Journal homepage http://revistas.unitru.edu.pe/index.php/SSMM

SELECCIONES MATEMÁTICAS
Universidad Nacional de Trujillo
ISSN: 2411-1783 (Online)
Vol. 03(01): 43 - 46 (2016)

Estabilidad estructural topológica sobre espacios proyectados.

Topological structural stability on projected spaces.

Rodiak Figueroa*, German Lozada†, José Langa ‡, and Eder Aragão§

Received, Jan. 15, 2016 *Accepted, Apr. 20, 2016.*

DOI: http://dx.doi.org/10.17268/sel.mat.2016.01.06

Resumen

En este trabajo estudiamos la estabilidad estructural topológica para una familia de semigrupos no lineales $T_h(\cdot)$ sobre espacios de Banach X_h dependiendo de un parámetro h.

Palabras clave. Estabilidad, espacios proyectados, espacios de Banach.

Abstract

In this work we study the topological structural stability for a family of nonlinear semigroups $T_h(\cdot)$ on Banach spaces X_h which dependent on a parameter h.

Keywords. Stability projected spaces, Banach spaces.

1. Introducción . En la teoría de sistemas dinámicos, un sistema es topológicamente estructuralmente estable si las propiedades topológicas del sistema dinámico permanecen iguales después de una perturbación pequeña de la transformación que define la dinámica, es decir, el comportamiento cualitativo de las trayectorias no es afectado por perturbaciones pequeñas. Por ejemplo, los puntos fijos y órbitas periódicas (pero no sus periodos).

En el ámbito de un semigrupo dinámicamente gradiente no lineal dentro de un espacio de Banach fijo, que posee un atractor global, si existe un número finito de puntos de equilibrio hiperbólico dentro del atractor global, entonces todas las soluciones globales dentro del atractor tienden a un punto de equilibrio cuando el tiempo tiende a $+\infty$ o $-\infty$, este hecho también previene la existencia de estructuras homoclinas entre estos puntos de equilibrio ([6, Teorema 1.5]). De manera general, esto también ocurre cuando cambiamos los puntos de equilibrio por conjuntos invariantes aislados ([6, Teorema 2.13]). Si estas propiedades permanecen inalteradas bajo perturbaciones, decimos que son topológicamente estructuralmente estables. Esto significa que la dinámica dentro del atractor global es robusta debido a las propiedades del semigrupo definido sobre el espacio de Banach fijo. Una de estas propiedades, es la colectividad asintótica compacta, la cual nos dice que la sucesión de semigrupos que aparece debido a la perturbación del semigrupo inicial tiene una subsucesión convergente a un elemento en el espacio de Banach fijo cuando el tiempo tiende a $+\infty$ para elementos acotados del espacio.

Este comportamiento de la estabilidad estructural topológica fue extendido para los semigrupos gradientes, gracias al [1, Teorema 1.1]. En dicho artículo, prueban que los semigrupos gradientes y dinámicamente gradientes son equivalentes en un espacio de Banach fijo.

En este trabajo, vamos a probar que la estabilidad estructural topológica de los semigrupos gradientes, $T_0(t) : X_0 \to X_0$, con respecto a una colección finita $\mathscr{S}_0 = \{\Xi_{1,0}, \dots, \Xi_{\mathfrak{p},0}\}$ de conjuntos invariantes aislados sobre un espacio de Banach X_0 ([7, Teorema 5.26]), también es válido para el espacio de Banach X_h (de dimensión finita o infinita), para $h \in (0, 1]$. Note que el semigrupo no lineal $T_h(t) : X_h \to X_h$ y el espacio de Banach X_h están variando con respecto a cada $h \in (0, 1]$.

*IBILCE-UNESP (rodiak@ibilce.unesp.br).
†IBILCE-UNESP (german@ibilce.unesp.br).
‡EDAN-US (langa@us.es).
§ICMC-USP, São Carlos (ritis@icmc.usp.br).

2. Preliminares. Sea X un espacio métrico con distancia $d : X \times X \to \mathbb{R}$.

Definición 1. *Decimos que una familia $\{T(t) : t \geq 0\}$ de aplicaciones continuas del espacio X en sí mismo es un **semigrupo no lineal** en X, o simplemente semigrupo si no hay riesgo de confusión, cuando se cumplen las tres propiedades siguientes:*

(i) $T(0) = I$ *la aplicación identidad del espacio* X.

