



PD 14614



003097743

COBISS ©

Univerzitet u Beogradu
Građevinski fakultet • Beograd

Mr Mira Petronijević

ANALIZA DINAMIČKOG SADEJSTVA
TELA I OBJEKTA PRIMENOM METODE
KONAČNIH ELEMENATA

• Doktorska disertacija •

Beograd
1992

12 11/6/14

UNIVERZITET U BEOGRADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET - BEOGRAD

Mr MIRA PETRONIJEVIĆ

**ANALIZA DINAMIČKOG SADEJSTVA
TLA I OBJEKTA
PRIMENOM METODE KONAČNIH ELEMENATA**

- DOKTORSKA DISERTACIJA -



BEOGRAD, 1992.

БЕОГРАД - БЕОГРАД
Гр. бр. 97743



Mentor

Prof. dr Miodrag Sekulović

Članovi komisije

1.

2.

3.

4.

5.

Datum odbrane

.....

Datum promocije

.....

Doktorat nauka

Tehničke nauke - oblast građevinarstva

ANALIZA DINAMIČKOG SADEJSTVA TLA I OBJEKTA
PRIMENOM METODE KONAČNIH ELEMENATA

Apstrakt

Predmet ovoga rada je linearna analiza dinamičkog sadejstva tla i objekta pri zemljotresu, primenom metode konačnih elemenata (MKE). Za rešenje odgovora rotaciono-simetričnog sistema je korišćena metoda podstruktura. Dinamičke parametre tla za krut kružni temelj fundiran na tlu iznad osnovne stene smo odredili primenom MKE. Tlo je idealizovano podelom na osno-simetrične konačne elemente uz primenu graničnih uslova po silama koje omogućavaju transmisiju seizmičkih talasa iz zone temelja u okolni slojevit, viskoelastičan poluprostor. Dobijena rešenja su upoređena sa teorijskim. U okviru toga, detaljno je analiziran problem odgovora sistema slojeva za talase u ravni, upravno na ravan i u cilindričnim koordinatama. Za sva tri slučaja je formulisana tzv. prenosna granica (transmitting boundary).

Na modelu zgrade nuklearnog reaktora prikazani su neki aspekti interakcije tla i objekta primenom ekvivalentne metode i metode koncentrisanih masa.

Ključne reči:

dinamika konstrukcija
interakcija tla i objekta
metoda konačnih elemenata
rotaciona-simetrija
metoda podstruktura
talasna teorija
prenosna granica
dinamički krutost tla

FINITE ELEMENT DYNAMIC ANALYSIS
OF SOIL-STRUCTURE INTERACTION

Abstract

A substructure method for earthquake analysis of soil-structure interaction is presented. The procedure is applied to the analysis of axisymmetric systems. Dynamic stiffness coefficients of rigid disk resting on layer built in at its base, are determined by a finite element method. The transmitting boundary between the finite element "core" region and viscoelastic soil layers of infinite horizontal extent are superimposed. The core region is discretized by means of axisymmetric finite element. A series of parametric studies of dynamic stiffness coefficients are presented. The substructure method is applied to simplified nuclear containment structural model founded on the "hard" and the "soft" layer. The interaction systems are analysed by equivalent method and lumped mass method.

Key words: dynamics of structures
soil-structure interaction
finite element method
axisymmetric analysis
substructure method
elastic wave theory
transmitting boundary
dynamic stiffness of soil

Koristim priliku da se zahvalim mentoru Prof. dr Miodragu Sekuloviću na podršci i savetima pri izradi rada.

Zahvaljujem se svojim kolegama sa Katedre za tehničku mehaniku i teoriju konstrukcija koji su pokazali strpljivost da saslušaju probleme na kojima radim i sa kojima sam suočena.

Takođe se zahvaljujem bibliotekarkama Građevinskog fakulteta Milki Laković i Olgi Radisavljević na svesrdnoj pomoći pri nabavci strane literature i Slavici Radovanović, dipl. inž. iz Seizmološkog zavoda SR Srbije na posuđenoj stručnoj literaturi iz oblasti seizmologije.

SADRŽAJ

LISTA SIMBOLA

1. UVOD	1
1.1. Predmet i svrha rada	3
1.2. Kratak sadržaj rada	5
2. INTERAKCIJA TLA I OBJEKTA	6
2.1. Određivanje odgovora <i>in situ</i>	7
2.2. Metode analize interakcije tla i objekta	8
2.3. Metode rešavanja dinamičke jednačine	11
2.3.1. Analiza u vremenskom domenu	11
2.3.1.1. Linearna analiza	11
2.3.1.1.1. Direktna integracija	12
2.3.1.1.2. Modalna analiza	12
2.3.1.2. Nelinearna analiza	13
2.3.2. Analiza u frekventnom domenu	15
2.3.2.1. Ekvivalentna linearna metoda	17
2.3.3. Hibridna metoda	18
2.4. Metode formiranja matematičkog modela	18
2.4.1. Direktna metoda	18
2.4.2. Metoda podstruktura	20
2.4.2.1. Metoda kontinuuma	24
2.4.2.2. Metoda konačnih elemenata	25
2.4.2.3. Metoda graničnih elemenata	27
3. TALASNA JEDNAČINA U KARTEZIJSKIM KOORDINATAMA	28
3.1. Longitudunalni ili <i>P</i> -talasi	31
3.2. Transverzalni ili <i>S</i> -talasi	33
3.3. Ukupno pomeranje	35
3.4. Dinamičke matrice krutosti sloja	36
3.4.1. Dinamička matrica krutosti za pomeranja upravna na ravan	36
3.4.1.1. Tačno rešenje svojstvenog problema <i>SH</i> -talasa	39
3.4.1.2. Diskretan oblik dinamičke	

matrice krutosti sloja K_{sh}^{s1}	40
3.4.1.3. Diskretan problem svojstvenih vrednosti <i>SH</i> -talasa	42
3.4.2 Dinamička matrica krutosti za pomeranja u ravni	44
3.4.2.1. Tačno rešenje svojstvenog problema <i>P</i> i <i>SV</i> -talasa	49
3.4.2.3. Diskretan oblik dinamičke matrice krutosti K_{p-sv}^{s1}	49
3.4.2.4. Diskretan problem svojstvenih vrednosti <i>P</i> i <i>SV</i> -talasa	51
3.5. Površinski talasi	53
3.5.1. <i>Rayleigh</i> -evi talasi	56
3.5.2. <i>Love</i> -ovi talasi	58
3.6. Analiza svojstvenih vrednosti <i>L</i> i <i>R</i> -talasa. Program L.FOR i R.FOR	59
3.6.1. Primer 1	59
3.6.2. Primer 2	63
3.6.3. Primer 3	64
3.7. Zaključak	66
4. TALASNA JEDNAČINA U CILINDRIČNIM KOORDINATAMA	68
4.1. Dinamička matrica krutosti	78
4.2. Problem svojstvenih vrednosti	79
5. GRANIČNI USLOVI	80
5.1. Konzistentna granica u kartezijanskim koordinatama	86
5.1.1. Konzistentna granica za talase upravne na ravan	88
5.1.2. Konzistentna granica za talase u ravni	91
5.2. Konzistentna granica u cilindričnim koordinatama	96
5.2.1. Matrica krutosti na granici. Program GRANICA	107
6. ROTACIONA SIMETRIJA	109
6.1. Prostorna analiza seizmičkih talasa	111
6.2. Dinamička krutost kružnog temelja. Program AXYB	113
6.2.1. Primeri	117
6.2.2. Zaključak	127
6.3. Odgovor sistema primenom metode podstruktura	128
6.3.1. Ekvivalentna metoda	130
6.3.2. Metoda koncentrisanih masa	138
7. ZAKLJUČAK	144
8. LITERATURA	147
9. DODATAK	156

