

# Аэрокосмический научный журнал

Сетевое научное издание  
МГТУ им. Н.Э. Баумана  
<http://aerospjournal.ru>

Ссылка на статью:

// Аэрокосмический научный журнал.  
МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2017.  
№ 03. С. 39–52.

DOI: **10.24108/aersp.0317.0000068**

Представлена в редакцию: 03.05.2017

Исправлена: 17.05.2017

© МГТУ им. Н.Э. Баумана

УДК 536.24

## Система уравнений теплообмена и изменения массы фазы в проточных аккумуляторах теплоты фазового перехода

Россихин Н.А.<sup>1,\*</sup>

[ross1n@rambler.ru](mailto:ross1n@rambler.ru)

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

---

В статье предложена система дифференциальных уравнений, описывающих процессы в проточных аккумуляторах теплоты фазового перехода (АФП) и поставлена соответствующая краевая задача. При этом используется упрощенная математическая модель со следующими основными допущениями – предполагается одномерность течения теплоносителя, квазистационарность температурных полей, одномерность перемещения границы раздела фаз.

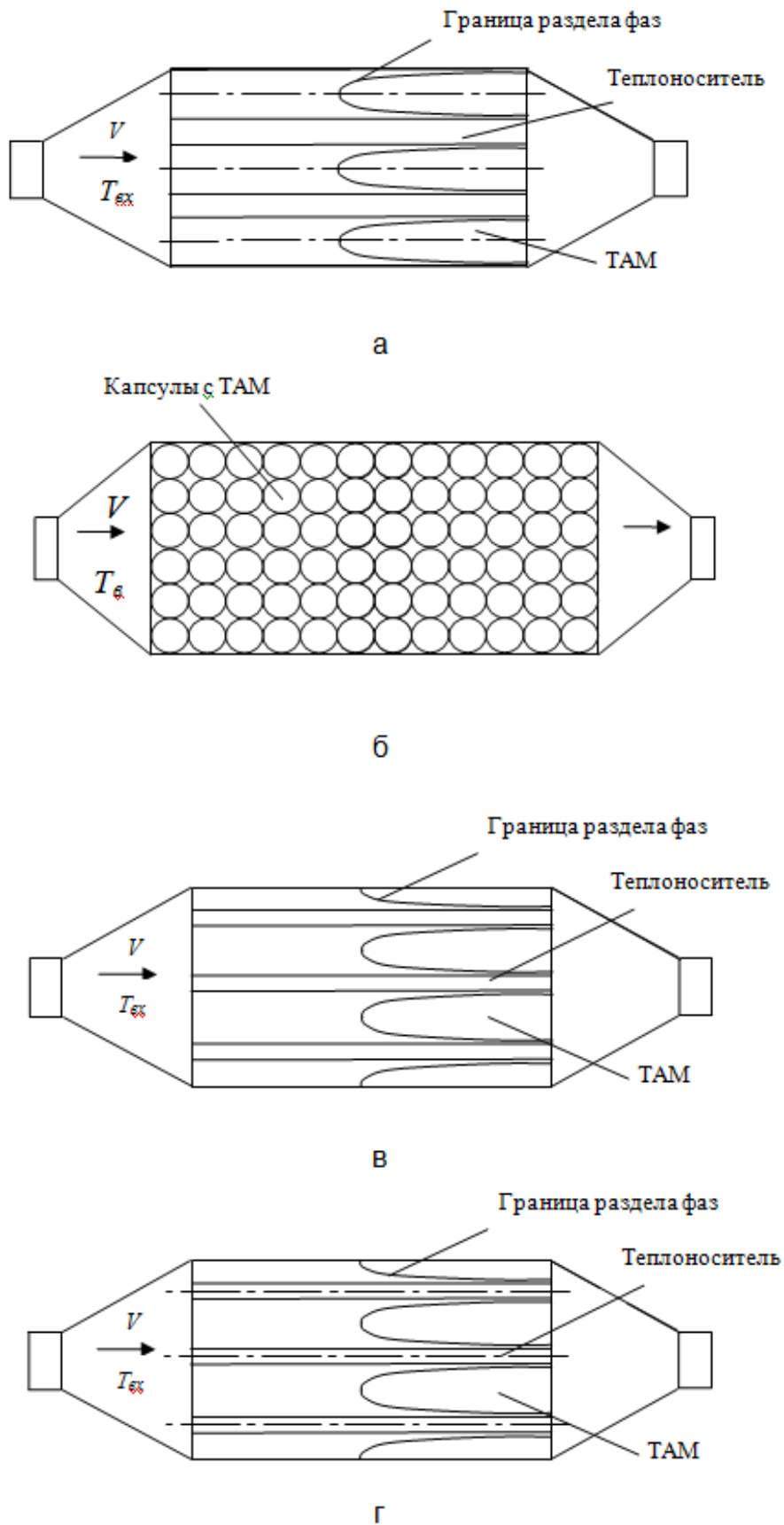
**Ключевые слова:** аккумулятор теплоты; затвердевание; фазовый переход; твердая фаза; жидкая фаза

---

Все более широкое применение аккумуляторов теплоты для рационального использования энергетических ресурсов, в частности альтернативных источников, приводит к необходимости разработки способов оптимизации их геометрических и режимных параметров. Наиболее эффективно это может быть сделано с использованием упрощенных физико-математических моделей, учитывающих основные особенности процессов в них.

