικό βέλτιστο είναι γνωστό.
- β) Η περιοχή διακύμανσης των τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης είναι γνωστή.
- γ) Παρουσιάζουν άπειρα τοπικά ακρότατα.
- δ) Η εφαρμογή τους είναι εύκολη.
- ε) Ο υπολογιστικός όγκος για την εύρεση τιμών της αντικειμενικής συνάρτησης είναι περιορισμένος.

Επιπλέον, ο βαθμός δυσκολίας του ενός από αυτά είναι μεταβλητός και μπορεί να ρυθμιστεί μέσω των δεδομένων, χωρίς να αλλάξει το ολικό βέλτιστο.

Στην παρούσα εργασία, ο βαθμός δυσκολίας και των δύο προτεινόμενων προβλημάτων διερευνάται χρησιμοποιώντας τις μεθόδους των γενετικών αλγορίθμων και του διαδοχικού τετραγωνικού προγραμματισμού.

2. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

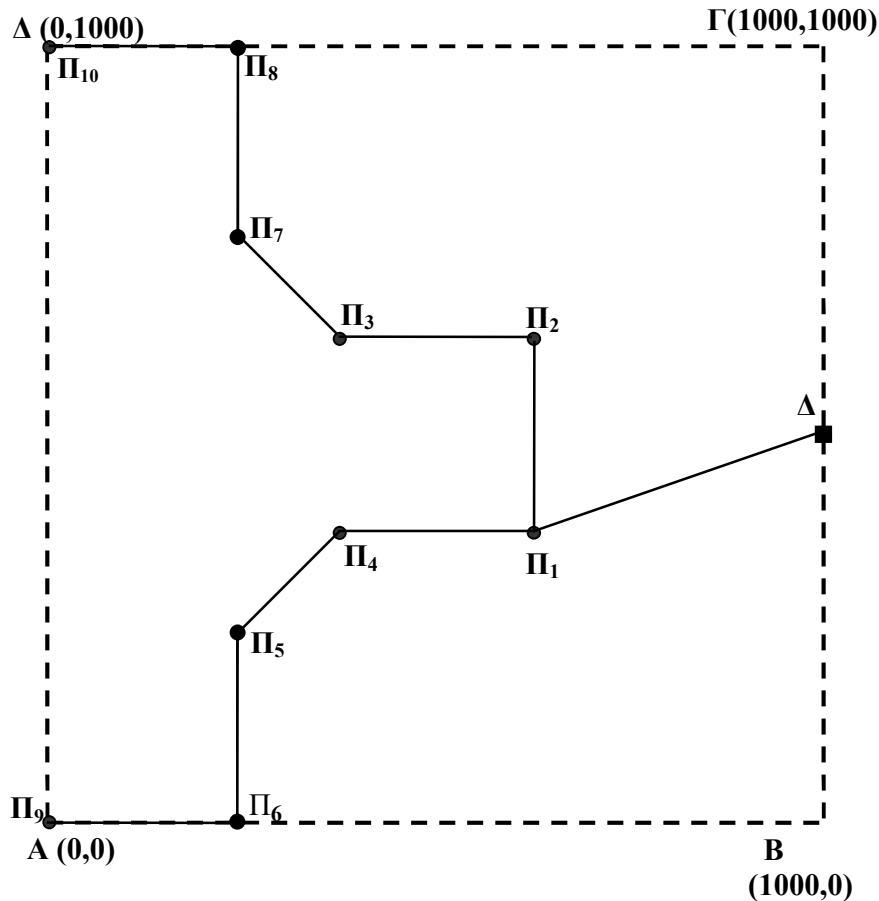
2.1. ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΗΚΟΥΣ ΔΙΚΤΥΟΥ

Το πρώτο πρόβλημα αναφοράς έχει να κάνει με την ελαχιστοποίηση του μήκους ενός υδραυλικού δικτύου. Αποτελεί τροποποίηση, προς το δυσκολότερο, ενός προβλήματος που παρουσιάστηκε από τους Karpouzos and Katsifarakis (2013). Φυσικά μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για δίκτυα οποιουδήποτε τύπου.

Πρόβλημα 1. Σε έναν υδροφορέα υπάρχουν 10 πηγάδια και πρόκειται να κατασκευασθούν άλλα 2 σε μια έκταση ΑΒΓΔ με διαστάσεις 1000 x 1000 m. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των νέων πηγαδιών, που ελαχιστοποιούν το μήκος του δικτύου μεταφοράς του

αντλούμενου νερού από το σύστημα των 12 πηγαδιών σε μια δεξαμενή, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι συμβολή αγωγών επιτρέπεται μόνο στις θέσεις των πηγαδιών.

Τα υπάρχοντα πηγάδια (Π_1 ως Π_{10}), των οποίων οι συντεταγμένες (με άξονες των x και y τις ευθείες AB και AΔ αντιστοίχως) δίνονται στον Πίνακα 1, απεικονίζονται ως μικροί μαύροι κύκλοι στο σχήμα 1, ενώ η δεξαμενή Δ, που έχει συντεταγμένες (1000, 500), απεικονίζεται ως μικρό τετράγωνο.



Σχήμα 1. Υπάρχοντα πηγάδια και βέλτιστο δίκτυο σύνδεσής τους με τη δεξαμενή

Πίνακας 1. Συντεταγμένες υπαρχόντων πηγαδιών (πρόβλημα 1)

Πηγάδι	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5	Π_6	Π_7	Π_8	Π_9	Π_{10}
x	670	670	420	420	250	250	250	250	0	0
y	375	625	625	375	250	0	750	1000	0	1000

Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος, η συνάρτηση D που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί έχει την ακόλουθη μορφή:

$$D = \sum_{I=1}^N L_I \tag{2.1}$$

Στη σχέση (2.1) N είναι ο αριθμός των πηγαδιών και L_I το μήκος του αγωγού που απάγει το νερό από το πηγάδι I. Οι μεταβλητές του προβλήματος είναι συνολικά 4, οι τιμές των συντεταγμένων των νέων πηγαδιών. Για αυτές ισχύουν οι ακόλουθοι περιορισμοί:

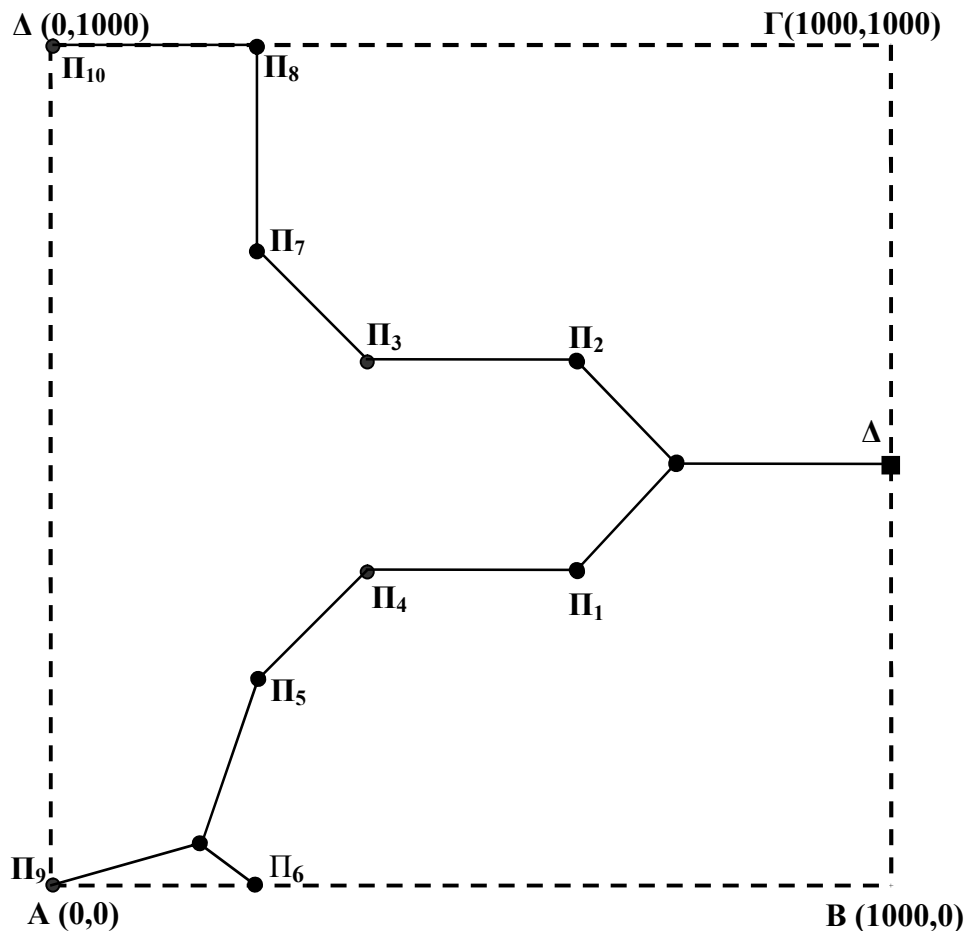
$$0 \leq x_I \leq 1000 \quad \text{για } I = 1, 2 \tag{2.2}$$