LISTA SIMBOLA

a_0	bezdimezionalna frekvencija
A_{SH}	amplituda horizontalne komponente S-talasa
A_{SV}	amplituda vertikalne komponente S-talasa
A_P	amplituda P-talasa
A, B, C, D, E, F, J, Q	matrice sloja
A, B, C, D, E, F, J, Q	matrice sistema slojeva
c	fazna brzina
c_a	prividna brzina
c_p	brzina longitudinalnih talasa
c_s	brzina smičućih talasa
c_x, c_φ, c_z	koeficijenti prigušenja tla
C	matrica prigušenja
D	dinamička matrica krutosti
D_{SH}^{SL}	dinamička matrica krutosti sloja za talase upravne na ravan
D_{P-SV}^{SL}	dinamička matrica krutosti sloja za talase u ravni
D_{SH}	dinamička matrica sistema slojeva za talase upravne na ravan
D_{P-SV}	dinamička matrica sistema slojeva za talase u ravni
e	kubna dilatacija
E	modul elastičnosti
G	modul smicanja
h_{el}	visina elementa
H^*, \bar{H}, H_n	matrice Hankelovih funkcija sloja
H^*, \bar{H}, H_n	matrice Hankelovih funkcija sistema slojeva
$H_n^{(2)}(kr)$	Hankelova funkcija druge vrste, reda n
I	moment inercije mase
$J_n(kr)$	Bessel-ova funkcija prve vrste reda n
$k = \omega/c$	talasni broj

K_x, K_φ, K_z	dinamička krutost tla
k_x, k_φ, k_z	koeficijenti krutosti tla
K_{SH}^{SL}	dinamička matrica krutosti sloja za talase upravne na ravan - diskretan oblik
K_{P-SV}^{SL}	dinamička matrica krutosti sloja za talase u ravni - diskretan oblik
K	matrica krutosti jezgra
K^*	matrica krutosti sistema u frekventnom domenu sa histerezisnim prigušenjem
K_b	matrica krutosti na granici
K_b^*	matrica krutosti na granici sa histerezisnim prigušenjem
K_0	matrica krutosti na granici za $n=0$
K_1	matrica krutosti na granici za $n=1$
K_{bb}	matrica krutosti temelja
K_{SH}	dinamička matrica sistema slojeva za talase upravne na ravan - diskretan oblik
K_{P-SV}	dinamička matrica sistema slojeva za talase u ravni - diskretan oblik
l_x, l_y, l_z	kosinusi pravca P -talasa
m	masa
m_x, m_y, m_z	kosinusi pravca S -talasa
M	matrica masa
n	broj <i>Fourije</i> -ovog harmonika
N	matrica interpolacionih funkcija
P	vektor opterećenja čvorova
r_0	koordinata granice
r, z, θ	cilindrične koordinate
r	tangens pravca S -talasa u kartezijanskim koordinatama
s	tangens pravca P -talasa
t	tangens pravca S -talasa u cilindričnim koordinatama
t	vreme
T_n	matrica trigonometrijskih funkcija koje definišu raspodelu u θ pravcu
$\bar{U}(r, z, \theta, t)$	vektor pomeranja tačke u cilindričnim koordinatama
$\bar{U}(r, z, \theta)$	vektor amplituda pomeranja u cilindričnim koordinatama
$\bar{U}(r, z)$	vektor amplituda pomeranja u cilindričnim koordinatama
$\bar{U}(z)$	vektor amplituda pomeranja u cilindričnim koordinatama
U_b	vektor pomeranja tačaka na granici
x, y, z	Kartezijanske koordinate
$U(x, y, z, t)$	vektor pomeranja tačke u Kartezijanskim koordinatama
u_g	vektor pomeranja tla (<i>free field</i>)
u_b	vektor pomeranja baze (<i>scattered motion</i>)

u^i	vektor pomeranja pri inercijalnoj interakciji
u^k	vektor pomeranja pri kinematičkoj interakciji
u, v, w	amplitude komponenti pomeranja pri talasnom kretanju
X_j	vektor svojstvenih oblika tona j
X	modalna matrica
$Y_n(kr)$	<i>Bessel</i> -ova funkcija druge vrste reda n
W	rad
W	modifikovana modalna matrica
$\varepsilon(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz})$	vektor deformacija u Kartezijanskim koordinatama
$\varepsilon(\varepsilon_r, \varepsilon_\vartheta, \varepsilon_z, \gamma_{r\vartheta}, \gamma_{rz}, \gamma_{\vartheta z})$	vektor deformacija u cilindričnim koordinatama
φ, χ, ψ	potencijali pomeranja
$\Gamma(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_n)$	vektor faktora modalne participacije
γ_j	faktor modalne participacije tona j
Δ	inkrement
λ, μ	<i>Lame</i> -ove konstante
Λ	matrica koeficijenata integracije α sloja
Λ^*	matrica koeficijenata integracije α sistema slojeva
$\Omega(\Omega_r, \Omega_\vartheta, \Omega_z)$	vektor rotacije
ρ	gustina
$\sigma(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$	vektor napona u kartezijanskim koordinatama
$\sigma(\sigma_r, \sigma_\vartheta, \sigma_z, \tau_{r\vartheta}, \tau_{rz}, \tau_{\vartheta z})$	vektor napona u cilindričnim koordinatama
Ψ, Φ	modifikovane modalne matrice
ω	frekvencija talasa
ξ	koeficijent modalnog prigušenja
ξ_h	histerezisno (materijalno) prigušenje
ξ_x, ξ_φ	komponente radijacijskog prigušenja
∇^2	<i>Laplace</i> -ov operator

Superskripti:

a	antimetrični harmonik
i	inercijalna interakcija
k	kinematička interakcija
s	simetrični harmonik
t	transponovano
$(\bar{\quad})$	<i>Fourije</i> -ova raspodel po θ

Indexi:

$(,)$	izvod po nekoj od promenljivih
b	baza
s	konstrukcija

GLAVA 1

UVOD

Dinamička interakcija tla i objekta, kao što samo ime kaže, se bavi proučavanjem fenomena interaktivnog dejstva tla i konstrukcije jednog na drugi pri zemljotresu. Dinamički odgovor kruto uklještenog objekta se bitno razlikuje od odgovora sistema fundiranog na određenoj lokaciji. Sa druge strane, pomeranja tačaka u tlu bez prisustva konstrukcije su drugačija od pomeranja koja bi se javila na istom mestu kada je konstrukcija prisutna. Fenomen je uočio Woods još 1908., kada je načinio studiju o rasprostiranju dejstva zemljotresa u oblasti San Franciska. Problem je došao do izražaja posle razornog zemljotresa u Meksiko Sitiiju 1957., gde su lokalni geološki uslovi doveli do izrazite pojave interakcije. Slučaj se ponovio sa zemljotresom u Karakasu 1967. [106], gde su stradali armirano-betonski objekti visoke spratnosti zbog fundiranja na dubokim naslagama mekog tla. Od tada se rešavanju problema interakcije definitivno poklanja velika pažnja.

Istraživanja koja su se u međuvremenu javila usmerena su sa jedne strane, na analizu zemljotresa i definisanje seizmičkog inputa, a sa druge strane na iznalaženje metoda za proračun dinamičkog odgovora združenog sistema tlo-objekat. Problem koji je stavljen pred istraživače nije bio nimalo jednostavan.

