

電気回路で考える経済現象：波形アナロジー

著者	永嶋 浩
雑誌名	埼玉学園大学紀要．経営学部篇
巻	11
ページ	145-158
発行年	2011-12-01
URL	http://id.nii.ac.jp/1354/00000541/



電気回路で考える経済現象

— 波形アナロジー —

Economic Phenomena considered in the Viewpoint of Electrical Circuit

Waveform Analogy

永 嶋 浩

NAGASHIMA, Hiroshi

1. はじめに

モノごとを考えるとき、何かにととえて考えるということは一般的に行われるやり方である。調査対象の分野の多くが他の分野の事象の中の事実として一致するならば推論が成り立ち、他分野からでも事に当たれることになる。これが類推であり、いわゆるアナロジー(analogy)と呼ばれるものになる。よく知られているものとして音響系や機械系を電気回路などで行うアナロジーがある。アナロジーの実践例をいくつか取り上げる。

ある冷却水を外部へ排出するため中和処理を行うときには何リューベもする水量を攪拌しながらpHを計測して中和剤のオンオフをバルブで制御しなければいけない。制御対象の容量が大きいとバルブを制御してもすぐには作用が及ばないため何らかの工夫が必要になる。制御対象の容量を電氣的な時定数に置き換えて電気側でバルブを制御するわけである。しかし理論的に時定数が解明できても実際に制御対象の系に合わないと制御はできなくなってしまうものである。このような現象は、設計前に把握できたためバルブをオ

ンオフする部品にヒステリシスのあるものを採用することで制御の困難さを切り抜けている。あるいはリレー回路を組んでいたことである。ブレイクメイク接点を持つリレー部品しかない状況でどうしてもメイクブレイク接点を持つリレーが設計上必要になり製造部門に製造依頼をしたところ意外にもすんなりと製造変更が工程上実現したことがある。部品の構造と回路機能のアナロジーから実現できるものとして提案したものであるが、今考えると大胆な製造変更を依頼した感がある。さらにダイクストラのセマフォと同様のものを同時書き込み制御に使うためにフリップフロップで実現したケースがあるが、このような手法もある種のアナロジーに該当する。このようにいろいろな分野で使われるアナロジーであるが、いつも成立するとは限らないし、保証されるものではない。

一般に開発対象のシステムの動作や特徴を知るためにはさらにモデル(model)というものを考えるものである。モデルは調査対象を抽象化して表現したものになるが、その捉え方によっては厳密モデルと近似モデルに分けられる。自然現象を扱う場合は近似モデル

キーワード : RC回路、非線形、カオス、エントロピー、経済モデル評価

Key words : RC circuit, non-linear, Chaos, Entropy, economic model estimation

になる。特にコンピュータで処理する場合は真値を満たすように良い近似を行うことが求められる。本稿はこのような近似モデルを経済の分野に当てはめ、電気回路を使いながら検討を加えることにする。

2. アナロジー

弾性限界内において加えた外力 F (g) は、物体のひずみ x (cm) に比例するというフックの法則 (Hooke's law 1660年) がある。ばねの弾性定数を k (g重/cm) とすると式 (1) の関係で表現できる。検証にはつる巻きばねに分銅をのせ、重りの重さを次第に重くしていったときのばねの伸びを記録して外力とひずみの比例の関係を実験的に確かめるやり方がある。あるいはオームの法則 (Ohm's law 1826年) の導体に流れる電流の大きさ I (A) は導体に印加した電圧 E (V) に比例し、電気抵抗 R (Ω) に反比例するというものである。その関係は式 (2) のように示すことができる。

$$x = \frac{F}{k} \quad (1) \quad I = \frac{E}{R} \quad (2)$$

これらの法則は1次関数で扱えるので線形法則と呼ばれ、外力、ひずみ、ばねの弾性定数の間で成り立つ関係が電圧、電流、抵抗の間でも同様に成り立つのがわかる。ある分野の成立関係の確かめから他の分野の成立関係を推論ができるということを意味している。ただし、アナロジーは前述したように成立しない場合も存在するため確認作業というものが同時に求められる。

波形があれば回路の存在があり、回路を使えば波形が生まれるという波形と電気回路とはこのような関係にある。ある入力 x に対し

て出力 y を見た場合の関係を何点かプロットすると系が線形であれば式 (3) のような比例の関係が読み取れる。

$$y = ax + b \quad (3)$$

もし比例の関係が得られない場合は非線形の特徴があるものと見なせる。その場合は式 (4) のような1次関数以外の関数で扱うことになる。この式の例では1次と3次の合成で構成している。

$$y = \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 \quad (4)$$

例えば、入力に $x = \sin \omega t$ の \sin 関数を与え、式 (4) の各項の係数を1にした非線形の関数で処理した出力は式 (5) に示す合成関数の形で表現できる。この式は右辺第一項の波形から第二項の波形の差を示している。

$$y = \frac{7}{4} \sin \omega t - \frac{1}{4} \sin 3\omega t \quad (5)$$

これから扱うのはこのような非線形法則の分野になる。非線形というのは一つの直線で表現できないケースや曲線で表現されるケースに該当する。その際の回路素子には抵抗の他にインダクタンス (L) やコンデンサ (C) などがよく用いられ、さらに印加電圧も交流電圧を用いたり直流電圧との併用をすることもある。交流電圧の場合は何もきれいな波形をした電圧ばかりではない。ときにひずみ波電圧を使う場合もある。

経済現象に現れる波形に対しての非線形の処理はどのように考えられるのだろうか。アナロジー的には電気回路で得られる波形からの類推で扱えるのではと考える。つまり電気回路の性質を使って経済のメカニズムにおける非線形的な動きの特徴を確かめることが可能なのではと推測する。波形には波高、周波数スペクトル、エネルギー、エントロピー (Entropy) などの情報があり、そこには不規則な動きが

