

# 域際環境汚染問題に対する最近の分析

## ——ゲーム論を中心とするサーベイ——

井上知子

### 第1節 序 論

経済活動の結果、汚染物質が排出されるが、この汚染物質は、経済活動が行われた地域（または空間）を越えて影響を及ぼすことが多い。このような問題は、域際環境汚染問題、あるいは、transboundary pollution問題（以下、TBP問題と略す）と呼ばれている。当然のことであるが、TBP問題は、しばしば、国家間、地域間の利害対立を含む深刻な環境汚染問題を引き起こす要因となる。事実、フィンランドとUSSRの酸性雨被害の対立、また偏西風によって大陸から我が国へ運ばれる $SO_2$ 及び $NO_x$ を一因とする酸性雨の問題など、多くの事例が見受けられる。環境汚染問題に関する理論的分析は既に1970年代初頭に始まっているが（Keeler et al. (1971)）、TBP問題が理論的に論じられるようになったのは、1980年代以降であって、比較的新しい。そして1990年代に入ると、Clemhout and Wan (1991), Kaitala et al. (1991), Dockner and Long (1993), Martin et al. (1993) 及びTahvonen (1996) 等、様々な研究成果が発表されている。これらの文献を方法論的な視点から眺めると、それらの分析のほとんどが、「持続可能な成長（sustainable growth）モデル」を対象とし、Hamilton-Jacobi-Bellman（H-J-B）方程式を用いたゲーム論的手法に依存している。

この論文の主目的は、TBP問題に対する最近のゲーム論的接近をサーベイすることにある。より具体的には、以下の順序で議論を進める。

- (i) TBP問題の分析に適用されるゲーム論的手法とは、どのようなものなのかを具体的に提示し、この理解を助けるために、これに関連するゲーム論の諸概念を整理する。

(ii) TBP問題で常套的に使用されるH-J-B方程式を、経済学で頻出する時間割引率の入った無限期間で連続時間のautonomousモデル (continuous, autonomous system of infinite horizon ; 以下、CASIと略す) に適用しやすい形で定式化する。

(iii) H-J-B方程式をTBP問題に関するモデルに適用して、実際に分析を試みる。

本節の後半及び第2節において (i) を議論し、(ii) 及び (iii) については、それぞれ第3節、第4節で取り扱う。

TBP問題の分析に適用されるゲーム論は、ゲーム論全体から見てどの位置にあるのかを考えるに当たり、我々は、今日のゲーム論の標準的分類であると思われるGibbons (1992) による分類を採用する。なお、我々が言うゲームとは、非協力ゲームを意味する。Gibbons (1992) はその序文において、「ゲーム論はmulti-personの意思決定問題を扱う理論である」と述べ、ゲームを2つの基準で4つに分類している。第1の基準は、そのゲームが「static (simultaneous-move)<sup>1)</sup> ゲームなのか、それとも、dynamic (sequential-move) ゲームなのか」であり、第2の基準は、そのゲームにおいて「情報がcompleteなのか、それともincompleteなのか」、言い換えると、「各ゲーム参加者 (player) の利得関数が全てのplayer間でcommon knowledgeかどうか」である。そしてこの結果、ゲームが以下の4つのクラスに分類される。

(1-1) complete情報の下のstaticゲーム

(1-2) complete情報の下のdynamicゲーム

(1-3) incomplete情報の下のstaticゲーム

(1-4) incomplete情報の下のdynamicゲーム

TBP問題へのゲーム論的接近は、先に挙げた文献を含めて、そのほとんどが(非協力の)dynamicゲーム、そしてその中でも特に微分ゲームに依っている。TBP問題は、域際問題であるがゆえにmulti-personの意思決定を要請されるであろう。さらに、汚染物質という負のストックがplayerの効用に与える長期的効果は無視し難く、そのため、そのモデルの動学的扱いが必要となる。したがって、微分ゲームによってTBP問題を記述することは、問題の特徴から見て妥当と言ってよいであろう。これに加えて、一般にTBP問題を扱う文献で利得関数がcommon knowledgeでないケースを取り上げたものは見当たらないことから、我々の興味あるゲーム (TBP問題で用いられるゲーム) は、(1-2)の範疇にあると言ってよいであろう。

---

1) simultaneous-moveは、各ゲーム参加者が他人の戦略選択についての知識なしに自己の戦略を選択することを意味しており、各人が戦略選択を他人と同時に進行する必要はない。

本節の最後に、微分ゲームの情報構造について、言及しておきたい。ゲームの情報構造とは、playerが自己の戦略を選択する際に利用できる情報の内容に関するものである。Basar and Olsder (1995, p.231) は、ゲームの情報構造として、以下の5種類を提示している。なお、右側には、各playerが $t \in [0, T]$ 時点において自己の戦略を選択する際に利用できる情報が一覧してあり、 $x_0$ は状態変数の初期値を、そして、 $x(s)$ は第 $s$ 時点の状態変数の値を表すものとする。

- |   |  |
|---|--|
| (a) open-loop型  | : $x_0, t$                                   |
| (b) closed-loop perfect state型                        | : $x(s)(s \in [0, T]), t$                    |
| (c) $\varepsilon$ -delayed closed-loop perfect state型 | : $x_0, x(s)(s \in [0, t - \varepsilon]), t$ |
| (d) memoryless perfect state型                         | : $x_0, x(t), t$                             |
| (e) feedback (perfect state)型                         | : $x(t), t$                                  |

他方、Clemhout and Wan (1994) 及び Kamien and Schwarz (1991) は、(a)、(e) の場合のみを考察している。先に挙げた文献の中で分析されるゲームの情報構造もまた、(a) あるいは (e) のどちらかであることから、我々もこれに習い、特に第3節で微分ゲームを考える際、この2つの場合に限って議論を進めることにする。

## 第2節 complete情報下でのゲーム理論

序論で述べたように、我々にとって関心のあるゲームは、Gibbons (1992) の範疇(1-2) に属している。この範疇のゲームを記述するには、Gibbons (1992) の分類(1-1) のゲームを説明した方が便利である。そこで、本節2-1で(1-1)を、そして本節2-2で(1-2)を取り扱う。

### 2-1 complete情報下でのstaticゲーム

本節では、staticゲームに関して、 $n$ -playerゲームの標準形表記、戦略の支配の概念、iterated elimination of strictly dominated strategies、及び(純粹戦略の範囲で) Nash均衡を定義し、これらに関連して、2つの定理(定理2-1、2-2)を提示する。その後、混合戦略の概念を導入し、これを用いて再度、Nash均衡の定義をする。そして、最後に、Nash (1950) の定理を紹介する。

まずは、標準形の $n$ -playerゲームを以下のように定めよう。

### 定義 2-1

ゲームの標準形表記とは、以下の3つを定めるものである。

- (i) ゲームに参加する player
- (ii) 各 player にとって利用可能な戦略
- (iii) 各 player によって選ばれ得る戦略のあらゆる組み合わせに対して各 player が受け取る利得

そして、各 player の戦略集合を、 $S_1, \dots, S_n$ 、彼らの利得関数を  $u_1(s_1, \dots, s_n), \dots, u_n(s_1, \dots, s_n)$  とする  $n$ -player ゲームを

$$G = \{S_1, \dots, S_n : u_1, \dots, u_n\}$$

と記述する。ただし、 $s_i$  は  $S_i$  の任意の要素 ( $i=1, \dots, n$ ) とする。なお、player の数が有限かつ  $S_i (i=1, \dots, n)$  が有限集合のとき、ゲーム  $G$  を有限ゲームと呼ぶ。

表 2-1

		player 2		
		戦略 1	戦略 2	戦略 3
player 1	戦略 A	(1, 0)	(1, 2)	(0, 1)
	戦略 B	(0, 3)	(0, 1)	(2, 0)

表 2-1 のようなゲームを考えよう。このゲームの player は 2 人で、player 1 の戦略が 2 つ、player 2 の戦略が 3 つである。そして  $i$  行  $j$  列の  $(a, b)$  は、player 1 が第  $i$  ( $i=A, B$ ) 戦略、player 2 が第  $j$  ( $j=1, 2, 3$ ) 戦略を採用したときの player 1 の利得が  $a$  であり、また、player 2 の利得が  $b$  であることを表わす。以下に現れる同様な表は全て、同様な規則で書かれているものとする。表 2-1 において、player 1 が戦略 A、B どちらを用いようが、player 2 にとっては、戦略 2 を用いたときの利得の方が戦略 3 を用いたときのそれより大きい。このことを、「player 2 の戦略 3 は戦略 2 に厳格に支配されている」と言う。これを一般の形で定義すると、以下のようになる。

### 定義 2-2

標準形  $n$ -player ゲーム  $G = \{S_1, \dots, S_n : u_1, \dots, u_n\}$  において、 $s_i' \in S_i$ 、 $s_i'' \in S_i$  とする。 $S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_n$  から構成され得る全ての  $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$  に対して

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s''_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$
 ならば、戦略  $s'_i$  は戦略  $s''_i$  に厳格に支配されていると言う。

ここで、以下の3つを仮定しよう。

- ・ 全playerは合理的である。
- ・ 「全playerは合理的である」ということを全playerが知っている。
- ・ 「「全playerは合理的である」ということを全playerが知っている」ということを全playerが知っている。

合理的なplayerは厳格に支配された戦略は使わないので、表2-1のゲームは、表2-2のように書き換えられる。

表2-2

		player 2	
		戦略1	戦略2
player 1	戦略A	(1, 0)	(1, 2)
	戦略B	(0, 3)	(0, 1)

同様に、さらに表2-2のゲームは表2-3のように書き換えられる。

表2-3

		player 2	
		戦略1	戦略2
player 1	戦略A	(1, 0)	(1, 2)

さらに、表2-3のゲームにおいて、player 2の戦略1は戦略2に厳格に支配されているから、結局、player 1は戦略Aをplayer 2は戦略2を採用することになり、その結果player 1の利得が1、player 2の利得が2となる。このプロセスは、*iterated elimination of strictly dominated strategies* (以下、IDと略す) と呼ばれるが、このプロセスはplayerの行動に関して、しばしば非常に不確定な結果を生む。例えば、表2-4のゲームはどの戦略もIDによって消すことができない。したがって、これらのより一般的なゲームに適した、より強い均衡概念 (Nash均衡) を定義しよう。

表 2 - 4

		player 2		
		戦略 1	戦略 2	戦略 3
player 1	戦略 A	(0, 4)	(4, 0)	(5, 3)
	戦略 B	(4, 0)	(0, 4)	(5, 3)
	戦略 C	(3, 5)	(3, 5)	(6, 6)

ゲーム理論が各playerの選択するであろう戦略についてのユニークな予想を提供してくれると仮定しよう。この予想が正しいためには、各playerがゲーム理論によって予想された戦略を進んで選択する必要がある。ゆえに、各playerの予想された戦略は自分以外のplayerの予想された戦略に対する最適反応でなくてはならない。このような予想は、どのplayerも予想された戦略から乖離しないという意味で、self-enforcingである。この予想をNash均衡と呼び、厳密には以下のように定義する。

定義 2 - 3

標準形  $n$ -player ゲーム  $G = \{S_1, \dots, S_n : u_1, \dots, u_n\}$  において、 $S_i$  からとり得る全ての戦略  $s_i$  に対して、

$$u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*), \quad i = 1, \dots, n$$

ならば、 $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  は 1 つの Nash 均衡である。

表 2 - 4 のゲームにおける Nash 均衡は、player 1 が戦略 C を player 2 は戦略 3 を採用することであり、その場合、両playerの利得はともに 6 となる。

ところで、ID による解と Nash 均衡の関係は、以下に提示する 2 定理により既述される。特に、定理 2 - 1 は、「Nash 均衡が ID よりも強い均衡概念である」ことを意味している。

定理 2 - 1 Gibbons (1992, p.12, Proposition B) :

標準形  $n$ -player ゲーム  $G = \{S_1, \dots, S_n : u_1, \dots, u_n\}$  において、戦略  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  が 1 つの Nash 均衡ならば、それらは ID 過程を生き残る。

定理 2-2 Gibbons (1992, p.12, Proposition A) :

標準形  $n$ -player 有限ゲーム  $G = \{S_1, \dots, S_n : u_1, \dots, u_n\}$  において、戦略  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  以外の戦略が ID によって消去されたならば、戦略  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  はこのゲームのユニークな Nash 均衡である。

Remark : Gibbons (1992) の Proposition A には  $G$  が有限ゲームであるという記述はない。にもかかわらず、その証明の中で、 $G$  が有限ゲームであることを仮定している。そこで、定理 2-2 では  $G$  が有限ゲームであることを明記した。

表 2-5

		player 2	
		戦略 1	戦略 2
player 1	戦略 A	(-1, 1)	(1, -1)
	戦略 B	(1, -1)	(-1, 1)

表 2-5 のようなゲームを考えよう。このようなゲームには、Nash 均衡が (今までの定義のままでは)、存在しない。この 1 つの理由は、ここで取り上げられている戦略が、いわゆる純粋戦略に限定されている点にある。そこで、これまで特別に区別はしなかったが、ここで、純粋戦略と混合戦略を定義する。player  $i$  にとっての純粋戦略とは、player  $i$  のとり得る different action のことである。「硬貨投げ」を例に取れば、戦略集合  $S_i$  は 2 つの純粋戦略「表」と「裏」から成る。そして、「表」を出す確率を  $q$  によって、「裏」を出す確率を  $1-q$  によって表せば、player  $i$  にとっての 1 つの混合戦略は、確率分布  $(q, 1-q)$  である。したがって、混合戦略  $(0, 1)$  は純粋戦略「裏」を、 $(1, 0)$  は純粋戦略「表」を表すと言ってよい。混合戦略を厳密に定義すれば以下のようなになる。

定義 2-4

標準形  $n$ -player ゲーム  $G = \{S_1, \dots, S_n : u_1, \dots, u_n\}$  において、 $S_i = \{s_{i1}, \dots, s_{iK_i}\}$  と仮定しよう。このとき、player  $i$  にとっての 1 つの混合戦略は、純粋戦略集合  $S_i$  上の 1 つの確率分布  $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, \dots, p_{iK_i})$  である。ただし、 $p_{ik}$  は player  $i$  が  $s_{ik} \in S_i$  を採用する確率

を表わし、 $0 \leq p_{ik} \leq 1$ 、かつ  $\sum_{k=1}^{K_i} p_{ik} = 1$  である ( $k = 1, \dots, K_i$ )。

また、純粋戦略は、混合戦略の定義 2-4 において特に、 $p_{iK} = 1 (K \in \{1, \dots, K_i\})$ かつ  $p_{ik} = 0 (k \neq K)$  となるケースと解釈し得る。そして、定義 2-4 以前の議論で用いられた「戦略」が「純粋戦略」に相当することも明らかであろう。

定義 2-4 の混合戦略の概念の導入に伴い、各 player の利得として新たに期待利得の概念を導入する。2-player ゲームの期待利得を以下のように定義する。

### 定義 2-5

各 player の戦略集合を  $S_1 = \{s_{11}, \dots, s_{1K}\}$ 、 $S_2 = \{s_{21}, \dots, s_{2J}\}$  とする。ただし、 $K(J)$  は  $S_1$  ( $S_2$ ) における純粋戦略の個数である。さらに、player 1 は「player 2 が戦略  $s_{2j}$  を  $p_{2j}$  の確率で採用する ( $j = 1, \dots, J$ )」と信じており、他方 player 2 は「player 1 が戦略  $s_{1k}$  を  $p_{1k}$  の確率で採用する ( $k = 1, \dots, K$ )」と信じていると仮定する。この時、純粋戦略  $s_{1k}$  を採用したときの player 1 の期待利得は、

$$\sum_{j=1}^J p_{2j} \cdot u_1(s_{1k}, s_{2j})$$

であり、混合戦略  $\mathbf{p}_1 = (p_{11}, \dots, p_{1K})$  を採用したときの player 1 の期待利得  $v_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  は、

$$\sum_{k=1}^K p_{1k} \left( \sum_{j=1}^J p_{2j} \cdot u_1(s_{1k}, s_{2j}) \right)$$

である。他方、純粋戦略  $s_{2j}$  を採用したときの player 2 の期待利得は、

$$\sum_{k=1}^K p_{1k} \cdot u_2(s_{1k}, s_{2j})$$

であり、混合戦略  $\mathbf{p}_2 = (p_{21}, \dots, p_{2J})$  を採用したときの player 2 の期待利得  $v_2(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  は、

$$\sum_{j=1}^J p_{2j} \left( \sum_{k=1}^K p_{1k} \cdot u_2(s_{1k}, s_{2j}) \right)$$

である。

表 2-5 のゲームを例にとり、player の期待利得を考え、最適反応を求めよう。

表 2-5 のゲームにおいて、player 1 は「player 2 が戦略 1 を  $q$ 、戦略 2 を  $1-q$  の確率で採用する」と信じており、他方、player 2 は「player 1 が戦略 A を  $r$ 、戦略 B を  $1-r$  の確率で採用する」と信じていると仮定する。player 1 の期待利得  $v_1(r, q)$  は、

$$v_1(r, q) = r \cdot q \cdot (-1) + r \cdot (1-q) \cdot (1) + (1-r) \cdot q \cdot (1) + (1-r) \cdot (1-q) \cdot (-1)$$



$$=(2q-1)+2r(1-2q)$$

である。同様にして、player 2の期待利得 $v_2(r, q)$ も、

$$\begin{aligned} v_2(r, q) &= r \cdot q \cdot (1) + r \cdot (1-q) \cdot (-1) + (1-r) \cdot q \cdot (-1) + (1-r) \cdot (1-q) \cdot (1) \\ &= -\{(2r-1)+2q(1-2r)\} \end{aligned}$$

