ISSN: 2355 – 7109
Program Studi Pendidikan Fisika FKIP Universitas Sriwijaya
Jl. Palembang Prabumulih KM 32 Indralaya KAb. Ogan Ilir Prov. Sumatera Selatan Indonesia 30662
jipf@fkip.unsri.ac.id
http://fkip.unsri.ac.id/index.php/menu/104

PENYELESAIAN PERSAMAAN KONDUKSI PANAS DIMENSI TIGA PADA KOORDINAT KARTESIUS

Saparini[1)]
[1)]Dosen Pendidikan Fisika FKIP Universitas Sriwijaya
saparini@fkip.unsri.ac.id

Abstrak : Penulisan artikelini bertujuan untuk : (1) membentuk persamaan konduksi panas dimensi tiga dalam keadaan *steady*. (2) menentukan penyelesaian persamaan konduksi panas dimensi tiga dalam keadaan *steady* yang memenuhi syarat batas tertentu.Konduksi didefinisikan sebagai proses mengalirnya panas dari daerah yang bersuhu lebih tinggi ke daerah yang bersuhu lebih rendah di dalam satu medium (padat, cair, atau gas) atau antara medium-medium yang berlainan yang bersinggungan secara langsung, dalam hal ini medium yang akan dibahas adalah batangan dimensi tiga. Aliran panas pada batangan dibatasi oleh bidang-bidang yang merupakan bagian muka atau sisi dari batangan tersebut.Persamaan konduksi panas dimensi tiga merupakan persamaan diferensial seperti ditunjukkan persamaan diferensial berikut $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$ dengan $\alpha = \frac{k}{c\rho}$ merupakan difusivitas (daya serap) panas.Penyelesaian umum persamaan konduksi panas dimensi tiga dapat ditulis sebagai $T(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi}{a}x \sin\frac{n\pi}{b}y \sinh\lambda_{mn}z$. Dengan koefisien fourier, $A_{mn}\sinh\lambda_{mn}c = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,dx\,dy$.

Kata Kunci : konduksi panas, persamaan konduksi panasdimensi tiga, keadaan *steady*.

PENDAHULUAN

Fisika merupakan cabang ilmu alam, selain dibahas hal-hal yang bersifat fisis juga dibahas secara matematis. Seiring dengan perkembangan jaman, kemajuan di bidang fisika memunculkan banyak permasalahan yang semakin rumit sehingga membutuhkan perhitungan matematis yang rumit juga.Salah satu contoh permasalahan fisika yang dapat diformulasikan secara matematis adalah persamaan konduksi panas. Persamaan konduksi panas secara matematis dituliskan dalam bentuk persamaan diferensial.

Persamaan diferensial merupakan bagian penting dari kalkulus, yang pertama kali diperkenalkan oleh ilmuwan asal Inggris, Isaac Newton (1642-1727) dan ilmuwan asal Jerman, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pada abad 17.Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang melibatkan satu atau lebih diferensial parsial. Tentu saja, persamaan ini harus melibatkan paling sedikit dua variabel bebas.Tingkat (orde) persamaan diferensial parsial adalah turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut.

Persamaaan konduksi panas pertama kali diperkenalkan oleh ilmuwan asal perancis, Pierre Simon Marquis De Laplace (1749-1827), sehingga persamaan konduksi panas lebih dikenal sebagai persamaan laplace. Persamaaan laplace merupakan persamaan konduksi panas dalam keadaan steady artinya temperatur tidak tergantung waktu.Persamaan yang diperkenalkan oleh Laplace tersebut berdasarkan penelitiannya terhadap konduksi panas pada kabel. Penelitian tersebut dilakukan dengan mengandaikan bahwa luas penampang kabel diabaikan, sehingga konduksi panas pada kabel dapat dipandang sebagai konduksi panas pada sebuah garis lurus. Selanjutnya persamaan konduksi panas tersebut dikenal sebagai persamaan konduksi panas dimensi satu.

Perkembangan berikutnya Laplace memperkenalkan persamaan konduksi panas dimensi dua yang merupakan perumunan dari persamaan konduksi panas dimensi satu, yaitu melalui penelitian konduksi panas pada lempengan. Penelitian tersebut memandang bahwa tebal benda diabaikan, sehingga konduksi panas pada lempengan dapat dipandang sebagai konduksi panas pada bidang. Selanjutnya, persamaan konduksi panas pada bidang tersebut disebut sebagai persamaan konduksi panas dimensi dua.