В проточных аккумуляторах теплоты фазового перехода (АФП) значимым фактором является существенное изменение температуры теплоносителя при его перемещении вдоль поверхности теплообмена, что приводит к неравномерности изменения количества фазы по длине аккумулятора. Другой особенностью является то, что во многих приложениях АФП работают в квазистационарном режиме, при котором температурные поля внутри аккумулятора близки к стационарным. Это связано с медленным перемещением границы фазового перехода и слабо меняющейся температурой теплоносителя на входе в аккумулятор.

На рис. 1 представлены схемы ряда проточных АФП, отличающиеся геометрическими параметрами и особенностями течения теплоносителя вдоль поверхностей теплообмена. Общим является наличие теплоносителя, движущегося вдоль поверхности теплообмена, через которую в режиме зарядки теплоаккумулирующему материалу (ТАМ) передается теплота, в результате чего он плавится, а в режиме разрядки обратно, теплота передается теплоносителю, при этом ТАМ затвердевает. Как правило, ТАМ от теплоносителя отделен тонкой стенкой.



**Рис. 1.** Схемы проточных АФП: а – АФП с цилиндрическими капсулами; б – АФП со сферическими капсулами; в – АФП с плоскими каналами (со щелевыми каналами); г – кожухотрубный АФП

Еще несколько типов проточных АФП приводится в [1].

В ряде работ для расчета аккумуляторов такого типа были разработаны одномерные модели и получены аналитические решения [2-4]. В [2] приводятся общие уравнения, описывающие теплообмен в проточном АФП с цилиндрическими капсулами (рис. 1 а), а также упрощенная одномерная модель, с использованием которой получено аналитическое решение. В работе [3] аналогичная задача для АФП со сферическими капсулами решалась численно в одномерной постановке. При этом были проведены расчеты, и результаты сопоставлены с экспериментальными данными.

Задача затвердевания неограниченного плоского слоя материала, граница которого омывается одномерным потоком (рис. 2), была поставлена и решена аналитически в [4]. Полученные формулы позволяют получить изменение температурного поля теплоносителя и положения границы раздела фаз во времени. Очевидно при этом, что решение описывает начальную стадию процесса, а именно, до момента достижения границы фазового перехода внешней границы контейнера с ТАМ. Соответственно, эти результаты не могут применяться для расчета ограниченного слоя и, таким образом, быть распространены на весь период затвердевания ТАМ в контейнере. Рассмотренный случай соответствует варианту исполнения АФП с плоскими капсулами внутри (рис. 1 б). Решение для плоского слоя конечных размеров при использовании более упрощенной постановки задачи, а именно, для случая, когда термическое сопротивление слоя твердой фазы много меньше, чем сопротивление со стороны теплоносителя, что позволяет считать общее сопротивление постоянным, получены в [5]. Аналогичные формулы для определения изменения температуры теплоносителя и положения границы раздела при затвердевании материала цилиндрического слоя при его внутреннем и внешнем обтекании приводятся в [6, 7].

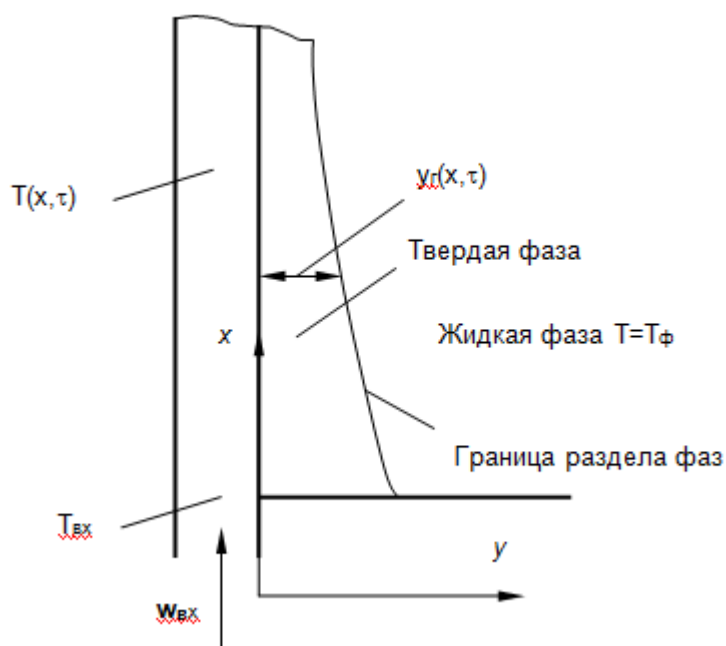


Рис. 2. Затвердевание вещества вблизи конвективно охлаждаемой стенки [1].

