PENGGUNAAN EKSTRAPOLASI UNTUK MENYELESAIKAN FUNGSI INTEGRAL TENTU

NIRSAL

Dosen Tetap Yayasan Universitas Cokroaminoto Palopo
E-Mail: nirsal_uncpftkom@yahoo.co.id

Abstrak

Tujuan penelitian ini adalah untuk menghasilkan suatu perangkat lunak yang dapat menyelesaikan fungsi integral tentu dengan menggunakan ekstrapolasi. Metode yang digunakan dalam penelitian ini, membaca dan mempelajari buku–buku metode numerik yang berhubungan dengan penggunaan ekstrapolasi untuk integrasi numerik, mempelajari metoda ekstrapolasi Richardson, metoda Romberg dan ekstrapolasi Aitken yang dibuat menggunakan bahasa pemrograman *Visual Basic 6.0*., melakukan pengujian dan pengetesan terhadap perangkat lunak hasil rancangan dan memperbaiki jika terjadi kesalahan. Hasil penelitian ini bahwa perangkat lunak mampu menghitung hasil integral dari suatu fungsi dengan nilai akhir yang menghampiri hasil integral yang didapatkan dengan metode analitik, perangkat lunak dapat mendukung perkembangan perangkat lunak lain yang membutuhkan perhitungan hasil integral dari fungsi integral yang terlalu kompleks untuk diselesaikan dengan metode analitik, perangkat lunak menampilkan semua langkah-langkah perhitungan ekstrapolasi, sehingga dapat membantu pemahaman atas metode ekstrapolasi dan juga dapat digunakan untuk mendukung kegiatan belajar mengajar, terutama dalam mata kuliah metode numerik dan kalkulus integral.

Keywords: *Ekstrapolasi, Integral, Visual Basic*

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Di dalam kalkulus, integral adalah satu dari dua pokok bahasan yang mendasar disamping turunan (*derivative*). Fungsi integral merupakan kebalikan dari fungsi turunan. Secara umum fungsi integral dibagi atas fungsi integral tak tentu dan fungsi integral tentu. Fungsi integral tentu memiliki batasan nilai fungsi, sedangkan fungsi integral tak tentu tidak memiliki batasan nilai fungsi.

Ilmu kalkulus memiliki aturan–aturan penyelesaian fungsi integral untuk memperoleh solusi analitik (dan eksak) dari fungsi integral tentu. Namun, dalam praktek rekayasa, seringkali fungsi yang diintegrasikan (*integrand*) adalah fungsi empirik yang diberikan dalam bentuk tabel (*integrand*-nya tidak dalam bentuk fungsi elementer seperti $f = 2x^2 + 3$), atau fungsi eksplisit f yang diberikan terlalu rumit untuk diintegralkan dengan menggunakan ilmu kalkulus. Karena itu, solusinya hanya dapat dihitung dengan metode numerik. Salah satu cara yang dapat digunakan adalah dengan menggunakan ekstrapolasi. Metode ekstrapolasi yang digunakan untuk integrasi yaitu ekstrapolasi Richardson, metode Romberg dan ekstrapolasi Aitken.

Penulis tertarik untuk mempelajari penyelesaian fungsi integral tentu dengan menggunakan metode ekstrapolasi. Oleh karena itu, penulis melakukan penelitian dengan judul 'Penggunaan Ekstrapolasi untuk Menyelesaikan Fungsi Integral Tentu'.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang pemilihan judul, maka yang menjadi permasalahan adalah bagaimana membuat perangkat lunak yang dapat menyelesaikan fungsi integral tentu dengan menggunakan ekstrapolasi?

1.3 Batasan Masalah

Ruang lingkup permasalahan penelitian ini dalam merancang perangkat lunak antara lain:

1. Metode ekstrapolasi yang digunakan sebanyak 3 buah, yaitu ekstrapolasi Richardson, metode Romberg dan ekstrapolasi Aitken.
2. *Input* perangkat lunak berupa:
   a. Fungsi yang akan diintegralkan (dalam bentuk ekspresi aritmatika, *string* sebanyak 100 karakter).
   b. Input ekspresi aritmatika hanya mengandung satu jenis variabel yang akan diturunkan.
   c. Jenis variabel berupa abjad dari huruf *a* sampai huruf *z* dan dapat dipilih.
   d. Batas–batas nilai dari fungsi integral, yaitu batas atas dan batas bawah (bertipe data *integer*).
   e. Banyak interval kelas (*n*), bertipe data *integer*.
3. Perangkat lunak menampilkan setiap langkah–langkah penyelesaian terhadap fungsi integral.
4. Langkah–langkah penyelesaian terhadap fungsi integral dapat disimpan dalam bentuk *file*.