Zemljotres stiže na određenu lokaciju kao skup seizmičkih talasa, koji se kretanjem od izvora kroz nepravilno uslojenu sredinu, izmenio

usled niza refleksija i refrakcija. Prirodu tako nastalih talasa je nemoguće unapred predvideti, a bez pravilno definisanog dinamičkog inputa nije moguće doći do adekvatnog odgovora sistema. Stoga, možemo reći da zemljotres predstavlja pravu stohastičku pobudu.

Sve metode analize se prema tome mogu svrstati u probablističke i determinističke metode. Predmat našeg rada su ove druge, determinističke metode, koje polaze od toga da je dinamička pobuda jasno definisana, bilo kao vremenska istorija zemljotresnog ubrzanja, bilo kao spektar ubrzanja ili pomeranja. Sam problem definisanja seizmičkog inputa ovoga puta nije bio predmet našeg istraživanja. Nešto više o tome se može naći u radovima [3] i [88].

Kada nam je poznat dinamički input možemo pristupiti rešavanju dinamičkog odgovora sistema tlo-objekat. Pri tome pod rečju tlo podrazumevamo beskonačni nehomogeni i neelastični poluprostor, na kome je fundirana konstrukcija. Za razliku od statičke analize, gde se uticaji u tlu prostiru do relativno male dubine, u dinamičkoj analizi to nije slučaj. Nepravilno modeliranje dela tla koje ulazi u dinamički proračun može dovesti do potpuno pogrešne slike odgovora. Odbijanje seizmičkih talasa o granice modela dovodi do povećanja energije sistema, što u prirodi nije slučaj. Tlo propušta seizmičke talase, prenoseći energiju ka beskonačnosti. Stoga je za pravilno modeliranje tla neophodno dobro poznavanje dinamičkih karakteristika tla. Brojni radovi su posvećeni istraživanju ovog fenomena [96], [103], [104]. Ključnu literaturu predstavljaju knjige *Richart, Hall, Woods* [95] i *Prakash* [93]. Iako tlo poseduje izrazite nelinearne osobine koje dolaze do izražaja pri velikim pomeranjima usled zemljotresa, sve do danas široko primenjivane metode analize se baziraju na linearnoj metodi i ekvivalentnoj linearnoj metodi, kojom se aproksimira nelinearno ponašanje tla. Tek u poslednjih pet godina javili su se radovi kojima se analizira pojava lokalne nelinearnosti primenom metode podstruktura.

U poslednjih dvadeset godina razvijeno je mnoštvo metoda i postupaka za proračun interakcije tla i objekta. Naročito je primena metode konačnih elemenata (MKE) dovela do naglog proučavanja problema interakcije. Analizirajući postojeće postupke vidimo da oni prirodno slede razvoj kompjuterske tehnike. Tako se od metode kontinuuma iz 70-tih, koja je koristila analitička rešenja za dinamičku krutost tla,

primenom MKE, preko postupka direktne analize, zatim metode podstruktura, došlo i do nelinearne dinamičke analize delova sistema. Direktna metoda analizira objekat zajedno sa delom tla za koji je procenjeno da učestvuje u odgovoru sistema. U metodi podstruktura tlo i objekat se analiziraju nezavisno, što ne samo da smanjuje matematički model i omogućava brže iznalaženje rešenja, već omogućava i kombinovanje različitih metoda. Tako se u poslednjih deset godina za određivanje dinamičke krutosti tla sve više koristi metoda graničnih elemenata. Metode analize interakcije su se razvijale i prilagođavale onako kako su otkrivani pojedini fenomeni interakcije. Analiza u vremenskom domenu je zamenjena analizom u frekventnom domenu, koja je omogućila primenu različitih koeficijenata prigušenja u tlu i konstrukciji kao i analizu radijacijskog prigušenja primenom prenosne granice. Hibridna metoda, koja povezuje obe predhodno navedene, nastala je iz potrebe da se delovi tla i konstrukcije sa izrazitim nelinearnim ponašanjem podvrgnu nelinearnoj dinamičkoj analizi.

Prikaz svih metoda će biti izložen ukratko u poglavlju 2.

Broj metoda i rešenja je znatan i raznovrstan i odgovara brojnim i raznovrsnim problemima i fenomenima interakcije tla i objekta koji su istraživači pokušavali da reše. Analizirajući ih došli smo do zaključka da su gotovo sva današnja saznanja, nivo i mogućnosti kompjuterske tehnike time iscrpljeni: od konačnih do graničnih elemenata, od vremenskog do frekventnog domena. Jedino je još preostala potpuna nelinearna analiza, koja do sada nije mogla biti korišćena zbog ograničenih mogućnosti računara.

1.1. Predmet i svrha rada

U predhodnom delu teksta smo konstatovali da je u rešavanju problema interakcije tla i objekta skoro sve rečeno. Sa druge strane, kod nas, gotovo da ne postoje istraživanja iz ove oblasti. Najčešće primenjivani postupak je metoda direktne analize konačnim elementima u vremenskom domenu. Pojava radijacijskog prigušenja, koje nastaje kao posledica prolaska talasa kroz sistem tlo-objekat, se u takvim analizama po pravilu zanemaruje.

Predmet ovoga rada je definisanje graničnih uslova po silama u

metodi konačnih elemenata, koji će verno da predstavljaju radijaciju energije iz zone objekta ka beskonačnosti. Do graničnih uslova dolazimo analizom prirode seizmičkih talasa koji se prostiru kroz poluprostor. Pri tome polazimo od pretpostavke da je poluprostor sastavljen od horizontalno postavljenih homogenih, linearno elastičnih slojeva tla. Granične uslove po silama određujemo iz uslova jednakosti pomeranja na granici u konačnom elementu i slobodnom polju, a za slučaj talasnog kretanja: upravno na ravan (*Love*-ve talase), u ravni (*Rayleigh*-eve talase) i u cilindričnim koordinatama.

Za sve navedene slučajeve, granični uslovi se dobijaju u vidu frekventno zavisne matrice krutosti sa kompleksnim koeficijentima, koja važi za čvorove na granici. Težište problema je dobijanje rešenja za slučaj rotacione simetrije. Tačnost rešenja kontrolisaćemo tako što ćemo za slučaj rotacione simetrije odrediti dinamičku krutost diska fundiranog na sloju iznad krute baze primenom MKE.

Dobijanje dinamičke krutosti tla za slučaj krutog diska primenom MKE i odgovarajućih graničnih uslova u frekventnom domenu omogućava nam da rešavamo probleme interakcije osnosimetričnih objekata metodom podstruktura. Pri tome do odgovora konstrukcije možemo doći primenom metode konstantnih parametara uz upotrebu dostupnih programa u vremenskom domenu.

Svrha rada je:

- 1) da se analizom seizmičkih talasa uspostavi veza između posmatrane lokacije i mogućeg polja pomeranja;
- 2) da se za tako definisano pomeranje odredi matrica krutosti na granici zone konačnih elemenata i poluprostora;
- 3) da se proračunom dinamičke krutosti kružnog temelja na sloju nad krutom bazom analiziraju svi parametri koji utiču na odgovor sistema;
- 4) da se definisanjem prenosne granice (*transmitting boundary*) otvori put ka poboljšanju postojećih postupaka dinamičke analize primenom MKE. Tu pre svega mislimo na analizu rotaciono-simetričnih objekata primenom metode podstruktura.

Pored toga, ovako definisanu granicu lako možemo proširiti i na rešavanje ravanskih problema tako što ćemo je jednostavno implementirati u postojeći programa za direktnu analizu ravanskih problema u frekventnom domenu [88].

1.2. Katak sadržaj rada

Tekst rada je podeljen u sedam poglavlja. Posle uvoda u prvom poglavlju sledi druga glava u kojoj je dat prikaz svih metoda analize problema interakcije i njihova klasifikacija prema načinu formiranja matematičkog modela i prema postupku za rešavanje dinamičke jednačine.

