[論説]

Aluthge変換とfinite ascent

棚　橋　浩太郎

[概要] Aluthge変換はfinite ascentを保存することを示す。

[本論]

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の有界線形作用素Tを考える。$\mathcal{H}$が有限次元ならTは行列である。さて、Aluthge[1] は作用素Tを$T=U|T|$と極分解したとき

$$\tilde{T}=|T|^{1/2}U|T|^{1/2}$$

という変換を考えてhyponormal作用素（$TT^*\leqq T^*T$）の一般化であるp-hyponormal作用素（$(TT^*)^p\leqq(T^*T)^p$）の性質を明らかにした。この変換はその後Aluthge変換と呼ばれるようになり、様々な応用が知られている。この変換には面白い性質があり、例えばTと$\tilde{T}$のスペクトルは等しい（Jung, Ko, Pearcy[2], Cho, Tanahashi[3]）とか、Tがsvep（single valued extension property）をもつことと$\tilde{T}$がもつことは同値である（Kimura[4]）等が知られている。

ここでは核（kernel）

$$\ker T=\{\mathbf{x}\in\mathcal{H}\,|\,T\mathbf{x}=\mathbf{o}\}$$

と値域（range）

$$\operatorname{ran} T=\{T\mathbf{x}\,|\,\mathbf{x}\in\mathcal{H}\}$$

の性質について考察する。一般に核については

$$\ker T\subset\ker T^2\subset\ker T^3\subset\cdots\cdots$$

が成り立つ。特に

$$\ker T^n=\ker T^{n+1}$$

となる自然数nが存在するときTはfinite ascentであるという。このとき、実は

$$\ker T^n=\ker T^{n+1}=\ker T^{n+2}=\cdots\cdots$$

であることが容易に示せる。

次の命題はsvepとfinite ascentの関係を明らかにしたものでLaursen[5]によって示された。

[命題1]

作用素Tがfinite ascentならTは0の近くでsvep（single valued extension property）をもつ、つまり、0の近くで（$(T-\lambda)f(\lambda)\equiv 0$をみたすnonn-zero analytic function $f(\lambda)$ は存在しない。

[証明]

背理法で対偶を証明する。もし0の近くで（$(T-\lambda)f(\lambda)\equiv 0$をみたすnon-zero analytic functionが存在すると仮定する。このとき

$$f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+a_3\lambda^3+\cdots\cdots$$

と展開する。ここで

$$a_0\neq 0$$

としてよい。なぜなら、もし

$$a_0=0, a_1\neq 0$$

とすると

$$f(\lambda)=\lambda(a_1+a_2\lambda+a_3\lambda^2+\cdots\cdots)=\lambda g(\lambda)$$

である。このとき（$(T-\lambda)g(\lambda)\equiv 0$であるから$f(\lambda)$の代わりに$g(\lambda)$について以下の議論を行えばよいからである。

さて、このとき

$$\begin{aligned}0\equiv(T-\lambda)f(\lambda)&=Ta_0+Ta_1\lambda+Ta_2\lambda^2+Ta_3\lambda^3+\cdots\cdots\\&\quad -a_0\lambda-a_1\lambda^2-a_2\lambda^3-a_3\lambda^4-\cdots\cdots\end{aligned}$$

であるから

$$Ta_0=0, Ta_1=a_0, Ta_2=a_1, \cdots\cdots$$

である。よって

$$Ta_1 = a_0 \neq 0,\, T^2 a_1 = Ta_0 = 0$$

から

$$a_1 \in \ker T^2,\, a_1 \notin \ker T$$

となる。従って

$$\ker T \neq \ker T^2$$

である。同様にして

$$a_n \in \ker T^{n+1},\, a_n \notin \ker T^n$$

が示せるので

$$\ker T^n \neq \ker T^{n+1}$$

である。　**[証明終]**

次の定理の（i），（ii）はTと$\tilde{T}$のfinite ascentの関係を明らかにしたものである。ここからTがfinite ascentであることと$\tilde{T}$がfinite ascentであることが同値であることがわかる。

[定理2]

（i）$\ker T^n = \ker T^{n+1} \Longrightarrow \ker \tilde{T}^n = \ker \tilde{T}^{n+1}$

（ii）$\ker \tilde{T}^n = \ker \tilde{T}^{n+1} \Longrightarrow \ker T^{n+1} = \ker T^{n+2}$

（iii）Tがfinite ascentである。$\Longleftrightarrow$ $\tilde{T}$がfinite ascentである。

[証明]

（i）$\tilde{T}^{n+1}x = 0$とする。このとき$\tilde{T}^n x = 0$を示せばよい。さて

$$\begin{aligned} 0 = \tilde{T}^{n+1}x &= |T|^{1/2}U|T|^{1/2}\cdot|T|^{1/2}U|T|^{1/2}\cdots\cdots|T|^{1/2}U|T|^{1/2}x \\ &= |T|^{1/2}\cdot U|T|\cdot U|T|\cdots\cdots U|T|\cdot U|T|^{1/2}x = |T|^{1/2}\cdot T^n\cdot U|T|^{1/2}x \end{aligned}$$

であるから

$$0=U|T|^{1/2}\tilde{T}^{n+1}x=T^{n+1}U|T|^{1/2}x$$

である。よって

$$U|T|^{1/2}x\in\ker T^{n+1}=\ker T^{n}$$

であるから

$$0=T^{n}U|T|^{1/2}x=U|T|\cdot U|T|\cdots\cdots U|T|\cdot U|T|^{1/2}x$$

となる。ここで

$$U^{*}U|T|=|T|,\ \ker|T|=\ker|T|^{1/2} \tag{1}$$

であるから

$$0=|T|^{1/2}\cdot U|T|\cdot U|T|\cdots\cdots U|T|\cdot U|T|^{1/2}x=\tilde{T}^{n}x$$