$$0 \leq y_1 \leq 1000 \quad \text{για } I = 1, 2 \quad (2.3)$$

Στο σχήμα 1 φαίνεται και ένα βέλτιστο δίκτυο σύνδεσης των υπάρχοντων πηγαδιών με τη δεξαμενή. Εναλλακτικά, θα μπορούσε να συνδεθεί το πηγάδι Π_2 με τη δεξαμενή, αντί για το Π_1 ή το Π_3 με το Π_4 αντί για το Π_2 με το Π_1 . Το μήκος του δικτύου αυτού είναι ίσο με 2524.90 m. Αν τα νέα πηγάδια τοποθετηθούν σε σημεία του δικτύου αυτού, το συνολικό μήκος του, D, δεν θα αλλάξει. Υπάρχουν όμως και καλύτερες λύσεις, οι οποίες μπορούν να βρεθούν αναλυτικά, αξιοποιώντας την ιδιότητα του σημείου Φερμά ενός τριγώνου να έχει το ελάχιστο άθροισμα αποστάσεων από τις κορυφές του (π.χ. Sprain, 1996). Με βάση τη διάταξη των υπάρχοντων πηγαδιών και της δεξαμενής, προκύπτει ότι η μέγιστη μείωση μήκους του δικτύου προκύπτει αν ένα νέο πηγάδι τοποθετηθεί στο σημείο Φερμά του τριγώνου $\Pi_1\Pi_2\Delta$ (π.χ. Katsifarakis and Lavrentiadis, 2014). Μείωση επίσης προκύπτει αν κάποιο νέο πηγάδι τοποθετηθεί στο σημείο Φερμά ενός από τα τρίγωνα $\Pi_1\Pi_2\Pi_3$, $\Pi_1\Pi_2\Pi_4$, $\Pi_1\Pi_3\Pi_4$, $\Pi_2\Pi_3\Pi_4$, $\Pi_5\Pi_6\Pi_9$ ή $\Pi_7\Pi_8\Pi_{10}$. Οι συντεταγμένες (x_F , y_F) των σημείων Φερμά F_1 ως F_7 των 7 αυτών τριγώνων παρουσιάζονται στον Πίνακα 2, μαζί με τη μείωση του μήκους του δικτύου d_F , που προκύπτει από την τοποθέτηση ενός νέου πηγαδιού σε αυτά. Σημειώνεται ότι στα τρίγωνα $\Pi_4\Pi_5\Pi_6$ και $\Pi_3\Pi_7\Pi_8$ το σημείο Φερμά συμπίπτει με τις κορυφές Π_5 και Π_7 αντιστοίχως, διότι οι αντίστοιχες γωνίες είναι μεγαλύτερες από 120° .

Πίνακας 2. Συντεταγμένες σημείων Φερμά και συνεπαγόμενη μείωση μήκους του δικτύου

τρίγωνο	$\Pi_1\Pi_2\Delta$	$\Pi_1\Pi_2\Pi_3$	$\Pi_1\Pi_2\Pi_4$	$\Pi_1\Pi_3\Pi_4$	$\Pi_2\Pi_3\Pi_4$	$\Pi_5\Pi_6\Pi_9$	$\Pi_7\Pi_8\Pi_{10}$
x_F	742.17	617.17	617.17	472.83	472.83	197.17	197.17
y_F	500.00	572.17	427.83	427.83	572.17	52.83	947.17
d_F	56.37	17.04	17.04	17.04	17.04	17.04	17.04



Σχήμα 2. Ένα από τα 6 βέλτιστα δίκτυα (D = 2451.49)

Με βάση τα στοιχεία του Πίνακα 2 (που έχουν ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων) επαληθεύεται ότι το μήκος του δικτύου γίνεται ελάχιστο όταν το ένα από τα 2 νέα πηγάδια τοποθετηθεί στο σημείο Φερμά F_1 του τριγώνου $\Pi_1\Pi_2\Delta$ και το άλλο στο σημείο Φερμά οποιουδήποτε από τα υπόλοιπα 6 τρίγωνα. Επομένως, υπάρχουν συνολικά 6 ολικά ελάχιστα, με $D = 2524.90 - 56.37 - 17,04 = 2451.49$. Ένα από αυτά απεικονίζεται στο Σχήμα 2.

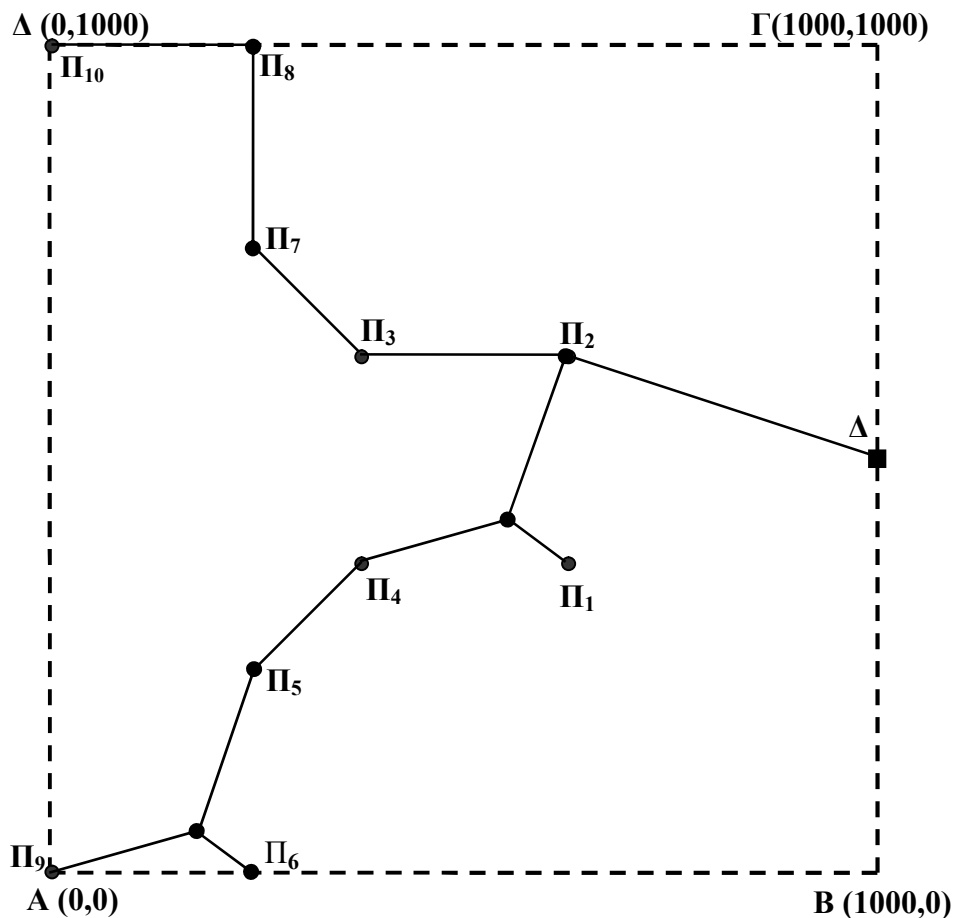
Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα τοπικά ακρότατα του συγκεκριμένου προβλήματος βελτιστοποίησης, με D μικρότερο ή ίσο από αυτό του αρχικού δικτύου. Τα ακρότατα αυτά μπορούν να ταξινομηθούν σε τέσσερις ομάδες:

α) Το ένα νέο πηγάδι τοποθετείται στο F_1 και το άλλο σε οποιοδήποτε σημείο του δικτύου που συνδέει τα υπάρχοντα πηγάδια, το πηγάδι στο F_1 και τη δεξαμενή. Υπάρχουν άπειρα τέτοια ακρότατα με $D = 2468.53$, που είναι μόλις κατά 0.7% μεγαλύτερο από το ολικό ελάχιστο.

β) Τα 2 νέα πηγάδια τοποθετούνται σε 2 από τα σημεία Φερμά F_2 ως F_7 . Υπάρχουν 9 τέτοια τοπικά ακρότατα (διότι δεν μπορούν να επιλεγούν συγχρόνως 2 από τα F_2 ως F_5). Ένα από αυτά απεικονίζεται στο Σχήμα 3. Η αντίστοιχη τιμή του D είναι 2490.82, που είναι κατά 1.6% μεγαλύτερη από το ολικό ελάχιστο.

γ) Το ένα νέο πηγάδι τοποθετείται σε ένα από τα σημεία Φερμά F_2 ως F_7 και το άλλο σε οποιοδήποτε σημείο του δικτύου που συνδέει τα υπάρχοντα πηγάδια με τη δεξαμενή. Υπάρχουν άπειρα τέτοια ακρότατα με $D = 2507.86$, που είναι κατά 2.3% μεγαλύτερο από το ολικό ελάχιστο.

δ) Και τα 2 νέα πηγάδια τοποθετούνται σε σημεία του δικτύου που συνδέει τα υπάρχοντα πηγάδια με τη δεξαμενή. Υπάρχουν άπειρα τέτοια ακρότατα με $D = 2524.90$, που είναι κατά 2.3% μεγαλύτερο από το ολικό ελάχιστο.



Σχήμα 3. Δίκτυο που αντιστοιχεί σε ένα από τα τοπικά ακρότατα της ομάδας β ($D = 2490.82$)

2.2. ΚΟΣΤΟΣ ΑΝΤΛΗΣΗΣ

Ένα από τα κοινότερα προβλήματα διαχείρισης υπόγειων υδατικών πόρων είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους άντλησης από σύστημα πηγαδιών (π.χ. Sidiropoulos and Tolikas, 2008). Συχνά στο πρόβλημα αυτό υπεισέρχονται διάφοροι περιορισμοί (π.χ. όρια παροχής λόγω δυνατοτήτων των αντλιών, όρια πτώσης στάθμης του υδραυλικού φορτίου σε τμήματα του υδροφορέα). Άλλες φορές πάλι το κόστος άντλησης εξετάζεται σε συνδυασμό με άλλες παραμέτρους, όπως το κόστος κατασκευής των πηγαδιών ή του δικτύου μεταφοράς του νερού. Σε άλλες περιπτώσεις, το κόστος άντλησης αποτελεί το κύριο κριτήριο βελτιστοποίησης συστημάτων αποκατάστασης υδροφορέων (π.χ. Matott et al, 2006; Papadopoulou et al, 2007). Επομένως ένα πρόβλημα αναφοράς σχετικό με το κόστος άντλησης είναι κατάλληλο για την αξιολόγηση μεθόδων βελτιστοποίησης σε προβλήματα διαχείρισης υδατικών πόρων.

Οι Karpouzou and Katsifarakis (2013) παραθέτουν και αξιολογούν ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους άντλησης δεδομένης συνολικής παροχής από σύστημα υπαρχόντων και νέων πηγαδιών σε άπειρο υδροφορέα με 2 ζώνες διαφορετικής μεταφορικότητας. Η λύση του προβλήματος αυτού έχει και άμεση πρακτική εφαρμογή. Από την σκοπιά της αξιολόγησης μεθόδων βελτιστοποίησης όμως, μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το πρακτικώς αδιανόητο πρόβλημα της μεγιστοποίησης του κόστους άντλησης, που διατυπώνεται και αναλύεται στις επόμενες παραγράφους.

Πρόβλημα 2. Σε έναν «άπειρο» υδροφορέα με 2 ζώνες διαφορετικής μεταφορικότητας υπάρχουν 10 πηγάδια και πρόκειται να κατασκευασθούν άλλα 2 σε μια έκταση ΑΒΓΔ με διαστάσεις 1000 x 1000 m (σχήμα 4). Να βρεθούν οι συντεταγμένες των νέων πηγαδιών, καθώς και η κατανομή της συνολικώς απαιτούμενης παροχής $Q_T = 100$ l/s στο σύνολο των 12 πηγαδιών, ώστε το πρόσθετο ετήσιο κόστος άντλησης, που οφείλεται στη λειτουργία του συστήματος των πηγαδιών, να είναι μέγιστο.

Τα υπάρχοντα πηγάδια (Π_1 ως Π_{10}) απεικονίζονται ως μικροί μαύροι κύκλοι στο σχήμα 4, ενώ οι συντεταγμένες τους, με άξονες των x και y τις ευθείες ΑΒ και ΑΔ αντιστοίχως, δίνονται στον Πίνακα 3. Η ακτίνα κάθε πηγαδιού είναι $r_0 = 0.25$ m, ενώ η ακτίνα επιρροής του συστήματος των πηγαδιών είναι $R = 2000$ m. Οι τιμές της μεταφορικότητας στις 2 ζώνες του υδροφορέα είναι $T_1 = 0.001$ m²/s και $T_2 = 0.002$ m²/s.

Πίνακας 3. Συντεταγμένες υπαρχόντων πηγαδιών (πρόβλημα 2)

Πηγάδι	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5	Π_6	Π_7	Π_8	Π_9	Π_{10}
x	100	250	250	250	250	750	750	750	750	900
y	500	200	400	600	800	200	400	600	800	500

Οι μεταβλητές του προβλήματος είναι συνολικά 16, 12 τιμές παροχών και 4 τιμές συντεταγμένων. Για τις μεταβλητές αυτές ισχύουν οι ακόλουθοι περιορισμοί:

$$0 \leq Q_I \leq 100 \quad \text{για } I = 1 \text{ ως } 12 \quad (2.4)$$

$$0 \leq x_I \leq 1000 \quad \text{για } I = 11, 12 \quad (2.5)$$

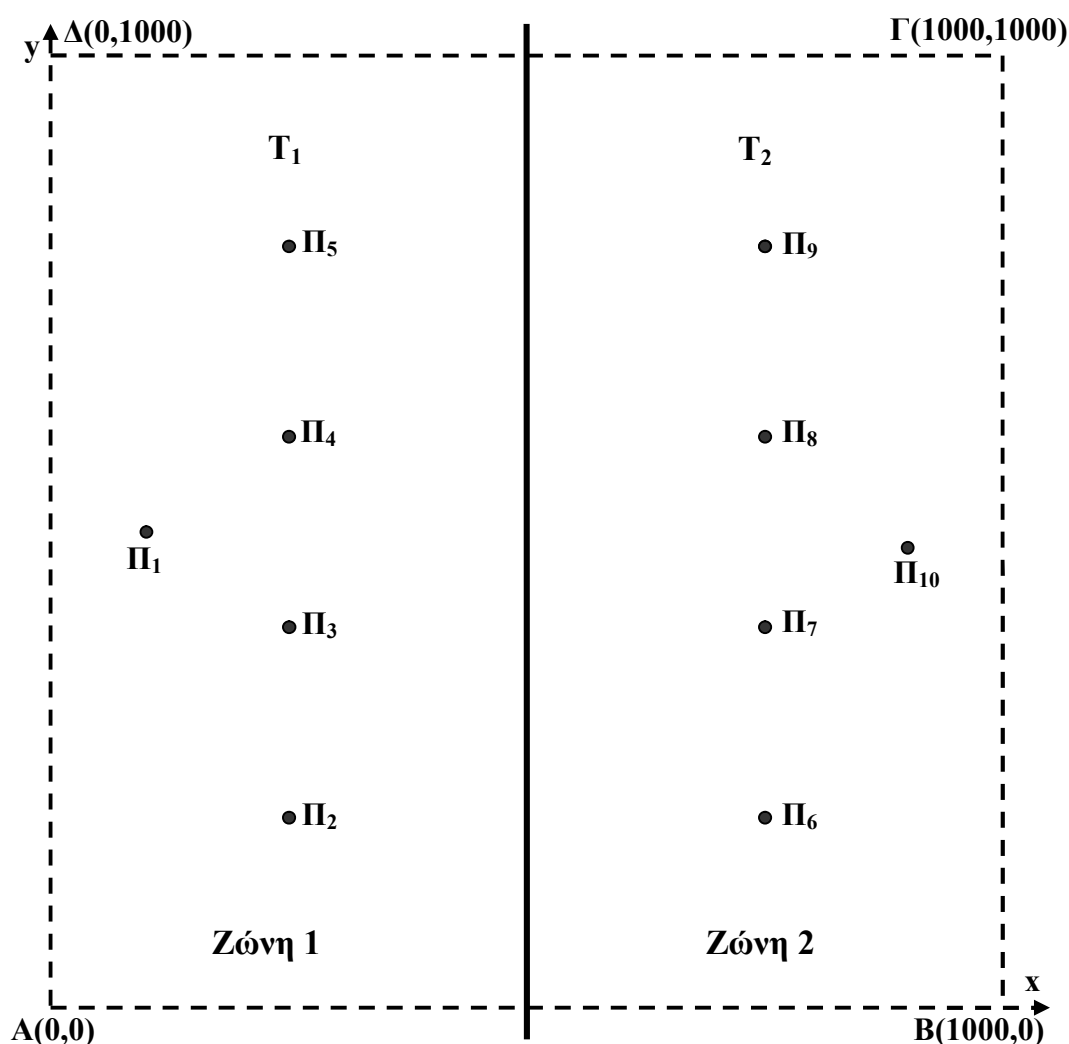
$$0 \leq y_I \leq 1000 \quad \text{για } I = 11, 12 \quad (2.6)$$

$$\sum_{I=1}^{12} Q_I = Q_T = 100 \quad (2.7)$$

Το πρόσθετο ετήσιο κόστος άντλησης K από σύστημα N πηγαδιών δίνεται από τη σχέση:

$$K = A \sum_{I=1}^N Q_I s_I \quad (2.8)$$

Στον τύπο αυτό το A είναι συντελεστής, ο οποίος εξαρτάται από το κόστος της ενέργειας, την απόδοση των αντλιών και τη διάρκεια της άντλησης. Για την τυποποίηση του προβλήματος αναφοράς, και χάριν ευκολίας, θέτουμε $A=1000$. Ακόμη, Q_I είναι η παροχή του πηγαιδιού I (σε m^3/s) και s_I είναι η πτώση στάθμης του υδραυλικού φορτίου στην παρειά του (σε m). Σε υδροφορείς με δύο ζώνες διαφορετικής μεταφορικότητας οι τιμές της πτώσης στάθμης μπορούν να υπολογισθούν αναλυτικά, χρησιμοποιώντας α) τη μέθοδο των εικόνων, κατά την οποία εισάγονται φανταστικά πηγάδια, που είναι συμμετρικά των πραγματικών ως προς τη διεπεφάνεια των 2 ζωνών (π.χ. Bear, 1979; Λατινόπουλος, 1986) και β) την αρχή της επαλληλίας.



Σχήμα 4. Υδροφορέας με 2 ζώνες διαφορετικής μεταφορικότητας. Θέσεις υπαρχόντων πηγαιδιών και διαθέσιμη περιοχή για την κατασκευή νέων

Ας υποθέσουμε ότι τα πηγάδια 1 ως K βρίσκονται στη ζώνη 1, ενώ τα υπόλοιπα βρίσκονται στη ζώνη 2. Τότε, η πτώση στάθμης s_I στην παρειά του πηγαιδιού I δίνεται από τη σχέση (2.9) για τα πηγάδια 1 ως K και από τη (2.10) για τα πηγάδια $K + 1$ ως N :

$$s_I = -\frac{1}{2\pi T_1} \sum_{J=1}^K Q_J \ln \frac{r_{IJ}}{R} - \frac{T_1 - T_2}{2\pi T_1 (T_1 + T_2)} \sum_{J=1}^K Q_J \ln \frac{r_{Ij}}{R} - \frac{1}{\pi(T_1 + T_2)} \sum_{J=K+1}^N Q_J \ln \frac{r_{IJ}}{R} \quad (2.9)$$

$$s_I = -\frac{1}{2\pi T_2} \sum_{J=K+1}^N Q_J \ln \frac{r_{IJ}}{R} - \frac{T_2 - T_1}{2\pi T_2 (T_1 + T_2)} \sum_{J=K+1}^N Q_J \ln \frac{r_{Ij}}{R} - \frac{1}{\pi(T_1 + T_2)} \sum_{J=1}^K Q_J \ln \frac{r_{IJ}}{R} \quad (2.10)$$

Στις σχέσεις (2.9) και (2.10) τα κεφαλαία I, J αντιστοιχούν στα πραγματικά πηγάδια, ενώ τα πεζά i,j στις εικόνες τους. Επομένως r_{IJ} , r_{Ij} είναι οι αποστάσεις του πηγαδιού I από το πηγάδι J και την εικόνα του πηγαδιού J αντιστοίχως, ενώ $r_{II} = r_0$, όπου r_0 είναι η ακτίνα του πηγαδιού. Τέλος, T_1 και T_2 είναι οι μεταφορικότητες των 2 ζωνών και R η ακτίνα επιρροής του συστήματος των πηγαδιών.

Για να ελαχιστοποιηθεί το κόστος άντλησης τα νέα πηγάδια πρέπει να τοποθετηθούν στη ζώνη με τη μεγαλύτερη μεταφορικότητα και όσο το δυνατόν πιο μακριά από τη διεπιφάνεια των δύο ζωνών, καθώς και από τα υπάρχοντα πηγάδια. Επιπλέον η κατανομή της συνολικής παροχής στα πηγάδια πρέπει να οδηγεί σε ίσες πτώσεις στάθμης του υδραυλικού φορτίου στις παρειές τους (Katsifarakis, 2008). Αντιθέτως, το κόστος άντλησης γίνεται μέγιστο αν όλη η παροχή αντλείται από ένα πηγάδι, το οποίο θα τοποθετηθεί στη ζώνη με τη μικρότερη μεταφορικότητα και όσο το δυνατόν πιο μακριά από τη διεπιφάνεια των 2 ζωνών, δηλαδή σε κάποιο σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ του σχήματος 4. Επομένως υπάρχουν οι ακόλουθοι τύποι βέλτιστων λύσεων:

α) $Q_{11} = 100$ και επομένως $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_7 = Q_8 = Q_9 = Q_{10} = Q_{12} = 0$
 $x_{11} = 0$, ενώ οι μεταβλητές y_{11} , x_{12} , y_{12} μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή.