存在する。そのような波形の不規則な動きを経済現象の波形の複雑さと絡めながら、波形アナロジーというものを非可逆性の特徴を持つエントロピーの視点で捉えていく。

2.1 カオスと経済現象の接点

まず、有名なメイ (R. May) の生物種の個体数 x' の変動を年単位で把握する1974年発表のモデルを取り上げる。生物は毎年同じ増殖率 α で世代変化があることから、 $n+1$ 年目の個体数は n 年目に比例するものと考えて式(6)を導き、さらに特定の種が増えすぎてもエサ等の問題が生じてくるため個体の増殖率は減少して行く。そしてこのような減少も個体数に比例するものと考え、式(6)の x' にある係数を掛けたものを x で再定義して式(7)のように改造する。すると比例定数 a の値によってさまざまな個体数の変動が現れ、式の扱い方によってはカオス的な動き (Chaotic Motions) が生じることになる。メイの考案した個体数の変動を捉える式で計算

した結果を図1に示す。

$$x'_{n+1} = \alpha x'_n \quad (6)$$

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad (7)$$

一見すると図1の何が経済に絡んでいるのかと方向性を見失いがちになるが、この図のモデルの背景にマルサス (T.R. Malthus) の考えが反映しているのである。マルサスは1798年に人口と資源の関係を論じた人口論を著す。人口論で説いたのは、食糧生産は等差数列 (算術数列) 的であるが、人口増加は等比数列 (幾何数列) 的であるがために何もしないと食糧が不足して生存競争が発生し、強いものが生き残り弱いものは滅びることになるというものである。つまり人口増加は食糧の供給によって抑制できるものと示唆している。このような人口論のヒントからダーウィンの進化論も影響を受けて組み立てられているほどである。さらにマルサスの考えは、1838年にベルハルスト (P. Verhulst) が人口論を考察するために考案したロジスティック

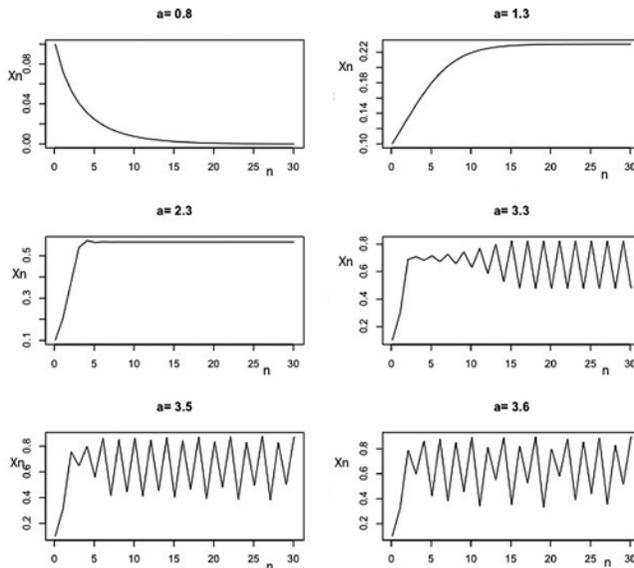


図1 個体数の変化

写像という形で反映される。そしてこのロジスティック写像がメイによって図1を導く差分方程式の形に改良されたのである。この時点でメイ自身は数式を解く過程での $a=3.6$ 付近に見られるみだれる現象がカオス（Chaos）であるという知見を得るまでには至っていない。その後2.2に見られる世の中のカオス研究の機運とも絡み合い、1982年にベンハビブ（J. Benhabib）とデイ（R.H. Day）等が経済分野の世代重複モデル（Overlapping Generations Model）にカオスを導入する状況になる。

2.2 カオスと電気回路の接点

カオスにはマルサスの流れとは別な分野からのアプローチがある。ローレンツ（E.N. Lorenz）は気象現象を予測するためにコンピュータを用いて非線形方程式を数値計算していた1961年に初期値の与え方（例：0.506と0.506127）によって計算結果の値に大きな違いの出てくることに気づき、1963年にローレンツプロットなる曲線の論文「Deteministic Nonperiodic Flow」を発表している。そこから得られるチョウの羽の形の運動の軌道はちにストレンジアトラクターと呼ばれる。しかしローレンツもその現象がカオスであるという考え方にはたどり着いていない。ローレンツと同時期の1961年に同様の現象をアナコン上で見つけている上田脛亮京大名誉教授によるとカオスというものを「非線形な確定系に生じる不規則な振動現象」と定義している。

1975年にリー（李天岩）とヨーク（J.A. York）はローレンツの考えを参考にこれまでのストレンジアトラクターをカオスと命名した論文「Period Three Implies Chaos」を発表してカオス研究なる新しい分野を切り開く。

そしてこの論文を見たメイは自分の考案したロジスティック写像のところで納得のいかなかったみだれる現象の意味について理解するところとなる。

ちなみにローレンツ以前には、1890年代に太陽系の惑星の運動を解く三体問題に取り組んだポアンカレ（J.H. Poincare）が後にポアンカレ写像と呼ばれるものを作成していたり、さらに1927年にはファン・デル・ポール（van der Pol）が交流電圧と可変コンデンサを用いて作った発振装置の実験で発信音の周波数が階段状に高くなって行くのを確かめていて、その際に雑音のような音も聴いている。しかし、当時はこの雑音のような音が非線形現象の証であるという解明をするまでには至らずにいる。このように非線形現象に対してカオスという言葉が確立するにつれて電気分野のみならず前述した経済分野を含めたあらゆる分野にカオスの考え方が注がれていく状況になる。以後、電気回路の視点に立って経済現象の一端を眺めてみることにする。世の中の非線形現象を電気回路でアナロジーしてみるわけである。非線形現象を電気回路で構成する非線形方程式には発信器回路にみられるvan der Pol方程式の自励振動、共振回路にみられるDuffing方程式の非線形共振、さらにNonlinear Mathieu方程式のパラメータ励振などがある。