Konduksi panas pada kenyataannya ditemui pada benda berbentuk batangan, sehingga konduksi panas pada batangan dapat dipandang sebagai konduksi panas pada ruang yang dibatasi sumbu x, y dan z. Selanjutnya konduksi panas pada batangan dikenal sebagai konduksi panas tiga dimensi, yang merupakan perumuman dari konduksi panas dimensi satu dan dua. Berdasarkan persamaan konduksi panas dimensi satu dan dua, maka dapat ditentukan persamaan konduksi panas dimensi tiga dan penyelesaiaannya yang memenuhi syarat awal dan syarat batas tertentu.

Berdasarkan uraian tersebut dapat diidentifikasi masalah sebagai berikut, persamaan konduksi panas dimensi tiga merupakan perumusan dari persamaan konduksi panas dimensi satu dan dua yang penyelesaiannya memenuhi syarat awal dan syarat batas tertentu.Adapun rumusan masalah sebagai berikut : (1) Bagaimana bentuk persamaan konduksi panas pada benda atau batangan dimensi tiga dalam keadaan steady?; (2) Bagaimana menentukan penyelesaian persamaan konduksi panas dimensi tiga dalam keadaan steady yang memenuhi syarat batas tertentu?. Sedangkantujuan penulisan ini adalah sebagai berikut : dapat membentuk persamaan konduksi panas dimensi tiga dalam keadaan *steady* dan dapat menentukan penyelesaian persamaan konduksi panas dimensi tiga dalam keadaan *steady* yang memenuhi syarat batas tertentu

METODE

Metode yang digunakan adalah penyelesaian persamaan matematis dari persamaan konduksi panas dimensi tiga.Penyelesaian masalah syarat batas persamaan konduksi panas dimensi tiga dapat dilakukan melalui penerapan metode separasi variabel.Pembahasan dibatasi pada beberapa permasalahan sebagai berikut :

1. Benda dari batangan homogen, dimana temperatur pada ujung-ujung batangan sama dengan nol dan panjang batangan konstan meskipun terjadi perubahan temperatur.
2. Batangan adalah terisolasi sempurna, sehingga tidak ada aliran panas yang masuk atau keluar.
3. Konduksi panas pada benda atau batangan dalam keadaan steady, artinya temperatur tidak tergantung pada waktu.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Persamaan Diferensial Parsial Linear Orde Dua

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang melibatkan satu atau lebih diferensial parsial. Tentu saja, persamaan ini harus melibatkan paling sedikit dua variable bebas. Tingkat (orde) persamaan diferensial parsial adalah turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan tersebut. Persamaan diferensial parsial linear orde dua dengan dua variable bebas, secara umum dapat dituliskan sebagai :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G \quad (1)$$

dengan *u* adalah fungsi dari variabel *x* dan *y* serta A, B, … dan G dapat bergantung pada x dan y. Persamaan orde dua dengan variabel bebas x dan y yang tidak memenuhi persamaan (1) disebut taklinear. Jika G = 0, ungkapan (1) disebut homogen, sedangkan jika $G \neq 0$ disebut takhomogen. Pernyataan umum untuk orde yang lebih tinggi dapat dibuat lebih besar atau sama dengan nol.

Syarat Batas

Syarat batas adalah syarat-syarat tertentu atau kondisi-kondisi tertentu yang terlibat dalam persamaan diferensial parsial untuk membantu mencari penyelesaian dari persamaan diferensial tersebut. Ada tiga kemungkinan syarat batas, yaitu interval terbatas, interval setengah tak terbatas, dan interval tak terbatas.

Untuk interval terbatas (0,L), mempunyai dua syarat batas yaitu pada x = 0 dan x = L. Untuk interval setengah tak terbatas (0<∞) biasa ditulis x > 0, syarat batasnya hanya pada x = 0, dan untuk interval tak terbatas $(-\infty,\infty)$ tidak mempunyai syarat batas.

MetodeSeparasi Variabel

Suatu persamaan diferensial, kadang-kadang tidak langsung dapat diselesaikan secara sederhana karena letak variabel-variabel kadang-kadang tidak sesuai, oleh karena itu perlu diadakan pemisahan variabel agar persamaan diferensial dapat diselesaikan dengan mudah. Variabel-variabel dalam persamaan diferensial berbentuk $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ dapat dipisahkan dengan syarat bahwa, persamaan diferensial tersebut dapat ditulis dalam bentuk $f_1(x)g_2(y)dx+f_2(x)g_1(y)dy=0$.