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$, *cualquiera que sea la pareja de números reales no negativos* t *y* s *(propiedad de semigrupo).*

(iii) La aplicación $[0,\infty) \times X \ni (t,x) \to T(t)x \in X$ *es continua.*

Definición 2. *Decimos que un subconjunto $A \subset X$ es **invariante** respecto del semigrupo $\{T(t) : t \geq 0\}$, o simplemente invariante, cuando para todo $t \geq 0$ se tiene $T(t)A = A$.*

Proposición 1. *Un subconjunto $A \subset X$ es invariante por $T(\cdot)$ si y sólo si A es una unión de órbitas globales de $T(\cdot)$.*

Definición 3. *Dados A y B, subconjuntos no vacíos de X, se define la **semidistancia de Hausdorff desde** A **hasta** B como*

$$dist(A,B) := \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a,b) = \sup_{a\in A} d(a,B),$$

*donde $d(a,B) := \inf_{b\in B} d(a,b)$ es la distancia usual entre un punto y un conjunto, mientras que la **distancia simétrica de Hausdorff entre** A **y** B es definida por*

$$d_H(A,B) := dist(A,B) + dist(B,A).$$

Definición 4. *Se dice que un subconjunto A de X **atrae** a un subconjunto B de X, o que el subconjunto B es **atraído** por el subconjunto A, por medio del semigrupo $T(\cdot)$ cuando*

$$\lim_{t\to\infty} dist(T(t)B, A) = 0.$$

Definición 5. *Decimos que un subconjunto $\mathcal{A}$ de X es un **atractor global** para el semigrupo $\{T(t) : t \geqslant 0\}$, si es un conjunto compacto, invariante por $T(\cdot)$ y atrae a todos los subconjuntos acotados de X por la acción de $T(\cdot)$.*

Definición 6. *Sea $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X y $\mathscr{S} := \{\Xi_1, \Xi_2, \cdots, \Xi_n\}$ una familia finita de conjuntos invariantes aislados.*

*Diremos que $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ es un **semigrupo gradiente generalizado** respecto de la familia $\mathscr{S}$, cuando existe una función $V : X \to \mathbb{R}$ satisfaciendo las cuatro propiedades siguientes:*

(i) $V : X \to \mathbb{R}$ *es una función continua.*

(ii) $V : X \to \mathbb{R}$ *es no creciente a lo largo de soluciones, es decir, para todo* $x \in X$ *la función real* $[0,\infty) \ni t \to V(T(t)x) \in \mathbb{R}$ *es no creciente.*

(iii) Si para algún $x \in X$ *se tiene que* $V(T(t)x) = V(x)$ *para todo* $t \geqslant 0$, *entonces* $x \in \Xi$ *para algún* $\Xi \in \mathscr{S}$.

(iv) $V : X \to \mathbb{R}$ *es constante sobre cada subconjunto invariante aislado perteneciente a* $\mathcal{S}$, *o sea, para cada* $\Xi \in \mathscr{S}$ *existe un número real* $L = L(\Xi)$ *tal que* $V(x) = L$ *cualquiera que sea* $x \in \Xi$.

*Una función $V : X \to \mathbb{R}$ que cumple estas cuatro propiedades se llama una **función de Lyapunov generalizada** para $T(\cdot)$ asociada a la familia $\mathcal{S}$.*

*En el caso especial en que $\mathscr{S} = \mathcal{E} := \{z_1^*, z_2^*, \cdots, z_n^*\}$, el conjunto de puntos estacionarios de $T(\cdot)$, se dice simplemente que $T(\cdot)$ es un **semigrupo gradiente** y la función $V : X \to \mathbb{R}$ asociada, una **función de Lyapunov**.*

Definición 7. *Sean $\{T(t) : t \geqslant 0\}$ un semigrupo no lineal en un espacio métrico X y Ξ un conjunto invariante por él. Se define:*

*(a) El **conjunto inestable** de* Ξ *como*

$$W^u(\Xi) := \{x \in X : \text{ existe } \xi : \mathbb{R} \to X \text{ solución global con } \xi(0) = x$$

$$\text{tal que } \lim_{t\to-\infty} dist(\xi(t), \Xi) = 0\}.$$

*(b) El **conjunto estable** de* Ξ *como*

$$W^s(\Xi) := \{x \in X : \lim_{t\to\infty} dist(T(t)x, \Xi) = 0\}.$$

Denotemos por $\mathbb{N}', \mathbb{N}''$ subconjuntos infinitos de $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$. Sean $\{X_h\}_{h\in[0,1]}$ una familia de espacios de Banach y $\{P_h\}_{h\in(0,1]}$ una sucesión de operadores lineales acotados $P_h : X_0 \to X_h$, $P_h \in \mathscr{L}(X_0, X_h)$, $h \in (0, 1]$, con la siguiente propiedad:

$$\|P_h u_0\|_{X_h} \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} \|u_0\|_{X_0},\ \forall u_0 \in X_0. \tag{2.1}$$

Usualmente, en las aplicaciones las X_h son de dimensión finita; pero en la teoría formal esta hipótesis no es necesaria.