2.3 時系列データの波形生成

ここで非線形方程式の適用が考えられるコンビニの商品構成比に関する時系列データを取り上げる。この時系列データには季節変動が内在しているものと予想されるため2005年1月から2011年7月までを図2に示して検討する。コンビニ業界のデータ（出所：日本フ

ランチャイズチェーン協会)は、日配食品、加工食品、非食品、サービスの4種類に分類されて管理されている。図2には全ての構成比を折れ線グラフで表現しているが、ある特徴が読み取れる。それは日配食品と加工食品の食品系のグループと非食品とサービスのグループに分けられることである。特に食品系と非食品の時系列データはグラフを見てわかるように相反する動きをしている。2006年6月と2010年9月に大きな変動が見られるが、これらはタバコ税増税の前月にあたるため駆け込み需要に起因している変動とみなせる。従ってこの変動は社会状況に影響を受けた外乱であると考えられることができる。図2の中のサービスは構成比の割合が小さいため他のグラフに比べると変動の少ないグラフ表現になっている。このような表現ではグラフの持つ真の意味を見逃す恐れがあり、そのため図3に示すようにサービス単独でのグラフ表現を行う。するとサービスのグラフに変化が見られ、今まで読み取れていなかった事象がスパイク (spike) を伴った波形という形で浮かび上がる。時系列のどの箇所にスパイクがあるかを見ると毎年12月に現れているのがわかる。サービスには公共料金等は含まれてい

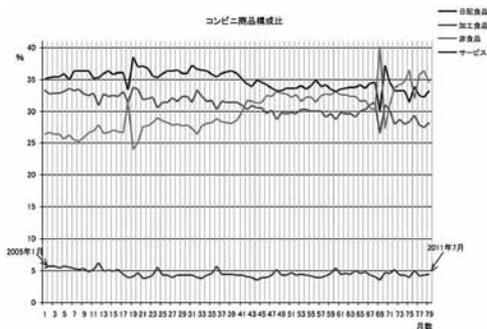


図2 コンビニの商品構成比 (日配、加工、非食、サービス)

ないため師走ということを考えれば宅配便依頼、お歳暮用ギフト券や宝くじの購入、帰省や旅行用のチケット手配等が急増してこのようなスパイクを発生させているものと推測できる。

スパイク波形からイメージする回路構成はいろいろあるが、ここではパワーエレクトロニクス分野で使われているインバータをイメージする。トランジスタインバータ駆動の波形はモータの回転数にもよるが起動時、整定時、減速時のフェーズ毎に様相の違いが出るものであり、減速時の電源回生を考慮しない状態でもスパイク形状は整定時<起動時<減速時の順で鋭さが増す傾向にある。その波形を図4に2種類の波形で取り上げているが、これらの事例から電気回路で使われている波形というものはきれいな正弦波ばかりでないということがわかる。今回はLCR程度の回路素子を使うことにするが、OPアンプ、トランジスタ、トライアック、サイリスタなど他

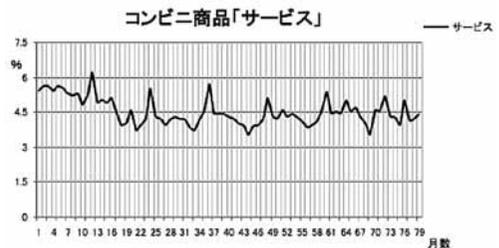


図3 コンビニの商品構成比 (サービス)

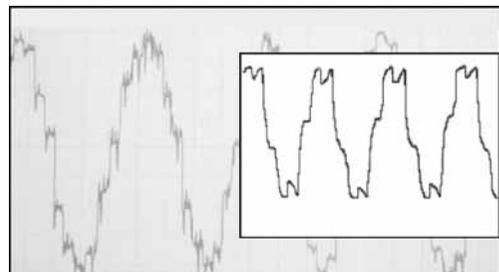


図4 2種類のひずみ波交流

の素子も対象にすればどんな波形でも生成することができる。このような波形を対象に経済を読み解く可能性について波形再現の立場から一考する。

コンビニの「サービス」波形をイメージしながらDuffing方程式を導く共振回路⁵⁾を参考に簡単な電気回路を図5のように構成してスパイク波形そのものの再現を試みることにする。t=0なる時刻でスイッチSを閉じて交流電圧Eを印加したとき、t≥0の電流iやi_Rの変化を計算する。このとき簡単な回路方程式でスパイク波形の検討を進めるために厳密な回路解析は行わず、以下の条件で簡略化しながら波形を再現する。

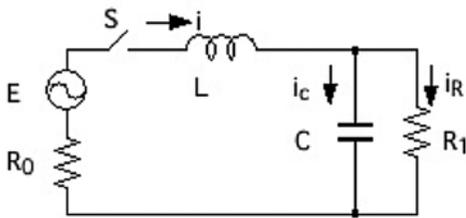


図5 L+RC並列回路

条件

- ①R₀は交流電圧Eを供給する電源の内部抵抗とする
 - ②コンデンサは $C=C_0 \sin(\omega_c t + \theta) + C_{00}$ とする
 - ③交流電圧は単位の波高を持つ $E=\sin \omega t$ とする
 - ④簡略化条件を $\omega^2 LC_{00}=1$ 、 $\theta=0$ 、 $R_1=20R_0$ とする
- f：電源周波数、f_c：可変容量周波数

回路方程式はキルヒホフの法則(Kirchhoff's law)の第1法則や第2法則を使い連立微分方程式⁶⁾の形に整えてから数値解法として有名なRunge-Kutta-Gill法で解く。第2法則から式(8)を導き第1法則から式(9)を導く。サービスf_c=4(非食品f_c)、非食品f=2(サービスf)の関係のもと図6はf_c=2f、図7はf=4f_cで波形を生成している。きざみの