と計算される。したがって、両playerの最適反応は以下のような結果になる。

player 1の最適反応

$q < \frac{1}{2}$ のとき、 $r=1$ 、つまり、純粋戦略Aを選択すること

$q = \frac{1}{2}$ のとき、全ての $r \in [0, 1]$

$q > \frac{1}{2}$ のとき、 $r=0$ 、つまり、純粋戦略Bを選択すること

player 2の最適反応

$r < \frac{1}{2}$ のとき、 $q=0$ 、つまり、純粋戦略2を選択すること

$r = \frac{1}{2}$ のとき、全ての $r \in [0, 1]$

$r > \frac{1}{2}$ のとき、 $q=1$ 、つまり、純粋戦略1を選択すること

図2-1

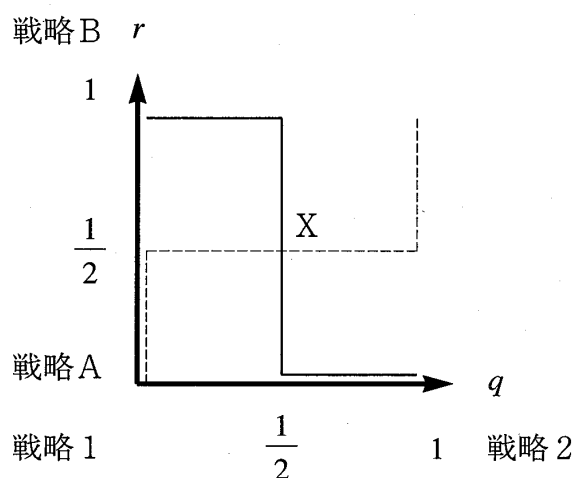


図 2 - 1 は、上述の両playerの最適反応をグラフに表したものである。図中の実線は player 1 の最適反応を、破線は player 2 の最適反応を示している。両playerの最適反応曲線の交点 X は、混合戦略を考慮した（より広範な）Nash均衡を示す。厳密には、混合戦略を考慮した 2-player ゲームの Nash 均衡は以下のように定義される。

### 定義 2 - 6

標準形 2-player ゲーム  $G = \{S_1, S_2 : u_1, u_2\}$  において、各 player の混合戦略が相手 player の混合戦略に対する 1 つの最適反応、すなわち、

$$v_1(\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*) \geq v_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2^*) \quad \text{for every } \mathbf{p}_1 \text{ over } S_1$$

$$v_2(\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*) \geq v_2(\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2) \quad \text{for every } \mathbf{p}_2 \text{ over } S_2$$

のとき、混合戦略  $(\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*)$  を、ゲーム  $G$  の 1 つの Nash 均衡という。

2 つの純粋戦略を伴う 2-player ゲームにおいては、混合戦略の範囲で少なくとも 1 つの Nash 均衡が存在することが、図 2 - 1 のような図を用いることによって、簡単に証明できる。このことは、有限個の戦略から成る戦略集合を伴う  $n$ -player ゲームについても成り立つ。ここでは、証明には立ち入らず、Nash (1950) の定理を紹介しておこう。

### Nash (1950) の定理

標準形  $n$ -player ゲーム  $G = \{S_1, \dots, S_n : u_1, \dots, u_n\}$  において、もし、 $n$  が有限で全ての  $i$  について  $S_i$  が有限集合ならば、混合戦略の範囲で少なくとも 1 つの Nash 均衡が存在する。

### 2 - 2 complete 情報下での dynamic ゲーム

static ゲームに続き、complete 情報下の dynamic ゲームについて議論しよう。Gibbons (1992, 第 2 章) は、戦略の選択の際に、それまでのあらゆる history を知っているか、いないか、によって dynamic ゲームをさらに perfect 情報ゲームと imperfect 情報ゲームに分類している。なお、これらの厳密な定義については、information set の概念の導入が便利である。

本節では、dynamic ゲームを基本的には展開形で表記する。しかし、後で述べるように、ゲームの標準形と展開形は書き換え可能であって、dynamic ゲームを展開形で記述するのは、あくまでも使い易さのためである。2 - 2 は、内容によって大きく 2 つに分

かれている。前半では、一般のdynamicゲームを対象とし、そこで利用される主な概念・定義等を概観する。そして後半では、特に、repeatedゲームに注目し、TBP問題の文献等でもよく引用されるFolkの定理を証明する。

まずは、dynamicゲームの特徴でもある、ゲームの展開形、backwards-induction、information set、subgame、subgame-perfectの諸概念を順を追って説明しよう。

ゲームの展開形を以下のように定める。

### 定義 2-7

ゲームの展開形とは、以下の3つを定めるものである。

- (i) ゲームに参加する player
- (ii-a) 各 player はいつ行動するのか
- (ii-b) 各 player は行動する際、何をできるのか
- (ii-c) 各 player は行動する際、何を知っているのか
- (iii) players によって選ばれ得る戦略のあらゆる組み合わせに対して、各 player が受け取る利得

なお、定義 2-7 にある「戦略」とは、以下のことを指す。

### 定義 2-8

戦略とは1つのcomplete plan of actionであり、ゲームのルールによって、その player が行動を求められるような全ての場合についての選択を規定した規則のことである。

以下に記述される2-stageのperfect情報ゲーム [PI] を例にとり、ゲームの展開形、及 backwards-induction と呼ばれる諸概念について説明しよう。

- [PI]
1. player 1 は可能集合  $A_1 = \{L, R\}$  から action  $a_1$  を選択する。
  2. player 2 は  $a_1$  を観察し、可能集合  $A_2 = \{L', R'\}$  から action  $a_2$  を選択する。

3. 両playerの利得 $u_1(a_1, a_2)$ 及び $u_2(a_1, a_2)$ は、図2-2の最下部ようになる。

図2-2

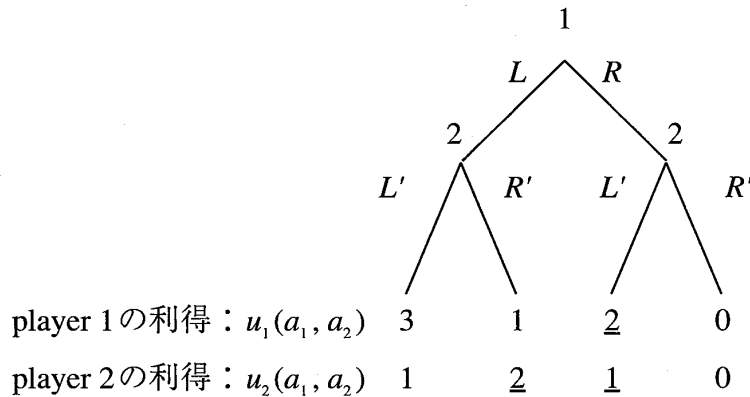


図2-2はゲームの木と呼ばれ、各分岐点をdecision node、そして、利得に至る各最終地点をterminal nodeと言う。ゲーム [PI] はplayer 1のdecision nodeで始まり、そこにおいてplayer 1は、LあるいはRを選択する。すると、ゲームはplayer 2のdecision nodeに達し、さらにそこでplayer 2は、L'あるいはR'を選択する。そして、ゲームはterminal nodeに達し、両playerは図2-2の下部に記された利得を得る。

ゲーム [PI] のようなperfect情報のdynamicゲームの解を見つける際、backwards-inductionと呼ばれる方法が用いられる。ゲーム [PI] を例に、これを説明しよう。まず最初に、第2 stageのplayer 2の最適化問題：

given  $a_1 \in A_1$

$$\max_{a_2 \in A_2} u_2(a_1, a_2)$$

を考え、上述の問題の解 $a_2^*$ を $a_1$ の関数 $R_2(a_1)$ として表す ( $a_2^*$ はユニークと仮定する)。

次に、 $R_2(a_1)$ を用いて第1 stageのplayer 1の最適化問題：

$$\max_{a_1 \in A_1} u_1(a_1, R_2(a_1))$$

を考え、この問題の解 $a_1^*$ を導出する ( $a_1^*$ はユニークと仮定する)。このように求められた $a_1^*$ 及び $R_2(a_1^*)$ が、ゲームのbackwards-induction outcomeである。なお、各playerの利得が図2-2のような場合、第1 stageでplayer 1がRを選択し、第2 stageでplayer 2がL'を選択することがゲーム [PI] のbackwards-induction outcomeであることが容易に確かめられる。

さて、次に、ゲームの標準形と展開形の互換性について議論しよう。まずは、展開形で表されたゲーム [PI] を標準形に変換してみよう。ゲーム [PI] における player 2 の取り得る戦略を全て書くと、 $(L, L)$ 、 $(L, R)$ 、 $(R, L)$ 、 $(R, R)$  の 4 つである。ただし、 $(L, R)$  は、第 1 stage で player 1 が  $L$  を選択する場合、第 2 stage で player 2 は  $L$  を選択し、第 1 stage で player 1 が  $R$  を選択する場合、第 2 stage で player 2 は  $R$  を選択することを示している。他の 3 ケースも同様である。ゲーム [PI] において player 1 の選択は  $L$  と  $R$ 、player 2 の選択は、 $(L, L)$ 、 $(L, R)$ 、 $(R, L)$ 、 $(R, R)$  と考えれば、両 player の戦略の各組み合わせに対応する両 player の利得は図 2-2 から簡単に計算できるので、ゲーム [PI] は表 2-6 のような標準形で書くことができる。

表 2-6

		player 2			
		戦略 $(L, L)$	戦略 $(L, R)$	戦略 $(R, L)$	戦略 $(R, R)$
player 1	戦略 $L$	(3, 1)	(3, 1)	(1, 2)	(1, 2)
	戦略 $R$	(2, 1)	(0, 0)	(2, 1)	(0, 0)

逆に、標準形で書かれた static ゲームを展開形にすることについては、「相手の戦略に関する知識なしに、各 player が戦略を選択する」と考えれば十分である。以上からわかるように、static ゲームを標準形によって、他方、dynamic ゲームを展開形によって表したのは、その方が使い易いからであって、必ずこれに従わねばならないものではない。

さて、次に、perfect 情報ゲームと imperfect 情報ゲームの違いをはっきりさせるため、そして、static ゲームでの Nash 均衡の概念に対応する dynamic ゲームでの均衡概念 (subgame-perfect) を考えるため、information set (以下、IS と略す) を定義しよう。

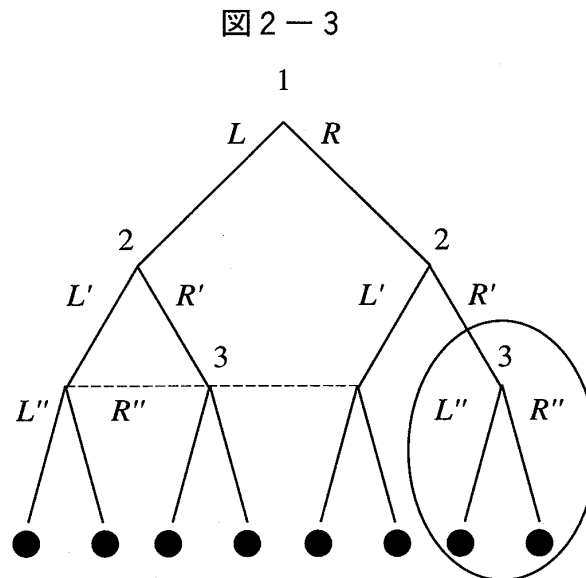
定義 2-9

- (i)、(ii) を満たす node の集合を 1 つの IS と言う。
- (i) その IS の各 node で行動する player が同じである。
- (ii) ゲームの play がその IS のある node に達したとき、行動を起こす player は IS のどの node が達成されたかを知らない。

下記のような3-stageのimperfect情報dynamicゲーム [IMI] を考えよう。

- [IMI]
1. player 1は可能集合 $A_1 = \{L, R\}$ からaction  $a_1$ を選択する。
  2. player 2は $a_1$ を観察し、可能集合 $A_2 = \{L', R'\}$ からaction  $a_2$ を選択する。
  3. player 3は $(a_1, a_2) = (R, R')$ であるか否かをを観察し、可能集合 $A_3 = \{L'', R''\}$ からaction  $a_3$ を選択する。
  4. 各playerは利得、 $u_i(a_1, a_2, a_3)$ を得る。

ゲーム [IMI]を展開形で書くと図2-3のようになる。ただし、破線で結ばれたnodeは同じISに属する。簡単化のため、各playerの利得は省略した。



ISを利用すると、perfect情報とimperfect情報が以下のように簡単に定義できる。

**定義 2 - 10**

あるstageにおいて全てのISが1つのnodeから成る集合（単集合）ならば、情報はperfectであり、そうでなければ、imperfectであると言う。


ゲーム [IMI] (図2-3) の場合、例えば、player 3は2つのISを持つ。1つはplayer 1の選択R及びplayer 2の選択R'に繋がるISであり、もう1つは破線で結ばれているその他のnodeから成るISである。

さて、以上の準備を終えたところで、展開形で表現されたdynamic gameにおいて最も重要な概念と言える subgame、及び subgame-perfect を定義しよう。まず、subgame を

#### 定義 2-11

展開形で表現されたゲームにおいて、以下の (i)、(ii)、及び (iii) を満たすものを 1 つの subgame という。

- (i) 単集合の IS (ただし、ゲームの第 1 decision node ではない) である decision node  $n$  から始まる。
- (ii) ゲームの木の子 node  $n$  に続くあらゆる decision node と terminal node を含む (しかし、node  $n$  に続かない node は含まない)。
- (iii) IS を切断しない。すなわち、ゲームの木において node  $n$  の次が node  $n'$  ならば、 $n'$  を含む IS の中のあらゆる他の node も node  $n$  に続かねばならない。そして、subgame に含まれねばならない。

と定義する。ゲーム [IMI] について言えば、ゲーム [IMI] は 1 つの subgame を持ち、それは、図 2-3 の  で囲った部分で示される。さらに、この概念を用いて、subgame-perfect を以下のように定義しよう。

#### 定義 2-12

各 subgame で player の戦略が 1 つの Nash 均衡を構成しているならば、その Nash 均衡を subgame-perfect とする。

以上で、complete 情報下の dynamic ゲームで頻繁に使われる概念・定義等の説明を一通り終えたが、以下では、dynamic ゲームの中でも、特に repeated ゲームを取り上げ、「Folk の定理」と呼ばれる、無限回の repeated ゲームの重要な定理を証明する。

Folk の定理の証明の準備として、repeated ゲームを定義し、repeated ゲームに適した形で、戦略及び subgame を再定義する。そして、feasible 及び平均利得の概念を説明しよう。 $n$  人の player がそれぞれ action 集合  $A_1, \dots, A_n$  から action  $a_1, \dots, a_n$  を同時に選び、その結果

の利得が  $u_1(a_1, \dots, a_n), \dots, u_n(a_1, \dots, a_n)$  であるような complete 情報下の static (simultaneous-move) ゲームを  $G = \{A_1, \dots, A_n : u_1, \dots, u_n\}$  で表す。このゲーム  $G$  は、repeated ゲームの stage ゲームと呼ばれるものであり、これを用いて、有限回及び無限回の repeated ゲームを以下のように定義する。

### 定義 2-13

#### 有限回の repeated ゲーム

所与の stage ゲーム  $G = \{A_1, \dots, A_n : u_1, \dots, u_n\}$  が有限回 ( $T$ 回) 繰り返されるゲームを有限回の repeated ゲームと呼び、 $G(T)$  で表す。ただし、

- (i) 各  $t$  に対して、 $t-1$  stage までの play の outcomes は、 $t$  stage が始まる前に観察できる。
- (ii) 各 player の  $G(T)$  における利得は、各 stage ゲームからの利得の合計である。

#### 無限回の repeated ゲーム

所与の stage ゲーム  $G = \{A_1, \dots, A_n : u_1, \dots, u_n\}$  が無限回繰り返されるゲームを無限回の repeated ゲームと呼び、 $G(\infty, \delta)$  で表す。ただし、

- (iii) 各  $t$  に対して、 $t-1$  stage までの play の outcomes は、 $t$  stage が始まる前に観察できる。
- (iv) 各 player の  $G(\infty, \delta)$  における利得は、stage ゲームの無限の sequence からの player の利得の現在値である。

なお、 $\delta$  は player の持つ割引率である。

戦略についての定義 2-8 を repeated ゲームに適した形で書き換えると、定義 2-14 のようになる。

### 定義 2-14

ゲーム  $G(T)$  あるいは、ゲーム  $G(\infty, \delta)$  において、ある player の戦略とは、1 つの complete plan of action であり、それまでの全 stage に対応するあらゆる history of play に対して、その player が各 stage にとる action を決める規則のことである。



さらに、定義 2-11 で定義された subgame を以下のように再定義すると便利であろう。

**定義 2-15**

ゲーム  $G(T)$  の  $t+1$  stage に始まる subgame は、 $G$  が  $T-t$  回繰り返される repeated game であり、 $G(T-t)$  と書ける。そして、stage  $t$  までに起こり得る全ての history of play の数だけ  $G(T-t)$  が存在する。

ゲーム  $G(\infty, \delta)$  の  $t+1$  stage から始まる subgame は、元のゲーム  $G(\infty, \delta)$  と構造が同じである。そして、stage  $t$  までに起こり得る全ての history of play の数だけ、 $t+1$  stage から始まる subgame が存在する。

なお、subgame-perfect の定義は、定義 2-12 のままで十分である。そして、Folk の定理の証明に必要な残り 2 つの定義を以下に記す。

**定義 2-16**

利得  $(x_1, \dots, x_n)$  が stage ゲーム  $G$  の純粋戦略から得られる利得の凸結合として表せるならば、利得  $(x_1, \dots, x_n)$  が stage ゲームに  $G$  おいて feasible であると言う。

**定義 2-17**

平均利得とは、同じ現在値を生むために全ての stage で受け取られるべき利得である。所与の割引率  $\delta$  に対して、利得の無限 sequence  $\pi_1, \pi_2, \dots$  の平均利得  $\pi$  は、

$$\pi = (1 - \delta) \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{i-1} \cdot \pi_i$$

で定義される。ただし、 $\sum_{i=1}^{\infty} \delta^{i-1} \cdot \pi_i$  は、利得の無限 sequence  $\pi_1, \pi_2, \dots$  の現在値総和を表す。

以上を予備知識として、最後に、Folk の定理 (Friedman (1971)) と呼ばれる、無限回の repeated ゲームにおける重要な定理を証明しよう。なお、定理 2-3 (Folk の定理)