Treća glava je posvećena problemu talasnog kretanja u kartezijskim koordinatama. Na osnovu rešenja talasne jednačine formulisane su matrice krutosti sloja za talase u ravni i za talase upravne na ravan. Rešenje svojstvenog problema sistema slojeva u ravni predstavlja talasne forme *Rayleigh*-evih talasa, a rešenje upravno na ravan predstavlja talasne forme *Love*-ovih talasa. Za oba slučaja je napravljen program za računar i analizirano je nekoliko primera.

U poglavlju 4 smo formulisali talasnu jednačinu u cilindričnim koordinatama i odredili dinamičku matricu rotaciono-simetričnog sloja.

Poglavlje 5 se bavi problemom graničnih uslova u okviru dinamičke analize primenom metode konačnih elemenata. Izloženi su svi do sada primenjeni tipovi granica. Za slučaj *Lysmer*-ve granice [69], za koju smatramo da je najpovoljnija, kako po rezultatima komparativnih analiza [99], tako i po mogućnosti dalje primene u nelinearnoj analizi primenom metode podstruktura [131], izvedene su matrice krutosti na granici za *R* i *L*-talase, kao i za talase u cilindričnim koordinatama.

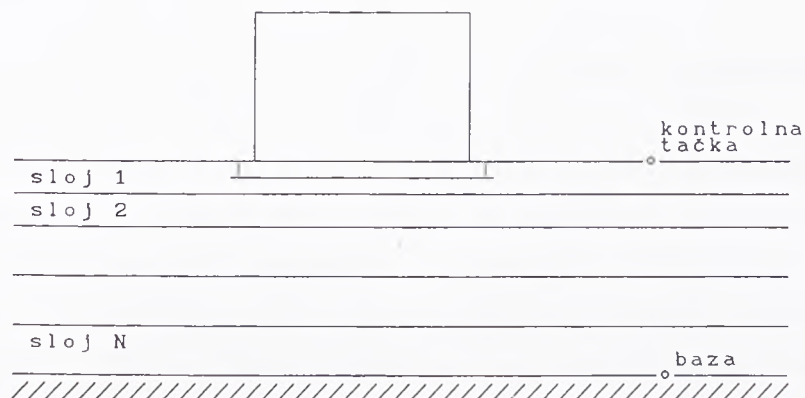
Glava 6 je posvećena rotaciono-simetričnom problemu. Za slučaj vertikalne propagacije talasa određeni su dinamički parametri tla, krutosti i prigušenje: K_z , C_z , K_x , C_x odnosno K_φ i C_φ , primenom programa *AXYB* i *INTAXB* koji koriste *MKE* i odgovarajuće uslove na granici. Pomoću ekvivalentne metode i metode koncentrisanih masa određen je odgovor sistema tlo-objekat za slučaj zgrade nuklearnog reaktora.

Zaključak rada je dat u glavi 7.

GLAVA 2.

INTERAKCIJA TLA I OBJEKTA

Problem interakcije tla i objekta pri zemljotresu podrazumeva rešavanje odgovora konstrukcije fundirane na određenoj lokaciji na osnovu zadatog pomeranja kontrolne tačke pri zemljotresu. Pod kontrolnom tačkom podrazumevamo tačku na površini (ili na određenoj dubini) posmatrane lokacije. Kontrolno pomeranje je pomeranje pri zemljotresu koje bi se pojavilo na posmatranom mestu bez prisustva konstrukcije (*free-field*).



Slika 2-1

Kompletna analiza interakcije tla i objekta podrazumeva rešavanje dva problema. Prvi, definisavanje seizmičke pobude i određivanje odgovora tla na taj pobudaj (odgovor *in situ*); drugi, analiza

interakcije tla i objekta.

2.1. Određivanje odgovora *in situ*

Sve dok, sa dovoljnom tačnošću, ne poznajemo prirodu zemljotresa i polje seizmičkih talasa, na mestu gde ćemo postaviti objekat, nema ni pravog rešenja interakcije.

Sa druge strane, stohastička priroda zemljotresa utiče na to da zemljotres nije moguće ni predvideti niti matematički precizno definisati, kao što je to slučaj sa drugim tipovima opterećenja. Problem definisanja seizmičke pobude se danas rešava upotrebom akcelerograma poznatih karakterističnih zemljotresa, dok se za finiju dinamičku analizu na osnovu geoloških karakteristika tla zadate lokacije i tipa konstrukcije koja se posmatra, generišu sintetički akcelerogrami. U praksi je široko rasprostranjena upotreba spektralnih linija brzine tj. ubrzanja.

Sa tako definisanim pomeranjem kontrolne tačke rešenje odgovora *in situ*, (poznato u literaturi kao *problem amplifikacije*) zavisi od prirode talasa prouzrokovanih pomeranjem tla. Polje talasa se može sastojati od više komponenata koje uključuju:

- 1) prostorne talase;
- 2) Rayleigh-ove talase;
- 3) Love-ove talase;
- 4) sferne talase.

Pri tome seizmolozi nisu u stanju da definišu u potpunosti moguće talasne forme.

Zbog toga je danas odgovor *in situ*, praktično, moguće dobiti samo za najjednostavniji slučaj horizontalno postavljenih slojeva izloženih vertikalnoj propagaciji ravanskih talasa. Još 70-tih su napisani programi koji rešavaju problem amplifikacije: SHAKE i MASH. Program SHAKE¹ rešava problem amplifikacije za horizontalno postavljene

¹ Schnabel P. B., Lysmer J. H. B. Seed, Rep. No. EERC 72-12, Univ. of California, Berkeley, (1972)



slojeve tla, pretpostavljajući linearne veze τ - γ u tlu. Program MASH² rešava isti problem primenom nelinearnih veza između napona i deformacije u tlu. Oba programa se zasnivaju na rešavanju talasne jednačine jednodimenzionalnog problema propagacije smičućih talasa i nisu do danas prevaziđeni.

Sa druge strane, Lysmer [68] je rešio odgovor *free field*-a za slučaj R i L talasa primenom metode konačnih elemenata. Detaljan prikaz problema amplifikacije i metode rešavanja date su u radu [98].

Problem prirode seizmičkih talasa uopšte je kod nas nedovoljno proučavan. Kako svaka studija interakcije tla i objekta zahteva ozbiljnu analizu osnovnog parametra - seizmičke pobude, to se poglavlja 3 i 4 ovog rada bave pitanjima seizmičkih talasa i mogućnostima njihove analize primenom metoda konačnih elemenata.

2.2. Metode analize interakcije tla i objekta

U poslednjih dvadeset godina sprovedena su intenzivna istraživanja u oblasti dinamičke interakcije tla i objekta. Rezultat toga su predloženi brojni analitički modeli i metode za rešavanje problema interakcije. Kompleksnost zadatka je dovela do toga da postoje velike razlike u odnosu na složenost analize, matematičkog modela i numeričke tehnike primenjene u rešavanju. Sve metode je ovde nemoguće izložiti, ali ih je moguće klasifikovati.

Prvo, prema načinu formiranja matematičkog modela sve metode možemo svrstati u dve grupe:

- Direktna metoda (*Direct method*), u kojoj tlo i konstrukcija formiraju jedinstven model. Do odgovora sistema se dolazi u jednom koraku izlaganjem združenog sistema zadatom pomeranju osnove;

Metoda podstruktura (*Substructures method*), u kojoj se nezavisno posmatraju tlo i objekat, a postupak rešavanja sprovodi u više koraka.

Drugo, u odnosu na postupak primenjen u analizi razlikujemo 3 metode:

² Seed H. B., J. Martin, Rep. No. EERC 78-23, Univ. of California, Berkelay, 1978.