条件は、周波数を変更しても均一になるような設定値にする。

$$\frac{di}{dt} = (-R_0 i + E - R_1 i_R) \frac{1}{L} \quad (8)$$

$$\frac{di_R}{dt} = (i - i_R) \frac{1}{R_1 C} \quad (9)$$

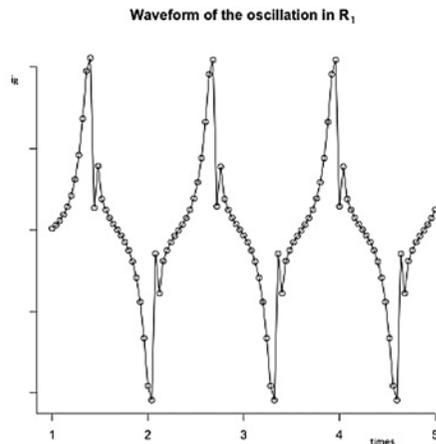


図6 「サービス」 似の生成波形

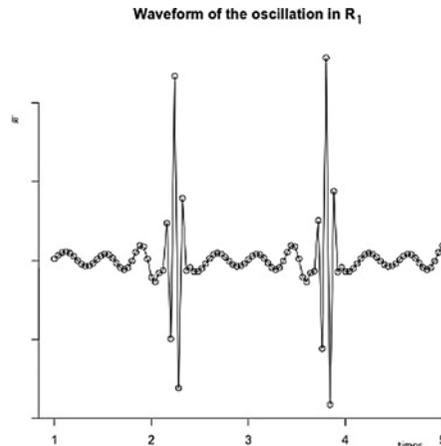


図7 「非食品」 似の生成波形

サービスや非食品はともに周波数操作により、お互いに異なる波形を生成できる。そのため時系列データというのは、過去のデータの履歴が元になって現在を評価し、未来を予

測することができる仕組みを含んでいるものと言える。基本波と高調波で構成されるひずみ波交流の原理で考えると周期Tの長い短いに関わらず季節変動は循環するものと捉えることができる。しかし厳密な周期関数を日常の経済現象に当てはめるとするのは現実的ではなく、実際はいつきの単発な波形かも知れないわけである。そのような波形の取り扱い、周期Tを無限に大きくした値を仮定し、フーリエ級数ではなくフーリエ変換で扱うような対応が見込まれる。フーリエ(J.B. Joseph Fourier)が考えた無限に伸びた鉄線における熱伝導をアナロジーすることになる。

3. 逓減と逓増

経済現象を説明するとき収穫法則の用語として収穫逓減（以下、逓減という）、収穫逓増（以下、逓増という）の区分けがある。マルサスの時代の18世紀後半に逓減という概念が定着している。投入物と生産性に関する農業の問題からこの逓減の考え方が導かれている。マルサスは人口増加の面から人間の食欲というものは食糧生産に追いつかないものであると指摘している。そのため食糧生産を高めよう、更なる収穫を得ようとしてより多くの人を投入するとやせた土地まで耕作地にして農業を営むということになり、かえって生産性が落ちてしまうと言っている。マルサスから一世紀あとはマーシャル(A. Marshall)から収穫法則を逓減、逓増、一定の三つに区別する考え方が提唱される。これら逓減や逓増の用語を電気回路の視点から取り上げる。電気回路には抵抗とコンデンサ（またはコイルと抵抗）の組み合わせに応じて微分回路や積分回路と呼ばれる入力波形を変形する回路が存在する。その中の積分回路に着目して逓

減と逓増を対象にした経済モデルを評価する。

3.1 積分回路の視点

積分回路は図8のような構成をしている。積分回路といっても入力波形を完全なる形で積分するというものではないが、ある程度の積分に近い形の波形が得られる。入力波形にはステップ関数を応用した波形のパルス(Pulse)を用いる。パルスの作成は $0 \leq t \leq \pi$ の区間を $f(t)=2$ 、 $\pi \leq t \leq 2\pi$ の区間を $f(t)=0$ で定義した波形をフーリエ級数展開して得る。一般には多くの項を持った級数に展開すればするほど定義の波形に限りなく近づけるが、ある程度のところの第n項で打ち切りやり方をとる。今回は $n=50$ までを計算して図9の上段に示すパルス波形を形成する。 $n=500$ 程度位まで計算すればきれいなパルス波形を形

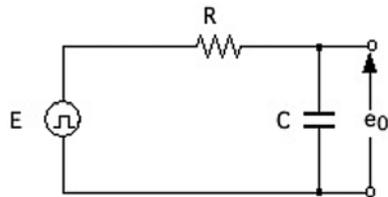


図8 検討用の積分回路

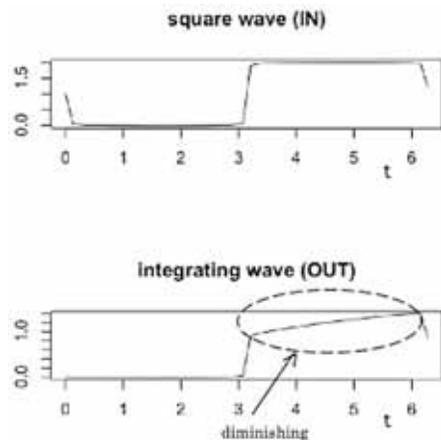


図9 入力パルスと出力の積分波形

成できるが、実際のパルス波形というものは図のような形状で事足りるため $n=50$ を採用している。しかも立ち上がりのわかり易さを考慮して位相を π だけ進めてある。コンデンサの端子電圧 e_0 は式(10)で得られるためパルスに対する応答は、図9の下段のようなになる。この出力波形の形状が逓減に相当する。

$$e_0 = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (10)$$

図8に示した同一の積分回路で逓増の波形になるように外乱を使った波形変形を試みる。外乱は雑音を考慮するが、ここでは簡単に波形変形の効果を見るために図10中段に示すような π だけ位相を進めた \cos 関数を用いることにする。積分回路には入力波形と外乱の関係を差分で処理した値を入力する。結果として図10の下段に示すような端子電圧 e_0 の出力が得られる。この出力波形の形状が逓増に相当する。