В [8, 9] была поставлена и решена аналитически задача теплообмена в АФП со сферическими капсулами. При этом полученные в этих статьях формулы описывают весь процесс зарядки или разрядки, до полного перехода ТАМ в жидкое или твердое состояние по всей длине аккумулятора. Для их вывода использовался ряд допущений, о которых будет упомянуто в дальнейшем. Как стало ясно при более позднем рассмотрении, предложенный подход является общим и дает возможность получения расчетных соотношений для проточных АФП других конфигураций. Описать целый класс аккумуляторов едиными соотношениями оказывается возможным благодаря использованию в качестве зависимой переменной удельной на единицу длины АФП массы  $m$ , кг м<sup>-1</sup>, фазы жидкой или твердой, которая образовалась в процессе зарядки или разрядки. По определению удельная масса  $m$  выражается соотношением (рис. 3):

$$m(x, \tau) = \frac{dM}{dx},$$

где  $x$ , м – координата в направлении движения теплоносителя (рис. 3);

$dM$ , кг – масса фазы в объеме АФП на длине  $dx$  между двумя поперечными сечениями в момент времени  $\tau$ , с.

При этом в качестве  $M(x)$  будем понимать ту часть массы исходной фазы, твердой или жидкой, которая осталась в процессе зарядки или разрядки на момент времени  $\tau$  на длине  $[0, x]$ .

Предложенное понятие удельной на единицу длины АФП массы фазы позволяет:

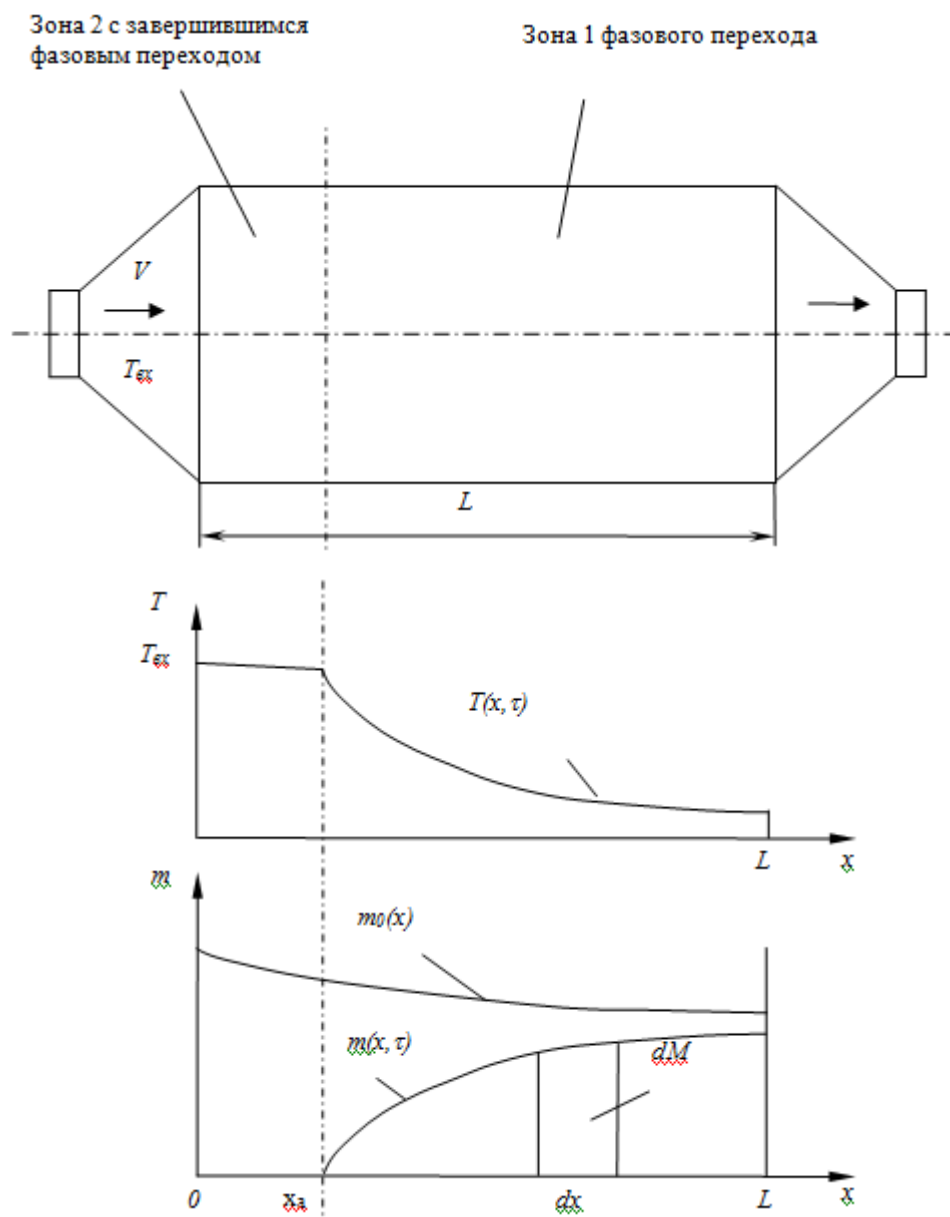
- проводить эффективный анализ темпа изменения массы фазы по длине АФП с использованием аналитических решений;
- построить общую теорию теплообмена для широкого класса проточных АФП одномерным течением теплоносителя.