- Metoda konačnih elemenata (MKE), koja je našla veliku primenu u rešavanju problema interakcije i kojom se isključivo i rešava problem direktne integracije;

- Metoda kontinuuma, koja se koristi u metodi podstruktura i koja tlo analizira kao beskonačni poluprostor, primenom analitičkih rešenja;

- Metoda graničnih elemenata (*Boundary elements method*), koja se danas sve više koristi u metodi podstruktura, a zasnovana je na primeni graničnih elemenata.

Treće, u okviru MKE, u odnosu na način rešavanja dinamičke jednačine kretanja sve metode možemo svrstati u tri grupe:

- Analiza u vremenskom domenu (*Time domain analysis*) gde se kao što i samo ime kaže, dinamička jednačina, koja predstavlja sistem diferencijalnih jednačina, rešava u vremenskom domenu, bilo direktnom integracijom, bilo modalnom superpozicijom;

- Analiza u frekventnom domenu (*Frequency domain analysis*), gde se primenom brze *Fourier*-ove transformacije problem preslikava u frekventni domen i time dinamička jednačina svodi na sistem linearnih jednačina;

- Hibridna metoda, koja kombinuje nelinearnu analizu u vremenskom domenu sa analizom u frekventnom domenu (koja se inače može primeniti samo na linearne sisteme).

Četvrto, u zavisnosti od pretpostavljenih veza između napona i deformacije u konstrukciji i tlu sve metode možemo svrstati u 3 grupe:

- Linearna analiza, sa linearnim vezama između napona i deformacija, najčešće korišćena danas u problemima interakcije;

- Ekvivalentna linearna metoda, u kojoj se iterativno, promenom modula klizanja G i prigušenja ξ u tlu, u zavisnosti od klizanja γ , aproksimira nelinearno ponašanje tla. Metoda je primenjiva samo u frekventnom domenu;

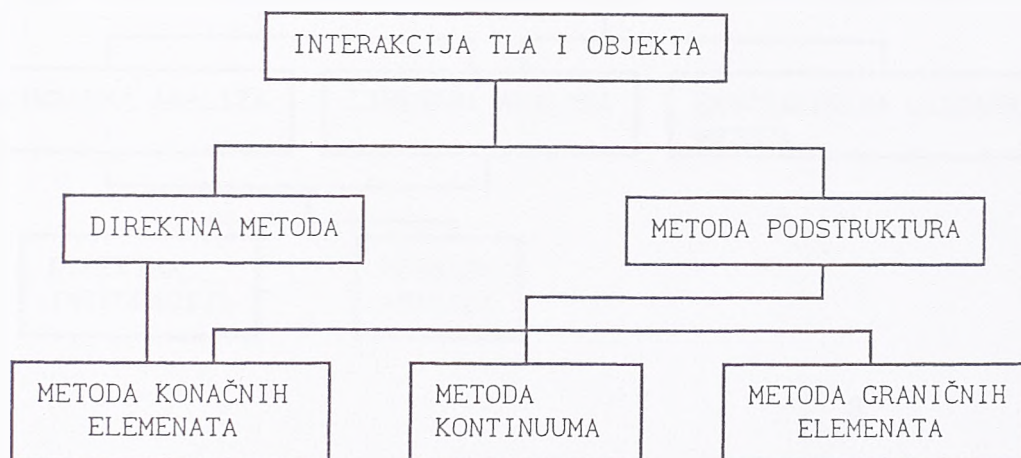
- Nelinearna analiza, sa nelinearnim vezama napona i deformacije, moguća samo u vremenskom domenu.

Koju ćemo od navedenih metoda izabrati, zavisi od prirode problema koji nam je postavljen, raspoložive kompjuterske tehnike, programa i naravno, od stepena znanja.

Za sve navedene tipove analize zajednička je primena MKE bilo u potpunosti, bilo za analizu jedne od podstrukture, pri čemu se druga podstruktura može tretirati i na drugi način. Osnovi metode konačnih elemenata su danas opšte poznati i moguće ih je naći u fundamentalnim radovima Zienkiewicz-a [135], Bathe-a [6], Sekulovića [108].

Ovde ćemo ukratko izložiti osnove pojedinih metoda i istaći njihove prednosti i mane u odnosu na druge metode. Za svaku od njih ćemo navesti literaturu u kojoj je moguće dobiti detaljnije podatke.

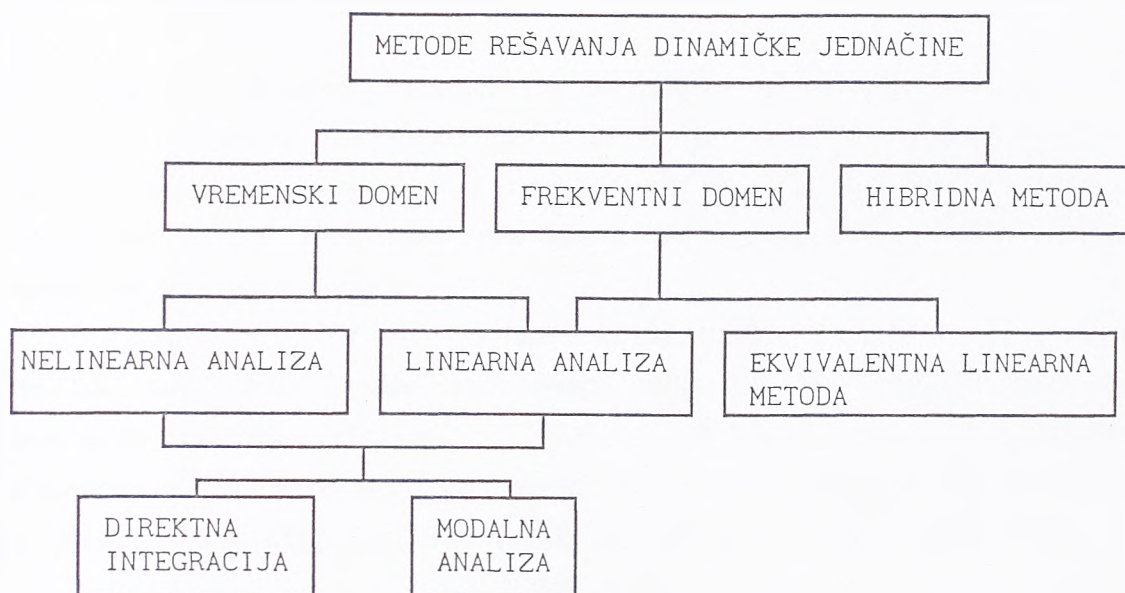
U shemi 2-1 je dat pregled svih izloženih metoda.



Shema 2-1

2.3 Metode rešavanja dinamičke jednačine

U okviru MKE moguća su tri numerička postupka za rešavanje dinamičke jednačine koje ćemo ukratko izložiti (shema 2-2).



Shema 2-2

2.3.1. Analiza u vremenskom domenu

2.3.1.1. Linearna analiza

Linearna jednačina kretanja sistema tlo-objekat u MKE predstavlja sistem diferencijalnih jednačina drugog reda oblika:

$$M \ddot{u}(t) + C \dot{u}(t) + K u(t) = P(t) \quad (2.1)$$

gde je M matrica masa, C matrica prigušenja, K matrica krutosti, u vektor pomeranja, \dot{u} vektor brzine, \ddot{u} vektor ubrzanja tačaka sistema, a P vektor zadatog opterećenja. Vektor $P(t)$ dinamičkog opterećenja se u slučaju zemljotresa definiše u funkciji zadatog pomeranja osnosve. U jednačini (2.1) pretpostavljamo da je reč o viskoznom prigušenju pa se tada C može predstaviti kao Rayleigh-evo prigušenje:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (2.2)$$



Jednačinu kretanja (2.1) možemo rešavati metodom direktne integracije ili modalnom analizom. Obe metode se danas standardno primenjuju. Detalji numeričkih postupaka mogu se naći u referenci [6].