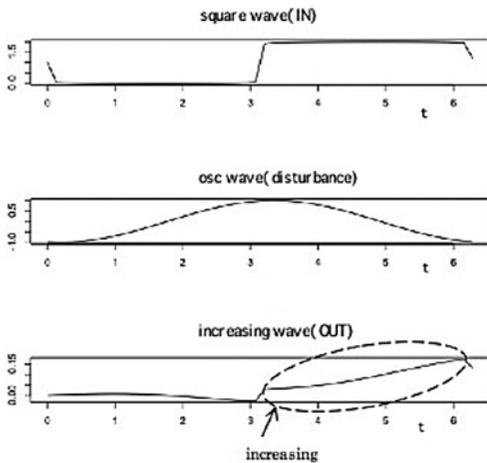


図10 入力パルスと出力の積分波形(外乱付き)

3.2 エントロピーの視点

経済学の考え方は時代の経過とともに逓減から逓増のパラダイムシフトがある。これら

をエントロピーの視点で考察する。エントロピーとはあらゆる科学の基本的法則といわれるほどのものであり、自然現象はエントロピー増大の方向に向かっていくというように使われるものである。ここでは逓減の波形と逓増の波形でどちらがエントロピー的に大きいのかどうかを検討してみるわけである。この検討から何を知り得るのかという収穫法則のモデルの変遷が原理的にも納得のいくものとしてエントロピー的に導けるのではと仮定するからである。まず、このようなエントロピーを導入するために確率場的な空間を考えて時間関数で捉える波形の各点を確率変数で対応させた関数の集合を想定する。波形は \sin 関数や \cos 関数の合成で組み立て可能であり、例えば ω という状態の現れる確率を $p(\omega)$ で捉えられるならば $\sin(\omega t)$ なる波形は関数の集合になる。このように波形は電流を表現して、電圧を表現して、各時刻、時刻の各点における範囲 $-T/2 \leq t \leq T/2$ の積分が電流や電圧の瞬時値とその状態の現れる確率を掛けた積分に等しいとき同一の統計的性質を持つエルゴード性が満たされる。さらに波形のエントロピーは離散的ケースのエントロピーを応用して式(11)のように定義できるため、この式の $p(x)$ がどのような形を持てばエントロピーが最大になるかを考えればよいことになる。

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx \quad (11)$$

p を x の関数として求めた式⁷⁾を式(12)に示す。この式は正規分布(normal distribution)で使われる確率密度関数の $\mu=0$ の形に一致する。確率密度関数は、平均値 μ と分散 σ^2 のパラメータで決まるため正規分布の記号で表現すると $N(0, \sigma^2)$ になる。つまりエント

ロピーを最大にするということはxが正規分布になっていることが求められることを意味している。

$$p = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (12)$$

これらの関係を逓減と逓増に当てはめてみる。そのため逓減のモデル波形の作成には \sqrt{t} を用い、逓増のモデル波形の作成には2乗を用い、図11や図12の上段のようなグラフを前提に用意する。これらのモデル波形には電気回路の所で求めた関数を使ってもよいが、お互いの収穫法則の相違を明確にするため \sqrt{t} と2乗で得られる波形を計算基準の対象にしている。そしてこれらの波形の各点をxで扱い、式(12)を用いて計算する。このとき $\sigma=0.5$ で計算した $f(x)$ を図11や図12の下段に示し、 $\sigma=0.3$ 、 $\sigma=0.5$ 、 $\sigma=1$ で計算した $f(x)$ をフローティングウィンドウ型の図に示す。それぞれの図からわかることは、逓減より逓増の方がエントロピーが大であるということである。それは \sqrt{t} と2乗に対して出力波形の形が釣鐘型をしているかどうかで判断できる。逓減の \sqrt{t} 使用のモデルでは釣鐘型にはならず指数分布の形状をしている。逓増の2乗使用のモデルでは釣鐘型そのものの形状をしている。釣鐘型は言うまでもない正規分布のことを意味しており、エントロピーの大小の判断材料になる。このことはいままで取り上げてきたマルサスからマーシャルへと時代が経過してきた過程そのものを表現している。モノを考えるとということは、初期のモデル構築は意外とシンプルに検討が行われるものであり、一つ土台ができ上がると次第にモデル化が複雑になってくる傾向に沿っている。従って収穫法則の逓増という考え方もこのような経過の中

では当然の帰結ということになる。

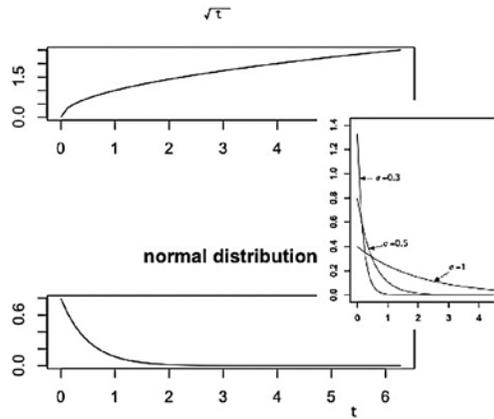


図11 正規分布の形状 (逓減)