β) $Q_{12} = 100$ και επομένως $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_7 = Q_8 = Q_9 = Q_{10} = Q_{11} = 0$
 $x_{12} = 0$, ενώ οι μεταβλητές y_{11} , x_{11} , y_{12} μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή.

γ) $Q_{11} + Q_{12} = 100$ και επομένως $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = Q_7 = Q_8 = Q_9 = Q_{10} = 0$
 $x_{11} = x_{12} = 0$ και $y_{11} = y_{12}$ (δηλαδή τα 2 νέα πηγάδια συμπίπτουν και βρίσκονται

επάνω στον άξονα των y).

Άρα οι ολικώς βέλτιστες λύσεις είναι θεωρητικώς άπειρες.

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης περιπλέκεται όμως από την ύπαρξη σειρών τοπικών ακροτάτων, που προκύπτουν από τη συγκέντρωση του συνόλου της παροχής σε κάποιο από τα υπάρχοντα πηγάδια. Υπάρχουν δηλαδή οι ακόλουθοι τύποι τοπικών ακροτάτων:

α) $Q_I = 100$ (για μία τιμή του I από 1 ως 10), όλες οι υπόλοιπες παροχές είναι μηδενικές, ενώ οι μεταβλητές x_{11} , y_{11} , x_{12} , y_{12} μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή.

β) $Q_I + Q_{11} = 100$ (για μία τιμή του I από 1 ως 10), όλες οι υπόλοιπες παροχές είναι μηδενικές, $x_{11} = x_I$, $y_{11} = y_I$, ενώ οι μεταβλητές x_{12} , y_{12} μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή.

γ) $Q_I + Q_{12} = 100$ (για μία τιμή του I από 1 ως 10), όλες οι υπόλοιπες παροχές είναι μηδενικές, $x_{12} = x_I$, $y_{12} = y_I$, ενώ οι μεταβλητές x_{11} , y_{11} μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή.

δ) $Q_{11} + Q_{12} = 100$, όλες οι υπόλοιπες παροχές είναι μηδενικές, $x_{11} = x_{12} > 0$, $y_{11} = y_{12}$.

Στις περιπτώσεις β και γ ένα από τα νέα πηγάδια συμπίπτει με κάποιο από τα υπάρχοντα, ενώ στην δ τα 2 νέα πηγάδια συμπίπτουν σε οποιαδήποτε θέση εκτός του άξονα των y. Επομένως και τα τοπικά ακρότατα είναι άπειρα.

Η τιμή K_{max} του ολικού βελτίστου της συνάρτησης K υπολογίζεται με τον ακόλουθο τρόπο: Πρώτα υπολογίζεται η τιμή του s_{11} από τη σχέση (2.9), θέτοντας $Q_{11} = 0.1$, $x_{11} = 0$, όλες τις άλλες παροχές ίσες με το 0 και τυχούσες τιμές στα y_{11} , x_{12} , y_{12} . Κατόπιν η τιμή αυτή εισάγεται στη σχέση (2.9), από την οποία προκύπτει ότι $K_{max} = 13935.99$

Ομοίως, οι τιμές των τοπικών ακροτάτων K_T , που προκύπτουν για άντληση της συνολικώς απαιτούμενης παροχής Q_T από ένα από τα υπάρχοντα πηγάδια (καθώς και για τα ακρότατα τύπου β και γ), υπολογίζονται χρησιμοποιώντας πρώτα τη σχέση (2.9) ή τη (2.10), ανάλογα με τη ζώνη που βρίσκεται το πηγάδι αυτό, και κατόπιν την (2.8). Οι τιμές των K_T παρουσιάζονται στον πίνακα 4.

Πίνακας 4. Τιμές τοπικών ακροτάτων για τις περιπτώσεις α , β και γ

Πηγάδι	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
K_T	13817.64	13568.39	13568.39	13568.39	13568.39
Πηγάδι	Π_6	Π_7	Π_8	Π_9	Π_{10}
K_T	7519.65	7519.65	7519.65	7519.65	7394.93

Όπως προκύπτει από τον πίνακα 4, η τιμή του τοπικού ακρότατου που αντιστοιχεί στο πηγάδι 1, ισούται με $0.9915K_{\max}$, ενώ αυτές που αντιστοιχούν στα πηγάδια 2 ως 5, είναι ίσες με $0.9736K_{\max}$. Είναι δηλαδή πολύ ισχυρά τοπικά ακρότατα.

Ο βαθμός δυσκολίας του προβλήματος μπορεί εύκολα να αυξηθεί ή να μειωθεί αλλάζοντας τον αριθμό των υπαρχόντων πηγαδιών ή/και την απόστασή τους από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ.

3. ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Για να αξιολογήσουμε τα προτεινόμενα προβλήματα αναφοράς, επιχειρήσαμε να τα επιλύσουμε χρησιμοποιώντας μια ευρετική μέθοδο (συγκεκριμένα αυτή των γενετικών αλγορίθμων) και μία συμβατική μη γραμμική μέθοδο (συγκεκριμένα αυτή του διαδοχικού τετραγωνικού προγραμματισμού).

3.1 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΓΕΝΕΤΙΚΩΝ ΑΛΓΟΡΙΘΜΩΝ

Η μέθοδος των γενετικών αλγορίθμων (Γ.Α.) είναι ίσως η πιο γνωστή ευρετική μέθοδος και έχει χρησιμοποιηθεί εκτεταμένα σε θέματα διαχείρισης υδατικών πόρων (π.χ. Katsifarakis and Karpouzos, 2012). Για το θεωρητικό υπόβαθρο και τις εφαρμογές της υπάρχουν εκτεταμένα ειδικά συγγράμματα (π.χ. Goldberg, 1989; Michalewicz, 1996). Επιγραμματικά αναφέρουμε τα ακόλουθα: Οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι μια μαθηματική απομίμηση της βιολογικής διαδικασίας εξέλιξης των ειδών. Ξεκινούν με έναν αριθμό από τυχαίες δυνατές λύσεις του εξεταζόμενου προβλήματος. Οι λύσεις αυτές, που αποκαλούνται χρωμοσώματα, αποτελούν τον πληθυσμό της πρώτης γενιάς. Στους κλασικούς δυαδικούς Γ.Α. τα χρωμοσώματα είναι δυαδικές συμβολοσειρές (binary strings), π.χ. [01001110].

Ο πληθυσμός της πρώτης γενεάς υφίσταται αξιολόγηση, με βάση μια διαδικασία ή συνάρτηση αποτίμησης (evaluation function). Η διαδικασία αυτή εξαρτάται από το εξεταζόμενο πρόβλημα, π.χ. μπορεί να περιλαμβάνει ένα μοντέλο προσομοίωσης ροής (π.χ. Ζορμπά κ. άλ., 2007). Μπορεί ακόμη να περιλαμβάνει «ποινή» για τη μη τήρηση κάποιου από τους περιορισμούς του προβλήματος. Σε ό,τι αφορά την τήρηση των περιορισμών, άλλες δυνατότητες είναι η διόρθωση των χρωμοσωμάτων, ώστε να πληρούν τους περιορισμούς και η τροποποίηση των γενετικών τελεστών, ώστε να παράγουν χρωμοσώματα που αντιστοιχούν σε επιτρεπτές λύσεις μόνον.

Μετά την αξιολόγηση των χρωμοσωμάτων μιας γενιάς παράγονται αυτά της επόμενης, με τη βοήθεια τριών βασικών τελεστών, που μιμούνται βιολογικές διαδικασίες. Αυτοί είναι: α) η επιλογή (selection) β) η διασταύρωση (crossover) και γ) η μετάλλαξη (mutation). Πολλές φορές, χρησιμοποιούνται επιπροσθέτως και άλλοι τελεστές.

