Prosiding Seminar Nasional
ISSN 2443-1109
Volume 04, Nomor 1

NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN-H PADA GRAF C_4 x P_n

Nurdin Hinding[1], Evie Asmaliah Nur[2], Hasmawati[3]
Universitas Hasanuddin[1,2]
nurdin1701@gmail.com[1], hasmaba97@gmail.com[2]

Abstrak

Nilai total ketidakteraturan-H pada graf C_4 x P_n diperoleh dengan menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil. Batas bawah dianalisis berdasarkan sifat-sifat graf dan teorema pendukung lainnya. Sedangkan batas atas dianalisa dengan pemberian label pada titik dan sisi pada graf C_4 x P_n . Misal G adalah suatu graf, selimut sisi dari G (*edge covering*) adalah koleksi subgraf $H_1, H_2, \ldots, H_t$ dari graf G sedemikian sehingga setiap sisi dari G termuat dalam paling sedikit satu subgraf H_i , dimana $i = 1,2, \ldots, t$. Dalam hal ini, maka G disebut memiliki selimut (sisi) -($H_1, H_2, \ldots, H_t$) (($H_1, H_2, \ldots, H_t$)-(*edgecovering*). Jika setiap subgraf H_i isomorfik dengan suatu graf H, maka dikatakan G memiliki suatu selimut-H(H-*covering*). Jika setiap subgraf H_i isomorfik dengan suatu graf, maka dikatakan G memiliki suatu selimut –H (H-*covering*). Hasil penelitian ini diperoleh nilai total ketidakteraturan-H pada graf C_4 x P_n $ths(C_4 \times P_n) = \left\lceil \frac{4n+3}{8} \right\rceil$ dengan n ≥ 3.

Kata kunci : Selimut-H, Nilai total ketidakteratuan-H

1. Pendahuluan

Salah satu jenis pelabelan tidak teratur lainnya adalah pelabelan total tidak teratur$-H$(H-*Irreguler total labelling*). Pelabelan jenis ini melibatkan konsep selimut graf. Pelabelan ini di perkenalkan oleh Baca dkk. Secara umum pelabelan total tidak teratur-H dari suatu graf di definisikan sebagai berikut. Misal G adalah suatu graf, selimut sisi dari G (*edge covering*) adalah koleksi subgraf $H_1, H_2, \ldots, H_t$ dari graf G sedemikian sehingga setiap sisi dari G termuat dalam paling sedikit satu subgraf H_i , dimana $i = 1,2, \ldots, t$. Dalam hal ini, maka G disebut memiliki selimut (sisi)-($H_1, H_2, \ldots, H_t$) (($H_1, H_2, \ldots, H_t$)-(*edgecovering*). Jika setiap subgraf H_i isomorfik dengan suatu graf H, maka dikatakan G memiliki suatu selimut-H(H-*covering*).

Terdapat beberapa hasil penelitian terkait dengan pelabelan total H tidak teratur antara lain Bača dkk (2017) telah menentukan nilai total sisi (ehs) dan nilai total titik (vhs) pada graf kipas, lintasan dan ladder. Bača dkk (2017) telah menentukan nilai total L_n dan F_n tidak teratur (ths) pada graf planar, dan Bača dkk (2017) telah menentukan nilai total P_m tidak teratur (ths) pada graf P_n dan nilai total C_m tidak teratur (ths) pada graf L_n dan C_m merupakan graf lingkaran dengan m titik $ths(F_n, C_3)$ dimana F_n merupakan graf Kipas dengan n titik dan C_3 graf Lingkaran dengan 3 titik. Hesti Agustin dkk (2017) telah menentukan $ths(Amal(C_3, v, n)$ dimana $Amal(C_3, v, n)$ merupakan banyaknya graf C_3 yang di amalgamasi, dan $ths(Shack(C_m, v, n)$.

