Teorema Titik Tetap Pada Ruang Ultrametrik Diskrit

Wihdatul Ummah, Sunarsini dan Sadjidon
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Teknologi Sepuluh Nopember
Jl. Arief Rahman Hakim, Surabaya 60111 Indonesia
e-mail: djidon@matematika.its.ac.id

***Abstrak*—Suatu ruang metrik (X,d) dikatakan ruang ultrametrik jika metrik d memiliki sifat ketaksamaan segitiga kuat; $untuk\ x,y,z \in X,\ d(x,y) \leq max\{d(x,z), d(z,y)\}$. Jika setiap koleksi penyusutan dari bola pada X memiliki irisan tak kosong, maka ruang ultrametrik (X,d) disebut ruang ultrametrik bola lengkap. Dalam tugas akhir ini dikaji mengenai teorema titik tetap pemetaan di ruang ultrametrik bola lengkap khususnya pada ruang ultrametrik diskrit. Teorema ini menunjukkan bahwa titik tetap dari pemetaan satu-satu pada ruang ultrametrik itu ada dan tunggal.**

***Kata Kunci*—Titik Tetap, Bola Lengkap, Ruang Metrik, Ruang Ultrametrik**

I. PENDAHULUAN

SEIRING dengan perkembangan zaman, banyak sekali topik matematika khususnya dalam bidang analisis fungsional yang mengalami perluasan, seperti ruang vektor, ruang norm, ruang metrik dan sebagainya.

Perluasan analisis fungsional pada konsep ruang metrik sudah banyak dikembangkan seperti ruang metrik, ruang quasi metrik, ruang pseudo metrik, ruang ultrametrik dan lain sebagainya. Pada umumnya perkembangan tersebut mengacu pada masing – masing konsep ruang yang digunakan.

Salah satu perluasan dari konsep ruang metrik adalah ruang ultrametrik. Suatu ruang metrik (X,d) dikatakan ruang ultrametrik (atau ruang metrik non-archimedean), jika d sebagai metrik memiliki sifat ketaksamaan segitiga kuat yaitu $d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\}\ untuk\ x,y,z \in X$ [1].

Dalam matematika, teorema titik tetap atau yang juga dikenal sebagai teorema pemetaan kontraktif merupakan hal yang penting dalam konsep ruang ultrametrik. Teorema ini menunjukkan bahwa titik tetap dari pemetaan satu-satu pada ruang ultrametrik itu ada dan tunggal, serta memberikan metode konstruktif untuk menemukan titik-titik tetap. Teorema ini pertama kali dibuktikan oleh Stefan Banach pada tahun 1920 [2].

Pada tugas akhir ini dikaji mengenai teorema titik tetap pada pemetaan ruang ultrametrik bola lengkap khususnya pada ultrametrik diskrit. Untuk membuktikan teorema titik tetap untuk suatu pemetaan harus menunjukkan kekontinuan dari pemetaan tersebut dan ruang metrik kompak. Sedangkan pada ruang ultrametrik bola lengkap, kekontinuan dari pemetaannya tidak diperlukan.

II. TINJAUAN PUSTAKA

A. Ruang Metrik

Sebelum membahas mengenai ruang ultrametrik, terlebih dahulu perlu dijelaskan mengenai pengertian ruang metrik. Berikut definisi dari ruang metrik:

Definisi 1. [3] *Diberikan X suatu himpunan tak kosong. Didefinisikan metrik atau fungsi jarak sebagai fungsi bernilai real* $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ *yang memenuhi sifat-sifat berikut:*
Untuk setiap $x,y,z \in X$ *berlaku:*

(M1) $d(x,y) \geq 0$

(M2) $d(x,y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$

(M3) $d(x,y) = d(y,x)$

(M4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Jika d *metrik di* X*, maka pasangan* (X,d) *disebut ruang metrik.*

Contoh 2. [4] *Himpunan bilangan real* $\mathbb{R}$ *merupakan ruang metrik terhadap ρ, dengan ρ:* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *adalah*

$$\rho(x,y) = |x-y|$$

Untuk setiap x,y $\in \mathbb{R}$.