Bentuk primitif persamaan diferensial diperoleh dengan cara integrasi.

Contoh soal 1 :

Selesaikan persamaan differensial berikut

$$xy' = y+1$$

Penyelesaian :

Dengan pemisahan variabel, persamaan $xy' = y+1$ dapat dituliskan sebagai

$$\frac{y'}{y+1}=\frac{1}{x} \quad \text{atau} \quad \frac{dy}{y+1}=\frac{dx}{x}$$

Mengintegralkan kedua ruas diperoleh

$$\ln(y+1)=\ln x + C$$
$$\ln(y+1)=\ln x + \ln a$$
$$\ln(y+1)=\ln(ax)$$

Untuk menyederhanakan, tetapan integral C dituliskan $\ln a$ dengan a tetapan. Dengan demikian, penyelesaian persamaan $xy' = y+1$ adalah

$$y+1=ax$$

Deret Fourier

Pada tahun 1807, matematikawan asal Perancis, JBJ Foerier (1768-1830) mengemukakan hasil pemikirannya bahwa fungsi periodik dapat disajikan sebagai deret tak hingga dari sinus dan cosinus. Selanjutnya, ditunjukkan bagaimana dua fungsi periodik ini dapat disajikan ke dalam bentuk fungsi periodik yang lain. Diberikan deret $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n \cos\frac{n\pi x}{L}+b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$ dengan a_0, a_n, dan b_n adalah konstanta. Untuk sembarang nilai a_0, a_n, dan b_n deret ini disebut deret trigonometri. Jika koefisien a_0, a_n, dan b_n di pilih menurut aturan tertentu, maka koefisiennya disebut sebagai koefisien fourier, dan deretnya disebut deret fourier. Dapat disimpulkan, terdapat hubungan bahwa setiap deret fourier merupakan deret trigonometri, tetapi tidak

JURNAL INOVASI DAN PEMBELAJARAN FISIKA
ISSN: 2355 – 7109
Program Studi Pendidikan Fisika FKIP Universitas Sriwijaya
Jl. Palembang Prabumulih KM 32 Indralaya KAb. Ogan Ilir Prov. Sumatera Selatan Indonesia 30662
jipf@fkip.unsri.ac.id
http://fkip.unsri.ac.id/index.php/menu/104

semua deret trigonometri merupakan deret fourier.

Kumpulan fungsi-fungsi linear independen

$$\left\{1,\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right),\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right),\cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right),\ldots,\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right),\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right),\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right),\ldots\right\}$$

dapat dikatakan sebagai himpunan fungsi-fungsi orthogonal, karena fungsi-fungsi tersebut saling tegak lurus. Dalam kasus dari fungsi tersebut dapat dikatakan bahwa jika dua fungsi f dan g adalah orthogonal pada a < x < b maka

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

Teorema 1

Jika f adalah fungsi dengan periode p, maka 2p. 3p,…, np, -p, -2p, …, -np (dengan $n \neq 0$) adalah periode dari f, sehingga $f(x) = f(x+np)$

Teorema 2

Himpunan fungsi-fungsi $\left\{1,\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}$ merupakan himpunan orthogonal dalam batas { -L,L }, sehingga

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0 \qquad \text{m, n = 0,1,2, …}$$

$$\int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0 \qquad \text{m, n = 1,2, …, } m \neq n$$

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = 0 \qquad \text{m, n = 0,1,2, …, } m \neq n$$

Teorema 3

Nilai integral dari fungsi kuadrat yang diberikan dari himpunan $\left\{1,\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}$ adalah

$$\int_{-L}^{L}1.1dx = 2L$$

$$\int_{-L}^{L}\sin^2\frac{n\pi x}{L}dx = L$$

$$\int_{-L}^{L}\cos^2\frac{n\pi x}{L}dx = L, \qquad \text{n = 1, 2, …}$$

Deret fourier mempunyai kejadian-kejadian khusus yang disebabkan oleh nilai koefisien a_0, a_n, dan b_n, untuk mengetahuinya terlebih dahulu ditentukan koefisien-koefisien deret fourier tersebut.