1.4 Tujuan dan Manfaat

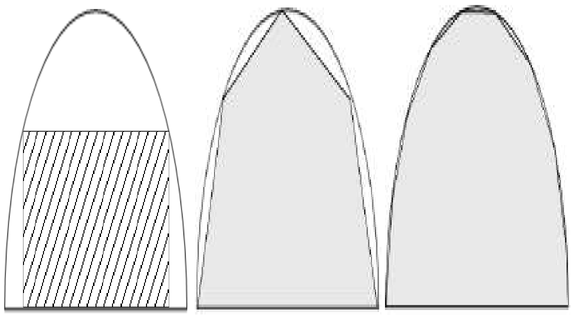
Tujuan penelitian ini adalah untuk menghasilkan suatu perangkat lunak yang dapat menyelesaikan fungsi integral tentu dengan menggunakan ekstrapolasi. Manfaat dari penelitian ini yaitu:

1. Perangkat lunak dapat digunakan sebagai alternatif untuk menghitung nilai dari fungsi integral.
2. Fungsi ekstrapolasi yang terdapat di dalam perangkat lunak dapat digunakan pada perangkat lunak lain yang membutuhkan hasil perhitungan integral.

II. LANDASAN TEORI

2.1 Sejarah Kalkulus

Kalkulus integral terlahir lebih dari 2.000 tahun yang lalu pada waktu bangsa Yunani mencoba menentukan luas dengan suatu proses yang mereka sebut dengan metode pengeringan. Gagasan yang penting dari metode ini sangat sederhana dan dapat dilukiskan dengan singkat sebagai berikut:
"Diberikan suatu daerah yang luasnya akan ditentukan, kemudian kita buat di dalamnya suatu daerah poligonal yang mendekati daerah yang diberikan dan kita dapat menghitung luasnya dengan mudah. Kemudian dipilih daerah poligonal yang lain yang memberikan suatu pendekatan yang lebih baik, dan kita lanjutkan proses tersebut dengan mengambil poligon-poligon dengan sisi-sisi yang semakin banyak, yang diistilahkan mencoba untuk mengeringkan daerah yang diberikan."
Metode ini pernah sukses digunakan oleh Archimedes untuk mendapatkan rumus-rumus eksak untuk luas-luas lingkaran dan bangun-bangun khusus yang lain. Metode pengeringan untuk setengah lingkaran dapat dilihat pada gambar 1 berikut ini :



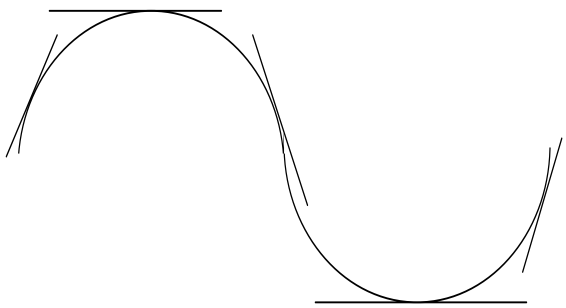
Gambar 1. Pencarian luas setengah lingkaran

Perkembangan dari metode ini, di luar apa yang didapat oleh Archimedes, maka harus ditunggu sampai 18 abad baru digunakan simbol-simbol dan notasi-notasi aljabar sehingga menjadi salah satu bagian dari ilmu matematika. Aljabar elementer yang dikenal di sekolah lanjutan saat ini tidak dikenal sama sekali di zaman Archimedes.

2.2 Diferensial (Turunan)

Newton dan Leibniz secara terpisah satu dengan yang lain mengembangkan ide mengenai kalkulus integral sampai pada suatu keadaan dimana sebelumnya persoalan tersebut hanya dipecahkan dengan metoda-metoda biasa saja. Karya-karya mereka terutama mengenai fakta bahwa mereka mampu menggabungkan kalkulus integral dengan konsep kalkulus yang lain, yakni kalkulus diferensial.

Fermat memberikan ide yang sangat sederhana, yakni berprinsip pada mencari garis singgung pada suatu kurva. Misalkan suatu kurva pada gambar 2 diandaikan bahwa setiap titik dari kurva mempunyai arah tertentu yang ditunjukkan oleh garis-garis singgung yang mempunyai arah tertentu.



Gambar 2. Jenis–Jenis Garis Singgung pada Kurva

2.3 Integral (Anti Turunan)

Jika saya mengenakan sepatu saya, saya dapat melepasnya lagi. Operasi yang kedua menghapuskan yang pertama, mengembalikan sepatu pada posisinya yang semula. Kita katakan dua operasi tersebut adalah operasi balikan (inversi). Matematika mempunyai banyak pasangan operasi balikan seperti penambahan dan pengurangan, perkalian dan pembagian, pemangkatan dan penarikan akar, serta penarikan logaritma dan penghitungan logaritma. Kebalikan dari pendiferensialan (penurunan) yaitu anti pendiferensialan (anti turunan) yang diberi nama integral. Secara garis besar, integral terdiri dari dua macam, yaitu integral tak tentu dan integral tentu.