を示すに当たり、記号を以下のように定める。

$G$  : complete情報下で各playerの戦略の個数が有限であるようなstaticゲーム

$(e_1, \dots, e_n)$  : ゲーム  $G$  の Nash 均衡から得られる各playerの利得ベクトル

$(x_1, \dots, x_n)$  : ゲーム  $G$  から得られる  $(e_1, \dots, e_n)$  以外の任意の feasible な利得ベクトル

$(a_{e_1}, \dots, a_{e_n})$  : 利得  $(e_1, \dots, e_n)$  を生むゲーム  $G$  の Nash 均衡

$(a_{x_1}, \dots, a_{x_n})$  : feasible な利得  $(x_1, \dots, x_n)$  を生むゲーム  $G$  における各playerの action の組

定理 2-3 (Folk の定理) : 全ての  $i$  について、 $x_i > e_i$  であれば、割引率  $\delta (< 1)$  を選ぶことができ、 $(x_1, \dots, x_n)$  を平均利得として達成するような無限回の repeated ゲーム  $G(\infty, \delta)$  の 1 つの subgame-perfect Nash 均衡が存在する。

証明 初めに、player  $i$  の「trigger 戦略」について、以下のように定めよう。

(i) 第 1 stage では、 $a_{x_i}$  を play する。

(ii) 第  $t$  stage においては、第  $t-1$  stage までの全ての outcome が  $(a_{x_1}, \dots, a_{x_n})$  ならば、 $a_{x_i}$  を選択し、そうでなければ  $a_{e_i}$  を選択する。

さらに、全ての  $i$  について、 $x_i > e_i$  であることを仮定する。

証明を以下のように 2 段階に分けて考える。第 1 段階では条件  $x_i > e_i$  for every  $i$  を利用して、「全 player が trigger 戦略を採用することが  $G(\infty, \delta)$  の Nash 均衡になる」ということを満足するような  $\delta (< 1)$  が存在すること (命題 1) を示し、第 2 段階では、「その均衡が subgame-perfect であること (命題 2)」を示す。なお、そのときの player  $i$  の平均利得が  $x_i$  であることは、第 1 段階 (命題 1) の証明過程で示すことにする。

命題 1 の証明 player  $i$  を任意に固定しよう。命題 1 の証明は、ゲーム  $G(\infty, \delta)$  において、 $i$  以外の player が trigger 戦略を採用するときに、player  $i$  にとっても trigger 戦略を採用することが最適であることを示せば十分である。

いったん outcome が  $(a_{x_1}, \dots, a_{x_n})$  から離れたとしよう。 $i$  以外の player が trigger 戦略を採用している場合、彼らは、その後、繰り返し  $(a_{e_1}, \dots, a_{e_{i-1}}, a_{e_{i+1}}, \dots, a_{e_n})$  を play する。よって、player  $i$  にとっても、その後、繰り返し  $a_{e_i}$  を play することが最適であることは、(stage ゲームの) Nash 均衡の定義そのものから明らかであろう。

以上より、「いったんoutcomeが $(x_1, \dots, x_n)$ から離れたならば、その後繰り返し $a_{ei}$ をplayするのがplayer  $i$ の最適反応である」ことがわかった。以下では、「第1 stageにおいて、及びそのstageまでの全てのoutcomeが $(a_{x1}, \dots, a_{xn})$ であるようなstageにおいては、 $a_{xi}$ をplayすることがplayer  $i$ の最適反応である」ことを示す。 $i$ 以外のplayerがtrigger戦略を採用するならば、「第1 stage」においても、そしてまた、「そのstageまでの全てのoutcomeが $(a_{x1}, \dots, a_{xn})$ であるようなstage」においても彼らは、 $(a_{x1}, \dots, a_{xi-1}, a_{xi+1}, \dots, a_{xn})$ をplayする。これに、「 $G(\infty, \delta)$ の全てのsubgameは $G(\infty, \delta)$ 自身と構造が同じである（定義2-15の一部）」という事実を考慮すれば、上述2種のstageにおけるplayer  $i$ の戦略の選択事情は等しいと言える。よって、以下では、第1 stageでのplayer  $i$ の行動のみを考えることにしよう。

player  $i$ の $(a_{x1}, \dots, a_{xn})$ からの最適乖離 $a_{di}$ をplayer  $i$ の最大化問題、

$$\max_{a_i \in A_i} u_i(a_{x1}, \dots, a_{xi-1}, a_i, a_{xi+1}, \dots, a_{xn})$$

の解と定義しよう。したがって、 $d_i$ をこの乖離から得られるplayer  $i$ の利得とすれば、

$$d_i \geq x_i \equiv u_i(a_{x1}, \dots, a_{xn}) > e_i \equiv u_i(a_{e1}, \dots, a_{en})$$

という関係が成立する。この関係より、任意のplayer  $k$  ( $k=1, \dots, n$ )に対して、

$\frac{d_k - x_k}{d_k - e_k} < 1$ であるから、 $\bar{\delta} = \max_k \left\{ \frac{d_k - x_k}{d_k - e_k} \right\}$ と定めれば、 $\bar{\delta}$ は $\bar{\delta} < 1$ を満たす。そこで、この $\bar{\delta}$ を割引率 $\delta$ として採用すると、player  $i$ が $a_{di}$ が最適であると判断してplayした場合のplayer  $i$ の利得の無限sequenceの現在値 $V_i^d$ は、

$$V_i^d = d_i + \bar{\delta} \cdot e_i + \bar{\delta}^2 \cdot e_i + \dots = d_i + \frac{\bar{\delta}}{1 - \bar{\delta}} \cdot e_i$$

となり、他方、player  $i$ が $a_{xi}$ が最適であると判断してplayした場合のそれは、

$$V_i^x = x_i + \bar{\delta} \cdot V_i^x$$

となる。今、 $\bar{\delta} \geq \frac{d_i - x_i}{d_i - e_i}$ であるので、 $V_i^d$ と $V_i^x$ の関係は、

$$V_i^x = \frac{x_i}{1 - \bar{\delta}} \geq d_i + \frac{\bar{\delta}}{1 - \bar{\delta}} \cdot e_i = V_i^d$$

であり、したがって、player  $i$ は $a_{xi}$ を選択する。よって、命題1が示された。さらにこの結果、

$$x_i = (1 - \bar{\delta}) \cdot V_i^x$$

となり、player  $i$ の平均利得が $x_i$ であることがわかる（定義2-17参照）。

命題 2 の証明 全 player が全体ゲーム  $G(\infty, \delta)$  において trigger 戦略を採用しているとき、 $G(\infty, \delta)$  の全ての subgame において Nash 均衡が構成されていることを言えば、subgame-perfect の定義により命題 2 の証明が完了する。そこで、ゲーム  $G(\infty, \delta)$  の  $t$  stage から始まる subgame を考える ( $t=2, \dots, T, \dots$ )。このとき、その subgame を以下の 2 つの場合に分けて考えるのが便利であろう。

- ①  $t-1$  stage までの outcome の全てが  $(a_{x_1}, \dots, a_{x_n})$  である場合
- ②  $t-1$  stage までの outcome の少なくとも 1 つが  $(a_{x_1}, \dots, a_{x_n})$  とは異なる場合

①の場合

命題 1 及び、定義 2-15 の一部、「 $G(\infty, \delta)$  の全ての subgame は  $G(\infty, \delta)$  自身と構造が同じである」より、全 player がその subgame で trigger 戦略を採用することが Nash 均衡になることがわかる。今、全 player が全体ゲーム  $G(\infty, \delta)$  で trigger 戦略を採用していれば、その subgame における、各 player の戦略もまた trigger 戦略になっている。したがって、各 player が全体ゲームで採用した trigger 戦略からこの subgame に対して作った trigger 戦略がこの subgame において Nash 均衡を構成していることがわかる。

②の場合

全 player が全体ゲーム  $G(\infty, \delta)$  で trigger 戦略を採用すれば、この subgame における player  $i$  の戦略は、 $a_{ei}$  を永久に繰り返すことである ( $i=1, \dots, n$ )。以下ではそれが、この subgame の Nash 均衡になっていることを示す。 $(a_{e_1}, \dots, a_{e_n})$  は stage ゲーム  $G$  の Nash 均衡であるので、任意の  $i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 及び  $y_i \in A_i$  に対して、

$$u_i(a_{e_1}, \dots, a_{e_{i-1}}, a_{ei}, a_{e_{i+1}}, \dots, a_{e_n}) \geq u_i(a_{e_1}, \dots, a_{e_{i-1}}, y_i, a_{e_{i+1}}, \dots, a_{e_n})$$

である。したがって、任意の  $y_i^\tau \in A_i$  ( $\tau=t+1, \dots, T, \dots$ ) 及び  $i$  ( $i=1, \dots, n$ ) に対して、

$$\sum_{\tau=t}^{\infty} \delta^{\tau-1} \cdot u_i(a_{e_1}, \dots, a_{e_{i-1}}, a_{ei}, a_{e_{i+1}}, \dots, a_{e_n}) \geq \sum_{\tau=t}^{\infty} \delta^{\tau-1} \cdot u_i(a_{e_1}, \dots, a_{e_{i-1}}, y_i^\tau, a_{e_{i+1}}, \dots, a_{e_n})$$

が成立する。上式は、 $i$  以外の player が  $(a_{e_1}, \dots, a_{e_{i-1}}, a_{e_{i+1}}, \dots, a_{e_n})$  を  $t$  期以降繰り返し選択した場合、player  $i$  は  $a_{ei}$  を永久に繰り返すことによって、第  $t$  stage から始まる subgame における自己の (第  $t$  stage を基準に割り引いた) 利得合計を最大化できることを意味している。つまり、 $(a_{e_1}, \dots, a_{e_n})$  を永久に繰り返すことが第  $t$  stage から始まるこの subgame の Nash 均衡になる。以上、命題 2 の証明が完了したところで、定理 2-3 の証明を終える。

Q. E. D.

Remark : Gibbons (1992, p.97) の Folk の定理では、その条件が「全ての  $i$  について  $x_i >$

$e_i$ でありかつ $\delta$ が十分1に近いならば」とされているが、この表現はややミスリーディングと思われるので、定理2-3ではこの点を改めた。

第2節を通じて、complete情報下のstatic及びdynamicゲームを概説した。ここで説明した術語等は、第3節で扱う「微分ゲーム」の理解において役立つであろう。特に、dynamicゲームにおける「subgame」及び「subgame-perfect」という概念は、微分ゲームのfeedback戦略を考える際、根幹となるものである。

### 第3節 フィードバック戦略とBellmanの最適性原理

Clemhout and Wan (1994, p.804) が指摘しているように、微分ゲームの理論を応用する際、最もよく使われる戦略（ただし、ここで言う戦略は、各時点における制御変数を選択するという形をとる（Kamien and Schwartz (1991, p.274)）は、open-loop (OL) 戦略と feedback (FB) 戦略である。第1節で説明したように、OL戦略とは、情報構造が (a) open-loop型、FB戦略とは、(e) feed back (perfect state) 型の場合の戦略である。本節の目的は、分析対象モデルにOL戦略を採用した場合の分析法は、通常最適制御問題で使用されるPontryaginの最大値原理、他方、FB戦略を採用した場合の分析法は、ダイナミック・プログラミングで使用されるBellmanの最適性原理から導かれるHamilton-Jacobi-Bellman方程式（以下、H-J-B方程式と略す）が適しているという通常の見解が妥当であることを確認し、さらに、経済学で多用される、時間割引率等の入ったCASIモデルへの適用に便利な形に、両者を定式化することである。

まずは Kamien and Schwarz (1991, 第23章) を参考にして、分析対象となるモデルにこれら各戦略を採用した際の分析方法に違いが生ずることの必然性を明らかにしよう。

$n$ -playerの微分ゲームの典型的モデル [DG] を以下のように書く。

$$\begin{aligned}
 \text{[DG]} \quad \max_{\mathbf{v}(t)} J^i(\mathbf{v}) &\equiv \int_{t_0}^T g^i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) dt && i = 1, \dots, n \\
 \text{s. t.} \quad \dot{x}_j(t) &= f^j(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) && j = 1, \dots, m \\
 x_j(t_0) &= x_{j0}
 \end{aligned}$$

ただし、

$t$  : 時点を表す。ただし、混乱の恐れがないと判断される場合に限り、簡単化のために省略する場合がある。

$v_i$  : player  $i$  ( $i=1, \dots, n$ )の制御変数、 $\mathbf{v}=(v_1, \dots, v_n)$

$x_j$  : 第  $j$  番目の状態変数、 $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_m)$

$t_0, T, x_{j0}$  は所与の定数、 $g^i, f^j$  は連続微分可能、 $v_i$  は区分的に連続であると仮定する。各 player はそれぞれ 1 つの制御変数を有し、全 player は自己の制御変数を同時に選択する。さらに、全ての player は同一の状態変数に関する制約式  $\dot{x}_j(t)=f^j(t, x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t)), j=1, \dots, m$  に従うと仮定する。

本節の冒頭で述べたように、ここで言う戦略とは、各時点における制御変数の選択に関わるものであり、player  $i$  ( $i=1, \dots, n$ )の戦略  $\gamma_i$  と各時点における制御変数の値との関係は、情報構造の差異によって、それぞれ、OL戦略を採用した場合、 $v_i(t)=\gamma_i(t)$ 、そして、FB戦略を採用した場合、 $v_i(t)=\gamma_i(t, \mathbf{x}(t))$  と書ける。つまり、OL戦略は、ゲームの始まりに各時点でどうすることが最適なのかを指示する contingency plan から成り立ち、他方FB戦略は、各時点でその時々々の状態変数に対してどうすることが最適なのかを指示する contingency plan から成り立っているのである。上述から考えて、OL戦略を採用した場合の分析法は、一般的な最適制御法 (Pontryaginの最大値原理) を直接利用することでよさそうだが、FB戦略は、制御変数が状態変数に依存するため、最大値原理の利用は困難であると思われる。このことを直感的に把握するため、Kamien and Schwartz (1991, pp.274-275) に習い、OL戦略を採用した場合の [DG]、及びFB戦略を採用した場合の [DG] それぞれについて、最適制御理論で用いられる Hamiltonian 及びこれに対する最適のための必要条件を提示し、比較検討する。なお、Hamiltonianの最大化 (最適化) がなぜ元の問題の最適化につながるかは、数学注3-1で示すことにする。問題 [DG] への Pontryaginの最大値原理の適用法については、Arrow and Kurz (1970, p.37) の Proposition 1 を利用する。時間割引率  $\delta$  の入った CASIモデルへの Pontryaginの最大値原理の適用法については、数学注3-1の冒頭を参照されたい。

簡単化のため、ここでは2-playerで状態変数が2つのケースを考えよう。すると、OL戦略及びFB戦略を採用した場合の Hamiltonian、及びこれに対する最適のための必要条件是以下のように書ける。ただし、以下に現れる  $H^i(\cdot)$  は player  $i$  の Hamiltonian を、 $\lambda_j^i$  ( $i, j=1, 2$ ) は制約式に対応する補助変数を、そして、変数の右上付き “\*” はそれが最適値で評価されていることを示す。

OL戦略採用の場合

$$\begin{aligned} H^i(t, x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t), \lambda_1^i(t), \lambda_2^i(t)) \\ = g^i(t, x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t)) \\ + \lambda_1^i(t) \cdot f^1(t, x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t)) \\ + \lambda_2^i(t) \cdot f^2(t, x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t)) \end{aligned}$$

最適のための必要条件：

$$\frac{\partial H^i}{\partial v_i} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (3-1)$$

$$\lambda_j^i = -\frac{\partial H^i}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2 \quad (3-2)$$

FB戦略採用の場合

$$\begin{aligned} H^i(t, x_1(t), x_2(t), v_1(t, x_1(t), x_2(t)), v_2(t, x_1(t), x_2(t)), \lambda_1^i(t), \lambda_2^i(t)) \\ = g^i(t, x_1(t), x_2(t), v_1(t, x_1(t), x_2(t)), v_2(t, x_1(t), x_2(t))) \\ + \lambda_1^i(t) \cdot f^1(t, x_1(t), x_2(t), v_1(t, x_1(t), x_2(t)), v_2(t, x_1(t), x_2(t))) \\ + \lambda_2^i(t) \cdot f^2(t, x_1(t), x_2(t), v_1(t, x_1(t), x_2(t)), v_2(t, x_1(t), x_2(t))) \end{aligned}$$

最適のための必要条件：

$$\frac{\partial H^i}{\partial v_i} = 0 \quad i = 1, 2 \quad (3-3)$$

$$\begin{aligned} \lambda_j^i = -\frac{\partial H^i}{\partial x_j} - \frac{\partial H^i}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial v_1^*}{\partial x_j} - \frac{\partial H^i}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial v_2^*}{\partial x_j} = -\frac{\partial H^i}{\partial x_j} - \frac{\partial H^i}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial v_2^*}{\partial x_j} \\ \lambda_j^2 = -\frac{\partial H^2}{\partial x_j} - \frac{\partial H^2}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial v_1^*}{\partial x_j} - \frac{\partial H^2}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial v_2^*}{\partial x_j} = -\frac{\partial H^2}{\partial x_j} - \frac{\partial H^2}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial v_1^*}{\partial x_j} \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

(3-4)

OL戦略を採用した場合、その問題の最適解の導出は以下のような通常最適制御問題を解くプロセスと同様にできる。第1に、(3-1)により制御変数を状態変数と補助変数の関数として表し $[v_i = v_i(x_1, x_2, \lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_1^2, \lambda_2^2)]$ 、これを(3-2)及び問題[DG]の状態変数のtransition方程式に代入する。この結果、最適解、 $x_1^*$ 、 $x_2^*$ 、 $\lambda_1^*$ 、 $\lambda_2^*$ 、 $\lambda_1^{2*}$ 、 $\lambda_2^{2*}$ が求まる。第3に、これら最適解を先の $v_i = v_i(x_1, x_2, \lambda_1^i, \lambda_2^i, \lambda_1^2, \lambda_2^2)$ に代入して、 $v_1^*$ 、 $v_2^*$ を決めることができる。ところが、FB戦略を採用した場合、このように簡単にはいかない。(3-2)と(3-4)の比較からわかるように、最適FB戦略の計算の困難さは、