B. Ruang Ultrametrik

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya pada bab pendahuluan bahwa ruang ultrametrik adalah merupakan pengembangan dari konsep ruang metrik dimana ruang ultrametrik memiliki sifat ketaksamaan segitiga kuat. Sedangkan sifat-sifat lainnya dari ruang metrik terdapat pula pada ruang ultrametrik.

Definisi 3. [5] *Diberikan X suatu himpunan tak kosong. Didefinisikan ultrametrik sebagai fungsi bernilai real* $d_u : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ *yang memenuhi sifat-sifat berikut:*
Untuk setiap $x,y,z \in X$ *berlaku:*

(UM1) $d_u(x,y) \geq 0$

(UM2) $d_u(x,y) = 0$ *jika dan hanya jika* $x = y$
(UM3) $d_u(x,y) = d_u(y,x)$
(UM4) $d_u(x,y) \leq d_u(x,z) + d_u(z,y)$
(UM5) $d_u(x,y) \leq \max\{d_u(x,z), d(z,y)\}$
Jika d_u *ultrametrik di* X, *maka pasangan* (X, d_u) *disebut ruang ultrametrik.*

Pada umumnya, untuk membuktikan teorema titik tetap atau teorema titik tetap umum untuk suatu pemetaan harus menunjukkan kekontinuan dari pemetaan tersebut. Sedangkan pada ruang ultrametrik bola lengkap, kekontinuan dari pemetaannya tidak diperlukan untuk mendapatkan titik tetap. Selanjutnya ruang ultrametrik yang dikaji disini adalah ruang ultrametrik bola lengkap. Berikut ini adalah definisi dan lemma dari ruang ultrametrik bola lengkap.

Definisi 4. [6] *Ruang ultrametrik* (X, d_u) *dikatakan bola lengkap jika setiap koleksi penyusutan dari bola pada* X *memiliki irisan tak kosong*

Lemma 5. [7] *Misal* (X, d_u) *merupakan ruang ultrametrik bola lengkap dan misal* $\{B_i\}_{i\in I}$ *adalah keluarga dari bola pada* X *sehingga* $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ *untuk setiap* $i, j \in I$ *dan* $i \neq j$, *maka* $\cap_{i\in I} B_i \neq \emptyset$.

C. Titik Tetap

Titik tetap adalah suatu pemetaan yang mengaitkan setiap titik pada domain tepat satu titik di kodomain sehingga menghasilkan daerah hasil atau range. Berikut definisi dari titik tetap

Definisi 6. [8] *(Titik Tetap). Diberikan* X *suatu himpunan tak kosong dan pemetaan* $f : X \to X$. *Titik* $x \in X$ *disebut titik tetap untuk* f *jika* $f(x) = x$.

Selanjutnya, diberikan contoh sederhana mengenai titik tetap sebagai berikut

Contoh 7. [8] Misalkan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan

$$f(x) = x^2 - 3x + 4$$

untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, maka 2 merupakan titik tetap dari f.

D. Lemma Zorn

Lemma Zorn dibutuhkan untuk membuktikan teorema titik tetap pada ruang ultrametrik. Berikut ini adalah definisi dari LemmaZorn.

Teorema 8. [9] (Lemma Zorn) *Dimisalkan* $(X, \preccurlyeq)$ *adalah himpunan terurut parsial. Jika setiap subhimpunan terurut total dari* $(X, \preccurlyeq)$ *memiliki batas atas, maka* X *memiliki elemen maksimal.*

E. Coincidentally Commuting

C*oincidentally Commuting* digunakan pada pembahasan titik tetap umum tunggal untuk dua pemetaan pada satu himpunan X tak kosong. Berikut ini definisi dari *coincidentally commuting*

Definisi 9. [10] *Dua pemetaan* $f, g: X \to X$ *dikatakan coincidentally commuting atau coincidence preserving jika* f *dan* g *komutatif pada pertukaran titiknya.*