1. Integral Tak Tentu

Misalkan kita harus menentukan suatu lengkungan yang garis singgungnya pada tiap titik (x,y) pada lengkungan tersebut, memiliki koefisien *gradien* $3x^2$. Maka untuk langkah pertama kita cari $y = f(x)$ sedemikian rupa sehingga turunannya,

$$D_x y = 3x^2$$

Kita tahu bahwa $3x^2$ adalah hasil penurunan dari x^3, maka dapat disimpulkan bahwa

$$y = x^3$$

merupakan persamaan lengkungan yang garis singgungnya di tiap titik pada lengkungan mempunyai *gradien* $3x^2$. Sehingga didapat bahwa anti turunan dari suatu fungsi f adalah suatu fungsi sembarang F yang turunannya F' adalah sama dengan f. Jadi,

$$F' = f$$

Kita melihat bahwa proses pencarian turunan fungsi dengan proses pencarian anti turunannya merupakan dua proses yang berlawanan (berkebalikan). Jika tiap fungsi memiliki satu turunan, maka ia mungkin mempunyai lebih dari satu anti turunan. Istilah lain untuk anti turunan adalah primitif atau fungsi primitif atau disebut juga fungsi integral. Contohnya,

1. Fungsi $F(x) = x^3$ adalah anti turunan dari $f(x) = 3x^2$, karena $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.
2. Fungsi $F(x) = x^3 - 2$ dan fungsi $x^3 + 6$ juga merupakan anti turunan dari $f(x) = 3x^2$.

Jadi, jelas bahwa suatu fungsi turunan, mungkin memiliki lebih dari satu fungsi primitif atau anti turunan.

2. Integral Tentu

Konsep integral tentu merupakan inti hitung integral yang sangat luas sekali pemakaiannya. Berbagai bidang ilmu pengetahuan menggunakan konsep ini. Perhitungan luas suatu daerah, isi benda putar, penentuan titik berat suatu benda, menghitung momen inersia atau pengukuran luas permukaan bola (*speric*) menggunakan konsep integral tentu.

Suatu fungsi f dikatakan dapat diintegralkan dalam suatu selang tutup $[a,b]$ jika integral tentu f dari a ke b ada (terdefinisi). Ungkapan dapat diintegralkan sering juga diartikan sama dengan memiliki integral atau terintegralkan atau integrabel. Berikut ini akan diberikan beberapa dalil dasar yang merupakan sifat dari integral tentu.

3. Integrasi Numerik

Di dalam kalkulus, integral adalah satu dari dua pokok bahasan yang mendasar disamping turunan (*derivative*). Fungsi-fungsi yang dapat diintegrasikan dapat dikelompokkan sebagai,

1. Fungsi menerus yang sederhana, seperti polinomial, eksponensial atau fungsi trigonometri. Misalnya,

$$\int_a^b (6x^3 - x^2 + \cos(x) - e^x)\, dx$$

Fungsi sederhana seperti ini mudah dihitung integralnya secara eksak dengan menggunakan metode analitik. Metode-metode analitik untuk menghitung integral fungsi yang demikian sudah tersedia.

2. Fungsi menerus yang rumit, misalnya,

$$\int_0^2 \frac{2 + \cos(1 + x^{3/2})}{(1 + 0.5 \sin x)^{3/4}} e^{0.5x}\, dx$$

Fungsi yang rumit seperti ini jelas sulit, bahkan tidak mungkin diselesaikan dengan metode-metode integrasi yang sederhana. Karena itu, solusinya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

3. Fungsi yang ditabulasikan dalam hal ini nilai x dan $f(x)$ diberikan dalam sejumlah titik diskrit. Fungsi seperti ini sering dijumpai pada data hasil eksperimen di laboratorium atau berupa data pengamatan di lapangan. Pada kasus terakhir ini, umumnya fungsi $f(x)$ tidak diketahui secara eksplisit. Yang dapat diukur hanyalah besaran fisisnya saja. Misalnya,

Tabel 1. Tabel fungsi $f(x)$ dalam bentuk tabel

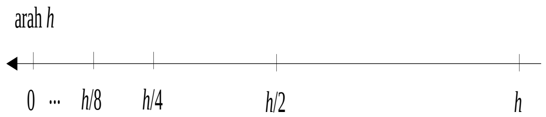
x	$f(x)$
0.00	6.0
0.25	7.5
0.50	8.0
0.75	9.0

2.4 Penggunaan Ekstrapolasi untuk Integrasi

Misalkan $I(h)$ adalah perkiraan nilai integrasi dengan jarak antara titik data adalah h ($h < 1$). Dari persamaan galat kaidah integrasi (trapesium, Simpson 1/3, dll) yang dinyatakan dalamnotasi orde:

$$E = O(h^p)$$

dapat dilihat bahwa galat E semakin kecil bila digunakan h yang semakin kecil, seperti yang ditunjukkan oleh diagram garis berikut:



Nilai sejati integrasi adalah bila $h = 0$, tetapi pemilihan $h = 0$ tidak mungkin kita lakukan di dalam rumus integrasi numerik sebab ia akan membuat nilai integrasi sama dengan 0. Yang dapat kita peroleh adalah perkiraan nilai integrasi yang lebih baik dengan melakukan ekstrapolasi ke $h = 0$. Ada tiga macam metode ekstrapolasi yang dapat digunakan untuk integrasi:

1. Ekstrapolasi Richardson
2. Metode Romberg
3. Ekstrapolasi Aitken

1. Ekstrapolasi Richardson

Lihat kembali kaidah trapesium

$$\int_a^b f(x)\, dx = h/2\, [\, f_0 + 2 \sum f_i + f_n] + Ch^2$$

Secara umum, kaidah integrasi di atas dapat kita tulis sebagai

$$\int_a^b f(x)\, dx = I(h) + Ch^q$$

dengan $I(h)$ adalah integrasi dengan menggunakan kaidah trapesium dengan jarak antar titik selebar h dan C dan q adalah konstanta yang tidak bergantung pada h. Nilai q dapat ditentukan langsung dari orde galat kaidah integrasi, misalnya

kaidah trapesium, $O(h^2)$ → $q = 2$
kaidah titik-tengah, $O(h^2)$ → $q = 2$
kaidah 1/3 Simpson, $O(h^4)$ → $q = 4$

Tujuan ekstrapolasi Richardson ialah menghitung nilai integrasi yang lebih baik (*improve*) dibandingkan dengan I. Misalkan J adalah nilai integrasi yang lebih baik daripada I dengan jarak antar titik adalah h:

$$J = I(h) + Ch^q$$

Ekstrapolasikan h menjadi $2h$, lalu hitung integrasi numeriknya

$$J = I(2h) + C(2h)^q$$

Eliminasikan C dari kedua persamaan dengan menyamakan kedua persamaan:

$$I(h) + Ch^q = I(2h) + C(2h)^q$$

sehingga diperoleh

$$C = \frac{I(h) - I(2h)}{(2^q - 1)\, h^q}$$

Masukkan persamaan ini ke dalam persamaan pertama untuk memperoleh:

$$J = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{2^q - 1}$$

yang merupakan persamaan ekstrapolasi Richardson. Ekstrapolasi Richardson dapat kita artikan sebagai berikut:

Mula-mula hitunglah nilai integrasi dengan kaidah yang sudah baku dengan jarak antar titik selebar h untuk mendapatkan $I(h)$, kemudian hitung kembali nilai integrasi dengan jarak antar titik selebar 2*h* untuk memperoleh *I*(2*h*). Akhirnya, hitung nilai integrasi yang lebih baik dengan menggunakan persamaan ekstrapolasi Richardson.

Perhatikanlah bahwa jika pernyataan di atas dibalik, kita telah melakukan ekstrapolasi menuju $h = 0$, yaitu kita hitung $I(2h)$ lalu hitung $I(h)$.

2. Metode Romberg

Metode integrasi Romberg didasarkan pada perluasan ekstrapolasi Richardson untuk memperoleh nilai integrasi yang semakin baik. Sebagai catatan, setiap penerapan ekstrapolasi Richardson akan menaikkan orde galat pada hasil solusinya sebesar dua:

$$O(h^{2N}) \quad \rightarrow \quad O(h^{2N+2})$$

Misalnya bila $I(h)$ dan $I(2h)$ dihitung dengan kaidah trapesium yang berorde galat $O(h^2)$, maka ekstrapolasi Richardson menghasilkan kaidah Simpson 1/3 yang berorde $O(h^4)$. Selanjutnya, bila $I(h)$ dan $I(2h)$ dihitung dengan kaidah Simpson 1/3, ekstrapolasi Richardson menghasilkan kaidah Boole yang berorde $O(h^6)$.

Misalkan *I* adalah nilai integrasi sejati yang dinyatakan sebagai:

$$I = A_k + C_h^2 + D_h^4 + E_h^6 + \ldots$$

yang dalam hal ini $h = (b - a)/n$
dan A_k = perkiraan nilai integrasi dengan kaidah trapesium dan jumlah pias $n = 2^k$. Orde galat A_k adalah $O(h^2)$. Sebagai contoh, selang $[a, b]$ dibagi menjadi 64 buah pias atau upaselang:

$n = 64 = 2^6 \quad \rightarrow \quad k = 6\ (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

$k = 0$ (artinya $n = 2^0 = 1$ pias, $h_0 = (b-a)/1$) $\rightarrow A_0 = h_0/2\ [f_0 + f_{64}]$

$k = 1$ (artinya $n = 2^1 = 2$ pias, $h_1 = (b-a)/2$) $\rightarrow A_1 = h_1/2\ [f_0 + 2f_{32} + f_{64}]$
…

$k = 6$ (artinya $n = 2^6 = 64$ pias, $h_6 = (b-a)/64$) $\rightarrow A_6 = h_6/2\ [f_0 + 2f_1 + \ldots + 2f_{63} + f_{64}]$