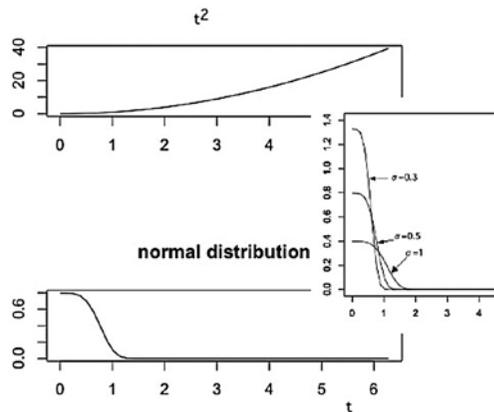


図12 正規分布の形状 (逓増)

一方、今日のコンピュータの絡む製造業ではどうなのだろうか。そこにはハードウェアとソフトウェアの世界が広がり、一度プログラムを作成する投資をすれば、そのプログラムの複製やマイナーチェンジのアプリケーションを売れば売っただけで利益が出てくるといふ逓増のモデルが存在すると考えられている。しかしソフトウェア開発をプロジェクトの視点でみた場合にはこのような逓増のモデルは否定されてしまうのである。その指摘をした人物は「人月の神話 (1975年)」⁸⁾の著者

でもあるブルックス (F.P. Brooks Jr.) である。要約すると進行中のプロジェクトの納期を守るためにプログラマの人数を大量に投入しても、そのプロジェクトのプログラム開発期間が人数に比例して短縮されるとは限らないというものである。例えば12ヶ月かかる作業を3人で4ヶ月ずつの担当で割り振った場合、誰か一人の予定が遅れたとしてその遅れを取り戻すために人数を1人増やす、3人増やすとそのような対策をとっても作業の完成は目論見通りにはいかず遅れてしまうということである。このような状況で何が起きているのかというと、当初から担当のプログラマと新たに投入されたプログラマとの間のコミュニケーションに結構な時間がとられてしまうという問題発生があるからである。プロジェクトメンバーがn人で構成されている場合、大体 $n(n-1)/2$ のコミュニケーション労力が必要になり、メンバーが3人のときより4人なら2倍、6人なら5倍必要になる。効率的な時間の使い方というものが削がれてしまうのである。つまりプログラム作成の現場では逡減のモデルが作用しているといわれる所以になる。

このように製造の工程中と完了後の様子については収穫法則のモデルが反転してしまうということが起こり得るものと指摘できる。

ソフトウェア開発のプロジェクトコストを見積ることは現在も研究が盛んに行われている難しい問題である。そこでは実用に耐えるコストモデルを目指し作成され、評価が行われモデルの精度向上が図られている。ブルックスと同じ時代に一つの論文が発表され、工数と規模の関係を数式化して扱う提案⁹⁾がなされている。その提案には3つの式が定義されていて著者等がその評価を試みている。そ

こで今回その式をいままでの記述に沿って評価してみることにする。式(13)に示す3つの式ともコスト見積りの生データの回帰分析により考案され、E=工数、DL=開発行数、係数と定数で定義されたものである。このような式で注目すべきはベキ乗の曲線がどのようなカーブを描くかということになる。

$$E = 1.36 \times DL + 1.62 \quad \dots a$$

$$E = 1.86 \times DL^{0.93} \quad \dots b \quad (13)$$

$$E = 0.73 \times DL^{1.16} + 3.5 \quad \dots c$$

図13に縦軸のスケールサイズを考慮しない形で3種類の工数のグラフを重ね合わせて表現する。この図から規模と工数の関係は、aは一定のモデル、bは逡減のモデル、cは逡増のモデルの表現に相当するのがわかる。この論文の著者等は3種類の中で一番良い評価を与えたのは推定値の標準誤差が一番小さいcの式であり、cはベキ乗の指数が1以上なため2乗のカーブに似ていることからいままでの議論と同じ方向性の結論が導いているものと判断できる。

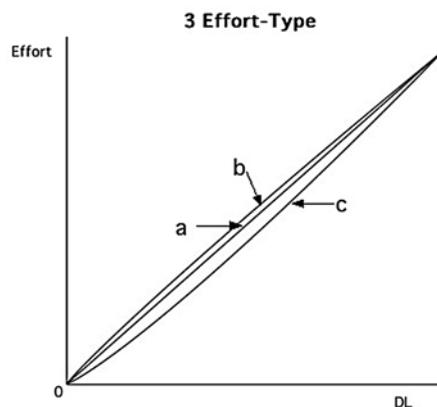


図13 工数の形状

4. S字型の特徴

生産関数を分類すると、これまでの通減や通増のモデルの他に第三のモデルともいえるべきS字型のモデルというのが提唱¹⁰⁾されている。このS字型のモデルの波形を分布RC回路 (Distributed-RC Circuit) 上で再現してみる。さらにS字型のモデルの持つ特徴がマイの差分方程式に通じていることも検討してみる。電気回路の長さが電波の長さより長い送電線のような場合には電流や電圧の変化は回路全体に様に現れないものである。このような場合にはRやLやCが無数に分布しているものと考え、分布定数回路として扱われる。特にRとCのみの積分回路がラダー状になっている回路は分布RC回路と呼ばれている。

4.1 分布RC回路

S字型のモデル検討用の分布RC回路を図14に示す。任意の地点x、時刻tの基礎方程式、さらに伝搬方程式¹¹⁾を定義する。ここでは送電端にステップ電圧Eを印加した場合の電圧の時間的分布を求める。式の解法にはラプラス変換、境界条件、ラプラス逆変換を施し、式(14)に示す $v(x,t)$ を導く。式(14)の定積分の箇所は二次曲線で近似するシンプソンの公式を使い数値積分で求める。このようにして得られた $v(x,t)$ を縦軸にtを横軸にして電圧vを表現すると図15のようになる。この波形は、RやCの値にもよるが電圧の立ち上がりは緩

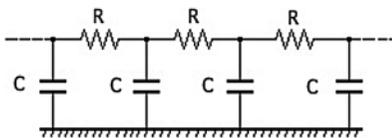


図14 分布RC回路

やかであり、次第に急峻さを増し最終的に最終値Eに近づいていく動きをする。

$$v(x,t) = E \left(1 - \sqrt{\frac{RC}{\pi t}} \int_0^x e^{-\frac{RC}{4t}x^2} dx \right) \quad (14)$$