Misalkan $f(x)$ adalah fungsi periodik dengan periode 2L. Fungsi $f(x)$ dapat disajikan sebagai deret

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$$

Sehingga dapat dituliskan

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right\} \quad (2)$$

Untuk menentukan a_o, kedua ruas tersebut diintegralkan dari –L sampai L. pada ruas kanan diasumsikan bahwa integral dari jumlahan tak hingga sama dengan jumlah dari tiap integralnya. Sehingga diperoleh

$$\int_{-L}^{L}f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right\}$$

(3)

Berdasarkan reorema 2 dan 3 persamaan (3) dapat ditulis

$$\int_{-L}^{L}f(x)dx = 2L\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n.0 + b_n.0\} \quad (4)$$

Penyelesaian persamaan (4) diperoleh

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)dx$$

Untuk menentukan a_n, kalikan kedua ruas persamaan (2) dengan

$\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$. Dengan mengasumsikan bahwa hasil dari jumlahan tak hingga sama dengan jumlah dari hasil dan kemudian integral dari jumlahan tak hingga sama dengan jumlah dari masing-masing integralnya, sehingga dapat ditulis

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx + b_n\int_{-L}^{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx\right\}$$

kemudian dengan menggunakan teorema 2 dan teorema 3, diperoleh

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = 0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{-L}^{L}\cos^2\frac{m\pi x}{L}dx + \sum_{n=1}^{\infty}b_n.0 = a_nL$$

Penyelesaian untuk a_n diperoleh

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

Dengan cara yang sama, dapat ditunjukkan bahwa

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Misalkan f adalah fungsi periodik dengan periode 2L. Deret fourier dari f adakah deret dengan bentuk

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right\}$$

dengan koefisien a_0, a_n, dan b_n adalah

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Koefisien ini disebut sebagai koefisien fourier.

Dalam deret fourier terdapat kejadian-kejadian khusus, yaiu hubungannya dengan nilai koefisien a_0, a_n, dan b_n. Misalkan f adalah fungsi yang didefinisikan pada setengah interval fourier (0,L), dan diinginkan deret fourier pada interval ini, maka f dapat diperluas pada interval (-L,0) sebagai fungsi ganjil dan fungsi genap.

Teorema 4

Misalkan f adalah fungsi yang didefinisikan pada interval (0,L) diperluas ke interval (-L,0) sebagai fungsi ganjil f_o, jika deret fouriernya ada, maka deret tersebut harus berbentuk $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$, dengan $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$ dan $a_o = a_n = 0$, untuk n = 1, 2, …

Teorema 5

Misalkan f adalah fungsi yang didefinisikan pada interval (0,L) diperluas ke interval (-L,0) sebagai fungsi ganjil , jika deret fouriernya ada, maka deret tersebut harus berbentuk

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{L}$$

dengan

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, dan$$

$$b_n = 0$$

Deret fourier tipe ini disebut deret fourier cosinus.

Jika diketahui fungsi $f(x,y)$ didefinisikan pada setiap 0 < x < a, 0 < y < b, maka dipunyai ekspansi deret fourier sinus ganda

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{L} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (5)$$

Kunci untuk menghitung koefisien A_{mn} adalah dengan menyelidiki bahwa fungsi $\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$ dan

JURNAL INOVASI DAN PEMBELAJARAN FISIKA
ISSN: 2355 – 7109
Program Studi Pendidikan Fisika FKIP Universitas Sriwijaya
Jl. Palembang Prabumulih KM 32 Indralaya KAb. Ogan Ilir Prov. Sumatera Selatan Indonesia 30662
jipf@fkip.unsri.ac.id
http://fkip.unsri.ac.id/index.php/menu/104

$\sin\frac{m'\pi x}{a}\sin\frac{n'\pi y}{b}$ orthogonal pada interval 0 < x < a, 0 < y < b, sehingga: jika $(m,n)\neq(m',n')$. Akibatnya, jika $(m,n)=(m',n')$, diperoleh

$$\int_0^b\int_0^a \sin^2\frac{m\pi x}{a}\sin^2\frac{n\pi y}{b}dxdy=\frac{ab}{4}$$

Dengan mengalikan persamaan (5) dengan $\sin\frac{m'\pi x}{a}\sin\frac{n'\pi y}{b}$,kemudian mengintegralkan dengan batas atas adan b pada segi empat, dan menggunakan sifat orthonalitas, diperoleh

$$A_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy \quad (6)$$

Deret yang ditunjukkan oleh persamaan (5) dengan koefisien diberikan oleh persamaan (6), dinamakan deret fourier sinus ganda dari *f*.