Gunakan $A_0, A_1, \ldots A_k$ pada persamaan ekstrapolasi Richardson untuk mendapatkan tuntunan $B_1, B_2, \ldots B_k$ (yang berorde 4), yaitu

$$B_k = \frac{A_k + A_k - A_{k-1}}{2^2 - 1}$$

Selanjutnya, gunakan $B_1, B_2, \ldots B_k$ pada persamaan ekstrapolasi Richardson untuk mendapatkan tuntunan $C_2, C_3, \ldots C_k$ (yang berorde 6), yaitu

$$C_k = B_k + \frac{B_k - B_{k-1}}{2^4 - 1}$$

Demikian seterusnya hingga didapat G_k yang berorde 14. Dari hasil tersebut, diperoleh tabel yang dinamakan tabel Romberg seperti pada tabel 2 berikut ini :

Tabel 2.Tabel Romberg

$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$	$O(h^{10})$	$O(h^{12})$	$O(h^{14})$
A_0						
A_1	B_1					
A_2	B_2	C_2				
A_3	B_3	C_3	D_3			
A_4	B_4	C_4	D_4	E_4		
A_5	B_5	C_5	D_5	E_5	F_5	
A_6	B_6	C_6	D_6	E_6	F_6	$\mathbf{G_6}$

3. Ekstrapolasi Aitken

Pada ekstrapolasi Richardson dan metode Romberg, timbul persoalan apabila nilai *q* tidak diketahui. Untuk kasus ini, kita gunakan tiga buah perkiraan nilai yaitu $I(h)$, $I(2h)$ dan $I(4h)$. Dari penurunan rumus ekstrapolasi Richardson dan perkiraan nilai $I(h)$, $I(2h)$ dan $I(4h)$, didapat persamaan Aitken sebagai berikut:

$$J = I(h) + \frac{I(h) - I(2h)}{t - 1} \qquad t = \frac{I(2h) - I(4h)}{I(h) - I(2h)}$$

yang mirip dengan persamaan ekstrapolasi Richardson. Ektrapolasi Aitken akan tepat sama dengan ekstrapolasi Richardson jika nilai teoritis $t = 2^q$.

Perbedaan antara kedua metode ekstrapolasi muncul bergantung kepada apakah kita mengetahui nilai *q* atau tidak. Hal ini diringkas dalam prosedur berikut:

1. Hitung $I(4h)$, $I(2h)$ dan $I(h)$.
2. Hitung nilai empirik *t* sesuai dengan persamaan Aitken di atas.
3. Hitung nilai teoritik $t = 2q$ (bila *q* diketahui).

4. Jika t teoritik ≠ t empirik, maka penyelesaian dengan ekstrapolasi Richardson dan ektrapolasi Aitken akan menghasilkan nilai integrasi yang berbeda. Hal ini dapat terjadi apabila fungsi yang diintegralkan merupakan fungsi singular, yaitu fungsi turunan yang tidak terdefinisi di dalam batas-batasnya. Dalam hal ini, ekstrapolasi Richardson menghasilkan nilai yang salah, dan ekstrapolasi Aitken menghasilkan nilai yang benar.
5. Gunakan ekstrapolasi Aitken dengan nilai empirik t.

III. ANALISIS DAN PERANCANGAN

3.1 Pembahasan

Pembahasan akan mencakup 3 (tiga) metode ekstrapolasi, yaitu: ekstrapolasi Richardson, metode Romberg dan ekstrapolasi Aitken. Dengan metode ekstrapolasi ini, hasil fungsi integrasi yang didapatkan adalah nilai yang menghampiri atau mendekati solusi sejati (yang diselesaikan dengan metode analitik).

Pada pembahasan bab ini, kita akan mencoba untuk membandingkan hasil penyelesaian fungsi integral dengan metode analitik dengan hasil yang didapatkan dengan metode ekstrapolasi. Misalkan fungsi integral yang akan diselesaikan adalah sebagai berikut: (Pembulatan hasil hingga 5 desimal di belakang koma)

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{1 + x^{1/3}}}{x^{2/3}}\, dx$$

Fungsi di atas dapat ditulis dalam ekspresi aritmatika: (1 + x^(1/3))^(1/2) / (x^(2/3)).

1. Penyelesaian dengan metode analitik

Seperti telah dipelajari sebelumnya, penyelesaian dengan metode analitik atas fungsi integral di atas adalah sebagai berikut,

Misalkan, $(1 + x^{1/3}) = t^6$

$d(1 + x^{1/3}) = d(t^6)$

$1/3\ (x^{-2/3})\ dx = 6t^5\ dt$

Didapat, $dx = 18t^5\, x^{2/3}\, dt$

Substitusi persamaan $(1 + x^{1/3}) = t^6$ dan $dx = 18t^5\, x^{2/3}\, dt$, maka didapat penyelesaian fungsi integral adalah sebagai berikut,

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{t^6}\ .\ 18t^5\, x^{2/3}}{x^{2/3}}\, dt$$

$= 18\ .\ 1/9\ .\ t^9$

$= 2\ .\ t^9$

Substitusi kembali persamaan $t^6 = (1 + x^{1/3})$, maka di dapat

$= 2\ .\ (1 + x^{1/3})^{3/2}$, untuk $x = 2$ sampai $x = 1$

$= 2\ .\ [(1 + 2^{1/3})^{3/2} - (1 + 1^{1/3})^{3/2}]$

$= 2\ .\ [3.39735 - 2.82843]$

$= 2\ .\ 0.56892$

= **1.13784** (Hasil integrasi dengan metode analitik).