Η διαδικασία της επιλογής, που οδηγεί στη δημιουργία του ενδιάμεσου πληθυσμού, είναι μια μαθηματική απομίμηση της θεωρίας του Δαρβίνου περί επικράτησης του καλύτερα προσαρμοσμένου στο περιβάλλον. Γίνεται με προκαθορισμένο «τυχαίο» τρόπο, και συμμετέχουν σε αυτήν όλα τα χρωμοσώματα, με ξεχωριστή πιθανότητα «επιβίωσης» το καθένα. Αυτή η πιθανότητα αντιστοιχεί στην καταλληλότητα (fitness) του χρωμοσώματος, που προέκυψε από την διαδικασία αξιολόγησης. Έτσι τα συγκριτικώς καλύτερα χρωμοσώματα έχουν περισσότερες πιθανότητες να περάσουν στην επόμενη γενεά του Γ.Α. Οι πιο κοινές διαδικασίες επιλογής είναι α) ο τροχός ρουλέτας με άνισα διαστήματα και β) ο διαγωνισμός (tournament). Επιπλέον πολλοί κώδικες, ακολουθώντας τη λεγόμενη επιλεκτική προσέγγιση (elitist approach), περιλαμβάνουν ειδική διαδικασία ενσωμάτωσης ενός

τουλάχιστον αντιγράφου του καλύτερου χρωμοσώματος στην επόμενη γενιά.

Αφού σχηματισθεί ο ενδιαμέσος πληθυσμός, επιλέγονται τυχαία κάποια από τα μέλη του για να υποστούν τις διαδικασίες της διασταύρωσης και της μετάλλαξης (πιθανώς και άλλων τελεστών), ενώ τα υπόλοιπα περνούν αυτούσια στην επόμενη γενιά. Κατά τη διασταύρωση γίνεται ανταλλαγή τμημάτων μεταξύ ζευγών χρωμοσωμάτων, που επιλέγονται τυχαία από τον ενδιαμέσο πληθυσμό. Η μετάλλαξη τέλος, αφορά στους χαρακτήρες, που απαρτίζουν τις συμβολοσειρές των χρωμοσωμάτων (το 0 μετατρέπεται σε 1 και αντιστρόφως).

Η διαδικασία που περιγράφηκε (αξιολόγηση-επιλογή-διασταύρωση-μετάλλαξη-άλλοι τελεστές) επαναλαμβάνεται για έναν προκαθορισμένο αριθμό γενεών ή μέχρι να εκπληρωθεί κάποιο κριτήριο τερματισμού. Αν η μέθοδος λειτουργήσει σωστά, στην τελευταία γενιά θα έχει βρεθεί κάποιο χρωμόσωμα, το οποίο αντιστοιχεί στη ζητούμενη βέλτιστη (ή σε κάποια σχεδόν βέλτιστη) λύση του προβλήματος.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται ένας απλός δυαδικός γενετικός αλγόριθμος. Η επιλογή γίνεται με τη μέθοδο του διαγωνισμού. Επιπλέον, περιλαμβάνει τη διαδικασία της επιλεκτικής προσέγγισης. Χρησιμοποιούνται ακόμη οι κλασικοί τελεστές της διασταύρωσης ενός σημείου και της μετάλλαξης. Επιπλέον, χρησιμοποιείται ο τελεστής της αντιμετάθεσης (Katsifarakis et al, 1999), εναλλάξ με τη μετάλλαξη (στις ζυγές και μονές γενιές αντιστοίχως). Τέλος, η τήρηση των περιορισμών εξασφαλίζεται με διόρθωση των χρωμοσωμάτων.

Κατά την αξιολόγηση των προβλημάτων, στον κώδικα των γενετικών αλγορίθμων χρησιμοποιήσαμε τις τιμές που συνοψίζονται στον Πίνακα 5.

Πίνακας 5. Παράμετροι του κώδικα των γενετικών αλγορίθμων

Παράμετρος	Πρόβλημα 1	Πρόβλημα 2
Μέγεθος πληθυσμού	50	50
Αριθμός γενεών	160	160
Πιθανότητα διασταύρωσης	0.6	0.6
Πιθανότητα μετάλλαξης	0.026	0.009

Η πιθανότητα μετάλλαξης-αντιμετάθεσης επιλέχθηκε με βάση το μήκος του χρωμοσώματος CL. Στο πρώτο πρόβλημα το χρωμόσωμα αντιστοιχεί σε 4 τιμές συντεταγμένων, που κυμαίνονται από 0 ως 1000, συνεπώς χρειάζονται 10 ψηφία για κάθε μία στο δυαδικό σύστημα. Επομένως το χρωμόσωμα έχει συνολικά 40 ψηφία. Στο δεύτερο πρόβλημα το χρωμόσωμα εκπροσωπεί 4 τιμές συντεταγμένων, που κυμαίνονται πάλι από 0 ως 1000, αλλά και 12 παροχές. Η τιμή κάθε παροχής κυμαίνεται από 0 ως 100, άρα στο δυαδικό σύστημα χρειάζονται 7 ψηφία για την παράστασή της. Επομένως το χρωμόσωμα έχει συνολικά 124 ψηφία. Η τιμή της πιθανότητας μετάλλαξης επιλέχθηκε έτσι ώστε να είναι λίγο μεγαλύτερη από τον όρο $1/CL$ (Κοντός, 2013).

Ο απλός γενετικός αλγόριθμος είχε πολύ καλή απόδοση στο πρόβλημα 1. Κατέληξε στο ολικό ακρότατο στο 97% των δοκιμών, τις μισές φορές ακριβώς και τις άλλες με πολύ καλή προσέγγιση. Αξίζει μάλιστα να σημειωθεί ότι στο 90% περίπου των ορθών λύσεων ως δεύτερο σημείο Φερμά επιλέχθηκε κάποιο από τα F_2 ως F_5 . Στο υπόλοιπο 3% των δοκιμών ο γενετικός αλγόριθμος κατέληξε σε τοπικό ακρότατο της ομάδας α (με $D = 2468.53$).

Αντιθέτως, η απόδοση του γενετικού αλγορίθμου στο πρόβλημα 2 ήταν χαμηλή. Βρήκε ακριβώς ή με καλή προσέγγιση το ολικό βέλτιστο μόλις στο 15% των δοκιμών. Περίπου στο 35% κατέληξε στο ισχυρότερο τοπικό ακρότατο ($K = 13817.64$), που αντιστοιχεί στο πηγάδι Π_1 , ενώ στο 43% στο δεύτερο πιο ισχυρό τοπικό ακρότατο ($K = 13568.39$), που αντιστοιχεί στα πηγάδια Π_2 ως Π_5 . Τέλος στο 6% των δοκιμών υπήρξε σύμπτωση της θέσης των 2 νέων πηγαδιών και συγκέντρωση της συνολικής παροχής σε αυτά μόνο, ενώ στο 1% ο αλγόριθμος δεν συνέκλινε σε κάποιο ακρότατο. Αξίζει να σημειωθεί ότι εμφανίσθηκε περίπου ίσος αριθμός ολικών ακροτάτων τύπου α και τύπου β , ενώ δεν καταγράφηκαν περιπτώσεις τύπου

γ. Αντιθέτως, στις δοκιμές που κατέληξαν στα 2 ισχυρότερα τοπικά ακρότατα, είχαμε πολλές περιπτώσεις σύμπτωσης ενός από τα νέα πηγάδια με κάποιο από τα προϋπάρχοντα και συγκέντρωση της συνολικής παροχής στα 2 πηγάδια που συνέπεσαν.