2.3.1.1.1 Direktna integracija

U metodi direktne integracije dinamička jednačina kretanja (2.1) se rešava direktno, primenom postupka korak-po-korak (*step-by-step*) u kome se odgovor u trenutku t određuje na osnovu odgovora u trenutku $t-\Delta t$, gde je Δt vremenski inkrement. Inkrementalni oblik dinamičke jednačine kretanja glasi:

$$M \Delta \ddot{u}_t + C \dot{\Delta u}_t + K \Delta u_t = \Delta P_t \quad (2.3)$$

gde su $\Delta \ddot{u}_t$, $\dot{\Delta u}_t$ i Δu_t priraštaji vektora ubrzanja, brzine tj. pomeranja tačaka sistema, a ΔP_t priraštaj vektora dinamičkog opterećenja. Predpostavljajući promenu vektora ubrzanja duž intervala Δt , sistem jednačina (2.3) se svodi na sistem linearnih jednačina:

$$\tilde{K} \cdot \Delta u_t = \Delta \tilde{P}_t \quad (2.4)$$

Detaljan prikaz direktne integracije je moguće naći u Ref. [6].

2.3.1.1.2. Modalna analiza

Modalna analiza je postupak prevođenja sistema diferencijalnih jednačina u sistem nezavisnih jednačina transformacijom na modalne koordinate:

$$u(t) = \Phi y(t) \quad (2.5)$$

gde je $y(t)$ vektor modalnih koordinata, a Φ matrica sastavljena od izabranog broja modalnih vektora X_j , $j=1,2,..l$. Modalni vektori se dobijaju rešavanjem problema svojstvenih vrednosti:

$$(K - \omega_j^2 M) X = 0 \quad (2.6)$$

Oni zadovoljavaju uslove ortogonalnosti:

$$X^t M X = I \quad (2.7.1)$$

$$X^t K X = \Omega \quad (2.7.2)$$

gde je Ω dijagonalna matrica svojstvenih vrednosti ω_j^2 .

Posle transformacije (2.5) dinamička jednačina kretanja glasi:

$$\ddot{y}(t) + (\Phi^t C \Phi) \dot{y}(t) + \Omega y(t) = \Phi^t P(t) \quad (2.8)$$

Ako i matricu prigušenja definišemo tako da zadovoljava uslov ortogonalnosti, sistem simultanih jednačina (2.8) prevodimo u sistem nezavisnih jednačina:

$$\ddot{y}_j(t) + (2\xi_j\omega_j) \dot{y}_j(t) + \omega_j^2 y_j(t) = X_j^t P(t) \quad j=1,2..l \quad (2.9)$$

gde je ξ_j koeficijent prigušenja za ton j (modalno prigušenje).

U problemima interakcije tla i objekta neposredna primena modalne analize nije moguća. Razlog tome je odsustvo klasičnih normalnih tonova združenog sistema tlo-objekat, što je posledica različitog prigušenja tla i objekta u sistemu. Uslov ortogonalnosti matrice prigušenja nije zadovoljen (ne postoji zajedničko modalno prigušenje). Ipak, modalna analiza je našla primenu naročito u problemima interakcije tla i objekta koje karakterišu izraziti tonovi (zgrade). U tu svrhu su razvijene i posebne metode određivanja modalnog prigušenja združenih sistema. Čitav niz radova posvećen je tom problemu [14], [35], [85], [86], [87], [113], [118].

2.3.1.2. Nelinearna analiza

Istraživanja u oblasti interakcije tla i objekta u poslednjih dvadeset godina su se uglavnom bavila linearnom analizom problema. Nelinearna analiza se, zbog veličine modela, zadržavala samo na konstrukciji ili delovima konstrukcije.

Razlikujemo dva osnovna tipa nelinearnosti: materijalna nelinearnost i geometrijska nelinearnost. Prva podrazumeva nelinearne veze između napona i deformacije, dok druga pretpostavlja nelinearne veze između komponenata pomeranja i deformacije. I jedna i druga pretpostavka čine, ionako složen problem interakcije, još složenijim.

U poslednjih pet godina dolazi do sve veće primene nelinearnih metoda u rešavanju problema interakcije. Pri tome je uočljivo nekoliko karakterističnih nelinearnih problema interakcije tla i objekta:

- pojava odizanja dela konstrukcije
- klizanje
- odvajanje dela ukopanog fundamenta od okolnog tla
- likvefakcija

Metode nelinearne analize koje se danas primenjuju *Hakuno* [43]

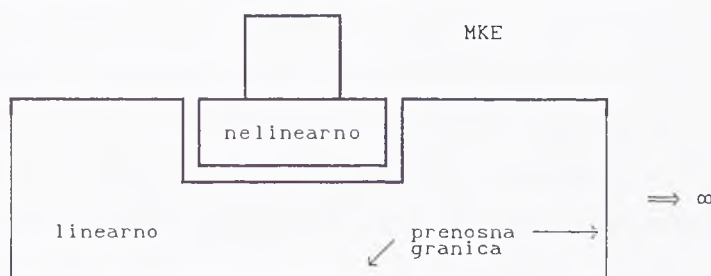
deli u tri karakteristične grupe:

1. Metoda koncentrisanih masa
2. Metoda konačnih elemenata
3. Metoda određenih elemenata (*Distinct Element Method*)

Metoda koncentrisanih masa je postupak široko korišćenu u linearnoj analizi, koji je primenjen i na nelinearnu analizu, uvođenjem nelinearnih dinamičkih parametara tla (konstanta opruge i prigušenje).

Metoda određenih elemenata je nova metoda koja se zasniva na rešavanju nelinearnih jednačina ravnoteže delova stenske mase (granula). Metoda se prema tvrđenju *Hakuno*-a u velikoj meri danas primenjuje u Japanu, ali ne bi smo rekli da je široko prihvaćena u svetu.

U okviru metode konačnih elemenata *Hakuno* svrstava i metodu graničnih elemenata, kojom se u metodi podstruktura određuju nelinearni dinamičke parametri: krutost i prigušenje tla.



Slika 2-2

Iako je problem nelinearne dinamičke jednačine kretanja u MKE, sa teorijskog i numeričkog stanovišta rešen [6], njena primena u interakciji je ograničena, pre svega, zbog veličine problema. Direktna nelinearna analiza "step-by-step" integracijom kombinovana sa iterativnim postupkom zbog nelinearnih veza je skupa, glomazna i duga procedura, koju istraživači izbegavaju. Predložena nelinearna metoda podstruktura *Bathe, Gracewski* [8], uz primenu modalne analize nije našla primenu u praksi. Sa druge strane ako analiziramo karakteristične nelinearne pojave u interakciji vidimo da su one uglavnom lokalnog karaktera. To znači da se nelinearna analiza sistema može ograničiti na konstrukciju i okolno tlo, dok se preostali neograničeni, beskonačni deo tla može smatrati linearno elastičnim, slika 2-2.