Pada penelitian ini penulis tertarik untuk melakukan penelitian tentang pelabelan pada graf $C_4 \times P_n$ yang merupakan hasil kali kartesius dari graf Lingkaran C_n dengan Lintasan P_m dengan $n \geq 3$ dan $m = 3$. Selain karena $C_4 \times P_n$ belum ditentukan ths-nya juga karena

$ths(L_n, C_m)$ dan $ths(P_n, P_m)$ sudah ada, dimana kedua graf tersebut dikonstruksi dari graf P_n dan C_m.

2. Hasil dan Pembahasan

Himpunan titik dan himpunan sisi graf $C_4 \times P_n$, untuk n bilangan bulat positif $n \geq 3$ adalah sebagai berikut :

$$V(C_4 \times P_n) = \{a_i, b_i, c_i\ , d_i |\ i = 1,2, \dots, n\}$$

dan

$$E(C_4 \times P_n) = \{a_i a_{i+1}, b_i b_{i+1}, c_i c_{i+1}, d_i d_{i+1}\ |\ i = 1,2, \dots, n-1\}$$

$$\cup \{a_i a_i, b_i b_i, c_i d_i, d_i a_i |\ i = 1,2, \dots, n\}$$

Teorema 2.6.2 *Misalkan* $C_4 \times P_n$ *adalah graf dengan* $n \geq 3$ *maka,*

$$ths\ (C_4 \times P_n, C_4) \leq \left\lceil \frac{4n+3}{8} \right\rceil.$$

Bukti :

Untuk membuktikan bahwa ths $(C_4 \times P_n, \mathrm{C}_4) \leq \left\lceil \frac{4n+3}{8} \right\rceil$ maka akan dibuktikan ths $(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \geq \left\lceil 1 + \frac{t-1}{|V(H)|+|E(H)|} \right\rceil$ dan ths $(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \leq \left\lceil \frac{4n+3}{8} \right\rceil$.

Untuk membuktikan ths $(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \leq \left\lceil \frac{4n+3}{8} \right\rceil$, maka digunakan Teorema 2.6.1 yaitu ths $(\mathrm{G}, \mathrm{H}) \geq \left\lceil 1 + \frac{t-1}{|V(H)|+|E(H)|} \right\rceil$ dengan t adalah banyaknya subgraf H.

Perhatikan bahwa banyaknya subgraf C_4 dari $C_4 \times P_n$ adalah 4n-4 dan $|V(C_4)| = 4$ dan $|E(C_4)| = 4$. Jadi ths $(C_4 \times P_n, \mathrm{C}_4) \leq \left\lceil 1 + \frac{4n-4-1}{8} \right\rceil = \left\lceil \frac{4n+3}{8} \right\rceil$. Selanjutnya akan ditentukan bahwa $(C_4 \times P_n, \mathrm{C}_4) \leq \left\lceil \frac{4n+3}{8} \right\rceil$. Untuk membuktikan bahwa $(C_4 \times P_n, \mathrm{C}_4) \leq \left\lceil \frac{4n+3}{8} \right\rceil$, maka akan dikonstruksi suatu fungsi pelabelan ketidakteraturan C_4 total pada $C_4 \times P_n$ sebagai berikut:

$$f(a_i) = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil, \text{ untuk } i = 1,2, \dots, n$$

$$f(b_i) = \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil, \text{ untuk } i = 1,2, \dots, n$$

$$f(c_i) = \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil, \text{ untuk } i = 1,2, \dots, n$$

$$f(d_i) = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil, \text{ untuk } i = 1,2, \dots, n$$

$$f(a_i, a_{i+1}) = \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil, \text{ untuk } i = 1,2, \dots, n$$

$$f(b_i, b_{i+1}) = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil, \text{ untuk } i = 1,2, \dots, n$$

$$f(b_i, b_{i+1}) = \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil, \text{ untuk } i = 1,2, \dots, n$$

$$f(d_i, d_{i+1}) = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil, \text{ untuk } i = 1,2, \dots, n$$

$$f(a_i b_i) = \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil, \text{ untuk } i = 1,2, \dots, n$$

$$f(b_i c_i) = \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil, \text{ untuk } i = 1,2, \dots, n$$

$$f(c_i d_i) = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil, \text{ untuk } i = 1,2, \dots, n$$

$$f(d_i a_i) = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil, \text{ untuk } i = 1,2, \dots, n$$

selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bobot setiap subgraf berbeda untuk pada $C_4 \times P_n$ sebagai berikut :