Для вывода соответствующих дифференциальных соотношений рассмотрим произвольный проточный АФП, в котором теплоноситель движется прямолинейно (рис. 3). ТАМ и теплоноситель разделены стенкой, при этом ее форма может быть произвольной (рис. 1).

Для вывода уравнений теплообмена и фазового перехода в проточном АФП принимаются следующие допущения.

1. Теплообмен в потоке теплоносителя одномерный (температура теплоносителя  $T(x, y, z, \tau) = T(x, \tau)$ , °С, скорость теплоносителя  $w(x, y, z, \tau) = w_x(x)$ , м с<sup>-1</sup>).
2. Теплообмен в АФП, как в ТАМ, так и в потоке теплоносителя, квазистационарный. На входе в АФП задана медленно изменяющаяся температура  $T_{ex}(\tau)$ , °С.
3. Перенос теплоты в массе ТАМ в направлении потока теплоносителя пренебрежимо мал.
4. Не учитывается изменение объема ТАМ при фазовом переходе.
5. Температура ТАМ в начале процесса равна температуре фазового перехода.

6. Потоки теплоты между теплоносителем и ТАМ определяются по средним термическим сопротивлениям, соответствующим положению границ раздела фаз в соответствующий момент времени.



**Рис. 3.** Особенности температурного поля и распределения остатка удельной массы фазы в проточном АФП

Подробнее последнее допущение будет обсуждено ниже. При этом будем считать, что площадь поперечного сечения, а также другие параметры могут меняться по длине АФП.

При работе АФП его режим определяется температурой теплоносителя на входе в него: при  $T_{вх} > T_{\phi}$  ( $T_{\phi}$  – температура фазового перехода, °С) теплоноситель остывает, и ТАМ плавится, аккумулятор работает в режиме зарядки. При  $T_{вх} < T_{\phi}$  наоборот, ТАМ застывает, отдавая теплоту теплоносителю, в результате чего аккумулятор разряжается. При этом, как уже отмечалось, известен график тепловой нагрузки на входе в АФП  $T_{вх}(\tau)$ .

При использовании аккумуляторов в гелиоустановках колебания температуры соответствуют  $T_{ex}(t)$  суточному ритму поступления теплоты.

На основании изложенного построим математическую модель квазистационарного теплообмена с фазовым переходом в проточном АФП с переменными по его длине геометрическими параметрами.

Будем рассматривать одномерную краевую задачу квазистационарного теплообмена в проточном АФП, с изменением температурного поля вдоль течения потока в направлении координаты  $x$  (рис. 3). Она может быть отнесена к сопряженным конвективным задачам стефановского типа. Уравнение энергии для теплоносителя записывается в виде:

$$\rho c_p (\partial T(x, \tau) / \partial \tau + w_x \partial T(x, \tau) / \partial x) = \lambda \partial^2 T(x, \tau) / \partial x^2 + q_V. \quad (1)$$

$w_x$  – средняя скорость потока теплоносителя вдоль оси  $x$ ,

$\rho, c_p, \lambda$  – плотность,  $\text{кг м}^{-3}$ , массовая изобарная теплоемкость,  $\text{Дж кг}^{-1} \text{°C}^{-1}$ , коэффициент теплопроводности теплоносителя,  $\text{Вт м}^{-1} \text{°C}^{-1}$ .

С помощью источникового члена  $q_V$  учитывается теплообмен между ТАМ и потоком теплоносителя. При этом

$$q_V = \frac{dQ}{dV_{\text{АФП}}} = \frac{dQ}{A_f dx}. \quad (2)$$

Здесь  $dQ$  – теплота, поступающая за единицу времени в теплоноситель от ТАМ,  $\text{Вт}$ ;

$A_f$  – площадь поперечного сечения проточной части АФП,  $\text{м}^2$ ;

$V_{\text{АФП}}$  – объем рабочей части АФП,  $\text{м}^3$ .

Чтобы получить формулу для вычисления  $q_V$ , воспользуемся выражением для потока теплоты между теплоносителем и поверхностью фазового перехода, считая, что процесс является квазистационарным:

$$\frac{dQ}{dA} = - \frac{T(x, \tau) - T_\phi}{R}, \quad (3)$$

где  $R$  – термическое сопротивление между поверхностью фазового перехода внутри ТАМ и теплоносителем,  $\text{м}^2 \text{°C Вт}^{-1}$ ;

$A(x)$  – поверхность теплообмена между теплоносителем и оболочкой, содержащей ТАМ,  $\text{м}^2$ , внутри пространства АФП от входа в него (соответствует координате  $x=0$ ) до поперечного сечения с координатой  $x$ .

Уравнение (3) можно переписать в виде:

$$\frac{dQ}{dx} = - \frac{T(x, \tau) - T_\phi}{R} \frac{dA}{dx}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2) получаем:

$$q_V = - \frac{T(x, \tau) - T_\phi}{A' R A_f}. \quad (5)$$

$A' = dA/dx$  – производная,  $\text{м}$ .