3. Penyelesaian dengan ekstrapolasi Richardson

Sebagai contoh jumlah upaselang / subinterval (n) = 8.

Jarak antar titik / lebar pias (h) = (b - a) / n
= (2 - 1) / 8
= 0.125

<u>Tabel titik-titik di dalam selang [1,2] dengan h = 0.125:</u>

X8 = 2.000 -> f(2) = 1+2^(1/3))^(1/2)/(2^(2/3))
f(2) = 0.947

Tabel 3. Tabel titik-titik di dalam selang [1,2] dengan h = 0.125 dalam ekstrapolasi Richardson

R	Xr	f(Xr)
0	1.000	1.4142
1	1.125	1.3204
2	1.250	1.2420
3	1.375	1.1753
4	1.500	1.1176
5	1.625	1.0671
6	1.750	1.0225
7	1.875	0.9828
8	2.000	0.9470

4. Penyelesaian dengan metode Romberg

Sebagai contoh jumlah upaselang / subinterval (n) = 8.

Jarak antar titik / lebar pias (h) = (b - a) / n
= (2 - 1) / 8

= 0.125

Tabel 4.Tabel Romberg

K	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
0	1.18060			
1	1.14910	1.13860		
2	1.14067	1.13786	1.13781	
3	1.13854	1.13783	1.13783	**1.13783**

Hasil perhitungan fungsi integral dengan menggunakan metode Romberg = **1.13783**.

5. **Penyelesaian dengan ekstrapolasi Aitken.**

Sebagai contoh jumlah upaselang / subinterval (*n*) = 8.
Jarak antar titik / lebar pias (h) = (b - a) / n
= (2 - 1) / 8
= 0.125

Hitung nilai J.

J = I(h) + ((I(h) - I(2h)) / (t - 1))
J = 1.13854 + ((1.13854 - 1.14067) / (3.95775 - 1))
J = 1.13782

Hasil perhitungan fungsi integral dengan menggunakan ekstrapolasi Aitken dan kaidah trapesium = **1.13782**

Apabila semua hasil perhitungan fungsi integral di atas disusun dalam sebuah tabel, maka didapat tabel 5 sebagai berikut:

Tabel 5. Tabel hasil perhitungan fungsi integral

Metode yang digunakan	Hasil integral	Selisih hasil dengan metode analitik
- Metode Analitik	1.13784	
- Ekstrapolasi Richardson		
Kaidah Trapesium	1.13783	0.00001
Kaidah 1/3 Simpson	1.13783	0.00001
- Metode Romberg	1.13783	0.00001
- Ekstrapolasi Aitken		
Kaidah Trapesium	1.13782	0.00002
Kaidah 1/3 Simpson	1.13783	0.00001

Dari tabel di atas, dapat disimpulkan bahwa perhitungan fungsi integral dengan menggunakan metode ekstrapolasi menghampiri atau mendekati hasil yang dihasilkan dengan metode analitik. Dengan demikian, metode ekstrapolasi dapat digunakan untuk menyelesaikan fungsi integral yang rumit dan sulit untuk diselesaikan dengan metode analitik.

3.2 Perancangan

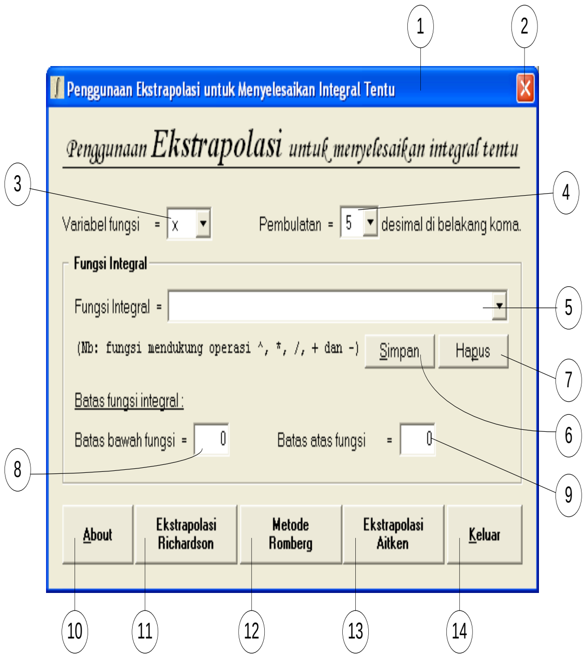
Perangkat lunak penggunaan ekstrapolasi untuk menyelesaikan fungsi integral tentu ini dirancang dengan menggunakan bahasa pemrograman *Microsoft Visual Basic 6.0* dengan beberapa komponen standar seperti *Text Box, Rich Text Box, Command Button, Option Button, Label, Frame*, dan sebagainya.