Untuk lebih memahami definisi tersebut, diberikan contoh sederhana mengenai *coincidentally commuting*

Contoh 10. [10] *Misalkan* $X = \mathbb{R}$ *dan didefinisikan* $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dengan* $f(x) = \frac{x}{2}$ *dan* $g(x) = x^2$ *untuk* $x \in \mathbb{R}$. *Sehingga disana terdapat dua pertukaran titik untuk pemetaan* f *dan* g *pada* $\mathbb{R}$, *yaitu* 0 *dan* $\frac{1}{2}$. *Pemetaan* f *dan* g *kommutatif pada 0 sedemikian hingga*

$$fg(0) = gf(0),$$

Tetapi

$$fg\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{8} \neq \tfrac{1}{16} = gf\left(\tfrac{1}{2}\right).$$

Jadi f *dan* g *bukan coincidentally commuting pada* $\mathbb{R}$.

III. PEMBAHASAN

A. Teorema Titik Tetap Ruang Ultrametrik Pada Suatu Pemetaan

Berikut ini adalah teorema titik tetap yang berlaku pada ruang ultrametrik untuk suatu pemetaan T pada X.

Teorema 1. [11] *Misal* (X, d_u) *sebagai ruang ultrametrik bola lengkap. Jika T: X→ X adalah pemetaan, sedemikian hingga*

$$d_u(Tx, Ty) < \max\{d_u(x,y), d_u(x,Tx), d_u(y,Ty)\} \quad \forall x, y \in X, x \neq y \tag{3.1}$$

maka T mempunyai titik tetap tunggal pada X.

Pada tugas akhir ini diambil kasus mengenai teorema titik tetap pada ultrametrik diskrit. Sebelum membahas teorema titik tetap ruang ultrametrik diskrit, berikut ini diberikan terlebih dahulu mengenai teorema ruang ultrametrik dan ruang ultrametrik bola lengkap.

Teorema 2. *Misalkan* $X \neq \emptyset$, *ultrametrik* d_u *didefinisikan pada* X *dengan*

$$d_u(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

maka d_u *merupakan ultrametrik pada* X *dan dinamakan ultrametrik diskrit. Sedangkan* (X, d_u) *adalah ruang ultrametrik diskrit.*

Bukti. Diambil sebarang $x, y, z \in X$

(UM1) Untuk $x = y$, maka $d_u(x,y) = 0$ dan untuk $x \neq y$, maka $d_u(x,y) = 1 > 0$.

Karena untuk $x = y$ dan $x \neq y$ telah terpenuhi, maka dapat disimpulkan bahwa :

$$d_u(x,y) \geq 0, \forall x,y \in X.$$

(UM2) $(\Rightarrow)$ Jika $d_u(x,y) = 0$ sudah jelas bahwa $x = y$
$(\Leftarrow)$ Jika $x = y$ sudah jelas bahwa $d_u(x,y) = 0$

(UM3) Untuk $x = y$,
maka $d_u(x,y) = d_u(x,x) = d_u(y,x)$.
Sehingga diperoleh $d_u(x,y) = d_u(y,x)$.
Sedangkan untuk $x \neq y$,
maka $d_u(x,y) = 1 = d_u(y,x)$.
Jadi diperoleh $d_u(x,y) = d_u(y,x)$.

(UM4) Diberikan sebarang $z \in \mathbb{R}$, sehingga terdapat lima kasus sebagai berikut:

(i) Untuk $x = y$ dan $x = z$ maka $y = z$, sehingga
$d_u(x,y) = 0$, $d_u(x,z) = 0$ dan $d_u(z,y) = 0$.
Jadi, $d_u(x,y) = d_u(x,z) + d_u(z,y)$.

(ii) Untuk $x = y$ dan $x \neq z$ maka $y \neq z$, sehingga
$d_u(x,y) = 0$, $d_u(x,z) = 1$ dan $d_u(z,y) = 1$.
Jadi, $d_u(x,y) < d_u(x,z) + d_u(z,y)$.