Подстановка (5) в (1) дает:

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} + w_x \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} - \frac{T(x, \tau) - T_\phi}{R A_f} A'. \quad (6)$$

Пренебрегая в уравнении (6) кондуктивным теплообменом вдоль потока теплоносителя и используя условие квазистационарности, что выражается соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} &= 0, \end{aligned}$$

и с учетом соотношения

$$w_x = \frac{V}{A_f},$$

где  $V$  – объемный расход теплоносителя,  $\text{м}^3 \text{с}^{-1}$ , получаем дифференциальное уравнение, определяющее температурное поле при одномерном течении теплоносителя в АФП:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} = - \frac{A'}{\rho c_p V R} (T(x, \tau) - T_\phi). \quad (7)$$

Из представленного вывода и вида полученного уравнения (7) видно, что оно верно применительно к любому проточному АФП, для которого выполняются принятые допущения.

Кроме уравнения теплообмена в теплоносителе нужно вывести уравнение изменения удельной массы  $m$  остатка исходной фазы ТАМ, при зарядке это материал в твердом состоянии, при разрядке – в жидком. Рассмотрим изменение параметров в АФП на участке  $dx$  (рис. 3). Поток теплоты через поверхность теплообмена в АФП в слое толщиной  $dx$  определяется в соответствии с соотношением (4):

$$dQ = \frac{|T(x, \tau) - T_\phi|}{R} dA = \frac{|T(x, \tau) - T_\phi|}{R} A' dx. \quad (8)$$

Использование модуля позволяет объединить в одной формуле режимы зарядки и разрядки.

Вследствие подвода (отвода) теплоты  $dQ \cdot d\tau$  осуществляется фазовый переход:

$$dQ \cdot d\tau = -Q_\phi dM. \quad (9)$$

Здесь  $dM$  – уменьшение массы фазы ТАМ, кг, за время  $d\tau$ ,  $Q_\phi$  – теплота фазового перехода, Дж  $\text{кг}^{-1}$ . Знак минус в формуле означает, что количество твердой или жидкой фазы (соответственно при зарядке или разрядке) уменьшается, процесс начинается со стороны контакта оболочки с теплоносителем.

Из (8) и (9) следует:

$$\frac{|T(x, \tau) - T_\phi|}{R} \cdot A' dx d\tau = -Q_\phi dM.$$

Отсюда получается дифференциальное соотношение для расчета изменения удельной на единицу длины массы фазы ТАМ:

$$\frac{\partial m(x, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{A'}{Q_{\phi} R} \cdot \left| T(x, \tau) - T_{\phi} \right|. \quad (10)$$

Полученное уравнение фактически является условием Стефана. При этом удельная масса остатка фазы  $m$  соответствует среднему положению границы фазового перехода. В каждом конкретном случае получается своя зависимость среднего положения границы раздела фаз в зависимости от величины удельной на единицу длины массы фазы  $m$ .

С использованием выведенных формул может быть записана одномерная краевая задача теплообмена в проточных АФП произвольного типа, включающая два дифференциальных уравнения с неизвестными  $T(x, \tau)$ ,  $m(x, \tau)$  для областей с фазовым переходом. В областях ТАМ, где фазовый переход завершается используется условие их неизменности в последующие моменты времени:

при  $m(x, \tau) > 0$  (условие протекания процесса фазового перехода)

$$\partial T(x, \tau) / \partial x = -\frac{A'(x)}{\rho c_p V R(m, x)} \left( T(x, \tau) - T_{\phi} \right). \quad (11)$$

$$\partial m(x, \tau) / \partial \tau = -\frac{A'(x)}{Q_{\phi} R(m, x)} \cdot \left| T(x, \tau) - T_{\phi} \right|, \quad (12)$$

при  $m(x, \tau) = 0$  (условие завершения процесса фазового перехода)

$$T = const, \quad (13)$$

$$m = const. \quad (14)$$

Также записываются краевые условия.

*Начальное условие*

В начальный момент времени считаем температурное поле в теплоносителе соответствующим квазистационарному состоянию, определяемому уравнением (11).

Удельная на единицу длины масса фазы в начальный момент времени равна:

$$m(x, 0) = m_0(x). \quad (15)$$

Здесь  $m_0(x)$  – удельная масса ТАМ на единицу длины в начальный момент процесса зарядки или разрядки, а именно, при  $\tau = 0$ . В дальнейшем будем считать, что аккумулятор в начале процесса полностью заряжен или разряжен, то есть в этом случае ТАМ находится полностью в жидком или твердом состоянии. Тогда величина исходной удельной на единицу длины массы ТАМ может быть рассчитана по формуле:

$$m_0(x) = m(x, 0) = \frac{dM}{dx} = \frac{\rho_{жс} dV_{ТАМ}}{dx} = \rho_{жс} A_f(x) \left( 1 - \varepsilon(x) - \frac{A'(x) \delta_{см}}{A_f(x)} \right). \quad (16)$$

$\rho_{жс}$  – плотность жидкой фазы ТАМ, кг м<sup>-3</sup>;

$\delta_{см}$  – толщина стенки, разделяющей ТАМ и теплоноситель, м.