OL戦略採用のときには現れない  $-\frac{\partial H^1}{\partial v_2} \cdot \frac{\partial v_2^*}{\partial x_j}, -\frac{\partial H^2}{\partial v_1} \cdot \frac{\partial v_1^*}{\partial x_j}, j=1, 2$  の項から生じる。

player  $i$  ( $i=1, 2$ )が  $t$  時点で自己の最適FB戦略  $v_i^*(t, x_1(t), x_2(t))$  を見つけるには、player  $j$  ( $j \neq i, j=1, 2$ )の最適FB戦略  $v_j^*(t, x_1(t), x_2(t))$  を知っている必要があるのである。

以下では、FB戦略を採用した場合の問題の最適解（最適FB戦略）の導出に焦点を当てよう。最適FB戦略は、最適化の結果、subgame perfect、すなわち、初期条件により規定されたoriginal gameだけでなく、全てのsubgameに対しても最適なものでなくてはならない（定義2-11参照）。換言すると、「FB戦略の本質は、ダイナミック・プログラミングにおけるBellmanの最適性原理の精神に通じる（Kamien and Schwartz（1991, p.276）」と言えよう。このことをLéonald and Long（1992, 第5章）に依拠して説明したい。彼らはBellmanの最適性原理を離散時間モデルで紹介し、離散時間モデルの最適化問題で説明する事項が連続時間モデルにも適用できるとして、連続時間モデルのH-J-B方程式の導出の際に利用している。我々の議論もこの手順に習いたい。

以下のようなダイナミック・プログラミング [D-DP] モデルを考えよう。

$$[D-DP] \quad \max_{\{v(t), 1 \leq t \leq T\}} V \equiv \sum_{t=1}^T g(t, x(t), v(t)) \quad (3-5)$$

$$\text{s. t. } x(t+1) = h(t, x(t), v(t)) \quad t=1, \dots, T \quad (3-6)$$

$$x(1) = x_1$$

$$x(T+1) = \bar{x}$$

ただし、 $T$ （終着時点）、 $x_1$ 、 $\bar{x}$ は、所与の定数とする。記号等は、これまでのものと同じ限り同様に使用してあるが、ここでは簡単化のため、状態変数及び制御変数は各々1つとする。また、ここでは離散時間モデルを取り扱うので、先の連続時間モデルのときに用いたtransition関数  $f$  と区別するため、それに対応するものとして、 $h$  を使用する。

通常のダイナミック・プログラミングでは、 $g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))$  を  $t$  期の net benefit、(3-6) を  $t$  期の transition 方程式、 $h(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))$  を  $t$  期の transition 関数と呼んでいる。問題 [D-DP] では、全期間を通しての分離可能性と加法性という2つの基本的性質が仮定されている。より正確に言うと、前者が (i)、後者が (ii) のようになる。

- (i) 任意の  $t$  に対して、関数  $g(\cdot)$  と  $h(\cdot)$  は  $t$  及び状態変数と制御変数の current value にのみ依存し、状態変数と制御変数の過去あるいは将来の値には依存しない。



(ii) 目的関数  $V$  は各期の net benefit 関数  $g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))$  の値の合計である。

Bellman (1957) は、問題 [D-DP] の任意の最適解の本質について、最適性原理と呼ばれる重要な原理を提唱した。以下にこれを提示する (Léonald and Long (1992, p.174, Theorem 5.2.1: principle of optimality))。

### Bellmanの最適性原理

$v^*(1), v^*(2), \dots, v^*(T)$  が問題 [D-DP] の最適解であるための必要十分条件は、任意の  $t \in \{1, \dots, T\}$  に対して、 $v^*(t), v^*(t+1), \dots, v^*(T)$  が以下の問題の解であることである。

$$\begin{aligned} \max_{\{v(\tau), t \leq \tau \leq T\}} V &\equiv \sum_{\tau=t}^T g(\tau, x(\tau), v(\tau)) \\ \text{s. t. } x(\tau+1) &= h(\tau, x(\tau), v(\tau)) \quad \tau = t, t+1, \dots, T \\ x(t) &= x^*(t) \\ x(T+1) &= \bar{x} \end{aligned}$$

この最適性原理の示すものは、任意の  $t$  期において、それ以降の決定  $v^*(t), v^*(t+1), \dots, v^*(T)$  が初期値  $x_t$  及びそれまでの決定  $v^*(1), v^*(2), \dots, v^*(t-1)$  の結果からくる current な状態変数  $x^*(t)$  に関して最適でなくてはならない、ということであり、まさに最適FB戦略の要求するものなのである。

さて、連続時間システムのダイナミック・プログラミングの議論に戻ろう。そして、Bellmanの最適性原理を利用し、本節の最大の目的、最適制御戦略（もちろんFB戦略のこと）を計算する手段としてのH-J-B方程式を導出しよう。

連続時間システムに変更したことにより、問題 [D-DP] に対応するものとして、問題 [C-DP] を考える。

$$\begin{aligned} \text{[C-DP]} \quad \max_{\{v(t), 0 \leq t \leq T\}} & \int_0^T g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) dt + q(T, \mathbf{x}(T)), \quad T = \min\{t : l(t, \mathbf{x}(t))\} = 0 \\ \text{s. t. } \dot{x}_j(t) &= f^j(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)), \quad x_j(0) = x_0 \end{aligned}$$

最終時点  $T$  での残存価値  $q(T, \mathbf{x}(T))$  を入れているのは、意思決定主体が最終時点  $T$  での状態に対してある値を割り当てる場合があるかもしれない (例：工場設備が a scrap value を持つ) という立場からである (Arrow and Kurz (1970, p.28))。また、FB戦略の採用

により、制御変数は、 $\mathbf{v}(t) = \gamma(t, \mathbf{x}(t)) \in S$ ,  $\gamma \in \Gamma$  と書ける。ただし、 $S$  は戦略  $\gamma$  のとりうる値の範囲、 $\Gamma$  は player が選択しうる FB 戦略の集合、 $l$  は実数値関数とする。

[C-DP] の下、value 関数 (または、return 関数) を  $V(t, \mathbf{x}(t))$  を

$$V(t, \mathbf{x}(t)) \equiv \max_{\{\mathbf{v}(\tau), t \leq \tau \leq T\}} \left[ \int_t^T g(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{v}(\tau)) d\tau + q(T, \mathbf{x}(T)) \right] \quad (3-7)$$

と定める。ただし、 $V(t, \mathbf{x}(t))$  は、境界条件

$$V(T, \mathbf{x}) = q(T, \mathbf{x}) \quad \text{along} \quad l(T, \mathbf{x}) = 0 \quad (3-8)$$

を満たす。ただし、 $V$  は連続微分可能と仮定する。

[C-DP] で表わされる最適制御問題と Bellman の最適性原理より直ちに、

$$V(t, \mathbf{x}(t)) \equiv \max_{\mathbf{v}} \left[ \int_t^{t+\Delta t} g(\tau, \mathbf{x}(\tau), \mathbf{v}(\tau)) d\tau + V(t + \Delta t, \mathbf{x}(t + \Delta t)) \right]$$

が成立する。そして、十分小さい  $\Delta t$  に対して上式は

$$V(t, \mathbf{x}(t)) = \max_{\mathbf{v}} [g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) \cdot \Delta t + V(t + \Delta t, \mathbf{x}(t + \Delta t))] + o(\Delta t) \quad (3-9)$$

となる。ただし、 $o(\Delta t)$  は  $\Delta t$  より高位の無限小、すなわち、 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$  を満たすものとする。

$V$  は、連続微分可能であるから、

$$\begin{aligned} V(t + \Delta t, \mathbf{x}(t + \Delta t)) &= V(t, \mathbf{x}(t)) + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Delta \mathbf{x} + o(\Delta t) \\ &= V(t, \mathbf{x}(t)) + \left( \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right) \Delta t + o(\Delta t) \end{aligned}$$

が成立する。そして、これを (3-9) へ代入すると、

$$V(t, \mathbf{x}(t)) = \max_{\mathbf{v}} \left[ g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) \cdot \Delta t + V(t, \mathbf{x}(t)) + \left( \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} \right) \Delta t \right] + o(\Delta t)$$

となる。さらに、上式の両辺に現れる  $V(t, \mathbf{x}(t))$  を消して、両辺を  $\Delta t$  で割り、 $\Delta t \rightarrow 0$  とすれば、

$$0 = \max_{\mathbf{v}} \left[ g(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) \right] \quad (3-10)$$

が得られる。この (3-10) 式こそが H-J-B 方程式である。

上述のような  $V$  が存在すれば、H-J-B 方程式 (3-10) は、問題 [C-DP] における最適

制御戦略を得る有用な手段を提供してくれる。このいわゆる“sufficiency result”は、次の定理3-1 (Basar and Olsder (1995, p.243) の定理5.3) により示される。

定理3-1：境界条件(3-8)を伴うH-J-B方程式(3-10)を満たすような連続微分可能な関数 $V(t, \mathbf{x})$ が存在するならば、それは、(3-10)の右辺で定義される(静学的)最大化問題を通じて問題[C-DP]の最適戦略をもたらす。

証明 2つの戦略 $\gamma^* \in \Gamma$ (最適戦略を表す)と $\gamma \in \Gamma$ (任意の戦略を表す)が与えられ、それらに対応する有限軌道、終着時点をそれぞれ、 $\mathbf{x}^*$ 、 $\mathbf{x}$ 及び $T^*$ 、 $T$ で表す。すると、(3-10)より、

$$g(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} \leq 0 \quad (1)$$

及び

$$g(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*) + \frac{\partial V(t, \mathbf{x}^*)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*) + \frac{\partial V(t, \mathbf{x}^*)}{\partial t} \equiv 0 \quad (2)$$

が得られる。ただし、 $\gamma^*$ と $\gamma$ は対応する制御変数 $\mathbf{v}^*$ と $\mathbf{v}$ に置き換えてある。①は、

$$g(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) + \frac{dV(t, \mathbf{x}(t))}{dt} \leq 0$$

と書き換えることができ、0から $T$ について積分すると、

$$\int_0^T g(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) dt + V(T, \mathbf{x}(T)) - V(0, \mathbf{x}_0) \leq 0 \quad (3)$$

となる。同様にして、②についても0から $T^*$ について積分すると、

$$\int_0^{T^*} g(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*) dt + V(T^*, \mathbf{x}^*(T^*)) - V(0, \mathbf{x}_0) = 0 \quad (4)$$

③と④より、(3-8)に注意して $V(0, \mathbf{x}_0)$ を消すと、

$$\int_0^T g(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) dt + q(T, \mathbf{x}(T)) \leq \int_0^{T^*} g(t, \mathbf{x}^*, \mathbf{v}^*) dt + q(T^*, \mathbf{x}^*(T^*))$$

上式より、問題[C-DP]において、 $\mathbf{v}^*$ が最適、すなわち、 $\gamma^*$ が最適戦略であることがわかる。 Q.E.D.

これで、H-J-B方程式の定義、及びこれが最適制御戦略を得るための有益な手段となることがわかった。最後に、このH-J-B方程式を時間割引率 $\delta$ の入ったCASIシステムで利用しやすい形に定式化しよう。そこで、下記のようなCASIシステムの最適化問題[AP]を考える。

$$\begin{aligned}
 \text{[AP]} \quad \tilde{V}(t_0, \mathbf{b}) &\equiv \max_{\{v(t), t_0 \leq t\}} \left[ \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta t} \cdot u(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) dt \right] \\
 \text{s. t.} \quad \dot{x}_j &= f^j(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) \quad j=1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{3-11}$$

$$\text{制約式一般} \quad \begin{cases} \psi^l(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) \geq 0 & l=1, \dots, L' \\ \psi^l(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) = 0 & l=L'+1, \dots, L \end{cases} \tag{3-12}$$

$$\text{状態変数の初期値} \quad \{ x_j(t_0) = b_j \quad j=1, \dots, m$$

$$\text{状態変数の terminal behavior} \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} x_j(t) = \bar{x}_j & j=1, \dots, m' \\ \lim_{t \rightarrow \infty} x_j(t) \geq \bar{x}_j & j=m'+1, \dots, m'+m'' \\ x_j(t), j=m'+m''+1, \dots, m \text{ については制約なし} \end{cases} \tag{3-13}$$

問題[AP]は、無限期間問題の特性を生かして、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
 \tilde{V}(t_0, \mathbf{b}) &= e^{-\delta t_0} \cdot \max_{\mathbf{v}} \left[ \int_{t_0}^{\infty} e^{-\delta(t-t_0)} \cdot u(\mathbf{x}, \mathbf{v}) dt \right] \\
 &= e^{-\delta t_0} \cdot \max_{\mathbf{v}} \left[ \int_0^{\infty} e^{-\delta \tau} \cdot u(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\tau \right] \quad \text{ただし、} \tau = t - t_0 \\
 &= e^{-\delta t_0} \cdot \tilde{V}(0, \mathbf{b}) \\
 \text{s. t.} \quad &(3-11), (3-12), (3-13), \text{ 及び } x_j(0) = b_j, j=1, \dots, m
 \end{aligned} \tag{3-14}$$

ここで、current-value-return関数 $W(t_0, \mathbf{b}) \equiv e^{\delta t_0} \cdot \tilde{V}(t_0, \mathbf{b})$ を導入しよう。(3-14)より、

$$W(t_0, \mathbf{b}) \equiv e^{\delta t_0} \cdot \tilde{V}(t_0, \mathbf{b}) = \tilde{V}(0, \mathbf{b})$$

であり、 $W(t_0, \mathbf{b})$ は $t_0$ と独立であるから、これを $W(\mathbf{b})$ と書くことにする。以上をまとめると、

$$\tilde{V}(t_0, \mathbf{b}) \equiv e^{-\delta t_0} \cdot \tilde{V}(0, \mathbf{b}) = e^{-\delta t_0} \cdot W(\mathbf{b})$$

となる。ゆえに、任意の $t$ と $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}$ に対しても、同様に

$$\tilde{V}(t, \mathbf{x}) \equiv e^{-\delta t} \cdot \tilde{V}(0, \mathbf{x}) = e^{-\delta t} \cdot W(\mathbf{x}) \tag{3-15}$$

が成立する。(3-15)を利用し、H-J-B方程式(3-10)を書き換えると、

$$0 = \max_v \left[ e^{-\delta t} \cdot u(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \frac{\partial \tilde{V}(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{V}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \right],$$

$$0 = \max_v \left[ e^{-\delta t} \cdot u(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \delta \cdot e^{-\delta t} \cdot W(\mathbf{x}) + e^{-\delta t} \frac{dW(\mathbf{x})}{dx} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \right],$$

$$0 = \max_v \left[ u(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \delta \cdot W(\mathbf{x}) + \frac{dW(\mathbf{x})}{dx} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \right],$$

したがって、

$$\delta \cdot W(\mathbf{x}) = \max_v \left[ u(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \frac{dW(\mathbf{x})}{dx} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \right] \quad (\text{H-J-B})$$

が成立する。

以上で、時間割引率  $\delta$  の入った CASI システムに対応する H-J-B 方程式を導出するという本節の目的が達成された。次節では、(H-J-B) が実際どのように TBP 問題の分析に利用されているのかを Dockner and Long (1993) の 2 国モデルを使って議論する。

#### 第 4 節 TBP 問題への H-J-B 方程式の適用

本節の目的は、前節で導出した H-J-B 方程式が TBP 問題のモデルに対してどのように適用され、そして、その分析に、どのように利用されているのかを Dockner and Long (1993) の 2 国モデルを用いて議論することである。

彼らの考える 2 国経済は、消費財の生産過程において汚染物質の排出を伴うような対称的な 2 国モデルで記述される。本節では、4-1 でまずこのモデルを紹介する。彼らは、そのような経済で行われる、両国政府による汚染物質の排出制御 (PC) について次の 2 つの場合を想定している。1 つは、(a) PC が両国間で協調的 (cooperative) に行われる場合、そしてもう 1 つは、(b) PC が非協調的 (non-cooperative) に行われる場合である。本節では前者を 4-2 で、そして後者を 4-3 で取り上げる。より具体的には、(a) は「両国政府が共同して両国の joint welfare の割引現在値総和が最大になるように自国の汚染排出量を制御しようとするケース」であり、(b) は、「両国が独自 (非協力的) に自国の welfare の割引現在値総和が最大になるように自国の汚染排出量を制御しようとするケース」である。彼らは、(a) の場合の最適化問題を 1 個人の最適化問題と解釈し、Pontryagin の最大値原理を用いてその最適経路を求めている。そして、(b) の場合に対する 1 つのリファレンス・ケースとして (a) における汚染物質ストッ

クの定常値等を計算している。次に彼らは、現実的には、(a)のように両国のfull commitmentが達成されている可能性は低く、むしろ両国は非協調的に行動する可能性が強いという観点から、PCについて各国がそれぞれ

(b-1) 線形Markov-perfect戦略

を採用した場合と

(b-2) 非線形Markov-perfect戦略

を採用した場合の2つのケースをH-J-B方程式を利用して分析している。彼らは(b-1)の分析の際、guessing methodによって1つの最適解を求め、そして(b-2)ではauxiliary equationを利用して、このモデルについてより多くの最適解を導出している。(a)と(b-1)を比較すると、期待される通り(b-1)のケースの方が汚染物質ストックの定常状態での値が高いことが確められる。そこで、さらに彼らは(b-2)を考え、その結果、そこで見つけた解のうち、割引率 $\delta$ が十分小さい場合、(a)と同水準の汚染物質ストックの定常値に対応する解が探せると結論づけている。しかし、このような解(最適戦略)の存在はパラメータの関係が極めて特殊な条件を満たすときしか確認できていない。このことを4-3-2において、指摘したい。なお、guessing methodの持つ解の限定性を批判し、auxiliary equationを使ったより広範な解の発見を提唱したのはTsutsui and Mino (1990)<sup>2)</sup>であるが、彼らの分析もまた同様な問題を含んでいる。

#### 4-1 体系の全貌

本節で用いる主な記号及び仮定を以下に一覧しよう。

$N$  : 両国の人口

$Q_i(t)$  : 第*i*国の*t*時点の消費財生産量( $i=1, 2$ )