Definición 8. *Decimos que una sucesión $\{u_h\}_{h\in(0,1]}$, con $u_h \in X_h$ para todo $h \in (0, 1]$ es $\mathscr{P}-$**convergente** hacia $u_0 \in X_0$ si $\|u_h - P_h u_0\|_{X_h} \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. Denotemos $u_h \stackrel{\mathscr{P}}{\longrightarrow} u_0$ para decir que la sucesión $\{u_h\}_{h\in(0,1]}$ $\mathscr{P}-$converge para u_0 cuando $h \to 0$. De manera similar la $\mathscr{P}-$convergencia de sucesiones es definida: Una sucesión $\{u_{h_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $u_{h_n} \in X_{h_n}$ com $h_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $\mathscr{P}-$converge a $u_0 \in X_0$ si*

$$\|u_{h_n} - P_{h_n} u_0\|_{X_{h_n}} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Definición 9. *Se dice que una sucesión $\{A_h\}_{h\in(0,1]}$ de operadores $A_h : X_h \to Y_h$ $\mathscr{P}\mathscr{Q}-$**convergente** hacia el operador $A_0 : X_0 \to Y_0$ cuando $h \to 0$, si $A_h u_h \stackrel{\mathscr{Q}}{\longrightarrow} A_0 u_0$ siempre que $u_h \stackrel{\mathscr{P}}{\longrightarrow} u_0$. Escribimos $A_h \stackrel{\mathscr{P}\mathscr{Q}}{\longrightarrow} A_0$ cuando $h \to 0$ para denotar que A_h $\mathscr{P}\mathscr{Q}-$convergente hacia A_0.*

Definición 10. *Sea $\{T_h(t) : t \geqslant 0\}_{h\in[0,1]}$ una familia de semigrupos no lineares en X_h, para $h \in (0, 1]$. Se dice que $T_h(\cdot) \stackrel{\mathscr{P}\mathscr{P}}{\longrightarrow} T_0(\cdot)$ uniformemente en compactos de $\mathbb{R}^+ \times X_0$ si para cada $\tau > 0$ y para todo subconjunto compacto D_0 de X_0 se tiene que*

$$\lim_{h\to 0} \sup_{t\in[0,\tau]} \sup_{u_0\in D_0} \|T_h(t)u_h - P_h T_0(t)u_0\|_{X_h} = 0$$

siempre que

$$\lim_{h\to 0} \sup_{u_0\in D_0} \|u_h - P_h u_0\|_{X_h} = 0.$$

Definición 11. *Una familia de semigrupos $\{T_h(t) : t \geqslant 0\}_{h\in[0,1]}$ en el espacio de Banach X_h, para todo $h \in [0, 1]$, es $\mathscr{P}-$**Colectivamente Asintóticamente Compacta** si, para cada sucesión $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en $(0, 1]$ con $h_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, cada sucesión acotada $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en X_{h_k} y cada sucesión $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de números reales positivos con $t_k \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, la sucesión $\{T_{h_k}(t_k)x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\mathscr{P}-$convergente hacia un elemento en X_0.*

3. Resultado Principal.

En esta sección presentamos el resultado principal de este trabajo.

Teorema 1. *Sea $\{T_h(t) : t \geqslant 0\}_{h\in[0,1]}$ una familia $\mathscr{P}-$colectivamente asintóticamente compacta de semigrupos no lineales en un espacio de Banach X_h, para todo $h \in [0, 1]$ y $T_h(t) \stackrel{\mathscr{P}\mathscr{P}}{\longrightarrow} T_0(t)$, para todo $t \in K$, con K subconjunto compacto de $\mathbb{R}$. Supongamos que, se verifican las siguientes hipótesis:*

(a) Para cada $h \in [0, 1]$, el semigrupo $\{T_h(t) : t \geqslant 0\}$ posee atractor global $\mathcal{A}_h$ con $\sup_{h\in[0,1]} \sup_{x_h\in\mathcal{A}_h} \|x_h\|_{X_h} < \infty$.

(b) Existe un natural $\mathfrak{p}$ tal que para cada $h \in [0, 1]$, el semigrupo $\{T_h(t) : t \geqslant 0\}$ posee una familia disjunta de conjuntos invariantes aislados

$$\mathscr{S}_h := \{\Xi_{1,h}, \Xi_{2,h}, \ldots, \Xi_{\mathfrak{p},h}\} \subset \mathcal{A}_h$$

que se comportan $\mathscr{P}-$continuamente en $h = 0$, es decir, que para cada $i = 1, 2, \ldots, \mathfrak{p}$ se tiene

$$dist_{X_h}(\Xi_{i,h}, P_h\Xi_{i,0}) + dist_{X_h}(P_h\Xi_{i,0}, \Xi_{i,h}) \to 0 \quad \text{cuando} \quad h \to 0;$$

(c) El semigrupo $\{T_0(t) : t \geqslant 0\}$ es de tipo gradiente generalizado respecto de la familia $\mathscr{S}_0 = \{\Xi_{1,0}, \Xi_{2,0}, \ldots, \Xi_{\mathfrak{p},0}\}$.