Эти соотношения записываются для поперечного слоя аккумулятора толщиной  $dx$ . При этом использованы связи между параметрами:



$$dV_{ТАМ} = (1 - \varepsilon(x) - \frac{\delta_{cm} dA}{dV_{АФП}}) dV_{АФП},$$

$$dV_{АФП} = A_f(x) dx.$$

Здесь  $\varepsilon(x) = dV_T / dV_{АФП}$  – отношение объема АФП, заполненного теплоносителем, к объему АФП в слое  $dx$ , ограниченном двумя поперечными сечениями. Для аккумулятора со сферическими капсулами  $\varepsilon$  соответствует понятию пористости. В формуле (16) объем стенки, разделяющей теплоноситель и ТАМ, учитывается приближенно соотношением  $V_{cm} = A \delta_{cm}$ , поскольку считаем ее достаточно тонкой, постоянной по толщине:  $\delta = const$ . В противном случае при искривленных поверхностях с большой величиной отношения толщины оболочки к ее радиусу кривизны это соотношение неверно.

В формулу (16) входит плотность жидкой фазы  $\rho_{ж}$  ввиду того, что расплав занимает все пространство, предназначенное для заполнения ТАМ (считается, что  $\rho_{ж} < \rho_{тв}$ ).

*Граничное условие*

$$T(0, \tau) = T_{вх}(\tau). \quad (17)$$

Решением краевой задачи (11)–(17) могут быть получены аналитические решения для АФП с разной конфигурацией поверхностей теплообмена и на этой основе осуществляться анализ процессов теплообмена и фазового перехода в них. В этой системе уравнений заложена возможность расчета аккумуляторов с изменением ряда величин по длине, например, с изменяющейся площадью поперечного сечения. Поскольку аккумуляторы разного типа отличаются своими геометрическими параметрами, то в каждом конкретном случае должны быть получены соответствующие соотношения. В частности, необходимо установить вид соотношений для  $\varepsilon(x) = \partial V_T / (x \partial V_{АФП})$  и производной  $A'(x)$ . Например, для аккумулятора со сферическими капсулами имеет место выражение  $A'/A_f = 6(1-\varepsilon)/D$ , где  $\varepsilon$  – пористость.

Общее термическое сопротивление  $R(m, x)$  вычисляется как сумма термических сопротивлений между потоком теплоносителя и внешней поверхностью, разделяющей ТАМ и теплоноситель,  $R_f = 1/\alpha_f$ , разделяющей стенки  $R_{cm}$  и слоя фазы ТАМ, прилегающего к внутренней поверхности  $R_{ТАМ}$ , то есть расплава при зарядке и твердой корки при разрядке:

$$R(m, x) = R_f(x) + R_{cm} + R_{ТАМ}(m, x).$$

Здесь записано термическое сопротивление  $R$ , посчитанное по плотности теплового потока, отнесенного к площади поверхности  $A(x)$ , омываемой теплоносителем,:

$$\frac{Q}{A(x)} = \frac{T(x, \tau) - T_{\phi}}{R}.$$

Вид функции  $R_{ТАМ}(m, x)$  может быть установлен в соответствии с геометрическими особенностями конкретного аккумулятора по среднему положению границы раздела фаз, как, например, в [8] для АФП со сферическими капсулами. Предполагается, что в таких случаях влиянием неравномерности процесса фазового перехода вдоль поверхности теплообмена можно пренебречь и аппроксимировать поверхность раздела фаз плоскостями,

цилиндрами или сферами и т.д., в каждом конкретном случае применимость упрощенных соотношений должна исследоваться отдельно.

Для пояснения выведем зависимость  $R_{ТАМ}(m,x) = R_{ТАМ}(m)$  в случае затвердевания вещества вблизи конвективно охлаждаемой плоской стенки [4]. Воспользуемся соотношением для удельной массы  $m_l$  затвердевшего ТАМ:

$$m_l = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\rho_{m\theta} \delta(x, \tau) l_z dx}{dx},$$

из которого следует уравнение:

$$\delta(x, \tau) = \frac{m_l}{\rho_{m\theta} l_z} = \frac{m_0 - m}{\rho_{m\theta} l_z}. \quad (18)$$

Здесь  $l_z$  – ширина АФП, м;

$\rho_{m\theta}$  – плотность твердой фазы ТАМ, кг м<sup>-3</sup>;

$\delta(x, \tau)$  – толщина слоя твердой фазы ТАМ, м, в точке с координатой  $x$  в момент времени  $\tau$ .

Пренебрегая в соответствии с выбранными допущениями потоком теплоты вдоль оси  $x$ , получаем связь между термическим сопротивлением слоя затвердевшего ТАМ и его удельной массой  $m$ :

$$R_{ТАМ}(m, x) = \delta(x, \tau) / \lambda_{m\theta} = \frac{m_0 - m}{\rho_{m\theta} \lambda_{m\theta} l_z}. \quad (19)$$

$\lambda_{m\theta}$  – коэффициент теплопроводности твердой фазы ТАМ.