Από τις δοκιμές προκύπτει ότι το πρόβλημα 2 στη βασική του μορφή είναι αρκετά δύσκολο για τον γενετικό αλγόριθμο. Όπως αναφέρθηκε, όμως, η δυσκολία μπορεί να ρυθμιστεί με απλό τρόπο, αλλάζοντας τον αριθμό των υπαρχόντων πηγαδιών ή/και την απόστασή τους από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ. Αν αφαιρεθεί, για παράδειγμα, το πηγάδι Π₁, ο γενετικός αλγόριθμος καταλήγει στο ολικό ακρότατο περίπου στο 30% των δοκιμών, δηλαδή το ποσοστό επιτυχίας διπλασιάζεται.

3.2 ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΟΥ ΔΙΑΔΟΧΙΚΟΥ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Ο διαδοχικός τετραγωνικός προγραμματισμός (sequential quadratic programming-SQP) είναι μια σύγχρονη και ευρέως διαδεδομένη μέθοδος επίλυσης μη γραμμικών προβλημάτων βελτιστοποίησης (Bartholomew–Biggs, 2008) και έχουν αναπτυχθεί αρκετοί ειδικοί αλγόριθμοι για την εφαρμογή της. Το θεωρητικό υπόβαθρο και η αναλυτική περιγραφή της μεθόδου SQP αναφέρεται σε αρκετά συγγράμματα (π.χ. Nocedal and Wright, 2006; Agnarsson et al., 2013; Mathworks, 2015). Συνοπτικά, η κύρια ιδέα του SQP είναι η επίλυση του μη γραμμικού προβλήματος βελτιστοποίησης μέσω διαμόρφωσης ενός υποπροβλήματος τετραγωνικού προγραμματισμού βάσει της τετραγωνικής προσέγγισης της Λαγκρανζιανής συνάρτησης. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για τη δημιουργία μιας ακολουθίας προσεγγιστικών λύσεων που θα συγκλίνει σε μια λύση του μη γραμμικού προβλήματος.

Τα βασικά στάδια υλοποίησης ενός αλγορίθμου SQP είναι:

1. Υπολογισμός της κλίσης και ανανέωσης του Εσσιανού πίνακα
2. Διαμόρφωση και επίλυση του τετραγωνικού προβλήματος για την εύρεση της κατεύθυνσης
3. Εφαρμογή τεχνικής αναζήτησης γραμμής για την εύρεση του κατάλληλου βήματος μετακίνησης

Αναλυτικότερα, η βέλτιστη λύση επιτυγχάνεται με την ικανοποίηση των συνθηκών Karush-Kuhn-Tacker (KKT), οι οποίες αποτελούν τις θεμελιώδεις αναγκαίες συνθήκες 1^{ης} τάξης για τον προσδιορισμό του ελαχίστου και εκφράζουν τη σχέση μεταξύ της κλίσης της αντικειμενικής συνάρτησης και της κλίσης των ενεργών περιορισμών του προβλήματος. Η επίτευξη της λύσης που να ικανοποιεί τις συνθήκες (KKT) επιχειρείται μέσω της επαναληπτικής μεθόδου Quasi-Newton, για μείωση του υπολογιστικού φόρτου. Η μέθοδος αυτή δίνει μια προσέγγιση, παρά ένα ακριβή υπολογισμό, του Εσσιανού Πίνακα μέσω ενός σχήματος ανανέωσης, του BFGS, το οποίο διασφαλίζει επίσης τη διατήρηση της ιδιότητας του Εσσιανού Πίνακα να είναι θετικά ορισμένος. Η κλίση, η οποία υπολογίζεται μέσω πεπερασμένων διαφορών, και ο ανανεωμένος Εσσιανός Πίνακας χρησιμοποιούνται για τη διαμόρφωση του υποπροβλήματος τετραγωνικού προγραμματισμού για την εύρεση της κατεύθυνσης έρευνας. Το μέγεθος του βήματος μετακίνησης κατά μήκος της επιλεγθείσας κατεύθυνσης καθορίζεται από τη μέθοδο αναζήτησης γραμμής (Line search) μέσω μιας συνάρτησης αξίας (merit function) προς ένα νέο σημείο με χαμηλότερη τιμή της συνάρτησης εντός του πεδίου ορισμού των μεταβλητών. Η ικανοποίηση τυχόν επιπλέον περιορισμών υλοποιείται μέσω εισαγωγής μιας ποινής στη συνάρτηση αξίας που απεικονίζει το μέγεθος παραβίασης των περιορισμών. Η προσεγγιστική λύση που δημιουργήθηκε αποτελεί την αρχική λύση της επόμενης κύριας επανάληψης του SQP και η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι την επίτευξη της σύγκλισης στο τοπικό ακρότατο.

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε η ενσωματωμένη συνάρτηση fmincon-SQP της Matlab (R2010a) για την εφαρμογή του διαδοχικού τετραγωνικού προγραμματισμού στα εξεταζόμενα προβλήματα αναφοράς. Η συνάρτηση fmincon-SQP, μέσω επαναλήψεων, ξεκινώντας ένα αρχικό σημείο (λύση) αναζητεί την εύρεση τοπικού ελαχίστου χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο SQP. Για την ανοχή στο κριτήριο σύγκλισης και τον μέγιστο

αριθμό επαναλήψεων του αλγορίθμου επιλέχθηκαν οι προκαθορισμένες τιμές της συνάρτησης $fmincon$ -SQP 10^{-6} και 400 αντιστοίχως. Το αρχικό διάνυσμα αποτελείται από τις παραμέτρους προς βελτιστοποίηση (τέσσερις και δεκαέξι στο πρώτο και δεύτερο πρόβλημα αντιστοίχως), οι τιμές των οποίων είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί που κυμαίνονται εντός του πεδίου ορισμού τους.

Στο πρόβλημα 1 ο αλγόριθμος SQP συνέκλινε στο ολικό βέλτιστο μόλις στο 8% των δοκιμών, ενώ ισχυρός πόλος έλξης με ποσοστό 40% αποδείχτηκε το ισχυρότερο τοπικό ακρότατο ($D=2468.53$), όπου το ένα πηγάδι τοποθετείται στο 1^ο σημείο Fermat και το δεύτερο σε οποιοδήποτε σημείο του δικτύου που διαμορφώθηκε από τα υπόλοιπα έντεκα πηγάδια. Σε ποσοστό 38% των δοκιμών προέκυψε η τοποθέτηση των δύο νέων πηγαδιών σε σημεία του δικτύου των υφιστάμενων πηγαδιών με τη δεξαμενή ($D=2524.90$) ενώ σε μικρότερο ποσοστό 12% ο αλγόριθμος κατέληξε στο τοπικό ελάχιστο $D=2507.86$ με το ένα πηγάδι να τοποθετείται σε κάποιο σημείο Fermat εκτός του πρώτου και το άλλο σε οποιοδήποτε σημείο του προκύπτοντος δικτύου. Επίσης, ένα μικρό ποσοστό 1% των δοκιμών συνέκλινε στην τοποθέτηση και των δυο πηγαδιών σε κάποιο από τα σημεία Fermat F2 έως F7 ($D=2490.82$) ενώ το υπόλοιπο 1% δεν προσέγγισε κάποιο από τα παραπάνω υψηλά τοπικά ακρότατα.

Η απόδοση του αλγορίθμου SQP ήταν σχετικά καλύτερη στο πρόβλημα 2, καθώς το ολικό βέλτιστο ($K=13935.99$) προσεγγίστηκε με ικανοποιητική ακρίβεια στο 16% των δοκιμών. Η συνολική παροχή αποδόθηκε σε ένα από τα πηγάδια 2 έως 5 ($K=13568.39$) σε ποσοστό 63% και στο πηγάδι 1 ($K=13817.64$) σε ποσοστό 20% των δοκιμών. Επίσης σε ένα πολύ μικρό ποσοστό της τάξης του 1% ο αλγόριθμος παγιδεύθηκε στην τοπική λύση της άντλησης του συνόλου της παροχής από ένα πηγάδι μεταξύ των πηγαδιών 6 και 9, που βρίσκονται στη δεύτερη ζώνη μεταφορικότητας ($K=7519.65$).