(iii) Untuk $x \neq y$ dan $x = z$ maka $y \neq z$, sehingga
$d_u(x,y) = 1$, $d_u(x,z) = 0$ dan $d_u(z,y) = 1$.
Jadi, $d_u(x,y) = d_u(x,z) + d_u(z,y)$.

(iv) Untuk $x \neq y$ dan $x \neq z$ maka $y \neq z$, sehingga
$d_u(x,y) = 1$, $d_u(x,z) = 1$ dan $d_u(z,y) = 1$.
Jadi, $d_u(x,y) < d_u(x,z) + d_u(z,y)$.

(v) Untuk $x \neq y$ dan $x \neq z$ maka $y = z$, sehingga
$d_u(x,y) = 1$, $d_u(x,z) = 1$ dan $d_u(z,y) = 0$.
Jadi, $d_u(x,y) = d_u(x,z) + d_u(z,y)$.

Sehingga, dari kasus (i), (ii), (iii), (iv) dan (v) terlihat bahwa

$$d_u(x,y) \leq d_u(x,z) + d_u(z,y), \forall x,y,z \in X.$$

(UM5) Diberikan sebarang $z \in \mathbb{R}$, sehingga terdapat lima kasus sebagai berikut:

(i) Untuk $x = y$ dan $x = z$ maka $y = z$, sehingga
$d_u(x,y) = 0$, $d_u(x,z) = 0$ dan $d_u(z,y) = 0$.
Jadi, $d_u(x,y) = max\ \{d_u(x,z), d_u(z,y)\}$.

(ii) Untuk $x = y$ dan $x \neq z$ maka $y \neq z$, sehingga
$d_u(x,y) = 0$, $d_u(x,z) = 1$ dan $d_u(z,y) = 1$.
Jadi, $d_u(x,y) < max\ \{d_u(x,z), d_u(z,y)\}$.

(iii) Untuk $x \neq y$ dan $x = z$ maka $y \neq z$, sehingga
$d_u(x,y) = 1$, $d_u(x,z) = 0$ dan $d_u(z,y) = 1$.
Jadi, $d_u(x,y) = max\ \{d_u(x,z), d_u(z,y)\}$.

(iv) Untuk $x \neq y$ dan $x \neq z$ maka $y \neq z$, sehingga
$d_u(x,y) = 1$, $d_u(x,z) = 1$ dan $d_u(z,y) = 1$.
Jadi, $d_u(x,y) = max\ \{d_u(x,z), d_u(z,y)\}$.

(v) Untuk $x \neq y$ dan $x \neq z$ maka $y = z$, sehingga
$d_u(x,y) = 1$, $d_u(x,z) = 1$ dan $d_u(z,y) = 0$.
Jadi, $d_u(x,y) = max\ \{d_u(x,z), d_u(z,y)\}$.

Dari kelima kasus tersebut terlihat bahwa
$d_u(x,y) \leq max\{d_u(x,z), d(z,y)\}$.

Jadi terbukti bahwa $d_u(x,y)$ adalah ultrametrik dan pasangan (X, d_u) adalah ruang ultrametrik. Ruang ultrametrik ini disebut ruang ultrametrik diskrit.

Teorema 3. *Diberikan (X, d_u) ruang ultrametrik diskrit, jika setiap koleksi penyusutan dari bola pada X memiliki irisan tak kosong maka (X, d_u) merupakan ruang ultrametrik bola lengkap.*

Bukti. Misalkan $\mathcal{B}_1 \supseteq \mathcal{B}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{B}_n \supseteq \cdots$ merupakan bola tertutup pada X dan $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ merupakan pusat bola tersebut. Sehingga dapat didefinisikan bahwa

$$\mathcal{B}_n = \{y \in X \mid d(x_n, y) < r_n\}$$

dengan $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ merupakan jari-jari bola. Akan dibuktikan bahwa barisan $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ konvergen. Untuk membuktikannya digunakan $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ yang merupakan jari-jari bola, karena r_n konvergen ke suatu titik dan dimisalkan r, maka