$E_i(t)$  : 第*i*国の*t*時点に排出される汚染物質フロー( $i=1, 2$ )

$P(t)$  : *t*時点の汚染物質ストック

$k$  : 汚染物質の自然浄化率 [ただし、 $k > 0$ と仮定する]

$F_i(\cdot)$  : 第*i*国の排出-消費トレード・オフ関数

[関数 $F_i(\cdot)$ は strictly concave、かつ $F_i(0)=0$ と仮定する]

$u_i(\cdot)$  : 第*i*国の消費者の効用関数( $i=1, 2$ )

---

2) Tsutsui and Mino (1990) は、Fershtman and Kamien (1987) の寡占モデルを使って auxiliary equation による分析を行っている。

[関数  $u_i(\cdot)$  は strictly concave と仮定する]

$c_i(\cdot)$  : 第  $i$  国の消費者の汚染された環境による費用関数 ( $i=1, 2$ )

[関数  $c_i(\cdot)$  は strictly convex と仮定する]

$B_i(\cdot)$  : 第  $i$  国の消費者の純便益関数 ( $i=1, 2$ )

ただし、括弧内の  $t$  はその変数が  $t$  時点のものであることを示すが、混乱の恐れのない限り、これまでと同様、省略することにする。

Dockner and Long (1993) が考えている経済は、以下のようにまとめられる。

2 国が存在し、両国にそれぞれ  $N$  人の同質な消費者が存在する (つまり、両国の人口は同じである)。そして、第  $i$  国の消費者は、1 つの消費財  $Q_i$  ( $i=1, 2$ ) を生産している。ただし、第  $i$  国の消費財 1 単位の生産が汚染物質  $E_i$  を生み、その排出-消費トレード・オフは、

$$Q_i = F_i(E_i)$$

で表わされる。また、汚染物質の自然浄化率を  $k$  とすると、 $t$  時点の汚染物質ストックは、

$$\dot{P}(t) = E_1(t) + E_2(t) - kP(t) \quad (4-1)$$

となる。さらに、第  $i$  国の消費者の効用  $u_i(Q_i/N)$  及び第  $i$  国の消費者の汚染された環境によるコスト  $c_i(P)$  によって、第  $i$  国の消費者の  $t$  時点の純便益は、

$$B_i((Q_i(t)/N), P(t)) = u_i(Q_i(t)/N) - c_i(P(t))$$

のように定義される。

計算の簡単化のため、上述の仮定を満たすような効用関数及び費用関数を以下のように特定化しよう。

$$u_i(F_i(E_i)/N) = A \cdot E_i(t) - \frac{1}{2} \cdot \{E_i(t)\}^2$$

$$c_i(P(t)) = \frac{s}{2} \cdot \{P(t)\}^2$$

ただし、 $A$  及び  $s$  は所与の正の定数とする。この特定化によって、純便益関数は、

$$B_i(E_i(t)) = A \cdot E_i(t) - \frac{1}{2} \cdot \{E_i(t)\}^2 - \frac{s}{2} \cdot \{P(t)\}^2$$

となる。

4-2、4-3 では、上述のモデルを使って、PC を 2 国が協調的 (cooperative) に行う場合と非協調的 (non-cooperative) に行う場合を考える。もちろん、我々の関心は

後者にあり、前者は、後者に対する1つのbench markとしての分析である。

#### 4-2 協調的なPC

PCを2国が協調的に行う場合を考えよう。ここで言う協調的なPCとは、両国政府が、無限期間に渡り、協調して自国の汚染排出量( $E_i, i=1, 2$ )を制御し、両国のjoint welfareの現在値総和を最大にするように努めることである。この最適化問題は具体的に以下のように定式化される。

$$\begin{aligned}
 \text{[CPC]} \quad & \max_{E_1, E_2} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot \left( A(E_1(t) + E_2(t)) - \frac{1}{2}(\{E_1(t)\}^2 + \{E_2(t)\}^2) - s\{P(t)\}^2 \right) dt \\
 & \text{s. t. } \dot{P} = E_1(t) + E_2(t) - kP(t) \\
 & P(0) = P_0 \quad \text{ただし、} P_0 \text{は所与の定数。}
 \end{aligned}$$

この問題のcurrent-value Hamiltonianを

$$H(E_1, E_2, P, \lambda) = A(E_1 + E_2) - \frac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2) - sP^2 + \lambda(E_1 + E_2 - kP)$$

と定めよう。ただし、 $\lambda$ はハミルトン乗数（状態変数 $P$ に対する補助変数）である。この両国共同の最適化問題[CPC]は、個人の最適化問題と同様なものと解釈することができる。よって、Pontryaginの最大値原理を適用することにより、以下のような最大化のための必要条件が導出できる（数学注3-1参照）。

$$\frac{\partial H}{\partial E_1} = A - E_1 + \lambda = 0 \tag{4-2-1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial E_2} = A - E_2 + \lambda = 0 \tag{4-2-2}$$

$$\dot{\lambda} = \delta \cdot \lambda - \frac{\partial H}{\partial P} = \delta \cdot \lambda - (-2sP - \lambda) \tag{4-2-3}$$

また、横断性条件は、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) \cdot P(t) \cdot e^{-\delta t} = 0$$

となる。

(4-2-1)、(4-2-2)より、

$$E_1 = E_2 = A + \lambda$$

であるので、汚染物質の蓄積方程式(4-1)の最適経路は、

$$\dot{P} = 2A - kP + 2\lambda \tag{4-2-4}$$



となる。さらに、 $P$ の補助変数の最適時間経路（4-2-3）は、

$$\dot{\lambda} = 2sP + (\delta + k)\lambda \quad (4-2-5)$$

と書き換えられる。（4-2-4）及び（4-2-5）が最適化問題 [CPC] の満たすべき動学方程式システムである。両国政府が協調してPCを行った結果、以下の結論が得られる。

定理 4-1：ユニークで大域的かつ漸近的に安定的な collusive outcome が存在し、それは、次のような汚染物質ストックの定常値  $P^c$  に帰着する。

$$P^c = \frac{2A(\delta + k)}{k(\delta + k) + 4s}$$

なお、そのときの両国の純便益  $W_1$ 、 $W_2$  は、以下のように表わされる。

$$W_1 = W_2 = -\frac{1}{4}\alpha_c P_0^2 - \frac{1}{2}\beta_c P_0 - \frac{\mu c}{2}$$

ただし、

$$\alpha_c = \frac{1}{2} \left( - \left( k + \frac{\delta}{2} \right) + \sqrt{\left( k + \frac{\delta}{2} \right)^2 + 4s} \right) > 0,$$

$$\beta_c = \frac{2A\alpha_c}{\delta + k + 2\alpha_c} > 0, \text{ 及び } \mu_c = -\frac{(\beta_c - A)^2}{\delta} < 0$$

証明 定常状態においては、

$$0 = 2A - kP + 2\lambda$$

$$0 = 2sP + (\delta + k)\lambda$$

が成立している。両式を  $\lambda$  について解いて、等しいと置くと、

$$A - \frac{k}{2}P = \frac{2sP}{\delta + k}$$

であり、これを  $P$  について解けば、

$$P^c = \frac{2A(\delta + k)}{k(\delta + k) + 4s}$$

が得られる。次に、H-J-B方程式を利用して、両国の純便益  $W_1$ 、 $W_2$  を計算しよう。

両国の純便益の合計  $W$  を以下のように定義する。

$$W(P_0) = \max_{E_1, E_2} \left[ \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot \left( A(E_1 + E_2) - \frac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2) - sP^2 \right) dt \right]$$

ただし、両国は対称的であるから、 $W_1 = W_2 = \frac{1}{2} \cdot W(P_0)$ となっている。このときの

(H-J-B) は、

$$\delta \cdot W(P) = \max_{E_1, E_2} \left[ A(E_1 + E_2) - \frac{1}{2}(E_1^2 + E_2^2) - sP^2 + W'(P) \cdot (E_1 + E_2 - kP) \right] \quad (4-2-6)$$

と書ける。今、価値関数が

$$W(P) = -\frac{1}{2}\alpha_c P^2 - \beta_c P - \mu_c \quad (4-2-7)$$

で表わせたとしよう。すると、(4-2-6)の右辺の最大化問題の1階の条件は、

$$A - E_i + W'(P) = 0 \quad i = 1, 2$$

であり、したがって、(4-2-6)の右辺の最大化問題の解 $E_i$ は、(4-2-7)を使って、

$$E_i = A + W'(P) = A - \alpha_c P - \beta_c \quad i = 1, 2 \quad (4-2-8)$$

と解ける。以下では、(4-2-6)に(4-2-7)及び(4-2-8)を代入して、 $P^2$ 、 $P$ 、及び定数項の係数比較をしよう。(4-2-6)に(4-2-7)及び(4-2-8)を代入すると、

$$(4-2-6) \text{ の左辺} = \left( -\frac{1}{2}\alpha_c \cdot \delta \right) P^2 - (\beta_c \cdot \delta) P - \delta \cdot \mu_c$$

(4-2-6)の右辺

$$= 2A(A - \alpha_c P - \beta_c) - \frac{1}{2} \cdot 2(A - \alpha_c P - \beta_c)^2 - sP^2 - (\alpha_c P + \beta_c) \{ 2(A - \alpha_c P - \beta_c) - kP \}$$

$$= (\alpha_c^2 + k\alpha_c - s)P^2 + (-2A\alpha_c + 2\alpha_c\beta_c + \beta_c k)P + (A^2 + \beta_c^2 - 2\beta_c A)$$

となる。そして、 $P^2$ 、 $P$ 、及び定数項の係数比較の結果は、以下のようにまとめられる。

$$P^2 \text{ の項} : -\frac{1}{2}\alpha_c \delta = \alpha_c^2 + k\alpha_c - s, \quad \alpha_c = \frac{1}{2} \left( - \left( k + \frac{\delta}{2} \right) \pm \sqrt{\left( k + \frac{\delta}{2} \right)^2 + 4s} \right)$$

$$P \text{ の項} : -\beta_c \delta = -2A\alpha_c + 2\alpha_c\beta_c + \beta_c k, \quad \beta_c = \frac{2A\alpha_c}{\delta + k + 2\alpha_c}$$

定数項： $-\delta\mu_c = A^2 + \beta_c^2 - 2\beta_c A$ ,  $\mu_c = -\frac{(\beta_c - A)^2}{\delta}$

ところで、 $P$ の最適経路(4-2-4)は、(4-1)と(4-2-8)を使って、

$$\dot{P} = E_1 + E_2 - kP = 2(A - \alpha_c P - \beta_c) - kP = 2(A - \beta_c) - (2\alpha_c + k)P$$

と表わすこともできる。係数比較で決定された2つの $\alpha_c$ のうち、

$$\alpha_c = \frac{1}{2} \left( -\left(k + \frac{\delta}{2}\right) + \sqrt{\left(k + \frac{\delta}{2}\right)^2 + 4s} \right)$$

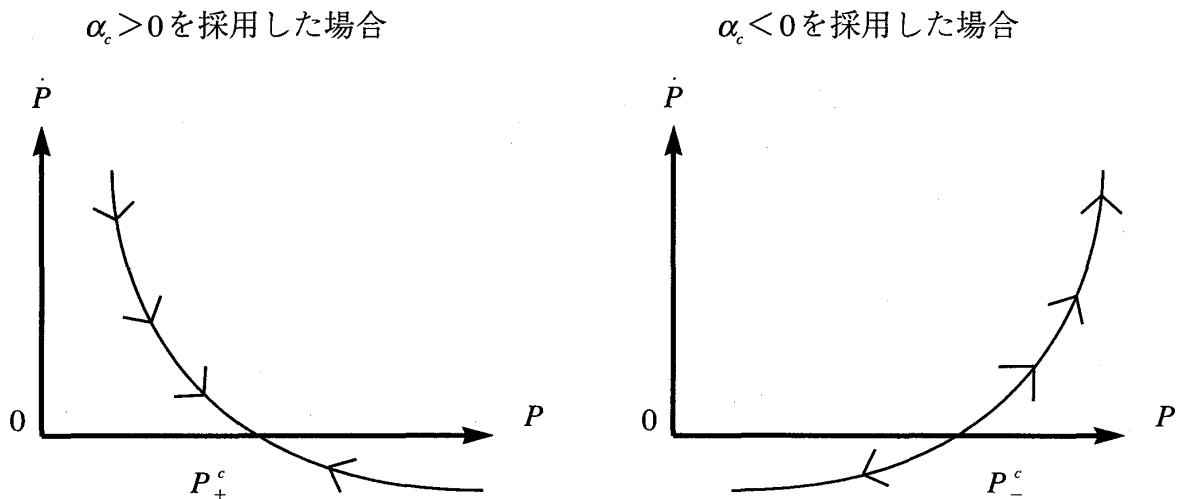
を採用すれば、 $\alpha_c > 0$ であるから、明らかに、

$$\frac{\partial \dot{P}}{\partial P} = -(2\alpha_c + k) < 0$$

となる。他方、 $\alpha_c < 0$ を採用した場合、

$$\frac{\partial \dot{P}}{\partial P} = \left( k + \frac{\delta}{2} + \sqrt{\left(k + \frac{\delta}{2}\right)^2 + 4s} \right) - k > 0$$

となる。これらを図に書くと、以下のようなになる。



したがって、 $\alpha_c > 0$ を採用すれば、 $P^* \equiv P_+^c$ はユニークで大域的かつ漸近的に安定的であることがわかる。なお、 $\alpha_c > 0$ より、 $\beta_c > 0$ は、自明である。 Q.E.D.

これまでは、協調的PCを議論してきた。しかしながら、現実社会では、経済成長率を犠牲にしてまで汚染物質を削減することについては、それを拒む国や地域が多い。し

たがって、このPCの実現は簡単ではないと思われる。そこで、4-3では、第3節で導出したH-J-B方程式を利用して、我々の最も関心のある「両国政府が非協調的にPCを行うモデル」について議論する。

#### 4-3 非協調的なPC

PCを2国が非協調的に行う場合を考えよう。この場合のモデルは、自国のwelfareの現在値総和を利得関数とし、自国の汚染排出量の制御を戦略とするような2-playerの微分ゲームとして定式化できる。ただし、ここでは、Markov-perfect戦略と呼ばれる戦略を採用する。これについて説明しよう。Markov-perfect戦略とは、各playerが各時点で戦略を選択する際、利用できる情報が、「時計（その時点）」と「動学システムの最新で利用可能な情報を要約したcurrentな状態変数」の2つであるような決定ルールのことであり、すなわち、第3節で論じたfeed-back戦略のことである。そして、この微分ゲームにおけるMarkov-perfect戦略の集合は

$$S_i^{MP} = \left\{ E_i(t, P(t)) \left| \begin{array}{l} E_i(t, P(t)) \text{ is continuous w. r. t. } t \\ \text{and Lipschitz continuous w. r. t. } P(t) \end{array} \right. \right\}$$

で定義される。そして、この非協調的なケースの最適化問題 [NCPC] は以下のように記述できる。

$$\begin{aligned} \text{[NCPC]} \quad \max_{E_i} \quad & \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot \left( AE_i(t) - \frac{1}{2} \{E_i(t)\}^2 - \frac{s}{2} \{P(t)\}^2 \right) dt, \quad i=1, 2 \\ \text{s. t.} \quad & \dot{P} = E_1(t) + E_2(t) - kP(t) \\ & P(0) = P_0. \quad \text{ただし、} P_0 \text{ は所与の定数。} \end{aligned}$$

定理3-1で示したように、H-J-B方程式を満たすようなvalue関数が存在するならば、それは、最適化問題 [NCPC] における最適feed-back戦略を生み出す。したがって、feed-back戦略を採用する場合、H-J-B方程式を満たすようなvalue関数を見つければよい。そこで、 $W_i(\cdot)$ を第*i*国のvalue関数としよう。すると、問題 [NCPC] の(H-J-B)は、

$$\delta \cdot W_i(P) = \max_{E_i} \left[ AE_i - \frac{1}{2} E_i^2 - \frac{s}{2} P^2 + W_i'(P) \cdot (E_1 + E_2 - kP) \right], \quad i=1, 2 \quad (4-3-1)$$

となる。我々の目的は、(4-3-1)を満たす $W_i(\cdot)$ を見つけることであるが、この際、2つの方法を試みることにする。1つは、4-2で各国の純便益を計算をする際に利用したguessing method、もう1つは、Tsutsui and Mino (1990)の提唱するauxiliary

equationを利用した方法である。前者の方法を取った場合、最適戦略が $P$ について線形(linear Markov-perfect strategy)であることを仮定しており、後者の方法を取った場合は、最適戦略の $P$ に関する線形性は、必ずしも仮定していない。以下では、それぞれのケースについて考えよう。

### 線形Markov-perfect戦略を採用する場合 (guessing method)

両国が非協調的に線形Markov-perfect戦略を採用した場合、定理4-2のような結果が得られる。

定理4-2：漸近的に安定的であるMarkov-perfect均衡を構成する線形Markov-perfect戦略のユニークな組が存在し、その均衡は、以下に与えられる汚染物質ストックの定常値 $P^M$ に帰着する。

$$P^M = \frac{2A(\delta + k + \alpha_M)}{(2\alpha_M + k)(\delta + k + 3\alpha_M)}$$

なお、そのときの両国の純便益、 $W_1(P_0)$ 、 $W_2(P_0)$ は、以下のように表わされる。

$$W_1(P_0) = W_2(P_0) = -\frac{1}{2}\alpha_M P_0^2 - \beta_M P_0 - \mu_M$$

ただし、 $\alpha_M = \frac{1}{3} \left( - \left( k + \frac{\delta}{2} \right) + \sqrt{\left( k + \frac{\delta}{2} \right)^2 + 3s} \right) > 0$

$$\beta_M = \frac{2A\alpha_M}{\delta + k + 3\alpha_M} > 0, \text{ 及び } \mu_M = -\frac{(A - \beta_M)(A - 3\beta_M)}{2\delta}$$