Persamaan Konduksi Panas Dimensi Tiga

Proses perpindahan panas dari temperatur tinggi ke temperatur yang lebih rendah disebut sebagai perpindahan panas (heat transfer).

1. Cara Perpindahan Panas

Secara umum dikenal tiga cara perpindahan panas, yaitu konduksi (conduction), radiasi (radiation), dan konveksi (convection).

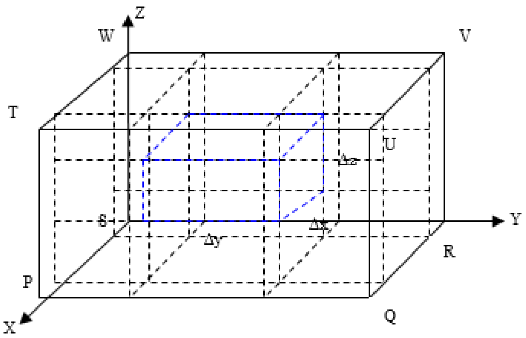
Konduksi didefinisikan sebagai proses mengalirnya panas dari daerah yang bersuhu lebih tinggi ke daerah yang bersuhu lebih rendah di dalam satu medium (padat, cair, atau gas) atau antara medium-medium yang berlainan yang bersinggungan secara langsung.

2. Keadaan Konduksi Panas

Jika suatu benda padat mengalami perubahan suhu yang mendadak, maka diperlukan tenggang waktu agar suhu benda tersebut berada kembali pada keadaan steady. Distribusi suhu serta perpindahan panas dapat dihitung dengan menggunakan metode keadaan steady. Analisis proses pemanasan atau pendinginan yang bersifat transient (transient) yang berlangsung sebelum tercapainya keadaan steady, sehingga harus disesuaikan keadaannya agar dapat dihitung perubahan energi dalam (internal energi) benda menurut waktu. Kondisi atau syarat-syarat batas harus sesuai dengan situasi fisik yang terlihat dalam masalah perpindahan panas keadaan steady.

3. Persamaan Konduksi Panas Dimensi Tiga

Konduksi panas yang sering ditemukan, pada umumnya merupakan konduksi panas pada batangan atau benda padat berbentuk balok. Batangan merupakan elemen benda tegar dimensi tiga, sehingga untuk menentukan konduksi panas pada batangan dapat dimisalkan sebagai konduksi panas pada ruang, yaitu daerah yang dibatasi oleh sumbu x, y, z.



Gambar 2. Elemen batangan

Misalkan elemen batangan yang sisi-sisinya $\Delta x, \Delta y, dan \Delta z$ masing-masing sejajar dengan sumbu x, y, z seperti ditunjukkan dalam gambar 2 adalah elemen yang akandibahas delam menentukan persamaan konduksi panas dimensi tiga. Dalam membicarakan konduksi panas, panas jenis c dan kerapatan atau densitas ρ hanya tergantung pada bahan batangan, jadi tidak tergantung pada temperatur.

Untuk mendapatkan persamaan konduksi panas diambil suatu fungsi $T(x,y,z,t)$ yang merupakan temperatur pada waktu t pada setiap titik dalam koordinat (x, y, z) dari sebuah elemen benda tegar PQRS.TUVW.

Jumlah panas persatuan luas persatuan waktu (fluks panas) yang masuk elemen tersebut melalui SRVW adalah $-k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x$, dengan $\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x$ menunjukkan derivative u terhadap x yang dihitung pada posisi x. karena elemen luas bidang SRVW adalah $\Delta y\Delta z$, dengan demikian jumlah panas yang memasuki elemen melalui bidang SRVW pada waktu Δt adalah

$$Q_1 = -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x \Delta y\Delta z\Delta t \qquad (7)$$

Dengan analogi yang sama, jumlah panas yang keluar dari elemen tersebut melalui bidang UVWT adalah

$$Q_2 = -k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} \Delta y\Delta z\Delta t \qquad (8)$$

Jumlah panas yang tinggal sama dengan jumlah panas yang masuk dikurangi jumlah panas yang keluar dalam arah x yaitu

$$Q(x) = \left\{k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x\right\}\Delta y\Delta z\Delta t \qquad (9)$$

Dengan menggunakan analogi yang sama dapat diperoleh bahwa jumlah panas yang tinggal pada elemen karena perpindahan panas yang terjadi dalam arah y dan z masing-masing adalah

$$Q(y) = \left\{k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y+Xy} - k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_y\right\}\Delta x\Delta z\Delta t \qquad (10)$$

dan

$$Q(z) = \left\{k\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z+\Delta z} - k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x\right\}\Delta x\Delta y\Delta t \qquad (11)$$

Sehingga total panas yang didapatkan oleh elemen tersebut adalah jumlah dari persamaan (9), (10), dan (11). Total panas ini digunakan untuk menaikkan temperatur sebesar ΔT. Adapun panas yang dibutuhkan untuk menaikkan temperatur dari elemen tersebut dengan massa m sebesar ΔT adalah

$$Q = mc\Delta T \qquad (12)$$

dengan c adalah panas jenis.