1. Untuk $r \geq 1$
maka untuk setiap $n, r \geq 1$ berakibat

$$\mathcal{B}_n = \{y \in X \mid d(x_n, y) < r\} = X$$

2. Sedangkan untuk $r < 1$
maka untuk setiap n berakibat

$$\mathcal{B}_n = \{y \in X \mid d(x_n, y) < r\} = \{r_n\}$$

Terlihat bahwa untuk

$$d_u(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

merupakan suatu bola yang konvergen ke suatu bola terkecil yang tak kosong. Sehingga d_u merupakan ultrametrik bola lengkap dan pasangan (X, d_u) merupakan ruang ultrametrik bola lengkap.

Selanjutnya, dibawah ini merupakan teorema titik tetap dari ruang ultrametrik diskrit pada suatu pemetaan

Teorema 4. *Misalkan (X, d_u) merupakan ruang ultrametrik diskrit. Didefinisikan pemetaan $T{:}X \rightarrow X$ dengan $y = T_x$ dan*

$$Tx = x_0, \quad x_0 \text{ identitas}$$

karena (X, d_u) merupakan ruang ultrametrik bola lengkap sedemikian hingga

$$d_u(Tx, Ty) < max\{d_u(x,y), d_u(x,Tx), d_u(y,Ty)\}$$
$$\forall x, y \in X, x \neq y.$$

maka T mempunyai titik tetap tunggal.

Bukti. Untuk membuktikan teorema tersebut harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa T memiliki titik tetap dan selanjutnya dibuktikan bahwa jika z titik tetap dari T, maka z adalah titik tetap tunggal dari T.

(i) Akan dibuktikan bahwa T memiliki titik tetap.
T memiliki titik tetap jika memenuhi ketaksamaan (3.1)

$$d_u(Tx, Ty) < max\{d_u(x,y), d_u(x,Tx), d_u(y,Ty)\}$$
$$\forall x, y \in X, x \neq y.$$

Untuk membuktikan ketaksamaan (3.1) yaitu dengan membuktikan ruas kiri dan ruas kanan. Seperti yang telah diketahui bahwa $Tx = x_0$ dengan

$$d_u(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

Sehingga ruas kiri dapat dituliskan sebagai berikut:

- Karena $Tx = x_0$ dan $Tx = y$ maka $Ty = T(Tx) = x_0$ sehingga

$$d_u(Tx, Ty) = d_u(x_0, x_0) = 0$$

dan ruas kanan dituliskan sebagai berikut:

- $\max\{d_u(x,y), d_u(x,Tx), d_u(y,Ty)$
$= \max(d_u(x,y), d_u(x,x_0), d_u(y,x_0))$

Karena $x \neq y$ maka $d_u(x,y) = 1$
Sehingga,

$$max\{d_u(x,y), d_u(x,Tx), d_u(y,Ty)$$
$$= max(1, d_u(x,x_0), d_u(y,x_0).$$

Karena
$$d_u(Tx,Ty) < \max\{1, d_u(x,x_0), d_u(y,x_0)\}$$

maka terbukti bahwa
$$d_u(Tx,Ty) < d_u(x,y)$$
$$< max\{d_u(x,y), d_u(x,Tx), d_u(y,Ty)\}$$

Sehingga ketaksamaan (3.1) terbukti, yaitu

$$d_u(Tx,Ty) < max\{d_u(x,y), d_u(x,Tx), d_u(y,Ty)\},$$
$$\forall x, y \in X, x \neq y$$

Karena ketaksamaan (3.1) terbukti, maka T memiliki titik tetap.

(ii) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa z merupakan titik tetap tunggal dari T.

Jika terdapat $u \in X$ merupakan titik tetap yang lain dengan
$u \neq z$, maka didapatkan

$$Tz = z = x_0 \text{ dan } Tu = u = x_0$$

dari pembuktian tersebut, maka $z = u = x_0$ yang kontradiksi dengan $u \neq z$. Terbukti bahwa z merupakan titik tetap tunggal dari T.