Veliki doprinos rešenju nelinearnih problema interakcije je dao *Wolf*, pre svega primenom hibridne metode (vidi 2.3.3), koja uspostavlja vezu između nelinearne analize u vremenskom domenu za rešavanje odgovora sistema i frekventne metode, kojom određuje dinamičku krutost tla [131]. Dinamička jednačina kretanja napisana u funkciji od totalnog pomeranja (t), glasi:

$$\begin{bmatrix} M_s & M_{sb} \\ M_{bs} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_s \\ \dot{u}_b \end{Bmatrix}^t + \begin{bmatrix} C_s & C_{sb} \\ C_{bs} & C_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ u_b \end{Bmatrix}^t + \begin{bmatrix} K_s & K_{sb} \\ K_{bs} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ u_b \end{Bmatrix}^t + \begin{Bmatrix} 0 \\ R_{bb}(t) \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

gde je sila interakcije:

$$R_{bb}(t) = \int_0^t D_{bb}(t-\tau) (u_b^t(\tau) - u_b^g(\tau)) d\tau \quad (2.11)$$

Indeks s se odnosi na konstrukciju a b na bazu, u_b^g je zadato pomeranje baze (*scattered*), a $D_{bb}(t)$ je dinamička krutost linearnog neograničenog poluprostora koja je *Fourier*-ovom transformacijom prevedena iz frekventnog u vremenski domen. *Wolf* određuje dinamičku krutost primenom indirektno metode graničnih elemenata [126].

Pored ovog postupka, sa dinamičkom krutosti tla (*Stiffnes Approach*), *Wolf* u nelinearnoj analizi koristi i dinamičku fleksibilnosti tla [127], [128] (*Flexibility approach*).

Rad Ibrahimbegovića i *Wilson*-a [50] je takođe doprinos "lokalnoj" nelinearnoj analizi.

Svi postupci su vrlo složeni i zahtevaju odlično poznavanje i problema interakcije i nelinearnih metoda analize.

2.3.2. Analiza u frekventnom domenu

Metoda analize uticaja zemljotresa u frekventnom domenu je kod nas nedovoljno poznata i korišćena. Stoga ćemo ukratko izložiti osnove postupka.

Primenom diskretne *Fourier*-ove transformacije na jednačinu (2.1) dobija se dinamička jednačina kretanja u frekventnom domenu u obliku:

$$(K + i\omega C - \omega^2 M) u(\omega) = P(\omega) \quad (2.12)$$

koja predstavlja sistem linearnih jednačina sa kompleksnim koeficijentima.

U jednačini (2.12) C predstavlja viskozno prigušenje (funkcija je od ω). To je mera za energiju koja se radijacijom izgubi iz sistema.

Materijalno prigušenje sistema u frekventnom domenu se obično uvodi primenom principa korespondencije: odgovor prigušenog sistema može se dobiti iz odgovora neprigušenog sistema zamenom elastičnih modula odgovarajućim kompleksnim modulima:

$$E^* = (1+2i\xi) E \quad (2.13)$$

U tom slučaju matrica krutosti glasi:

$$K^* = (1+2i\xi) K \quad (2.14)$$

gde je ξ koeficijent materijalnog (histerezijskog) prigušenja. Ako nema viskoznog prigušenja dinamička jednačina u frekventnom domenu glasi:

$$[(1+2i\xi) K - \omega^2 M] u(\omega) = P(\omega) \quad (2.15)$$

Sistem jednačina (2.12), tj. (2.15) je sistem linearnih jednačina koji treba rešiti za svako ω iz frekventnog domena. Dobijene vrednosti pomeranja se inverznom *Fourier*-ovom transformacijom prevode u vremenski domen. Numerički postupak koji se pri tome koristi poznat je kao diskretna (DFT), odnosno brza *Fourier*-ova transformacija (FFT).

Diskretna *Fourier*-ova transformacija je definisana izrazom:

$$P(\omega_m) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} P(t_n) e^{-2\pi i \frac{nm}{N}} \quad m=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.16.1)$$

a inverzna *Fourier*-ova transformacija:

$$P(t_n) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{m=0}^{N-1} P(\omega_m) e^{2\pi i \frac{nm}{N}} \quad n=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.16.2)$$

gde je $t_n = n\Delta t$, a $\omega_m = m\Delta\omega$, pri čemu su Δt i $\Delta\omega$ inkrementi numeričke integracije.

Primena numeričkog postupka poznatog kao brza *Fourier*-ova transformacija (FFT) omogućava vrlo brzu transformaciju promenljive iz jednog domena u drugi. Uslov koji pri tome mora biti zadovoljen je da maksimalna frekvencija ne bude veća od $\pi/\Delta t$ (tzv. *Nyquist*-ova frekvencija).

Analiza u frekventnom domenu je našla veliku primenu u rešavanju problema interakcije tla i objekta, jer je omogućila prvo, korišćenje različitog materijalnog prigušenja u elementima tla i konstrukcije primenom kompleksnih modula; i drugo, primenu frekventno zavisnih

funkcija impedancije tla u metodi podstruktura. Detalji ovog postupka su izloženi u radu [70]. Mana metode je njena ograničenost na linearnu analizu. Nelinearno ponašanje tla se može aproksimirati primenom ekvivalentne linearne metode [70], [105], [107].

2.3.2.1. Ekvivalentna linearna metoda

Ekvivalentna linearna metoda je postupak kojim se nelinearno ponašanje sistema dobija iterativno, nizom linearnih analiza. Moguće ju je koristiti i u vremenskom i u frekventnom domenu. Pri tome je potrebno poznavati nelinearne veze između napona i deformacija.

Metodu su na rešavanje problema dinamičkog odgovora tla prvi primenili *Seed* i *Idriss*³, a na probleme interakcije *Lysmer* [70], 1974. Postupak se sastoji u tome da se u prvoj iteraciji odgovor sistema dobija sa početnim vrednostima modula klizanja G_0 i koeficijenta prigušenja ξ_0 , koje odgovaraju malim deformacijama u tlu. Sa tako određenim maksimalnim smičućim deformacijama u tlu iz poznate veze napona i deformacije u tlu τ - γ , određujemo vrednosti modula klizanja i prigušenja za drugu iteraciju. Postupak ponavljamo sve dok iz dve poslednje iteracije ne dobijemo kompatibilne karakteristike tla.

Seed i *Idriss* su, na osnovu eksperimentalnih istraživanja, dali vrednosti promene G i ξ za peskove i gline u funkciji od efektivne smičuće deformacije $\gamma_{eff} = (0.6-0.7)\gamma_{max}$.

Metoda je našla veliku primenu u rešavanju problema interakcije tla i objekta, stoga što je njome moguće obuhvatiti dva ključna aspekta nelinearnog ponašanja tla: smanjenje modula klizanja i povećanje koeficijenta prigušenja sa porastom smičuće deformacije, sa jedne strane i zadavanje različitog prigušenja u pojedinim konačnim elementima različitih karakteristika, sa druge. Obe pojave su od značaja u analizi odgovora sistema tlo-objekat, i one mogu bitno da utiču na tačnost dobijenih rezultata.

³*Seed, H. B., J. M. Idriss* : "Influence of Soil Condition on Ground Motions During Earthquakes", ASCE SM1, 1969.

2.3.3 Hibridna metoda

Hibridna metoda (*Hybrid Frequency-Time-Domain Analysis*) koju je formulisao Wolf [131], predstavlja kombinaciju direktne integracije u vremenskom domenu i kompleksne analize u frekventnom domenu. Primenjena je na metodu podstruktura sa ciljem da se uvede materijalna nelinearnost sistema u analizu. To se postiže serijom linearnih analiza u frekventnom domenu usled zadatog dinamičkog opterećenja i fiktivnog opterećenja koje potiče usled nelinearnog ponašanja sistema. Fiktivno opterećenje se dobija nelinearnom analizom u vremenskom domenu. Pri tome fiktivne sile su jednake razlici nelinearnih sila, određenih za svaki vremenski korak iz konstitutivne relacije za vrednost totalne deformacije, i linearnih sila sračunatih za isti iznos deformacije u elementu. Primenom FFT fiktivno opterećenje se iz vremenskog prevodi u frekventni domen. Rešavanjem linearnog sistema jednačina u frekventnom domenu, sa tako zadatim silama, dobijamo vektor pomeranja tačaka sistema.