Step Response of Distributed-RC Circuit

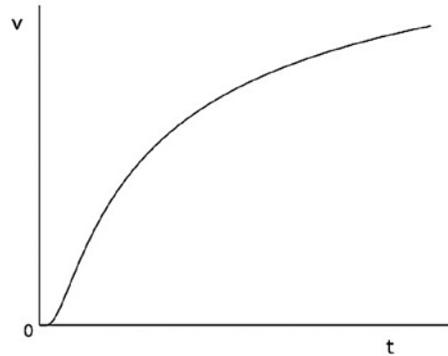


図15 分布RC回路の波形

この波形の特徴はS字型のカーブにある。そのカーブはこれまでの通減と通増の様相を兼ね備えた第三のモデルに相当する。ここでエントロピーを調べるため第三のモデルのモデル波形として成長曲線とも呼ばれるロジスティック曲線 (Logistic Curve) を考える。ロジスティック曲線は式(15)のような表現で定義する。a、b、kは正の定数、ロジスティック曲線の形を決めるパラメータは今回 $a=100$ 、 $b=36$ 、 $k=0.05085$ に設定している。このパラメータでグラフを表現すると図16のようになる。この曲線は、どの位置にいるかで現在の状況を把握する、あるいは今後を予測することにも使うことができる。tの時系列に従ってyの変化は通増のモデルから通減のモデルに様相が変化する。その変化は最初ゆっくりと立ち上がり、次第に立ち上がりの傾きが急峻になり、ある時点でその傾きが一定値に近づいていくようになる。このロジスティック

曲線に対しても式(12)の適用を図る。 $\sigma=0.5$ で計算した $f(x)$ は図17の下段に示し、 $\sigma=0.3$ 、 $\sigma=0.5$ 、 $\sigma=1$ で計算した $f(x)$ はフローティングウィンドウ型の図に示す。S字型のモデルは図の形からもわかるように、最初は通増のモデルからはじまり次第に通減のモデルの方へと移行していく。

$$y = \frac{b}{1 + ae^{-bkt}} \quad (15)$$

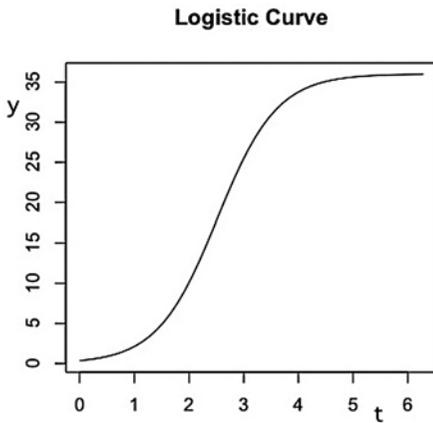


図16 ロジスティック曲線の波形

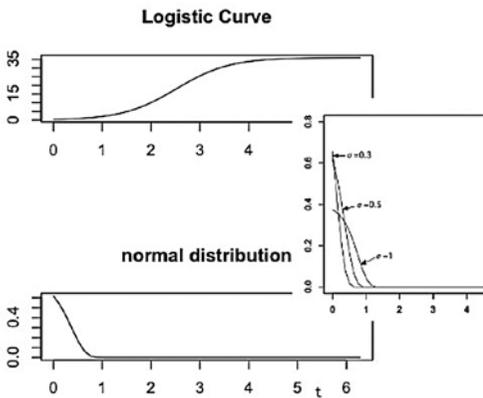


図17 正規分布の形状（S字型）

ロジスティックと2乗の各モデルのエントロピー比較を行うために σ の比較値を3点(0.3、0.5、1)から5点(0.3、0.5、1、2、4)

に増やす。図18に示すロジスティックについての曲線からは $\sigma=0.3$ 、 $\sigma=0.5$ の辺りでは通減のモデルが反映され、 $\sigma=1$ 、 $\sigma=2$ 、 $\sigma=4$ の辺りでは通増のモデルが反映されているのがわかる。

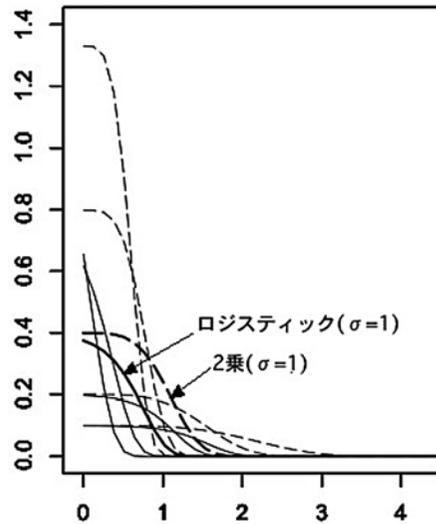


図18 正規分布の形状（S字型と通増）

2乗に関する曲線は当然のごとく全て通増のモデルが反映されていることになる。両者の曲線を $\sigma=1$ 、 $\sigma=2$ 、 $\sigma=4$ の形状で見ると両者とも釣鐘型になっている。従ってこの分布での両者の傾向も同じで、 σ の値が大きくなるにつれて確率密度関数の高さは低くなり、曲線の裾野となる分布の広がりも大きくなっていく。このときの様子を両者で比較すると2乗に関する曲線の方がエントロピーが高いものと判断できる。つまり第三のモデルであるS字型は曲線の定義の仕方にもよるが一般に2乗の通増モデルより低いレベルのエントロピーになるようである。このことはモノごとの考え方の変遷で考えると通減と通増を極端から極端のモデルと考えればそれに対しての折衷案のようなモデル提供の感があり、