Perangkat lunak ini memiliki 5 (lima) buah *form*, antara lain :

1. *Form* Utama.
2. *Form* Ekstrapolasi Richardson.
3. *Form* Metode Romberg.
4. *Form* Ekstrapolasi Aitken.
5. *Form* About.

1. Form Utama

Pada *form* Utama, *user* dapat memasukkan fungsi integral yang ingin diselesaikan dengan metode ekstrapolasi. Fungsi yang telah dimasukkan dapat disimpan atau dihapus. Fungsi yang telah tersimpan sebelumnya akan tampil pada komponen *combo box*, sehingga dapat dipilih dan digunakan kembali. Selain itu, *user* juga dapat memilih variabel fungsi yang ingin digunakan, menentukan besarnya pembulatan desimal di belakang koma, menentukan batas atas dan batas bawah fungsi integral serta memilih metode ekstrapolasi yang ingin digunakan untuk menyelesaikan fungsi integral.



Gambar 3. Rancangan *Form* Utama

Keterangan :

1 : *title bar*, berisikan tulisan 'Penggunaan Ekstrapolasi untuk Menyelesaikan Integral Tentu'.

2 : tombol 'Close', berfungsi untuk menutup *form*.

3 : *combobox*, sebagai tempat memilih variabel yang dipakai pada fungsi integral.

4 : *combobox*, sebagai tempat memilih besar pembulatan desimal.

5 : *combobox*, sebagai tempat memasukkan dan memilih fungsi integral yang telah tersimpan sebelumnya.

6 : tombol 'Simpan', untuk menyimpan fungsi integral yang telah dimasukkan pada komponen no.5.

7 : tombol 'Hapus', untuk menghapus fungsi integral yang telah dipilih pada komponen no.5.

8 : *textbox*, untuk memasukkan besar batas bawah fungsi.

9 : *textbox*, untuk memasukkan besar batas atas fungsi.

10 : tombol 'About', untuk menampilkan *form* About.

11 : tombol 'Ekstrapolasi Richardson', untuk menampilkan *form* Ekstrapolasi Richardson.

12 : tombol 'Metode Romberg', untuk menampilkan *form* Metode Romberg.

13 : tombol 'Ekstrapolasi Aitken', untuk menampilkan *form* Ekstrapolasi Aitken.

14 : tombol 'Keluar', untuk keluar dari perangkat lunak.

IV. ALGORITMA DAN IMPLEMENTASI

4.1 Algoritma

Secara umum, algoritma yang digunakan untuk merancang perangkat lunak ekstrapolasi dibagi menjadi tiga bagian, yaitu:

1. Algoritma Ekstrapolasi Richardson.
2. Algoritma Metode Romberg.
3. Algoritma Ekstrapolasi Aitken.

Dalam ekstrapolasi Richardson dan ekstrapolasi Aitken, proses kerjanya dapat dibagi menjadi dua bagian lagi, karena terdapat dua kaidah yang dapat digunakan, yaitu kaidah trapesium dan kaidah 1/3 Simpson.

1 Algoritma Ekstrapolasi Richardson

Algoritma ekstrapolasi Richardson dirancang dalam bentuk fungsi yang memiliki dua buah parameter, yaitu jumlah subinterval (upaselang) dan kaidah yang digunakan. Fungsi ini mengembalikan nilai hasil integrasi dengan menggunakan ekstrapolasi Richardson. Berikut algoritma ekstrapolasi Richardson,

Public Function EkstrapolasiRichardson(N As Integer, KAIDAH As

```
String) As Double
    Q = IIf(KAIDAH = "T", 2, 4)
    H    =    Round((nBtsAtas    -
nBtsBawah) / N, Des)
    ReDim Fr(N)
    Xr = nBtsBawah
    nTmp1 = 0
    nTmp2 = 0
    For R = 0 To
    If R > 0 Then Xr = Xr + H
       Fr(R)                      =
Round(FungsiX(Xr), Des)
    Next R
    nHsl1 = 0
    For R = 0 To N
End Function
```

4.2 Implementasi Perangkat Lunak

1. Spesifikasi Hardware dan Software

Spesifikasi perangkat keras yang disarankan untuk menjalankan program ekstrapolasi ini adalah sebagai berikut :

a. Prosesor *Pentium* IV 1.6 GHz.
b. *Harddisk* dengan *free space* 500 MB.
c. Memori (RAM) 64 MB.
d. *VGA Card* 32 MB dengan resolusi minimum 1024 x 768.
e. Monitor SVGA.
f. *Keyboard* dan *Mouse*.