В функциональном выражении для термического сопротивления  $R_{ТАМ}$  кроме  $m$  появляется координата  $x$ , если параметры АФП изменяются вдоль оси  $x$ . В данном примере это может обуславливаться изменением площади аккумулятора по его длине за счет изменения размера  $l_z(x)$ . При неизменной геометрии АФП в направлении  $x$  и постоянстве свойств ТАМ (то есть при использовании во всем аккумуляторе одного и того же фазопереходного материала) термическое сопротивление  $R_{ТАМ}$  зависит только от среднего положения границы раздела фаз, которому соответствует значение удельной массы  $m$ , т.е. в данном случае имеет место функциональная связь  $R_{ТАМ} = R_{ТАМ}(m)$ .

Кроме рассмотренного подхода с расчетом термических сопротивлений по среднему положению границы раздела фаз может быть реализован более точный подход, если для локальной области (короткого АФП) экспериментально или численно получена зависимость для определения коэффициента теплопередачи  $k = I/R$ . Такой подход был реализован в [10].

Допущение 5 и условия (13) – (14) отражают тот факт, что в балансе теплоты в АФП не учитывается ее накопление за счет теплоемкости. Этим фактором можно пренебречь, когда используются низкопотенциальные источники, где температурные напоры невелики. В случае необходимости соотношения (13) – (14) могут быть заменены зависимостями, учитывающими процессы нагрева или охлаждения ТАМ, характерными для аккумуляторов конкретной конструкции.

Уравнения (11) – (17) позволяют производить расчет процессов в АФП с изменяющимися по длине параметрами: площадью поперечного сечения и другими, что выражается зависимостями  $A(x)$ ,  $A_f(x)$ ,  $\varepsilon(x)$ ,  $R(m,x)$ .

После решения системы уравнений (11) – (17) от зависимости  $m(x, \tau)$  можно перейти к выражению для среднего положения границы раздела фаз как функции координаты  $x$  и времени  $\tau$ , подстановкой соответствующих уравнений связи, как, например, уравнения (18) в рассмотренном примере.

В соответствии с изложенным видно, что с помощью решения представленной краевой задачи теплообмена в одномерном проточном АФП можно определить функции  $T(x, \tau)$ ,  $m(x, \tau)$  и нестационарные границы областей в пространстве аккумулятора, в которых закончился фазовый переход. Они определяются условием  $m(x, \tau) = 0$ .

Особенности конкретных типов аккумуляторов отражаются в задании соответствующих функциональных зависимостей термических сопротивлений  $R(m,x)$ . При этом в представленных уравнениях учитывается изменение конструктивных параметров вдоль аккумулятора, что дает также возможность оптимизировать конструкцию АФП выбором соответствующего характера их изменения.

Также следует отметить, что использование удельной на единицу длины аккумулятора массы фазы  $m$  в уравнениях, описывающих процессы в проточных АФП, способствует выявлению общих закономерностей, присущих широкому классу рассматриваемых аккумуляторов.

### Список литературы

1. Sarada Kuravi, Jamie Trahan, D.Yogi Goswami, Rahman M.M., Stefanakos E. K. Thermal energy storage technologies and systems for concentrating solar power plants // Progress in Energy and Combustion Science. 2013. Vol. 39. No. 4. Pp. 285–319.  
DOI: [10.1016/j.pecs.2013.02.001](https://doi.org/10.1016/j.pecs.2013.02.001)
2. Грилихес В.А., Матвеев В.М., Полуэктов В.П. Солнечные высокотемпературные источники тепла для космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1975. 247 с.
3. [Arkar C., Medved S. Enhanced solar assisted building ventilation system using sphere encapsulated PCM thermal heat storage // 2<sup>nd</sup> Workshop IEA ECES IA Annex 17: Advanced thermal energy storage techniques – feasibility studies and demonstration projects \(Ljubljana, Slovenia, April 3-5, 2002\). Ljubljana, 2002.](#)
4. Спэрроу Е.М., Сю С.Ф. Замкнутое аналитическое решение задачи о затвердевании вблизи плоской стенки, охлаждаемой вынужденной конвекцией // Труды Американского общества инженеров-механиков. Сер. С: Теплопередача. 1981. Т. 103. № 3. С. 231–233.
5. Россихин Н.А., Чукаев А.Г. Затвердевание ограниченного плоского слоя материала, омываемого теплоносителем // Естественные и технические науки. 2015. № 11. С. 482–484.