B. Teorema Titik Tetap Ruang Ultrametrik Pada Dua Pemetaan

Berikut ini adalah teorema titik tetap ruang ultrametrik pada dua pemetaan menurut K.P.R Rao dan G.N.V. Kishore

Teorema 5. [11] *Ambil (X, d_u) sebagai ruang ultrametrik bola lengkap. Jika f dan T adalah pemetaan diri sendiri pada X, dengan :*

$$T(X) \subseteq f(X) \qquad (3.2)$$

dan

$$d_u(Tx,Ty) < max\{d_u(fx,fy), d_u(fx,Tx), d_u(fy,Ty)\}$$
$$\forall x, y \in X, x = y \qquad (3.3)$$

maka terdapat $z \in X$ sedemikian hingga $fz = Tz$. Kemudian jika f dan T coincidentally commuting pada z, maka z adalah titik tetap tunggal dari f dan T.

Selanjutnya, untuk kasus pada ultrametrik diskrit, teorema titik tetap yang berlaku pada ruang ultrametrik diskrit untuk dua pemetaan T dan f adalah sebagai berikut

Teorema 6. *Misalkan (X, d_u) ruang ultrametrik diskrit*
Didefinisikan pemetaan $T, f : X \to X$, dengan

$$Tx = 1$$

serta

$$fx = \frac{x+1}{2}, \forall x \in X.$$

Sedemikian hingga

$$T(X) \subseteq f(X)$$

dan

$$d_u(Tx, Ty) < max\{d_u(fx, fy), d_u(fx, Tx), d_u(fy, Ty)\}$$

$$\forall x, y \in X, x = y$$

maka terdapat $z \in X$ sedemikian hingga $fz = Tz$ Kemudian jika f dan T coincidentally commuting pada z, maka z adalah titik tetap tunggal dari f dan T.

Bukti. Untuk membuktikan teorema tersebut harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa f dan T memenuhi ketaksamaan

$$T(X) \subseteq f(X)$$

dan

$$d_u(Tx, Ty) < max\{d_u(fx, fy), d_u(fx, Tx), d_u(fy, Ty)\}$$

$$\forall x, y \in X, x = y$$

dan yang terakhir dibuktikan bahwa z adalah titik tetap tunggal dari f dan T.

(i) Akan dibuktikan bahwa pemetaan T memiliki titik tetap, yaitu dengan membuktikan ketaksamaan (3.2)

$$T(X) \subseteq f(X)$$

dan ketaksamaan (3.3)

$$d_u(Tx, Ty) < max\{d_u(fx, fy), d_u(fx, Tx), d_u(fy, Ty)\}$$

(a) Pembuktian ketaksamaan (3.2)

$$T(X) \subseteq f(X)$$

dengan $Tx = 1$ dan $fx = \frac{x+1}{2}$.
Untuk membuktikan bahwa

$$T(X) \subseteq f(X)$$

Dibuktikan dengan menunjukkan bahwa, untuk setiap
elemen di $T(X)$ maka dia juga berada di $f(X)$.

Sehingga untuk $Tx = 1$,harus ditunjukkan bahwa $1 \in f(X)$. Sehingga

$$f(1) = \frac{1+1}{2} = 1$$

Jadi, terbukti bahwa

$$T(X) \subseteq f(X).$$

(b) Pembuktian ketaksamaan (3.3)

$$d_u(Tx, Ty) < max\{d_u(fx, fy), d_u(fx, Tx), d_u(fy, Ty)\}$$

$$\forall x, y \in X, x \neq y$$

- Pembuktian ruas kiri:
  Karena $Tx = 1$ dan $Ty = 1$, maka

  $$d_u(Tx, Ty) = d_u(1,1)$$

  karena $Tx = Ty = 1$,

  maka $d_u(Tx, Ty) = 0$

- Pembuktian ruas kanan:

  $$\max\{d_u(fx, fy), d_u(fx, Tx), d_u(fy, Ty)\}$$

  $$= \max\left\{d_u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right), d_u\left(\frac{x+1}{2}, 1\right), d_u\left(\frac{y+1}{2}, 1\right)\right\}$$

  Karena $x \neq y$ maka $\frac{x+1}{2} \neq \frac{y+1}{2}$, sehingga $d_u\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+1}{2}\right) = 1$.