Jika kerapatan dari elemen benda tegar tersebut ρ, maka massanya menjadi $m = \rho\Delta x\Delta y\Delta z$. Sehingga persamaan (12) menjadi

$$Q = c\rho\Delta x\Delta y\Delta z\Delta T \qquad (13)$$

Dengan demikian total panas dari persamaan (9), (10), dan (11) sama dengan peramaan (13). Jika kemudian dibagi dengan $\Delta x\Delta y\Delta z$, maka diperoleh

$$\left\{\frac{k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - k\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_x}{\Delta x}\right\} + \left\{\frac{k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y+\Delta y} - k\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_y}{\Delta y}\right\} \qquad (14)$$

$$+\left\{\frac{k\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z+\Delta z} - k\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_z}{\Delta z}\right\} = c\rho\frac{\Delta T}{\Delta t}$$

Diambil limit dari $\Delta x\Delta y\Delta z$ dan Δt mendekati nol, maka persamaan (14) menjadi

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) = c\rho\frac{\partial T}{\partial t}$$

atau

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = c\rho\frac{\partial T}{\partial t}$$

atau

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \qquad (15)$$

dengan $\alpha = \frac{k}{c\rho}$ merupakan difusivitas (daya serap) panas. Persamaan (15) disebut

JURNAL INOVASI DAN PEMBELAJARAN FISIKA
ISSN: 2355 – 7109
Program Studi Pendidikan Fisika FKIP Universitas Sriwijaya
Jl. Palembang Prabumulih KM 32 Indralaya KAb. Ogan Ilir Prov. Sumatera Selatan Indonesia 30662
jipf@fkip.unsri.ac.id http://fkip.unsri.ac.id/index.php/menu/104

sebagai persamaan konduksi panas dimensi tiga.

Penyelesaian Masalah Syarat BatasPersamaan Konduksi Panas Dimensi Tiga

Konduksi panasmerupakan aliran panas pada suatu media, dalam hal ini media yang akan dibahas adalah batangan dimensi tiga. Aliran panas pada batangan dibatasi oleh bidang-bidang yang merupakan bagian muka atau sisi dari batangan tersebut, dan konduksi panas yang telah diformulasikan dalam bentuk persamaan diferensial beserta syarat awal dan syarat batasnya dinamakan masalah syarat batas persamaan konduksi panas dimensi tiga.

Persamaan konduksi panas dimensi tiga merupakan persamaan diferensial seperti ditunjukkan pada persamaan (15), yaitu persamaan diferensial dengan bentuk

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

Jika konduksi panas pada batangan dalam keadaan mantap, maka temperatur T tidak tergantung pada waktu, sehingga diperoleh persamaan

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

karena α adalah konstanta tidak sama dengan nol, maka persamaan (15) menjadi

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad (16)$$

Dengan memperhatikan gambar 1, keadaan temperatur pada benda tegar PQRS.TUVW dibatasi oleh enam bidang yang merupakan sisi-sisi dari benda tersebut. Keadaan temperatur pada bidang yang dibatasi $0 < x < a$ dan $0 < y < b$ dipertahankan sama dengan nol. Sehingga pada bagian yang dibatasi bidang RSWV dan PQUT diperoleh syarat batas

$$T(0, y, z) = T(a, y, z) = 0,$$
$$0 < x < a$$

sedang pada bagian yang dibatasi oleh bidang PSWT dan QRUV diperoleh syarat batas

$$T(x, 0, z) = T(x, b, z) = 0,$$
$$0 < y < b$$

pada bidang PQRS diperoleh syarat batas

$$T(x, y, 0) = 0$$

dan pada bidang TUVW batasan temperaturnya merupakan fungsi $f(x, y)$, yaitu

$$T(x, y, c) = f(x, y),$$
$$0 < z < c$$

Gabungan dari persamaan (16) dan tiga syarat batas di atas, dapat dibentuk definisi masalah nilai batas persamaan konduksi panas tiga dimensi dalam keadaan mantap sebagai berikut