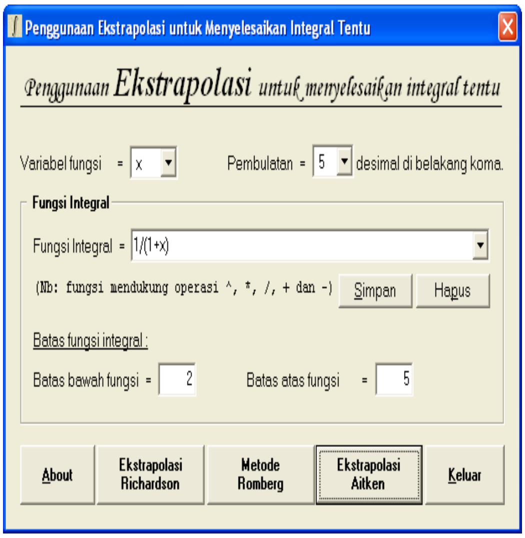
Adapun perangkat lunak (*software*) yang digunakan untuk menjalankan aplikasi ini adalah lingkungan sistem operasi *Microsoft Windows 98* atau *Microsoft Windows NT/2000/XP*.

2. Pengujian Program

Untuk menguji perhitungan fungsi integral pada program, diambil contoh fungsi berikut:

$$\int_{2}^{5} \frac{1}{1+x}\,dx ,$$

dengan pembulatan 5 desimal di belakang koma dan jumlah subinterval (upaselang) = 8. Tampilan *form* utama dengan *input* fungsi yang akan diintegralkan terlihat sebagai berikut:



Gambar 4. Tampilan *Form* Utama

Perbandingan hasil perhitungan fungsi dengan beberapa metode dapat dilihat pada tabel 4.1. Pada tabel 4.1, terlihat bahwa metode yang paling mendekati solusi analitik adalah metode ekstrapolasi Richardson. Namun, metode ekstrapolasi Richardson tidak dapat dianggap sebagai metode yang paling unggul, karena masing-masing metode ekstrapolasi memiliki tingkat ketelitiannya masing-masing.

Tabel 6. Tabel perbandingan hasil perhitungan fungsi integral

Metode yang digunakan	Hasil integral	Selisih hasil dengan metode analitik
- Metode Analitik	0.69315	
- Ekstrapolasi Richardson		
Kaidah Trapesium	0.69314	0.00001
Kaidah 1/3 Simpson	0.69314	0.00001
- Metode Romberg	0.69313	0.00002
- Ekstrapolasi Aitken		
Kaidah Trapesium	0.69309	0.00006
Kaidah 1/3 Simpson	0.69313	0.00002

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Setelah menyelesaikan perangkat lunak penggunaan ekstrapolasi untuk menyelesaikan integral tentu, penulis menarik kesimpulan sebagai berikut:

1. Perangkat lunak mampu menghitung hasil integral dari suatu fungsi dengan nilai akhir yang menghampiri hasil integral yang didapatkan dengan metode analitik.
2. Perangkat lunak dapat mendukung perkembangan perangkat lunak lain yang membutuhkan perhitungan hasil integral

dari fungsi integral yang terlalu kompleks untuk diselesaikan dengan metode analitik.
3. Perangkat lunak menampilkan semua langkah-langkah perhitungan ekstrapolasi, sehingga dapat membantu pemahaman atas metode ekstrapolasi dan juga dapat digunakan untuk mendukung kegiatan belajar mengajar, terutama dalam mata kuliah metode numerik dan kalkulus integral.

5.2 Saran

Penulis ingin memberikan beberapa saran yang mungkin dapat membantu dalam pengembangan perangkat lunak ini yaitu:

1. Perangkat lunak dapat dikembangkan untuk dapat menyelesaikan fungsi integral dari operasi trigonometri, seperti: fungsi sinus, consinus dan tangen.
2. Perangkat lunak dapat dikembangkan untuk menyelesaikan integral ganda atau lebih yang memiliki beberapa variabel untuk diintegralkan.

DAFTAR PUSTAKA

Basuki.A, dan Ramadi.N. 2005. Metode Numerik dan Algoritma Komputasi. Andi Offset:Yogyakarta.

Munir.R.2003. Metode Numerik. Informatika:Bandung.

Novian.A.2004. MS. Visual Basic 6 (Seri Penuntun Praktis). PT. Elex Media Komputindo:Jakarta.

Purcell.E.J dan Varberg.D.1987. Kalkulus dan Geometri Analitis. Erlangga:Jakarta.

Ramadhan.A.2004. MS. Visual Basic 6 (Seri Penuntun Praktis). PT. Elex Media Komputindo:Jakarta.

Setiawan.A. 2006. Pengantar Metode Numerik.Andi Offset:Yogyakarta.

Supardi.Y.2006.Microsoft Visual Basic 6.0 Untuk Segala Tingkat.PT. Elex Media Komputindo:Jakarta.