Karena $d_u(Tx, Ty) < d_u(fx, fy)$
maka jelas bahwa

$$d_u(Tx, Ty) < \max\{d_u(fx, fy), d_u(fx, Tx), d_u(fy, Ty)\}.$$
$$\forall x, y \in X, x \neq y$$

Karena ketaksamaan (3.2) dan (3.3) telah terpenuhi maka pemetaan T dan f memiliki titik tetap .

(ii) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa z adalah titik tetap
tunggal pada T dan f .

Untuk membuktikan bahwa z adalah titik tetap tunggal pada T dan f , yaitu dengan dibuktikan bahwa pemetaan f dan T adalah *coincidentally commuting* dan memenuhi persamaan

$$fz = Tz$$

Sesuai dengan definisi 2.17, f dan T dikatakan *coincidentally commuting* jika f dan T kommutatif pada pertukaran titiknya

(a) Pembuktian

$$fz = Tz$$

yaitu

$$fz = \frac{z+1}{z} = 1 = Tz.$$

Selanjutnya jika terdapat $u \in X$ titik tetap yang lain dengan $u \neq z$, maka didapatkan

$$fz = \frac{z+1}{2} = 1 = z \text{ dan } Tu = u = 1$$

maka diperoleh $z = u = 1$ yang kontradiksi dengan $u \neq z$. Sehingga terbukti bahwa z merupakan satu-satunya titik tetap atau titik tetap tunggal pada pemetaan f dan T.

(b) Dari pembuktian (a) dapat dikatakan bahwa pertukaran titik untuk pemetaan T dan f yaitu pada titik $z = 1$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa f dan T *coincidentally commuting*, yaitu jika f dan T kommutatif pada pertukaran titiknya, sedangkan dari definisi 2.14, f dan T dikatakan kommutatif jika

$$fT(z) = Tf(z)$$

Dengan $z = 1$.

Sehingga,

$$fT(1) = Tf(1)$$

$$fT(1) = \frac{1+1}{2} = 1 = Tf(1)$$

Jadi, jelas bahwa f dan T kommutatif pada $z = 1$. Sehingga f dan T *coincidentally commuting.*

Dari pembuktian (a) dan (b) maka jelas bahwa pemetaan f dan T memiliki titik tetap tunggal. ■

DAFTAR PUSTAKA

[1] Murtagh, F.N. 2013. *Thinking Ultrametrically*. School of Computer Science, Queen's University Belfast , Belfast BT7 LNN, Nothern Ireland, UK

[2] Kreyzig, E. 1989. *Introdutory Functional Analysis with Applications*. Newyork John Wiley

[3] Gajic, L.J. 2001. *On ultrametric spaces*. University of Novi Sad J.Math, Yugoslavia.

[4] Rynne, B.P. and Youngson, M.A. 2008. *Linear Functional Analysis*. Springer, SUMS.

[5] Rao, K.P.R and Kishore, G.N.V, 2008. *Common Fixed Point Theorems in Ultrametric Spaces*. Journal of mathematics Acharya Nagarjuna University.

[6] Adams, C. 2012. *Introduction to Topology: Pure and Applied 1st edition.* Pearson

[7] Peter, S,. 2005. *Nonarchimedean Functional Analysis*

[8] Joe, G. *Fixed Points*. Lawrence University, www2.lawrence.edu

[9] Jean. *Partial Orders, Equivalence Relations, Lattices*. University of Pennsylvania USA

[10] Dhage B. C. 1999. *On Common Fixed Points of Pairs of Coincidentally Commuting Mappings In D-Metric Spaces*. Indian J. Pure Appl Math 30 (4) :395-406.

[11] Van Hassel, R.R.. 2009. *Own Lecture Notes Functional Analysis*. Win.tue.nl