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

dengan syarat batas

$$\begin{aligned} &T(0, y, z) = T(a, y, z) = 0, \\ &0 < x < a \\ &T(x, 0, z) = T(x, b, z) = 0, \\ &0 < y < b \qquad\qquad (17) \\ &T(x, y, 0) = 0 \text{ dan } T(x, y, c) = f(x, y), \\ &0 < z < c \end{aligned}$$

Dengan menggunakan metode separasi variabel, diasumsikan $T = X(x).Y(y)Z(z)$, dengan X sebagai fungsi dari x, Y sebagai fungsi dari y, dan Z merupakan fungsi dari z, maka persamaan (16) menjadi

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' = 0$$

atau

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

atau dalam bentuk

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} \qquad (18)$$

Karena ruas kanan pada persamaan (18) merupakan fungsi dengan variabel bebas y dan z, sedangkan ruas kiri merupakan fungsi dengan variabel bebas x, maka masing-masing ruas haruslah konstan. Jika diambil suatu nilai konstanta $-\mu^2$, maka diperoleh dua persamaan

$$\frac{X''}{X} = -\mu^2 \qquad (19)$$

dan

$$-\frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z} = -\mu^2 \qquad (20)$$

Persamaan (19) dapat ditulis

$$X'' + \mu^2 X = 0 \qquad (21)$$

dan persamaan (20) dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{Z''}{Z} + \mu^2 \qquad (22)$$

Karena ruas kiri dan kanan dari persamaan (22) masing-masing merupakan fungsi dari variabel bebas y dan z, maka masing-masing ruas haruslah konstan. Jika diambil suatu nilai konstanta $-\nu^2$, makadiperoleh dua persamaan yaitu persamaan pertama

$$\frac{Y''}{Y} = -\nu^2, \text{ atau } Y'' + \nu^2 Y = 0 \qquad (23)$$

Persamaan kedua adalah

$$\frac{Z''}{Z} = \mu^2 + \nu^2 \qquad (24)$$

Persamaan (24) dapat disederhanakan menjadi

$$Z'' = (\mu^2 + \nu^2)Z$$

$$Z'' - (\mu^2 + \nu^2)Z = 0 \qquad (25)$$

Diperoleh masalah syarat batas dari persamaan diferensial orde dua, sebagai berikut

$$X'' + \mu^2 X = 0$$

$$0 < x < a \qquad (26)$$

$$Y'' + \nu^2 Y = 0$$

$$0 < y < b \qquad (27)$$

$$Z'' - (\mu^2 + \nu^2)Z = 0$$

$$0 < z < c \qquad (28)$$

dengan

$$x(0) = x(a) = 0, y(0) = y(b) = 0, z(0) = 0, \quad (29)$$

dan μ^2, ν^2 adalah masing-masing merupakan konstanta.

- **Langkah 1**

Untuk persamaan (26)

$$X'' + \mu^2 X = 0$$

penyelesaiannya adalah

$$X(x) = A\cos \mu x + B\sin \mu x$$

dengan memasukkan syarat batas pada persamaan (29) diperoleh

$$X(0) = A.1 = A = 0$$

$$X(a) = B\sin \mu a$$

jika $B \neq 0$ maka

$$\sin \mu a = 0$$

$$\mu a = n\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\mu = \frac{n\pi}{a}$$

$$\mu_m = \frac{m\pi}{a}, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

sehingga

$$X(x) = \sin \frac{m\pi}{a} x, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \quad (30)$$

- **Langkah 2**

Untuk persamaan (27)

$$Y'' + \nu^2 Y = 0$$

maka penyelesaiannya

$$Y(y) = A\cos \nu y + B\sin \nu y$$

dengan memasukkan syarat batas untuk y pada persamaan (29) diperoleh

$$Y(0) = A.1 = A = 0$$

$$Y(b) = B\sin \nu b = 0$$

jika $B \neq 0$ maka

$$\sin \nu b = 0$$

$$\nu b = n\pi, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\nu = \frac{n\pi}{b}$$