(d) La familia de variedades inestables locales de $\Xi_{i,h}$ se comporta $\mathscr{P}-$continuamente en $h = 0$, es decir, existe ρ tal que

$$dist_{X_h}(W^u_\rho(\Xi_{i,h}), P_h W^u_\rho(\Xi_{i,0})) + dist_{X_h}(P_h W^u_\rho(\Xi_{i,0}), W^u_\rho(\Xi_{i,h})) \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

(e) Existe un $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $h \in [0, 1]$ y $j = 1, \cdots, p$; $\Xi_{j,h}$ es el invariante maximal para el semigrupo $T_h(\cdot)$ dentro de $\mathcal{O}_{\delta_0}(P_h\Xi_{j,0})$. Además, δ_0 es tal que los δ_0-entorno de $P_h\Xi_{j,0}$ son disjuntos.

Entonces,

1. la familia de atractores $\{\mathcal{A}_h\}_{h\in(0,1]}$ es $\mathscr{P}-$semicontinua superior en $h = 0$ siempre que (a) sea válido;

2. *la familia de atractores* $\{\mathcal{A}_h\}_{h\in(0,1]}$ *es* $\mathscr{P}-$*semicontinua inferior en* $h=0$ *siempre que* (a), (b), (c) *y* (d) *sean válidos; y*
3. *existe un* $h_0\in(0,1]$ *tal que para todo* $h\in[0,h_0]$ *el semigrupo* $\{T_h(t):t\geqslant 0\}$ *contenido en* X_h *es de tipo gradiente generalizado respecto de la familia* $\mathscr{S}_h=\{\Xi_{1,h},\Xi_{2,h},\ldots,\Xi_{\mathfrak{p},h}\}$ *siempre que* (a), (b), (c) *y* (e) *sean válidos. Consecuentemente,*

$$\mathcal{A}_h=\bigcup_{i=1}^{\mathfrak{p}} W^u(\Xi_{i,h}),\quad \forall h\in[0,h_0].$$

La demostración de este resultado con todos sus detalles se encuentra en [2] (Teorema 8).

Referencias

[1] Aragão-Costa, E.R.; Caraballo, T.; Carvalho, A.N.; Langa, J.A. Stability of gradient semigroups under perturbations. **Nonlinearity**, v. 24, n. 7, p. 2099–2117, 2011.
[2] Aragão-Costa, E.R.; Figueroa-López, R.N.; Langa, J.A.; Lozada-Cruz, G. Topological structural stability of partial differential equations on projected spaces. **Journal of Dynamics and Differential Equations**, accepted 2016.
[3] Arrieta, J.M.; Carvalho, A.N.; Lozada-Cruz, G. J. Dynamics in dumbbell domains I: continuity of the set of equilibria. **Journal of Differential Equations**, New York, v. 231, n. 2, p. 551–597, 2006.
[4] Arrieta, J. M.; Carvalho, A. N.; Lozada-Cruz, G. J. Dynamics in dumbbell domains II: the limiting problem. **Journal of Differential Equations**, New York, v. 247, n. 1, p. 174–202, 2009a.
[5] Arrieta, J. M.; Carvalho, A. N.; Lozada-Cruz, G. J. Dynamics in dumbbell domains III: continuity of attractors. **Journal of Differential Equations**, New York, v. 247, n. 1, p. 225–259, 2009b.
[6] Carvalho, A. N.; Langa, J. A. An extension of the concept of gradient semigroup wich is stable under perturbations. **Journal of Differential Equations**, New York, v. 246, n. 7, p. 2646–2668, 2009.
[7] Carvalho, A. N.; Langa, J. A.; Robinson, J. C. **Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems**, Applied Mathematical Sciences **182**, Springer, New York, 2013.
[8] Carvalho, A. N., Piskarev, S. A general approximations scheme for attractors of abstract parabolic problems. **Numerical Functional Analysis and Optimization**, New York, v. 27, n. 7/8, p. 785–829, 2006.
[9] Vainikko, G. Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problem). **Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications**, Oxford, v. 2, n. 6, p. 647–687, 1978.
[10] Vainikko, G. Discretely compact sequences. **USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics**, v. 14, n. 3, p. 32–43, 1974.
[11] Vainikko, G. **Funktionalanalysis der diskretisierungsmethoden**. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1976.
[12] Vainikko, G. **Multidimensional weakly singular integral equations**. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
[13] Vainikko, G. Regular convergence of operators and approximate solution of equations. **Itogi Nauki i Tehniki**: Seriya Matematicheskii Analiz, Moscow, v. 16, p. 5–53, 1979.