そして、均衡戦略は、

$$E_i(P(t)) = (A - \beta_M) - \alpha_M P(t) \quad i = 1, 2$$

ただし、 $A - \beta_M > 0$ である。

証明 linear quadratic な 2-player の微分ゲームの value 関数が

$$W_i(P) = -\frac{1}{2}\alpha_M P^2 - \beta_M P - \mu_M \tag{4-3-2}$$

で表わせたとしよう。このとき、両国の純便益 $W_i$ は、 $W_i(P_0)$ である ( $i = 1, 2$ )。このとき、(4-3-1) の右辺の最大化問題の1階の条件は、

$$A - E_i + W_i'(P) = 0 \quad i = 1, 2$$

であり、したがって、(4-3-1) の右辺の最大化問題の解 $E_i$ は、(4-3-2) を使って、

$$E_i = A + W_i'(P) = A - \alpha_M P - \beta_M \quad i=1, 2 \quad (4-3-3)$$

となる。(4-3-1) に (4-3-2) 及び (4-3-3) を代入すると、

$$(4-3-1) \text{ の左辺} = \left( -\frac{1}{2} \alpha_M \cdot \delta \right) P^2 - (\beta_M \cdot \delta) P - \delta \cdot \mu_M$$

(4-3-1) の右辺

$$= A(A - \alpha_M P - \beta_M) - \frac{1}{2}(A - \alpha_M P - \beta_M)^2 - \frac{s}{2} P^2 - (\alpha_M P + \beta_M) \{2(A - \alpha_M P - \beta_M) - kP\}$$

$$= \left( \frac{3}{2} \alpha_M^2 + k \alpha_M - \frac{s}{2} \right) P^2 + (-2A \alpha_M + 3 \alpha_M \beta_M + \beta_M k) P + \left( \frac{1}{2} A^2 + \frac{3}{2} \beta_M^2 - 2 \beta_M A \right)$$

となり、 $P^2$ 、 $P$ 、及び定数項の係数比較の結果は、以下のようにまとめられる。

$$P^2 \text{ の項} : -\frac{1}{2} \alpha_M \delta = \frac{3}{2} \alpha_M^2 + k \alpha_M - \frac{s}{2}, \quad \alpha_M = \frac{1}{3} \left( - \left( k + \frac{\delta}{2} \right) \pm \sqrt{\left( k + \frac{\delta}{2} \right)^2 + 3s} \right)$$

$$P \text{ の項} : -\beta_M \delta = -2A \alpha_M + 3 \alpha_M \beta_M + \beta_M k, \quad \beta_M = \frac{2A \alpha_M}{\delta + k + 3 \alpha_M}$$

$$\text{定数項} : -\delta \mu_M = \frac{1}{2} A^2 + \frac{3}{2} \beta_M^2 - 2 \beta_M A, \quad \mu_M = -\frac{(A - \beta_M)(A - 3 \beta_M)}{2 \delta}$$

ところで、(4-1) と (4-3-3) より、 $P$  の最適経路は、

$$\dot{P} = E_1 + E_2 - kP = 2(A - \alpha_M P - \beta_M) - kP = 2(A - \beta_M) - (2\alpha_M + k)P$$

と表わすことができる。そして、最適経路上の定常状態 $P^M$ は、

$$P^M = \frac{2(A - \beta_M)}{2\alpha_M + k} = \frac{2 \frac{A\delta + Ak + 3A\alpha_M - 2A\alpha_M}{\delta + k + 3\alpha_M}}{2\alpha_M + k} = \frac{2A(\delta + k + \alpha_M)}{(2\alpha_M + k)(\delta + k + 3\alpha_M)}$$

となる。さらに、係数比較で決定された2つの $\alpha_M$ のうち、

$$\alpha_M = \frac{1}{3} \left( - \left( k + \frac{\delta}{2} \right) + \sqrt{\left( k + \frac{\delta}{2} \right)^2 + 3s} \right) \quad (4-3-4)$$

を採用すれば、 $\alpha_M > 0$ であるから、明らかに、

$$\frac{\partial P}{\partial P} = -(2\alpha_M + k) < 0$$

である。他方、 $\alpha_M < 0$ を採用した場合、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{P}}{\partial P} &= \frac{2}{3} \left( k + \frac{\delta}{2} + \sqrt{\left( k + \frac{\delta}{2} \right)^2 + 3s} \right) - k \\ &= \frac{\delta}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{\left( k + \frac{\delta}{2} \right)^2 + 3s} - \frac{1}{3}k > 0\end{aligned}$$

となる。したがって、定理4-1のときと全く同様にして、 $\alpha_M > 0$ に対応する $P^M$ が漸近的に安定的であることがわかる。なお、 $\beta_M > 0$ 及び $A - \beta_M > 0$ は直接計算より、明らかである。 Q.E.D.

ここで、定理4-2の $P^M$ を先ほどの定理4-1の $P^c$ と比較しよう。(4-3-4)より、

$$3\alpha_M + \left( k + \frac{\delta}{2} \right) = \sqrt{\left( k + \frac{\delta}{2} \right)^2 + 3s}$$

であり、さらに、 $\left( k + \frac{\delta}{2} \right)^2 + 3s > 0$ なので、上式の両辺を2乗して、

$$9\alpha_M^2 + 6 \left( k + \frac{\delta}{2} \right) \alpha_M + \left( k + \frac{\delta}{2} \right)^2 = \left( k + \frac{\delta}{2} \right)^2 + 3s$$

となる。したがって、

$$s = 3\alpha_M^2 + 2 \left( k + \frac{\delta}{2} \right) \alpha_M$$

が成立する。上式を使えば $P^M$ と $P^c$ の差は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned}P^M - P^c &= \frac{2A(\delta + k + \alpha_M)}{(2\alpha_M + k)(\delta + k + 3\alpha_M)} - \frac{2A(\delta + k)}{k(\delta + k) + 4s} \\ &> 2A(\delta + k) \left( \frac{1}{(2\alpha_M + k)(\delta + k + 3\alpha_M)} - \frac{1}{k(\delta + k) + 4s} \right) \\ &= 2A(\delta + k) \frac{k(\delta + k) + 4s - (2\alpha_M + k)(\delta + k + 3\alpha_M)}{(2\alpha_M + k)(\delta + k + 3\alpha_M)(k(\delta + k) + 4s)} \\ &= 2A(\delta + k) \frac{4 \left( 3\alpha_M^2 + 2 \left( k + \frac{1}{2} \delta \right) \alpha_M \right) - 2\alpha_M(\delta + k + 3\alpha_M) - 3k\alpha_M}{(2\alpha_M + k)(\delta + k + 3\alpha_M)(k(\delta + k) + 4s)} \\ &= 2A(\delta + k) \frac{12\alpha_M^2 + 8k\alpha_M + 4\delta\alpha_M - 2\delta\alpha_M - 2k\alpha_M - 6\alpha_M^2 - 3k\alpha_M}{(2\alpha_M + k)(\delta + k + 3\alpha_M)(k(\delta + k) + 4s)}\end{aligned}$$

$$= 2A(\delta+k) \frac{6\alpha_M^2 + 3k\alpha_M + 2\delta\alpha_M}{(2\alpha_M+k)(\delta+k+3\alpha_M)(k(\delta+k)+4s)} > 0$$

上式は、両政府が協調的にPCを行ったときの方が非協調的に行うときよりも、定常状態での汚染物質ストックが低いという期待通りの結果を表している。

なお、両ケースにおける両国の純便益  $W_i (i=1, 2)$  の大小関係は、一意にはどちらとも言えない。<sup>3)</sup>

### 非線形Markov-perfect戦略を採用する場合(auxiliary equationを利用する方法)

(4-3-1) の右辺の最大化問題の1階の条件を  $W'_i(P)$  について解くと、

$$W'_i(P) = E_i - A \quad (4-3-5)$$

となる。最大化問題の解  $E_1$  及び  $E_2$  が対称的な解であることを考慮しながら、上式を(4-3-1)自身に代入すると、

$$\delta \cdot W'_i(P) = AE_i - \frac{1}{2}E_i^2 - \frac{s}{2}P^2 + (E_i - A) \cdot (2E_i - kP) \quad (4-3-6)$$

が成立する。今、一時的に  $\delta=0$  であると仮定しよう。このときの(4-3-6)は

$$0 = AE_i - \frac{1}{2}E_i^2 - \frac{s}{2}P^2 + (E_i - A) \cdot (2E_i - kP)$$

であり、これを整理すると、

$$3E_i^2 - 2(A+kP)E_i - sP^2 + 2kPA = 0$$

となる。そして、上式より、最適解は

$$E_i = \frac{1}{3}(A+kP) \pm \sqrt{\frac{(A+kP)^2}{9} + \frac{sP^2}{3} - \frac{2AkP}{3}} \quad (4-3-7)$$

と解ける。 $\delta=0$  であると仮定した場合の解(4-3-7)から、一般の場合の非線形戦略の決定ルールを以下のように予想しよう。

$$E_i = \frac{1}{3}(A+kP) + h(P) \quad (4-3-8)$$

なお、以下では簡略化のため、添え字の  $i$  を省略して表記することにする。(4-3-8)を(4-3-6)へ代入しよう。この結果、

3) Dockner and Long (1993, p.20) における  $\mu_M$  の計算には誤りがある。



$$\begin{aligned}
 \delta \cdot W(P) &= \frac{3}{2} \left( \frac{1}{3}(A+kP)+h(P) \right)^2 - (A+kP) \left( \frac{1}{3}(A+kP)+h(P) \right) - \frac{s}{2}P^2 + kPA \\
 &= \left( \frac{1}{6}(A+kP)^2 + \frac{3}{2}\{h(P)\}^2 + (A+kP)h(P) \right) - \left( \frac{1}{3}(A+kP)^2 + (A+kP)h(P) \right) \\
 &\quad - \frac{s}{2}P^2 + kPA \\
 &= \left( -\frac{1}{6}(A+kP)^2 + \frac{3}{2}\{h(P)\}^2 \right) - \frac{s}{2}P^2 + kPA \\
 &= -\frac{1}{6}(A^2 + k^2P^2 + 2AkP) + \frac{3}{2}\{h(P)\}^2 - \frac{s}{2}P^2 + kPA \\
 &= -\frac{1}{6}A^2 - \frac{1}{6}k^2P^2 - \frac{s}{2}P^2 + \frac{3}{2}AkP + \frac{3}{2}\{h(P)\}^2
 \end{aligned} \tag{4-3-9}$$

となる。

$W(P)$ は連続微分可能であると仮定しよう。(4-3-9)を $P$ で微分すると auxiliary equation、

$$\delta W'(P) = -\frac{1}{3}k^2P - sP + \frac{2}{3}Ak + 3h(P)h'(P)$$

が得られる (Tsutsui and Mino (1990, p.143))。これに (4-3-5) 及び (4-3-8) を代入すれば、

$$\begin{aligned}
 \delta \left( \frac{1}{3}(A+kP)+h(P)-A \right) &= -\frac{1}{3}k^2P - sP + \frac{2}{3}Ak + 3h(P)h'(P), \\
 \delta \left( -\frac{2}{3}A + \frac{1}{3}kP + h(P) \right) &= -\frac{1}{3}k^2P - sP + \frac{2}{3}Ak + 3h(P)h'(P)
 \end{aligned}$$

したがって、

$$3h(P)h'(P) = \delta h(P) + P \left( \frac{\delta k}{3} + \frac{1}{3}k^2 + s \right) - \frac{2A}{3}(k + \delta) \tag{4-3-10}$$

となる。ここで、 $F \equiv \frac{\delta k + k^2 + 3s}{3}$ 、 $C \equiv \frac{2A(k + \delta)}{3}$ と定義しよう。すると、(4-3-10)

は、

$$h'(P) = \frac{\delta h(P) + PF - C}{3h(P)} \tag{4-3-11}$$

と書き換えられる。我々は、(4-3-11)の解 $h(P)$ を求めたい。なお、(4-3-7)に関連して、 $\delta=0$ のとき確かに、

$$h(P) = -\sqrt{\frac{(A+kP)^2}{9} + \frac{sP^2}{3} - \frac{2AkP}{3}} \quad (4-3-12)$$

が、(4-3-11)の1つの解になっていることに注意したい。これを説明しよう。(4-3-12)を $P$ で微分すると

$$\begin{aligned} h'(P) &= -\frac{1}{2} \left( \frac{(A+kP)^2}{9} + \frac{sP^2}{3} - \frac{2AkP}{3} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{2(A+kP)k}{9} + \frac{2sP}{3} - \frac{2Ak}{3} \right) \\ &= \frac{Ak + k^2P + 3sP - 3Ak}{9h(P)} = \frac{P(k^2 + 3s) - 2Ak}{9h(P)} \end{aligned}$$

となる。 $\delta=0$ のとき、(4-3-11)は、

$$h'(P) = \frac{P \frac{k^2 + 3s}{3} - \frac{2Ak}{3}}{3h(P)} = \frac{P(k^2 + 3s) - 2Ak}{9h(P)}$$

であるから、(4-3-12)が(4-3-11)の1つの解であることは明らかである。元の議論に戻ろう。(4-3-11)は、

$$h'(P) = \frac{\delta h(P) + F \left( P - \frac{C}{F} \right)}{3h(P)} \quad (4-3-13)$$

と書き換えられる。 $X \equiv P - \frac{C}{F}$ と定義したとき、

$$(4-3-13) \text{ の左辺} = \frac{dh}{dP} = \frac{dh}{dP} \cdot 1 = \frac{dh}{dP} \cdot \frac{dP}{dX} = \frac{dh}{dX}$$

$$(4-3-13) \text{ の右辺} = \frac{\delta h + FX}{3h},$$

したがって、

$$\frac{dh}{dX} = \frac{\delta h + FX}{3h}$$

となる。さらに、 $Z \equiv \frac{h}{X}$ と定義しよう。このとき、

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{h'X - h}{X^2}$$

である。そして、以上をまとめると、

$$\frac{dZ}{dX} X = h' - \frac{h}{X} = \frac{\delta h + FX}{3h} - Z = \frac{\delta h + FX - 3hZ}{3h} = \frac{\delta Z + F - 3Z^2}{3Z}$$

すなわち、

$$\frac{3Z}{F + \delta Z - 3Z^2} \cdot \frac{dZ}{dX} = \frac{1}{X}$$

が成立し、さらに上式は

$$\frac{d}{dX} \int \frac{3Z}{F + \delta Z - 3Z^2} \cdot dZ = \frac{1}{X} \quad (4-3-14)$$

と書き換えられる。以下では、(4-3-14)の両辺を積分することを考えよう。そして、その準備として、 $\frac{3Z}{F + \delta Z - 3Z^2}$ を以下のように変形しよう。

て、その準備として、 $\frac{3Z}{F + \delta Z - 3Z^2}$ を以下のように変形しよう。

$$\begin{aligned} \frac{3Z}{F + \delta Z - 3Z^2} &= \frac{-Z}{Z^2 - \frac{\delta}{3}Z - \frac{F}{3}} = \frac{-Z}{\left(Z - \frac{\delta}{6}\right)^2 - \left(\frac{\delta^2}{36} + \frac{F}{3}\right)} \\ &= \frac{-Z}{\left(Z - \left(\frac{\delta}{6} + \sqrt{\frac{\delta^2}{36} + \frac{F}{3}}\right)\right)\left(Z - \left(\frac{\delta}{6} - \sqrt{\frac{\delta^2}{36} + \frac{F}{3}}\right)\right)} \\ &= \frac{-Z}{(Z - Z_a)(Z - Z_b)} = \frac{Z_a(Z - Z_b) - Z_b(Z - Z_a)}{(Z - Z_a)(Z - Z_b)} \\ &= \frac{-Z}{(Z - Z_a)(Z - Z_b)} = \frac{Z_a}{Z - Z_a} - \frac{Z_b}{Z - Z_b} \\ &= \frac{Z_b - Z_a}{Z - Z_a} + \frac{Z_b - Z_a}{Z - Z_b} = \frac{\xi_1}{Z - Z_a} + \frac{\xi_2}{Z - Z_b} \end{aligned} \quad (4-3-15)$$

ただし、 $Z_a$ 及び $Z_b$ は、 $3Z^2 - \delta Z - F = 0$ の解、すなわち

$$Z_a \equiv \frac{\delta}{6} + \sqrt{\frac{\delta^2}{36} + \frac{F}{3}}, \quad Z_b \equiv \frac{\delta}{6} - \sqrt{\frac{\delta^2}{36} + \frac{F}{3}},$$

であり、さらに、 $\xi_1$ と $\xi_2$ は

$$\xi_1 \equiv \frac{Z_a}{Z_b - Z_a} = \frac{-Z_b + Z_a + Z_b}{Z_b - Z_a} = -\xi_2 - 1, \quad \xi_2 \equiv \frac{-Z_b}{Z_b - Z_a}$$

である。

(4-3-14) の両辺を積分すると、

$$\int \frac{3Z}{F + \delta Z - 3Z^2} \cdot dZ = \int \frac{1}{X} \cdot dX$$

となる。ここで、(4-3-15) を使えば、直ちに、

$$\int \frac{\xi_1}{Z - Z_a} + \frac{\xi_2}{Z - Z_b} \cdot dZ = \int \frac{1}{X} \cdot dX$$

となる。ここで、積分定数を  $\kappa$  で表わすと、上式は、

$$\xi_1 \log(Z - Z_a) + \xi_2 \log(Z - Z_b) - \log X = \kappa,$$

$$\xi_1 \log \frac{1}{X} (h - XZ_a) + \xi_2 \log \frac{1}{X} (h - XZ_b) - \log X = \kappa,$$

そして

$$\log(h - XZ_a)^{\xi_1} (h - XZ_b)^{\xi_2} + \log \left( \frac{1}{X} \right)^{\xi_1 + \xi_2} - \log X = \kappa$$

と変形される。ここで、 $\xi_1 + \xi_2 = -1$  であることに注意すれば、左辺第2項及び第3項が消えて、

$$\log(h - XZ_a)^{\xi_1} (h - XZ_b)^{\xi_2} = \kappa,$$

したがって、

$$K = (h - XZ_a)^{\xi_1} (h - XZ_b)^{\xi_2} \quad \text{ただし、} K \equiv e^\kappa$$

となる。上式に  $h = E - \frac{A}{3} - \frac{kP}{3}$  ((4-3-8) 参照) 及び  $X \equiv P - \frac{C}{F}$  を代入して、こ