エントロピー的思考をするとS字型のモデルは通増のモデルの域にはたどり着かない捉え方となる。

4.2 カオスへ接近

現実の経済現象を把握するためにはエントロピーの判断基準ではない考え方も求められる。通増のモデルのように単調増加的に増大していくだけでは、経済の現状を表現しきれないものになってしまう。そのため単調増加の通増のモデルにブレーキをかける何らかの減衰系が関与せざるを得ないものと考えられる。つまり通増系を2乗で表し、減衰系を3乗で表すような式(16)のような関数がイメージできる。その形状は図19の通りである。回路の所で示した外乱の役割を式(16)の第二項が担うわけである。このように考えると別な手法からでもS字型のモデルを構築することができる。式(16)を一般化し第一項Iに単調増加の役割を持たせ、第二項Dに減衰の役割を持たせる。さらにyを時刻tの関数で定義し直し時間微分して小文字にノーテーションを変化させて式(17)のように表現する。

$$y = 3x^2 - \frac{1}{3}x^3 \quad (16)$$

$$\frac{dy}{dt} = i - d \quad (17)$$

ここで式(17)を導くため $y=f(x)$ の3次近似のテーラー展開に対応させた式(18)を用意する。但し、 $h=x-x_n$ 、下記の係数条件を適用する。

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 h + \alpha_2 h^2 + \alpha_3 h^3 \\ y_2 &= \beta_0 + \beta_1 h + \beta_2 h^2 + \beta_3 h^3 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1$$

$$\alpha_2 > \beta_2, \beta_3 > \alpha_3$$

S-type Curve of Production Function

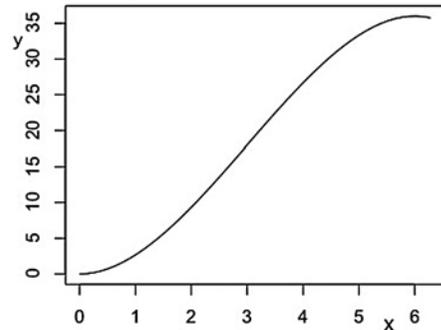


図19 式(16)の形状(S字型)

さらに y_1-y_2 の1回微分をしたものを左辺 dh/dt 、右辺第一項の係数をj、第二項の係数をkに整理すると式(19)ようになる。この式は式(17)の表現を意味する。しかもロジスティック曲線の解が導出できる微分方程式の形をしている。

$$\frac{dh}{dt} = jh - kh^2 \quad (19)$$

$t=0$ 時の初期値を h_0 、bを式(20)のように置いて式(19)を変数分離で解く。そして求めた解に対してaを定義し直すと式(15)に示したようなロジスティック曲線の解が得られる。

$$b = \frac{j}{k} \quad (20)$$

$$h_{n+1} = kh_n(1 - h_n) \quad (21)$$

そのうえ時間を世代で把握するように式(20)を $b=1$ として式(19)の差分を施した式(21)がメイの定義した式(7)に相当する。図1には $a=1.3$ が通減、 $a=2.3$ が通増、 $a=3.6$ 辺りではカオス等の現象が読み取れる。このことから各項の係数の値によってはS字型のモデルには予測不能な変動であるカオスを有する特性が含まれているということになる。このようなS字型のモデルは4.1での評価を打

ち消すほどであり、逡増のモデルに比べてより現実を反映することのできる優れたモデルという結論を得る。

5. おわりに

経済現象に現れる波形というものに対して電気回路を用いた入出力波形でアナロジーしている。今回取り上げた分野においては回路の中でも積分回路の使用が有効であることを示している。生産関数の逡減、逡増、S字型の各モデルをエントロピーの視点で検討すると逡増のモデルが優位になる。しかし現実の経済現象を的確に捉えるモデルの視点で検討するとS字型が断然優位に立つ。そしてこのS字型はメイの差分方程式を導くことが可能なためカオス内在のモデルになるのではと指摘できる。経済現象を電気回路でアナロジーする近似モデルの考え方は、波形のみを対象に再現することから評価を試みるという偏りがあるが、その検討でも何かが読み取れるという本質、その視点に立って本論をまとめたものである。

参考文献

- 1) J.Rifkin, ALGENY, Viking Penguin, 1980. (竹内均訳『エントロピーの法則II』, 祥伝社, 1983)
- 2) J.K.Galbraith, ECONOMICS IN PERSPECTIVE, Houghton-Mifflin, 1987. (鈴木哲太郎訳『経済学の歴史』, ダイヤモンド社, 1988)
- 3) 井上政義, 『カオスと複雑系の科学』, 日本実業出版社, 1996
- 4) 塩沢由典, 『複雑系経済学入門』, 生産性出版, 1997
- 5) Yoshisuke Ueda, The Road to Chaos (Selection 4. Random phenomena resulting from nonlinearity in the system described Duffing's equation,

- [Original paper published in IEEJ, Vol.A98, March 1978]), Aerial Press, pp.121-123, 1992
- 6) 松本欣二, 『フォートランプログラミング』, 朝倉書店, pp.174-181, 1973
 - 7) 笠原芳郎, 『情報理論と通信方式』, 共立出版, pp.153-156, 1971
 - 8) F.P.Brooks Jr., The Mythical Man-Month [Anniversary edition], Addison-Wesley, 1995. (滝沢徹他訳『人月の神話「20周年記念増訂版」』, ピアソン・エデュケーション, pp.14-23, 1996)
 - 9) J.W.Bailey and V.R.Basili, A Meta-Model for Software Development Resource Expenditures, in Proceedings of the International Conference on Software Engineering, pp.107-115, 1981
 - 10) 西村和雄, 『複雑系経済学とは何か』, 東京情報大学研究論集, pp.161-162, Vol. 2, No. 3, 1998
 - 11) 熊谷三郎・尾崎弘, 『過度現象論』, 共立出版, pp.145-147, 1973