6. Россихин Н.А., Чукаев А.Г. Затвердевание цилиндрического слоя материала, омываемого изнутри теплоносителем // Естественные и технические науки. 2016. № 2. С. 87–89.
7. Россихин Н.А., Чукаев А.Г. Затвердевание цилиндрического слоя материала, омываемого снаружи теплоносителем // Естественные и технические науки. 2016. № 2. С. 90–92.
8. Россихин Н.А. Уравнение изменения массы фазы в аккумуляторе теплоты фазового перехода // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 5(17). С. 28.  
DOI: [10.18698/2308-6033-2013-5-726](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-5-726)
9. Россихин Н.А. Особенности расчета аккумуляторов теплоты на фазовых переходах с промежуточным теплоносителем // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. № 5 (17). С. 29. DOI: [10.18698/2308-6033-2013-5-727](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-5-727)
10. Зорина И.Г., Россихин Н.А., Чукаев А.Г. Расчет теплообмена и изменения соотношения фаз в протяженных проточных аккумуляторах теплоты с прямоугольными вставками // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. . 2016. № 4. С. 34-47. DOI: [10.7463/0416.0836051](https://doi.org/10.7463/0416.0836051)

## A System of Equations of Heat Transfer and Changing Phase Mass in Phase Transition Heat Accumulators

N.A. Rossikhin<sup>1,\*</sup>

[\\*ross1n@rambler.ru](mailto:ross1n@rambler.ru)

<sup>1</sup>Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

---

**Keywords:** heat storage; solidification; phase transition; solid phase; liquid phase

---

The article proposes a system of differential equations describing the processes in the latent phase transition heat accumulators (PTHA) and formulates an appropriate boundary value problem. Herewith a simplified mathematical model is used with the main assumptions such as one-dimensional flow, quasi-stationary temperature fields and one-dimensional change of phase boundary.

In contrast to other publications associated with calculations of latent PTHA based on the similar simplifications, the article uses such a parameter as a specific mass of phase per unit of the accumulator length (per running meter of length), as the unknown function, thereby providing the universal writing of differential equations for all the latent PTHA where the simplifications used are appropriate in their deriving.

The specific features of different accumulators are that the coefficients in the equations represent different functions that are proper for a specific design of these devices. There are two examples noted to calculate these coefficients (of the thermal resistances) for specific types of accumulators, calculated on the basis of one-dimensionality and quasi-stationarity as applied to the change of phase boundary.

The proposed mathematical model owing to its generality allows to describe a wide class of latent heat accumulators which have the heat transfer fluids, and on this basis analyze the features of the charging and discharging processes as well as to have the opportunity to find the optimal parameters to optimize the unit as a whole.

### References

1. Sarada Kuravi, Jamie Trahan, D.Yogi Goswami, Rahman M.M., Stefanakos E. K. Thermal energy storage technologies and systems for concentrating solar power plants. *Progress in Energy and Combustion Science*, 2013, vol. 39, no. 4, pp. 285-319.  
DOI: [10.1016/j.pecs.2013.02.001](https://doi.org/10.1016/j.pecs.2013.02.001)

2. Grilikhes V.A., Matveev V.M., Poluektov V.P. *Solnechnye vysokotemperaturnye istochniki tepla dlia kosmicheskikh apparatov* [Solar high-temperature heat sources for spacecraft]. Moscow: Mashinostroenie Publ., 1975. 247 p. (in Russian).
3. Arkar C., Medved S. Enhanced solar assisted building ventilation system using sphere encapsulated PCM thermal heat storage. *2<sup>nd</sup> Workshop IEA ECES IA Annex 17: Advanced thermal energy storage techniques – feasibility studies and demonstration projects* (Ljubljana, Slovenia, April 3-5, 2002). Ljubljana, 2002.
4. Sparrow E.M., Hsu C.F. A closed-form analytical solution for freezing adjacent to a plane wall cooled by forced convection. *Trans. of the ASME. J. of Heat Transfer*, 1981, vol. 103, no. 3, pp. 596-598.
5. Rossikhin N.A., Chukaev A.G. Solidification of limited flat layer of material which is flowed around by flow of a coolant. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki* [Natural and Technical Sciences], 2015, no. 11, pp. 482–484 (in Russian).
6. Rossikhin N.A., Chukaev A.G. Solidification of a cylindrical layer material with internal cooling surface. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki* [Natural and Technical Sciences], 2016, no. 2, pp. 87–89 (in Russian).
7. Rossikhin N.A., Chukaev A.G. Solidification of a cylindrical layer material with cooled external surface. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki* [Natural and Technical Sciences], 2016, no. 2, pp. 90-92 (in Russian).
8. Rossikhin N.A. Equation of mass variation of the phase in the heat storage using phase change materials. *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering J.: Science and Innovation], 2013, no. 5(17), p. 28. DOI: [10.18698/2308-6033-2013-5-726](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-5-726) (in Russian)
9. Rossikhin N.A. Calculation of the phase in the heat storage using phase change materials with an intermediate heat carrier. *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovatsii* [Engineering J.: Science and Innovation], 2013, no. 5(17), p. 29. DOI: [10.18698/2308-6033-2013-5-727](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2013-5-727) (in Russian)
10. Zorina I.G., Rossikhin N.A., Chukaev A.G. Calculation of heat exchange and changing phase ratio in extended flowing heat accumulators on phase transitions with rectangular inserts. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2016, no. 4, pp. 34-47. DOI: [10.7463/0416.0836051](https://doi.org/10.7463/0416.0836051) (in Russian)