JURNAL INOVASI DAN PEMBELAJARAN FISIKA
ISSN: 2355 – 7109
Program Studi Pendidikan Fisika FKIP Universitas Sriwijaya
Jl. Palembang Prabumulih KM 32 Indralaya KAb. Ogan Ilir Prov. Sumatera Selatan Indonesia 30662
jipf@fkip.unsri.ac.id
http://fkip.unsri.ac.id/index.php/menu/104

$$\nu_n = \frac{n\pi}{b}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

sehingga

$$Y(y) = \sin\frac{n\pi}{b}y, \text{ n} = 1, 2, 3, \ldots \quad (31)$$

- **Langkah 3**

Untuk persamaan (28)

$$Z'' - (\mu^2 + \nu^2)Z = 0$$

dimisalkan

$$\lambda^2 = \mu^2 + \nu^2$$

$$\lambda = \pm\sqrt{\mu^2 + \nu^2}$$

$$\lambda_{mn} = \pm\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

$$\lambda_{mn} = \pm\sqrt{\pi^2\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{a}\right)^2\right]}$$

$$\lambda_{mn} = \pm\pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{a}\right)^2}$$

sehingga

$$Z(z) = Ae^{\lambda_{mn}z} + Be^{-\lambda_{mn}z}$$

$$Z(Z) = Ae^{\pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{a}\right)^2}z} + Be^{-\pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{a}\right)^2}z}$$

Karena $Z(0) = 0$, diperoleh A = - B

$$Z(z) = Ae^{\lambda_{mn}z} + Be^{-\lambda_{mn}z}$$

$$Z(z) = Ae^{\lambda_{mn}z} - Ae^{-\lambda_{mn}z}$$

$$Z(z) = A\left(e^{\lambda_{mn}z} - e^{-\lambda_{mn}z}\right)$$

sehingga

$Z(z) = C\sinh\lambda_{mn}z,$ m, n = 1, 2, 3, … dengan C = A (32)

Dipilih C = 1, sehingga diperoleh penyelesaian $Z(z) = \sinh\lambda_{mn}z$

Selanjutnya diperoleh penyelesaian umum

$$T_{mn}(x,y,z) = X(x).Y(y).Z(z)$$

$$T_{mn}(x,y,z) = A_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x.\sin\frac{n\pi}{b}y.\sinh\lambda_{mn}z$$

$$T_{mn}(x,y,z) = A_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\sinh\lambda_{mn}z$$

$$T(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\sinh\lambda_{mn}z \quad (33)$$

Dari syarat $T(x,y,c) = f(x,y)$ diperoleh

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\sinh\lambda_{mn}c$$

$A_{mn}\sinh\lambda_{mn}z$ merupakan koefisien deret fourier ganda dengan 0 < z < c, koefisien A_{mn} dapat ditentukan sebagai berikut

$$A_{mn}\sinh\lambda_{mn}c = \frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x \quad (34)$$

$$\sin\frac{n\pi}{b}ydxdy$$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab\sinh\lambda_{mn}c}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}ydxdy$$

,m, n = 1, 2, …

Persamaan (33) merupakan penyelesaian umum persamaan konduksi panas dimensi tiga, dengan koefisien fourier ditunjukkan pada persamaan (34).

PENUTUP

Kesimpulan

Dari pembahasan dapat dirumuskan kesimpulan sebagai berikut :

1. Bentuk persamaan konduksi panas pada benda atau batangan dimensi tiga dalam keadaan steady dapat dituliskan sebagai $\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$ dengan $\alpha = \frac{k}{c\rho}$ merupakan difusivitas (daya serap) panas.
2. Penyelesaian umum persamaan konduksi panas dimensi tiga dapat ditulis sebagai $T(x,y,z) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\sinh\lambda_{mn}z$. Koefisien fourier ditunjukkan oleh

$$A_{mn} \sinh \lambda_{mn} c = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x,y) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y dx dy$$

Saran

1. Untuk lebih memahami pembahasan yang dibahas pada makalah seminar ini, disarankan bagi pembaca untuk membaca buku-buku referensi yang tercantum dalam daftar pustaka.
2. Aplikasi persamaan diferensial parsial pada fisika tidak hanya terbatas pada persamaan konduksi panas saja, misal :pada pembahasan potensial elektrostatika, dielektrika, magnetostatika, dll.

DAFTAR PUSTAKA

Holman, J.P. 1988. *Perpindahan Kalor*. Jakarta : Erlangga.

Ruwanto, Bambang. 2002. *Matematika untuk Fisika dan Teknik*. Yogyakarta : Adicita.

William E. Boyce & Richard C. DiPrima. 1986. *Elementary Differential Equations and Boundery Value Problems*. New York : John Willey and Sons.