れまでの結果をまとめると、以下のようになる。

$$K = \left( E - \left\{ \left( Z_a + \frac{k}{3} \right) P + \frac{A}{3} - Z_a \frac{C}{F} \right\} \right)^{\xi_1} \cdot \left( E - \left\{ \left( Z_b + \frac{k}{3} \right) P + \frac{A}{3} - Z_b \frac{C}{F} \right\} \right)^{\xi_2} \quad (4-3-16)$$

ただし、 $F \equiv \frac{\delta k + k^2 + 3s}{3}$ ,  $C \equiv \frac{2A(k + \delta)}{3}$

$$Z_a \equiv \frac{\delta}{6} + \sqrt{\frac{\delta^2}{36} + \frac{F}{3}} > 0, \quad Z_b \equiv \frac{\delta}{6} - \sqrt{\frac{\delta^2}{36} + \frac{F}{3}} < 0,$$

$$\xi_1 \equiv \frac{Z_a}{Z_b - Z_a} = -\xi_2 - 1, \text{ 及び } \xi_2 \equiv \frac{-Z_b}{Z_b - Z_a}$$

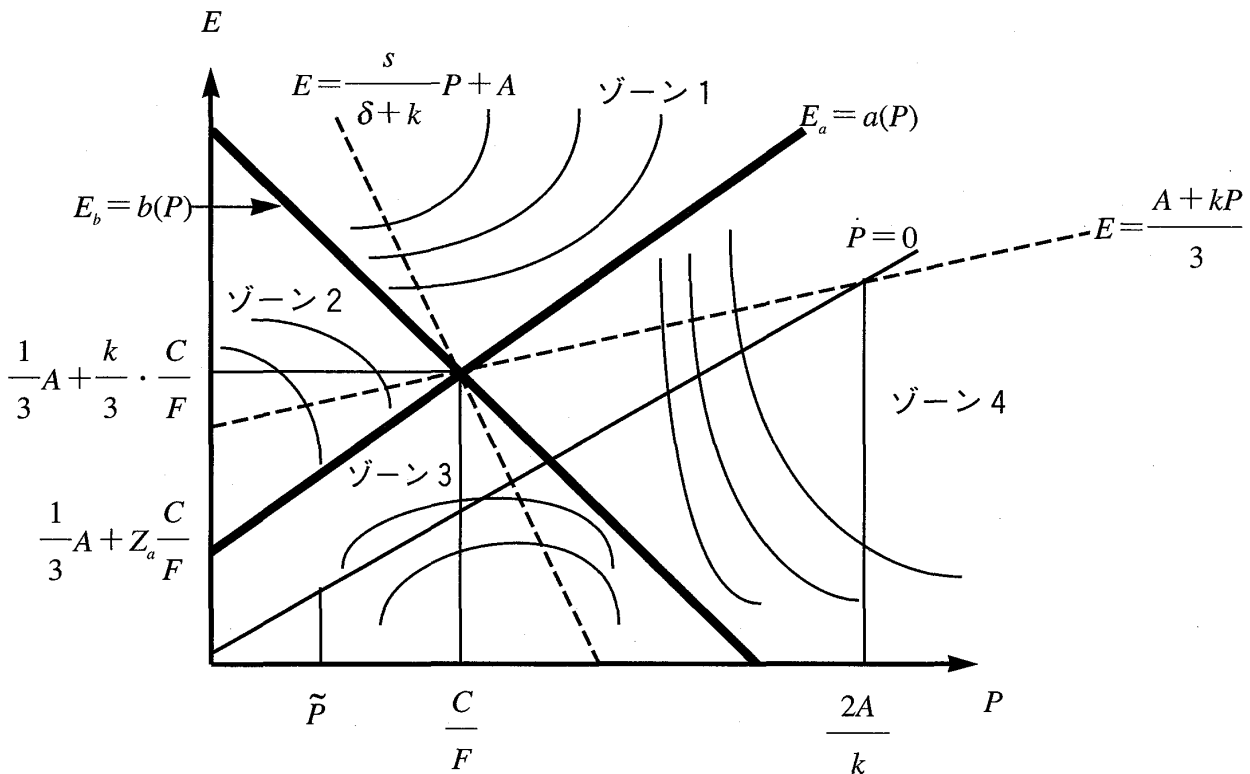
(4-3-16) の2つの singular solution ( $K=0$ としたときの解) を  $E_a$ 、 $E_b$  で表わすと、

$$E_a = a(P) \quad \text{ただし、} a(P) \equiv \left( Z_a + \frac{k}{3} \right) P + \frac{A}{3} - Z_a \frac{C}{F}$$

$$E_b = b(P) \quad \text{ただし、} b(P) \equiv \left( Z_b + \frac{k}{3} \right) P + \frac{A}{3} - Z_b \frac{C}{F}$$

である。ここで、 $E_b$  は、定理4-2で示された、線形Markov-perfect戦略を採用した場合の最適戦略  $E_i(P(t)) = (A - \beta_M) - \alpha_M P(t)$  と等しいことに注意したい（詳しい証明は、数学注4-1を参照）。つまり、auxiliary equationを利用すると、より広範な解を求めることができることがわかる。(4-3-16) を満たす解曲線は、存在するとすれば、図4-1に示される、無数の曲線として描かれる。なお、図4-1の描き方については、面倒ではあるが、そこで行われる計算は非常に簡単であるので、省略することにする。

図4-1 ( $s$ が大きい場合)



以上の結果、我々は定理4-3を得る。

定理 4-3：非線形の Markov-perfect 戦略を採用した場合、以下の関係を満たすような任意の汚染物質ストックの定常値  $P^N$  は、漸近的に安定的である。

$$\tilde{P} \equiv \frac{4A\delta + 2Ak}{2k\delta + k^2 + 4s} < P^N < \frac{2A}{k}$$

証明 非線形の（最適）Markov-perfect 戦略は、その導出過程から、(4-3-16) の解で与えられる。この場合  $P^N$  の安定条件を考えよう。

$E_1(P) = E_2(P)$  であるから、(4-1) より、

$$\dot{P} = 2E(P) - kP$$

したがって、 $P^N$  は、

$$E(P^N) = \frac{kP^N}{2} \tag{4-3-17}$$

を満たす。そして、

$$\frac{\partial \dot{P}}{\partial P} = 2E'(P) - k$$

から、 $P^N$  が漸近的に安定的であるための必要十分条件は、

$$E'(P^N) < \frac{k}{2}$$

であることがわかる。さらに、この条件を (4-3-8) を考慮して書き換えると、

$$E'(P^N) = \frac{k}{3} + h'(P^N) < \frac{k}{2},$$

したがって、

$$h'(P^N) < \frac{k}{6}$$

となる。次に、 $h'(P^N)$  を計算して、さらに上記の条件を書き換えよう。(4-3-8) 及び (4-3-17) より、 $h'(P^N)$  は

$$h'(P^N) = \frac{kP^N}{2} - \frac{1}{3}(A + kP^N) = \frac{kP^N}{6} - \frac{A}{3}$$

となるので、これを (4-3-11) に代入すれば、直ちに、 $h'(P^N)$  は

$$h'(P^N) = \frac{\delta \left( \frac{kP^N}{6} - \frac{A}{3} \right) + P^N F - C}{3 \left( \frac{kP^N}{6} - \frac{A}{3} \right)}$$

$$= \frac{\delta k P^N - 2\delta A + 6P^N F - 6C}{3kP^N - 6A}$$

と計算される。したがって、 $P^N$ が漸近的に安定的であるための必要十分条件は、

$$\frac{\delta k P^N - 2\delta A + 6P^N F - 6C}{3kP^N - 6A} < \frac{k}{6} \quad (4-3-18)$$

となる。

$u'(E) = A - E$ であることから、各国は $E \geq A$ となるような状況は望まないと考えよう。このとき、

$$3kP^N - 6A = 3k \frac{2E(P^N)}{k} - 6A = 6(E(P^N) - A) < 0,$$

すなわち、(4-3-18)の左辺の分母は負であるので、(4-3-18)は、

$$6(\delta k P^N - 2\delta A + 6P^N F - 6C) > k(3kP^N - 6A),$$

$$(6\delta k + 36F - 3k^2)P^N > 12\delta A + 36C - 6Ak,$$

したがって、

$$P^N > \frac{12\delta A + 36C - 6Ak}{6\delta k + 36F - 3k^2} \quad (4-3-19)$$

と変形できる。 $C$ と $F$ の定義を考慮して(4-3-19)の右辺をさらに計算すると、

$$(4-3-19) \text{の右辺} = \frac{4\delta A + 12 \frac{2A(k+\delta)}{3} - 2Ak}{2\delta k + 12 \frac{\delta k + k^2 + 3s}{3} - k^2} = \frac{4\delta A + 8Ak + 8\delta A - 2Ak}{2\delta k + 4\delta k + 4k^2 + 12s - k^2}$$

$$= \frac{4\delta A + 2Ak}{2\delta k + k^2 + 4s} \equiv \tilde{P}$$

となる。以上より、 $P^N$ が漸近的に安定的であるための必要十分条件は、最終的には

$$P^N > \frac{4\delta A + 2Ak}{2\delta k + k^2 + 4s} \equiv \tilde{P}$$

となる。なお、 $E < A$ を考えている以上、

$$P^N = \frac{2E(P^N)}{k} < \frac{2A}{k}$$

は、明らかである。

Q.E.D.

割引率  $\delta$  が十分小さい場合、 $\tilde{P}$  は  $P^c = \frac{2Ak}{k^2 + 4s}$  に十分近くなる。したがって、割引率  $\delta$  が

十分小さい場合、定理 4-3 は以下の重要な事実を主張する。非線形 Markov-perfect 戦略を採用し、auxiliary equation を利用してより広範な解（最適戦略）を見つけようと分析した場合、協調して PC を行ったときと同水準であるような汚染物質ストックの定常値を探ることができる。そして、Dockner and Long (1993) は、Proposition 4 (Dockner and Long (1993, p.23)) において、この定理を満たすような  $P^N$  に対応する最適戦略が存在すると主張している。しかしながら、彼らのこの主張は、図 4-1 における無数の解曲線（特に、 $\dot{P}=0$  直線の付近）の存在を前提しての議論であって、実際には、(4-3-16) から導出される最適戦略のうち、定理 4-3 を満たす  $P^N$  に対応するものは、特殊なパラメータ条件の下でしか確認できない。これを以下で説明しよう。

(4-3-16) から導出される解（最適戦略）について具体的に考えよう。この際、説明を容易にするために、(4-3-16) を

$$K = (E - a(P))^{\xi_1} \cdot (E - b(P))^{\xi_2} \quad (4-3-20)$$

$$\text{ただし、} a(P) \equiv \left( Z_a + \frac{k}{3} \right) P + \frac{A}{3} - Z_a \frac{C}{F} \text{ 及び } b(P) \equiv \left( Z_a + \frac{k}{3} \right) P + \frac{A}{3} - Z_b \frac{C}{F}$$

と表わすことにする。(4-3-20) の右辺のべき乗  $\xi_1$  及び  $\xi_2$  の具体形は、それぞれ、

$$\begin{aligned} \xi_1 &\equiv \frac{Z_a}{Z_b - Z_a} = \frac{\frac{\delta}{6} + \frac{1}{6} \sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)}}{-2 \cdot \frac{1}{6} \sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)}} = \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)}}{-2 \sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)}} \\ &= -\frac{\delta}{2 \sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)}} - \frac{1}{2} \\ \xi_2 &\equiv -\xi_1 - 1 = \frac{\delta}{2 \sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)}} + \frac{1}{2} - 1 \\ &= \frac{\delta}{2 \sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$



と計算される。これらに、 $\frac{\delta}{2\sqrt{\delta^2+4(\delta k+k^2+3s)}} < \frac{1}{2}$  を考慮すれば、 $\xi_1$  と  $\xi_2$  は、

$$-1 < \xi_1 < -\frac{1}{2} < \xi_2 < 0$$

を満たすような実数値であることがわかる。今、図4-1において、 $E > a(P)$ かつ $E > b(P)$ であるような領域をゾーン1とし、そこから反時計周りにゾーン2、3、及び4と呼ぶことにしよう。これをまとめると、表4-1の第1列のようになる。

(4-3-20)の左辺の $K$ はその定義( $K \equiv e^x$ )より、正数であることは明らかであるので、表4-1の第2列にある「(4-3-20)の右辺の値」が正数をとる場合のみ、(4-3-20)を満たす解曲線の存在が言える。そして、その結果を一覧したのが、第3列である。先に計算したように、 $\xi_1$ 、 $\xi_2$ はともに実数であるから、ゾーン1において $(E-a(P))^{\xi_1}$ 、 $(E-b(P))^{\xi_2}$ がともに正数となるのは明らかであろう。ところが、ゾーン2、3、4では、 $E-a(P)$ 、あるいは、 $E-b(P)$ のうち少なくともどちらか片方が負である。したがって、その負値のべき( $\xi_1$  and / or  $\xi_2$ )が有理数のときは解曲線の存在、不存在を判定できるのであるが、べき乗が無理数の場合は「負の値の無理数乗( $z^\xi$ )」を考えると非常に厄介な問題を含み、上述の判定が難しい。この点は、auxiliary equationを利用した最適解(最適戦略)の導出に残された1つの課題と言えよう。なお、この問題の1つの解決策としては、以下のようなシミュレーションによる方法が考えられる。負の値 $z$ は、必ず $z = (-1) \times \tilde{z} (\tilde{z} \in R_+)$ と書けるため、 $z^\xi = (-1)^\xi \times \tilde{z}^\xi$ となる(ただし、 $R_+$ は正数領域を表す)。さらに、 $\tilde{z}^\xi \in R_+$ であることから、「負の値の無理数乗( $z^\xi$ )」の値の判定は、 $(-1)^\xi$ の値を調べれば十分である。 $\xi$ の値は、先ほどの $\xi_1$ 、 $\xi_2$ の計算より、かなり限定された範囲にあるから、この範囲内の無理数の十分正確な近似値( $\xi$ )を抽出し、 $z^\xi$ を複素数の範囲で計算する( $z^\xi = a + bi$ ,  $a, b \in R$ ,  $i^2 = -1$ )。このような方法によれば、図4-1を描くための前提条件としての「(4-3-20)の右辺の値」について、より有用な情報が得られるであろう。

表4-1からわかるように、図4-1に描かれた無数の曲線のうち、パラメータの関係に関わることなく、それらが必ず(4-3-20)の解となるのは、ゾーン1の曲線だけである。そして、その他のゾーンでは、パラメータの特定の関係の下でしか解曲線の存在は確認できない。ところが、定常状態での汚染物質のストック $P^N$ を表わす直線 $\dot{P} = 0$ は、ゾーン1と交わることはありえない(数学注4-3を参照)。したがって、定理4-3を満たす $P^N$ に対応する解曲線の存在については、表4-1の第2列に挙げた

パラメータの条件によって、かなり限定的な場合でしか確認することができていない。<sup>4)</sup>

表 4 - 1

	$(E - a(P))^{s_1}$ の値 $\times$ $(E - b(P))^{s_2}$ の値 = (4-3-20) の右辺の値	解曲線の存在・不存在	
ゾーン 1 : $E - a(P) > 0$ $E - b(P) > 0$	(正数) $\times$ (正数) = 正数	無数に存在	
ゾーン 2 : $E - a(P) > 0$ $E - b(P) < 0$	$\xi_2$ が有理数 : $m_2, n_2$ 奇数, 偶数 : (正数) $\times$ (正数) = 正数 奇数, 奇数 : (正数) $\times$ (負数) = 負数 偶数, 奇数 : (正数) $\times$ (複素数) = 複素数	無数に存在 存在しない	
	$\xi_2$ が無理数 : (正数) $\times$ (@) = ?	判定できず	
ゾーン 3 : $E - a(P) < 0$ $E - b(P) < 0$	$\xi_1$ と $\xi_2$ がともに有理数 : $m_1, n_1, m_2, n_2$ 奇, 偶, 奇, 偶 : (正数) $\times$ (正数) = 正数 奇, 偶, 奇, 奇 : (正数) $\times$ (負数) = 負数 奇, 偶, 偶, 奇 : (正数) $\times$ (複素数) = 複素数 奇, 奇, 奇, 偶 : (負数) $\times$ (正数) = 負数 奇, 奇, 奇, 奇 : (負数) $\times$ (負数) = 正数 奇, 奇, 偶, 奇 : (負数) $\times$ (複素数) = 複素数 偶, 奇, 奇, 偶 : (複素数) $\times$ (正数) = 複素数 偶, 奇, 奇, 奇 : (複素数) $\times$ (負数) = 複素数 偶, 奇, 偶, 奇 : (複素数) $\times$ (複素数) = 正数 = 負数 = 複素数	無数に存在 存在しない 無数に存在 存在しない 無数に存在 存在しない	
	$\xi_1$ あるいは $\xi_2$ の少なくとも一方が無理数	判定できず	
	ゾーン 4 : $E - a(P) < 0$ $E - b(P) > 0$	$\xi_1$ が有理数 : $m_1, n_1$ 奇数, 偶数 : (正数) $\times$ (正数) = 正数 奇数, 奇数 : (負数) $\times$ (正数) = 負数 偶数, 奇数 : (複素数) $\times$ (正数) = 複素数	無数に存在 存在しない
		$\xi_1$ が無理数 : (@) $\times$ (正数) = ?	判定できず

「偶」は偶数、「奇」は奇数、「複素数」は実数を除いた複素数を意味する。

$\xi_i$  が有理数のとき、 $\xi_i = \frac{n_i}{m_i}$  と定義できる ( $i=1, 2$ )。ただし、 $\frac{n_i}{m_i}$  は既約分数で、 $m_i, n_i$  は正整数である。

なお、第 2 列の条件の導出については、数学注 4 - 2 を参照されたい。

@ は、定義は可能であるが、その値 (負の無理数乗) については解明されていない。

4) Tsutsui and Mino (1990) のモデルに関して言えば、彼らの状態変数の定常状態を表わす直線は、ここで言うゾーン 1 と一部で交わりを持つため、若干の修正を施せば、パラメータの関係に関わらず、安定的な解の存在が確言できる。