4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στην εργασία αυτή παρουσιάζονται δύο προβλήματα, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αξιολόγηση μεθόδων βελτιστοποίησης. Στο πρώτο πρόβλημα ο γενετικός αλγόριθμος παρουσιάζει συγκριτικά πολύ καλύτερη απόδοση από αυτή του διαδοχικού τετραγωνικού προγραμματισμού. Αυτό ίσως οφείλεται στην πληθυσμιακή δομή του γενετικού αλγορίθμου σε συνδυασμό με τον τύπο μερικών τοπικών ακρότατων του προβλήματος, τα οποία μπορούν να προκύψουν από ένα άπειρο αριθμό συνδυασμών των παραμέτρων. Η ανταλλαγή των πληροφοριών μεταξύ των λύσεων και η πιθανή μετάλλαξη τους κατά την εξελικτική διαδικασία, επιτρέπει στον γενετικό αλγόριθμο να αποφύγει τα τοπικά ακρότατα, σε αντίθεση με τον διαδοχικό τετραγωνικό προγραμματισμό, ο οποίος εξαρτάται άμεσα από τη μια και μοναδική τυχαία αρχική λύση. Στο δεύτερο πρόβλημα η απόδοση των δύο εξεταζόμενων αλγορίθμων ήταν παρόμοια ως προς την εύρεση του ολικού βέλτιστου. Σε σχέση με το πρώτο πρόβλημα, ο μεγαλύτερος αριθμός των παραμέτρων συνέβαλε στην αύξηση του βαθμού δυσκολίας του προβλήματος βελτιστοποίησης, καθιστώντας μέτρια την απόδοση των δύο αλγορίθμων, ενώ η ύπαρξη πολλών ολικών βέλτιστων συνέτεινε σε μια σχετική αύξηση του ποσοστού επιτυχίας του διαδοχικού τετραγωνικού προγραμματισμού.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αριστοτέλους *Ηθικά Νικομάχεια* (βιβλίο Β') 1106-1109.

Ζορμπά, Α., Θεοδοσίου, Ν. και Φωτοπούλου, Ε. 2007. Σύγκριση γενετικών αλγορίθμων και γραμμικού προγραμματισμού για την υποβίβαση της στάθμης του νερού στην εκσκαφή, *Υδροτεχνικά*, 17: 3-17.

- Κοντός, Ι. 2013. *Βελτιστοποίηση διαχείρισης ρηγματωμένων παράκτιων υδροφορέων με προβλήματα ρύπανσης*, Διδακτορική Διατριβή, Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών Α.Π.Θ., 465 σελ.
- Λατινόπουλος, Π., 1986. *Υδραυλική των υπόγειων ροών*. Υπηρεσία Δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη.
- Addis, B. and Locatelli, M. 2007. *A new class of test functions for global optimization*. Journal of Global Optimization, 38(3): 479-501.
- Agnarsson, J., Sunde M. and Ermilova, I. 2013, *Parallel Optimization in Matlab*, Project in Computational Science: Report, Uppsala University.
- Bartholomew-Biggs, M. 2008. *Sequential Quadratic Programming in Nonlinear Optimization with Engineering Applications*, Springer Optimization and Its Applications, 19: 197-211.
- Bear, J., 1979. *Hydraulics of Groundwater*. McGraw-Hill, 561 pp.
- Floudas, C.A., Pardalos, P.M., Adjiman, C., Esposito, W., Gümüs, Z., Harding, S., Klepeis, J., Meyer C. and Schweiger, C. 1999. *Handbook of Test Problems in Local and Global Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Gaviano, M., Kvasov, D.E., Lera, D. and Sergeyev, Y.D. 2003. *Algorithm 829: Software for generation of classes of test functions with known local and global minima for global optimization*. ACM Transactions on Mathematical Software, 29(4): 469-480.
- Goldberg, D.E. 1989 *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison-Wesley publishing company, Reading, Massachusetts.
- Karpouzou, D.K. and Katsifarakis, K.L. 2013. *A set of new benchmark optimization problems for water resources management*, Water Resources Management, DOI 10.1007/s11269-013-0350-z, 27 (9): 3333-3348.
- Katsifarakis, K.L. 2008. *Groundwater pumping cost minimization-An analytical approach*, Water Resources Management, 22(8): 1089-1099.
- Katsifarakis, K.L. 2012. *Optimization and water resources management*. In: K.L. Katsifarakis (Editor) Hydrology, Hydraulics and Water Resources Management: A Heuristic Optimisation Approach. WITPress, ISBN 978-1-84564-664-6, 1-5.
- Katsifarakis, K.L. and Karpouzou, D.K. 2012. *Genetic algorithms and water resources management: an established, yet evolving, relationship* in K.L. Katsifarakis (Editor) Hydrology, Hydraulics and Water Resources Management: A Heuristic Optimisation Approach, WITPress, ISBN 978-1-84564-664-6, 7-37.
- Katsifarakis, K.L., Karpouzou, D.K. and Theodossiou, N. 1999. *Combined use of BEM and genetic algorithms in groundwater flow and mass transport problems*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 23(7): 555-565.
- Katsifarakis, K.L. and Lavrentiadis, G. 2014. *Study of network length reduction using the Fermat-Torricelli point*, International Journal of Engineering, Science and Innovative Technology (IJESIT), 3(3): 79-86.
- Mathworks, 2015. *MATLAB Optimization Toolbox User's Guide*.
- Matott, S.L., Rabideau, A.J. and Craig, J.R., 2006. *Pump-and-treat optimization using analytic element flow models*, Advances in Water Resources, 29(5): 760-775.
- Mayer, A.S., Kelley, C.T. and Miller, C.T. 2002. *Optimal design for problems involving flow and transport in saturated porous media*. Advances in Water Resources, 12: 1233-1256
- Michalewicz, Z. 1996. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, (3rd ed.), Springer-Verlag.
- Nocedal, J. and Wright, S.J. 2006. *Numerical Optimization*, Second Edition. Springer Series in Operations Research, Springer-Verlag,
- Papadopoulou, M.P. Pinder, G.F. and Karatzas, G.P., 2007. *Flexible time-varying optimization methodology for the solution of groundwater management problems*, European J. of Operational Research, doi 10.10116/ejor, 2006.02.41, 180(2): 770-785.
- Reeves, C.R. and Raw, J.E. 2003 *Genetic algorithms-Principles and perspectives*. Kluwer Academic Publishers.

- Schoen, F. 1993. *A wide class of test functions for global optimization*. Journal of Global Optimization, 3(2): 133-137.
- Shcherbina, O., Neumaier, A., Sam-Haroud, D., Vu, X.H. and Nguyen, T.V. 2003. *Benchmarking global optimization and constraint satisfaction codes*. In: *Global Optimization and Constraint Satisfaction*. Lecture Notes in Computer Science 2861, Springer, 211–222.
- Sidiropoulos, E., and Tolikas, P., 2008. *Genetic algorithms and cellular automata in aquifer management*, Applied Mathematical Modelling, 32: 617–640.
- Singh, A. 2012. *An overview of the optimization modelling applications*. Journal of Hydrology, 466-467: 167 – 182.
- Spain, P.G. 1996. *The Fermat Point of a Triangle*, Mathematics Magazine, 69: 131-133.
- Wu, Z.Y. and Walski, T. 2005. *Self-adaptive penalty approach compared with other constraint-handling techniques for pipeline optimization*. Journal Water Resources Planning and Management. 131(3): 181-192.
- Younis, A. and Dong, Z. 2010. *Trends, features, and tests of common and recently introduced global optimization methods*. Engineering Optimization. 42(8): 691–718.