Untuk $i = 1,2, \dots, n$

$$W_1 = W_t(H_1) = f(a_1) + f(a_2) + f(d_1) + f(d_2) + f(a_1 a_2) + f(a_1 a_2) + f(a_1 d_1) + f(a_2 d_2)$$

$$= \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil$$

$$= 7 \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil = 8$$

$$W_2 = W_t(H_2) = f(c_1) + f(c_2) + f(d_1) + f(d_2) + f(c_1 c_2) + f(d_1 d_2) + f(c_1 d_1) + f(c_2 d_2)$$

$$= \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil$$

$$= 5 \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + 3 \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil = 9$$

$$W_3 = W_t(H_3) = f(a_1) + f(a_2) + f(b_1) + f(b_2) + f(a_1 a_2) + f(b_1 b_2) + f(a_1 b_1) + f(a_2 b_2)$$

$$= \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil \quad = 3 \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + 5 \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil = 10$$

$$W_4 = W_t(H_4) = f(b_1) + f(b_2) + f(c_1) + f(c_2) + f(b_1 b_2) + f(c_1 c_2)\ f(b_1 c_1) + f(b_2 c_2)$$

$$= \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil$$

$$= \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + 7 \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil = 11$$

$$W_4 = W_t(H_{n+1}) = \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil$$

$$= 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil$$

$$< \left(\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil \right) + \left(\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil \right) + \left(\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil \right) + \left(\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil \right)$$

$$= 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = W_t(H_{n+1})$$

$$+ \left(\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil \right) + \left(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \right) + \left(\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil \right) + \left(\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil \right) = W_t(H_{3n})$$

$$W_4 = W_t(H_{n+1}) = \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil$$

$$= 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil$$

Berdasarkan w_1, w_2, w_3, w_4 untuk $i = 1,2, \ldots, n$ diperoleh bahwa , $w_t(H_1) < w_t(H_2) < w_t(H_3) < w_t(H_4) < \cdots < w_t(H_n)$

Daftar Pustaka

[1] Agustin, I.H. 2017. *On H-Irregulerity Strengh of Graph:A New Notion*. *Journal of Physic*: Confrens Series 855.

[2] Ahmad, A. 2014. Irregular Total Labeling of Disjoint Union of Prisms and Cycles. *Australasian Journal of Combinatorics*. 59 : 98-106.

[3] Ashraf, F., Bača, M., Kimáková, Z., and Semaničová-Feňovčíková, A. (2016). On Vertex and Edge H-Irregularity Strength of Graphs, *Discrete Math. Algorithms and Applications. 8.* 13 page

[4] Bača, M., dkk. 2017. *On H-Irregulerity Strengh of Graph*. *Discucsiones Mathematics*. Graph Theory 37(2017) 1067-1078.

[5] Baca, M., Jendrol., Miller, M., dan Ryan, J. 2007. On Irregular total Labelings. *Discrere Mathematics*. 307 : 1378-1388

[6] Indriati D, Widodo, Indah IE, Sugeng KA. 2015. On Total Irregularity Strength of Double-Star and Related Graphs. *Procedia Computer Science 74* Hal 118-123. Elsevier: Indonesia.

[7] Ramdani R dan Salman ANM. 2013. On The Total Irregularity Strength of Some Cartesians Product Graphs. Int.J.Graphs Comb.,10 No.2.Page 199-209. AKCE. Bandung : Indonesia.

[8] Tarawneh I, Hasni R, Ahmad A. 2016. On the Edge Irregularity Strength of Corona Product of Cyccle with Isolated Vertices. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics 13.Page 213-217*. Elsevier. Mathematics Science.