しかしながら、ゾーン1に限って見ても、やはり解曲線は無数に存在する。この解（最適戦略）のnon-uniquenessは、Dockner and Long (1993, p.23) も指摘しているように、無限期間のdynamicゲームに付随して起こる問題、すなわち、定理2-3；Folkの定理を反映した結果となっている。

## 結びにかえて

本論文では、TBP問題へのゲーム論的接近に関して、その数学的背景から実際の利用までをサーベイしてきた。ここで、要点をまとめながら、いくつかの気づいた点を述べたい。近年盛んにTBP問題をゲームとして定式化する試みがなされている。そして、その定式化においては、TBP問題を「各国や地域（player）が非協力的に自己の利得を最大化するように汚染物質の最適制御（戦略）を行う $n$ -playerの微分ゲーム」と捉えるのが主流となっている。その際、採用される戦略の主たるものは、open-loop戦略とfeedback戦略の2つである。open-loop戦略を採用する場合は、従来の1国の環境汚染制御問題の分析で用いられてきたPontryaginの最大値原理を各playerの最適化行動に適用することによって分析を行うことができる。しかし、feedback戦略の場合は、制御変数がcurrentな状態変数に依存するために、この方法を使用することが困難となる。そしてこの場合、戦略の本質をBellmanの最適性原理に求めて、H-J-B方程式を分析用具として用いるのが一般的である。なお、問題の性質上、負のストックの遷移過程を重視するため、この2つの戦略のうち、feedback戦略を採用した分析により多くの関心が示され、これを扱った文献が多い。したがって、本論でも、feedback戦略を採用し、H-J-B方程式を利用して議論を行った。H-J-B方程式を利用して分析する際、よく使われる方法は、guessing methodと呼ばれる係数比較法である。しかしながら、この方法で得られる最適戦略は、currentな状態変数についての線形性を仮定しており、この線形性という特殊性はしばしば批判される。そこで、議論をより一般的にするため、非線形Markov-perfect戦略を考え、auxiliary equationを利用して分析する方法が取られている。非線形Markov-perfect戦略を採用した場合、auxiliary equationを変換して得られる方程式から、最適解（最適戦略）が導出される。このとき、この変換された方程式から無数の解曲線が導出される（Folkの定理）が、第4節で指摘したように、これら解曲線の現れる範囲（存在範囲）はパラメータの関係次第で、かなり限定されたものとなる。そして、少なくとも、Dockner and Long (1993) のモデルについて言えば、安定的な解の存在は極めて限られ

たパラメータの下でしか確認できていない。以上に述べたように、本論におけるH-J-B方程式導出以降の議論は、模索の段階にあると思われる。

これまで、TBP問題のゲーム論的研究は、主にヨーロッパ諸国あるいはUSSRに視点を向けたモデルの枠内で行われてきたが、今後、日本を含む東アジアの地域的特性を考慮に入れたモデルの構築やその理論的特性の解明が必要であろう。さらに、そのモデルの数量的・実証的分析等は、TBP問題で分析されるべき重要な課題と言える。

#### 参考文献

- Arrow, Kenneth J. and Mordecai Kurz, 1970, *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*, Johns Hopkins University Press.
- Basar, Tamer and Geert Jan Olsder, 1995, *Dynamic Noncooperative Game Theory*, second edition, Academic Press.
- Bellman, Richard, 1957, *Dynamic Programming*, Princeton University Press.
- Clemhout, Simone and Henry Wan, Jr., 1991, "Environmental Problem as a Common-Property Resource Game," in Hämäläinen, Raimo Pertti and Harri Kalevi Ehtamo (eds.), *Dynamic Games in Economic Analysis*, pp.132-154, Springer-Verlag.
- Clemhout, Simone and Henry Wan, Jr., 1994, "Differential Games : Economic Applications," in R.J. Aumann and S. Hart (eds.), *Handbook of Game Theory*, vol.2, North-Holland, pp.801-825.
- Dasgupta, Partha and Karl-Göran Mäler, 1995, "Poverty, Institutions, and the Environmental Resource-Base," in Jere Behrman and T.N. Srinivasan (eds.), *Handbook of Development Economics*, vol.3, North-Holland, pp.2371-2463.
- Dockner, J. Engelbert and Ngo Van Long, 1993, "International Pollution Control : Cooperative versus Noncooperative Strategies," *Journal of Environmental Economics and Management*, vol.24, pp.13-29.
- Fershtman, Chaim and Morton I. Kamien, 1987, "Dynamic Duopolistic Competition with Sticky Prices," *Econometrica*, vol.55, pp.1151-1164.
- Friedman, James W., 1971, "A Non-cooperative Equilibrium for Supergames," *Review of Economic Studies*, vol.38, pp.1-12.
- Gibbons, Robert, 1992, *A Primer in Game Theory*, Harvester Wheatsheaf.

- Kaitala, Veijo, Matti Pohjola, and Olli Tahvonen, 1991, "Transboundary Air Pollution between Finland and the USSR : A Dynamic Acid Rain Game," in Hämäläinen, Raimo Pertti and Harri Kalevi Ehtamo (eds.), *Dynamic Games in Economic Analysis*, pp.183-192, Springer-Verlag.
- Kamien, Morton I. and Nancy L. Schwartz, 1991, *Dynamic Optimization*, second edition, North-Holland.
- Keeler, Emmett, Michael Spence, and Richard Zeckhauser, 1971, "The Optimal Control of Pollution," *Journal of Economic Theory*, vol.4, pp.19-34.
- Léonard, Daniel and Ngo Van Long, 1992, *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*, Cambridge University Press.
- Martin, W.E., Robert H. Patrick, and Boleslaw Tolwinski, 1993, "A Dynamic Game of a Transboundary Pollutant with Asymmetric Players," *Journal of Environmental Economics and Management*, vol.24, pp.1-12.
- Nash, John F., Jr., 1950, "Equilibrium Points in n-Person Games," *Proceedings of the National Academy of Science*, vol.36, pp.48-49.
- Tahvonen, Olli, 1996, "Trade with Polluting Nonrenewable Resources," *Journal of Environmental Economics and Management*, vol.30, pp.1-17.
- Tsutsui, Shunichi and Kazuo Mino, 1990, "Nonlinear Strategies in Dynamic Duopolistic Competition with Sticky Prices," *Journal of Economic Theory*, vol.52, pp.136-161.

数学注

3-1 : current-value-Hamiltonian と目的関数との関係

Arrow and Kurz (1970, pp.48-49) Proposition 7 を利用し、経済学で多用される時間割引率  $\delta$  の入った CASI モデルに合わせた Pontryagin の最大値原理を以下に提示する。

(個人の) 最適化問題

$$\begin{aligned} \max_{v_i(t)} \quad & U(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) \equiv \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \cdot u(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) dt \\ \text{s. t.} \quad & \dot{x}_j(t) = f^j(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

ただし、 $u(\cdot)$  は個人の効用関数で連続微分可能とする。また、 $v_k (k=1, \dots, K)$  は個人の有する  $K$  個の制御変数で、一括して  $\mathbf{v} \equiv (v_1, \dots, v_k)$  と表す。そして、その他については既出の記号にしたがう。

current-value-Hamiltonian :

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = u(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) \cdot f^j(\mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t))$$

最適のための必要条件 :

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad \text{①}$$

$$\dot{\lambda}_j = \delta \cdot \lambda_j - \frac{\partial H}{\partial x_j} \quad j = 1, \dots, m \quad \text{②}$$

以下では、Dasgupta and Mäler (1995, p.2451) を参考に、current-value-Hamiltonian  $H(\cdot)$  と目的関数  $U(\cdot)$  との関係に言及する。

current-value-Hamiltonian が  $\lambda_j (j=1, \dots, m)$  について線形であることを考慮すれば、Hamiltonian の  $t$  に関する微分は、

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial H}{\partial x_j} \cdot \dot{x}_j + \frac{\partial H}{\partial \lambda_j} \cdot \dot{\lambda}_j \right) + \sum_{k=1}^K \frac{\partial H}{\partial v_k} \cdot \dot{v}_k \\ &= \sum_{j=1}^m \dot{x}_j \left( \frac{\partial H}{\partial x_j} + \dot{\lambda}_j \right) + \sum_{k=1}^K \frac{\partial H}{\partial v_k} \cdot \dot{v}_k \end{aligned}$$

最適経路に沿って (①、②より)、

$$\dot{H}^* = \sum_{j=1}^m \dot{x}_j (\delta \cdot \lambda_j) = \delta \cdot \sum_{j=1}^m \dot{x}_j \cdot \lambda_j = \delta (H^* - u^*)$$

ただし、右上付きの“\*”は、それが最適値で評価されていることを表す。

上式は、積分の結果、

$$H^*(t) = \delta \cdot \int_0^{\infty} e^{-\delta(\tau-t)} \cdot u^*(\tau) d\tau \quad (3)$$

となる。③はまさに、最適経路に沿って、current-value-Hamiltonianがフローの効用の割引現在値を反映したものであることを示している。

#### 4-1：最適線形Markov-perfect戦略と最適非線形Markov-perfect戦略との関係

ここでは、非線形Markov-perfect戦略を採用した場合の最適戦略の1つのsingular solution

$$E_b = \left( Z_b + \frac{k}{3} \right) P + \frac{A}{3} - Z_b \frac{C}{F}$$

が、定理4-2で示された線形Markov-perfect戦略を採用した場合の最適戦略

$$E = (A - \beta_M) - \alpha_M P$$

と一致することを証明する。

まずは、①  $Z_b + \frac{k}{3} = -\alpha_M$ を示そう。 $Z_b$ 及び $F$ の定義より、

$$\begin{aligned} Z_b + \frac{k}{3} &= \frac{\delta}{6} - \sqrt{\frac{\delta^2}{36} + \frac{\delta k + k^2 + 3s}{9}} + \frac{k}{3} \\ &= -\frac{1}{3} \left( -\left(k + \frac{\delta}{2}\right) + \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \delta k + k^2 + 3s} \right) \\ &= -\frac{1}{3} \left( -\left(k + \frac{\delta}{2}\right) + \sqrt{\left(k + \frac{\delta}{2}\right)^2 + 3s} \right) = -\alpha_M \end{aligned}$$

次に、②  $\frac{A}{3} - Z_b \frac{C}{F} = A - \beta_M$ を示そう。

$$\begin{aligned} \text{②の左辺} &= \frac{A}{3} - \left( \frac{\delta}{6} - \sqrt{\frac{\delta^2}{36} + \frac{\delta k + k^2 + 3s}{9}} \right) \frac{2A(k + \delta)}{\delta k + k^2 + 3s} \\ &= \frac{A}{3} - \frac{A\delta(k + \delta)}{3(\delta k + k^2 + 3s)} + \frac{A(k + \delta)\sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)}}{3(\delta k + k^2 + 3s)} \\ &= \frac{A \left( \delta k + k^2 + 3s - (\delta k + \delta^2) + (k + \delta)\sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)} \right)}{3(\delta k + k^2 + 3s)} \end{aligned}$$

$$= \frac{A \left( (k^2 + \delta^2) + 3s + (k + \delta) \sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)} \right)}{3(\delta k + k^2 + 3s)}$$

$$\textcircled{2} \text{の右辺} = A \frac{2A\alpha_M}{\delta + k + 3\alpha_M}$$

$$= A \frac{\delta + k + \alpha_M}{\delta + k + 3\alpha_M}$$

$$= A \frac{\delta + k - \left( Z_b + \frac{k}{3} \right)}{\delta + k - 3 \left( Z_b + \frac{k}{3} \right)} \quad [\because \textcircled{1}]$$

$$= A \frac{\delta + \frac{2}{3}k - \left( \frac{\delta}{6} - \sqrt{\frac{\delta^2}{36} + \frac{\delta k + k^2 + 3s}{9}} \right)}{\delta - 3 \left( \frac{\delta}{6} - \sqrt{\frac{\delta^2}{36} + \frac{\delta k + k^2 + 3s}{9}} \right)}$$

$$= A \frac{5\delta + 4k + \sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)}}{3 \left( \delta + \sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)} \right)}$$

$$= \frac{A}{3} \cdot \frac{\left( 5\delta + 4k + \sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)} \right) \left( \delta - \sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)} \right)}{\delta^2 - (\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s))}$$

$$= \frac{A}{3} \cdot \frac{5\delta^2 + 4\delta k + \delta \sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)} - (5\delta + 4k) \sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)}}{-4(\delta k + k^2 + 3s)}$$

$$= \frac{A \left( -\frac{1}{4} \right) \left( 4\delta^2 - 4k^2 - 12s - (4\delta + 4k) \sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)} \right)}{3(\delta k + k^2 + 3s)}$$

$$= \frac{A \left( (k^2 - \delta^2) + 3s + (\delta + k) \sqrt{\delta^2 + 4(\delta k + k^2 + 3s)} \right)}{3(\delta k + k^2 + 3s)}$$

以上で、 $\textcircled{2}$ が示された。

$\textcircled{1}$ 及び $\textcircled{2}$ を示したことにより、証明すべき命題の成立は自明である。

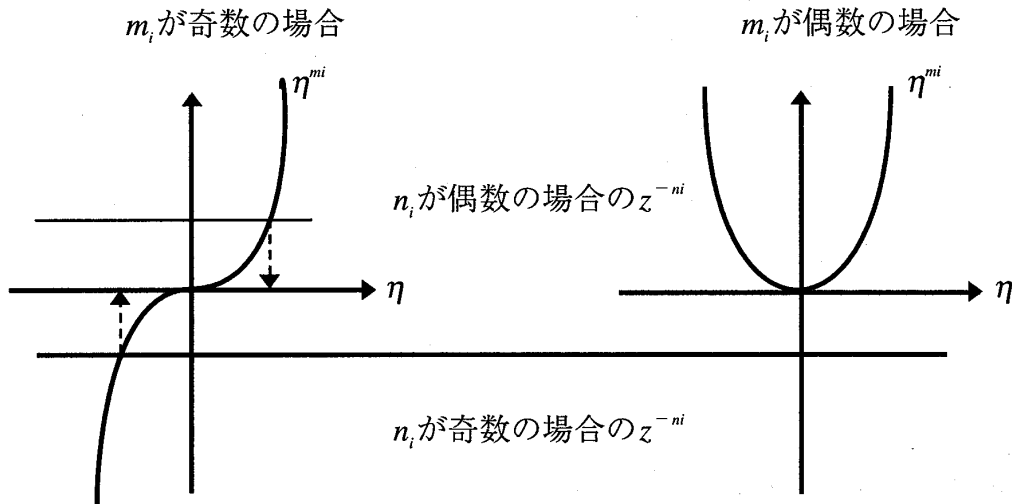
Q. E. D.



4-2：表4-1の第2列の条件の導出

$\xi_i$ が有理数の場合を想定し、 $\eta \equiv z^{\xi_i}$ の値を考えよう（ただし、 $z < 0, i = 1, 2$ ）。 $\xi_i$ は有理数であるので、 $\xi_i = -\frac{n_i}{m_i}$ と書ける。ただし、 $\frac{n_i}{m_i}$ は既約分数で、 $m_i, n_i$ は正整数である。

そして、下図より、 $\eta^{m_i} = z^{-n_i}$ を満たす $\eta = z^{\xi_i}$ の値は、明らかである。



4-3：図4-1におけるグラフ $P=0$ の位置

図4-1において、直線 $E = \frac{k}{2}P$  ( $P=0$ ) は、ゾーン1とは交わらないことを示そう。

$Z_a$ 及び $F$ の定義により、

$$a'(P) - \frac{k}{2} = \left( Z_a + \frac{k}{3} \right) - \frac{k}{2} = \frac{\delta}{6} + \sqrt{\frac{\delta^2}{36} + \frac{\delta k + k^2 + 3s}{9}} - \frac{k}{6}$$

$$> \frac{\delta}{6} + \sqrt{\frac{k^2}{9}} - \sqrt{\frac{k^2}{36}} > \frac{\delta}{6} > 0$$

したがって、直線 $E = \frac{k}{2}P$ の傾きは、直線 $E_a = a(P)$ の傾きよりも小さい。

次に、 $P = \frac{C}{F}$ における縦軸座標の値を比較しよう。 $a(P)$ の定義より、

$$a\left(\frac{C}{F}\right) = \left( Z_a + \frac{k}{3} \right) \frac{C}{F} + \frac{A}{3} - Z_a \frac{C}{F} = \frac{A}{3} + \frac{k}{3} \cdot \frac{C}{F}$$

である。したがって、 $C$ 及び $F$ の定義により、

$$\begin{aligned}
a\left(\frac{C}{F}\right) &= \frac{k}{2} \cdot \frac{C}{F} = \frac{A}{3} + \frac{k}{3} \cdot \frac{C}{F} = \frac{k}{2} \cdot \frac{C}{F} = \frac{A}{3} - \frac{k}{6} \cdot \frac{C}{F} = \frac{A}{3} - \frac{k}{6} \cdot \frac{2A(k+\delta)}{\delta k + k^2 + 3s} \\
&= \frac{\delta k + k^2 + 3s - k^2 - \delta k}{3(\delta k + k^2 + 3s)} A = \frac{sA}{\delta k + k^2 + 3s} > 0
\end{aligned}$$

が成立する。上式は、 $P = \frac{C}{F}$ において、直線 $E = \frac{k}{2}P$ が直線 $E_a = a(P)$ の下方に位置していることを意味する。

以上の計算結果に、両直線が正の傾きを持つことを考え合わせれば、直線 $E = \frac{k}{2}P$ が、ゾーン1と交わらないことは、図4-1より明らかである。 Q. E. D.

#### 略号表

TBP	: transboundary pollution
H-J-B	: <u>H</u> amilton- <u>J</u> acobi- <u>B</u> ellman
CASI	: <u>c</u> ontinuous, <u>a</u> utonomous system of <u>i</u> nfinite horizon
ID	: <u>i</u> terated elimination of strictly <u>d</u> ominated strategies
IS	: <u>i</u> nformation set
OL	: <u>o</u> pen- <u>l</u> oop
FB	: <u>f</u> eed <u>b</u> ack
PC	: <u>p</u> ollution <u>c</u> ontrol