となる。

（ii）$T^{n+2}x=0$とする。このとき$T^{n+1}x=0$を示せばよい。さて

$$0=U|T|\cdot U|T|\cdots\cdots U|T|x$$

であるから（1）より

$$0=|T|^{1/2}U|T|^{1/2}\cdot|T|^{1/2}U|T|^{1/2}\cdots\cdots|T|^{1/2}U|T|^{1/2}\cdot|T|^{1/2}x=\tilde{T}^{n+1}|T|^{1/2}x$$

である。よって

$$|T|^{1/2}x\in\ker\tilde{T}^{n+1}=\ker\tilde{T}^{n}$$

であるから

$$0=\tilde{T}^{n}|T|^{1/2}x=|T|^{1/2}U|T|^{1/2}\cdot|T|^{1/2}U|T|^{1/2}\cdots\cdots|T|^{1/2}U|T|^{1/2}\cdot|T|^{1/2}x$$

となる。よって

$$0=U|T|^{1/2}\cdot\tilde{T}^{n}|T|^{1/2}x=T^{n+1}x$$

となる。

（iii）　（i），（ii）より明かである。 **[証明終]**

[例３]

$T=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ の極分解 $T=U|T|$ は

$$U=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ |T|=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

で与えられる。このとき

$$\tilde{T}=|T|^{1/2}U|T|^{1/2}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

であるから

$$\ker\tilde{T}=\mathbb{C}^2=\ker\tilde{T}^2=\ker\tilde{T}^3=\cdots\cdots$$

となる。一方

$$T^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

であるから

$$\ker T\neq\mathbb{C}^2=\ker T^2=\ker T^3=\cdots\cdots$$

となる。従って、定理で（ii）の結論を $\ker T^n=\ker T^{n+1}$ とすることはできない。この意味で（ii）の n の評価はbestである。

次に値域range ran T について同様の考察を試みる。一般にrangeについては

$$\operatorname{ran} T\supset\operatorname{ran} T^2\supset\operatorname{ran} T^3\supset\cdots\cdots$$

が成り立つ。特に

$$\operatorname{ran} T^n=\operatorname{ran} T^{n+1}$$

となる自然数 n が存在するとき T はfinite descentであるという。このとき、実は

$$\operatorname{ran} T^n=\operatorname{ran} T^{n+1}=\operatorname{ran} T^{n+2}=\cdots\cdots$$

であることが容易に示せる。

次の命題は、より一般化された結果（i）から、finite descent について

もTがfinite ascentであることと$\tilde{T}$がfinite ascentであることが同値であることを示している。

[命題4]

(i) $\mathrm{ran}\ (AB)^n = \mathrm{ran}\ (AB)^{n+1} \Longrightarrow \mathrm{ran}\ (BA)^{n+1} = \mathrm{ran}(BA)^{n+2}$

(ii) $\mathrm{ran}\ T^n = \mathrm{ran}\ T^{n+1} \Longrightarrow \mathrm{ran}\ \tilde{T}^{n+1} = \mathrm{ran}\ \tilde{T}^{n+2}$

(iii) $\mathrm{ran}\ \tilde{T}^n = \mathrm{ran}\ \tilde{T}^{n+1} \Longrightarrow \mathrm{ran}\ T^{n+1} = \mathrm{ran}\ T^{n+2}$

(iv) Tがfinite descentである。$\Longleftrightarrow$ $\tilde{T}$がfinite descentである。

[証明]

(i) だけ示せばよい。$y \in \mathrm{ran}\ (BA)^{n+1}$とする。このとき

$$y = (BA)^{n+1}x = B(AB)^n Ax$$

となるxが存在する。ここで

$$(AB)^n Ax \in \mathrm{ran}\ (AB)^n = \mathrm{ran}\ (AB)^{n+1} = \mathrm{ran}\ (AB)^{n+2}$$

であるから

$$(AB)^n Ax = (AB)^{n+2}z$$

となるzが存在する。従って

$$y = B(AB)^n Ax = B(AB)^{n+2}z = (BA)^{n+2}Bz \in \mathrm{ran}\ (BA)^{n+2}$$

である。 **[証明終]**

[注意] 例3のTについては

$$\mathrm{ran}\ T \neq \{\mathrm{o}\} = \mathrm{ran}\ T^2$$
$$\mathrm{ran}\ \tilde{T} = \{\mathrm{o}\} = \mathrm{ran}\ \tilde{T}^2$$

であるから(i)の結論を$\mathrm{ran}\ (AB)^n = \mathrm{ran}\ (BA)^{n+1}$とすることはできない。この意味で(i)の$n$の評価はbestである。

[参考文献]

[1] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$, Integral Equation and Operator Theory, **13** (1990), 307-315.

[2] Il Bong Jung, E. Ko, and C. Pearcy, *Aluthge transforms of operators*, Integral Equation and Operator Theory, **37** (2000), 437-448.

[3] M. Chō and K. Tanahashi, *Spectral relations for Aluthge transform*, Scientiae Mathematicae japonicae, **55** (2002), 77-83.

[4] F. Kimura, *Analysis of non-normal operators via Aluthge transformation*, to appear in Integral Equation and Operator Theory.

[5] K. Laursen, *Operators with finite ascent*, Pacific Journal of Mathematics, **152** (1992), 323-335.