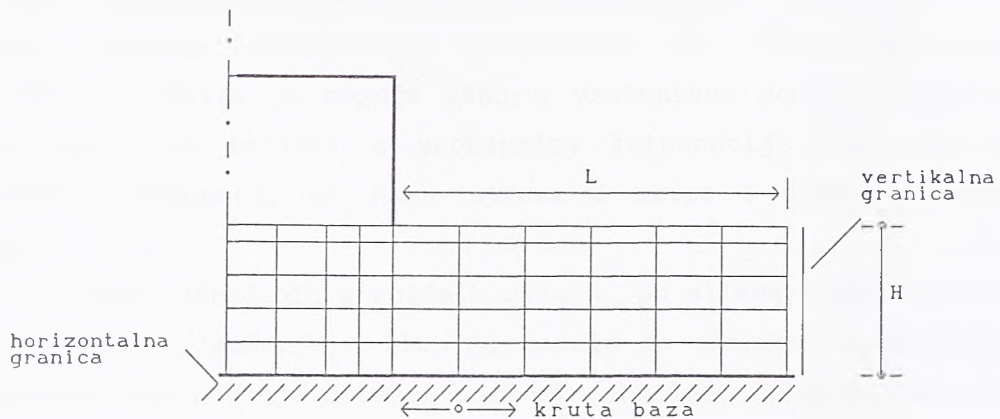
Prema tvrđenju autora, sa kojim se na prvi pogled ne bi složili, metoda je jednostavna i lako se može implementirati u postojeće kompjuterske programe. Eliminacijom stepeni slobode u zoni sa izrazitim linearnim ponašanjem, moguće je iterativnu nelinearnu analizu sprovesti samo za nelinearne zone u konstrukciji.

Pošto smo dali kratak prikaz analitičkih metoda za rešavanje dinamičke jednačine MKE, pozabavimo se metodama modeliranja sistema tlo-objekat.

2.4. Metode formiranja matematičkog modela

2.4.1. Direktna metoda

Osnovna karakteristika direktne metode je da se seizmička analiza sprovodi u jednom koraku za kompletan model konstrukcije i dela tla koje je uzeto u razmatranje (slika 2.3).



Slika 2-3

U modelu, tlo se usvaja tako, da se spreči pojava tzv. *box* efekta, tj. pojava refleksije talasa od granice modela mreže konačnih elemenata. Pojava refleksije, inače, pojačava odgovor sistema. To znači, da granicu treba postaviti dovoljno daleko od konstrukcije, sa jedne strane, kako bi se prigušili talasi nastali vibracijom objekta i dovoljno blizu, sa druge, kako bi se broj elemenata sveo na najmanju moguću meru. Prema *Lysmer*-u [71] važi pravilo: što su niže frekvencije od interesa to je granica dalje od konstrukcije; što je prigušenje u tlu veće i zemljotres snažniji to je granica bliže. U praksi se koristi jednostavan *Lysmer*-ov kriterijum: horizontalna granica se usvaja na rastojanju $H=(1\div 2)D$, gde je D širina konstrukcije u fundamentu; vertikalna granica se postavlja na rastojanju $L=(2\div 2.5)H$. Na vertikalnoj granici se zadaju granični uslovi po pomeranjima koji omogućavaju pomeranja u horizontalnim pravcu, za slučaj horizontalnog pomeranja osnove tj. u vertikalnom pravcu za analizu vertikalnog pomeranja osnove.

Veličinu elemenata u modelu biramo tako da ne prelaze $1/4$ talasne dužine smičućih talasa, *Lysmer* [71], tj. :

$$h_{\max} = \left(\frac{1}{5} \frac{c_s}{f_{\max}} \right) \div \left(\frac{1}{8} \frac{c_s}{f_{\max}} \right) \quad (2.17)$$

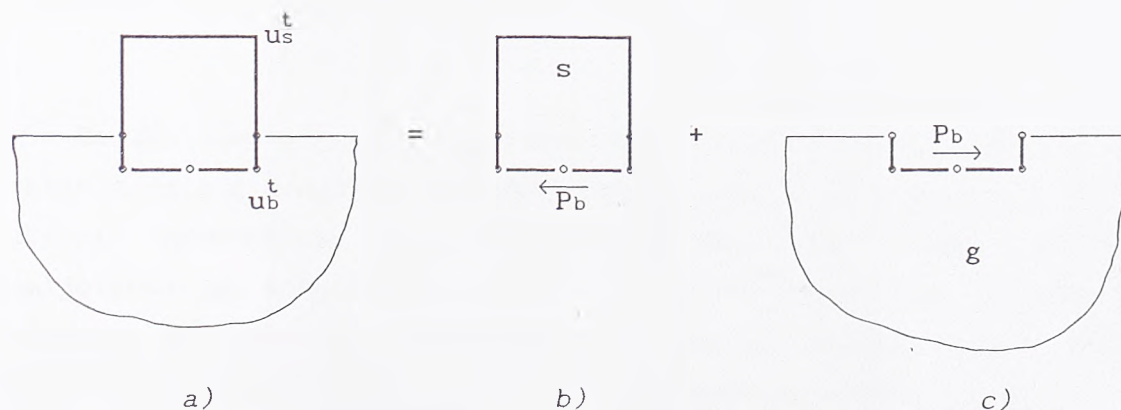
gde je f_{\max} maksimalna frekvencija u analizi ($20\div 30$ Hz), a c_s brzina smičućih talasa u tlu. To znači da za objekte kod kojih su od interesa visoke frekvencije, elementi mogu biti tako mali da čitav sistem postaje preveliki za analizu. U tome je i osnovna mana metode. Ovako formiran matematički model je glomazan, sa velikim brojem jednačina, koji zahteva složenu i obimnu proceduru za rešavanje, tj. moćan kompjuterski sistem.

Za rešavanje sistema jednačina čitavog modela moguće je koristiti metodu linearne analize u vremenskom ili frekventnom domenu. Nelinearna analiza je moguća samo u vremenskom domenu, ali se ona praktično i ne koristi u problemima interakcije zbog ograničenih mogućnosti računara, sa jedne strane i skupe i duge procedure, sa druge.

Uvođenje određenih graničnih uslova, po silama, koje reprezentuju radijacijsko prigušenje u tlu, je dovelo do smanjenja mreže konačnih elemenata i ubrzanja čitavog postupka analize. Granični uslovi u MKE će biti posebno razmatrani u glavi 5 ovoga rada. Napomenimo samo da su svi granični uslovi formulisani iz teorije prostiranja talasa pri čemu se od granice zahteva da ne reflektuje talase (viskozna granica), tj. da ih "propušta" (prenosna granica i beskonačni elementi). Primena ovih granica doprinosi smanjenju mreže elemenata, olakšava unošenje podataka i analizu rezultata.

2.4.2. Metoda podstruktura

U metodi podstruktura dinamički sistem tlo-konstrukcija se deli na dve podkonstrukcije, tlo i objekat a problem onda rešava u dva ili tri koraka (slika 2-4).



Slika 2-4

U prvom koraku je potrebno odrediti pomeranje tla na kontaktu, koje će predstavljati input za analizu konstrukcije. Za kruti fundament potrebno je znati šest komponenta pomeranja, dok je za

fleksibilan potrebno poznavati po tri komponente pomeranja za svaku tačku kontakta.

U drugom koraku, određuje se krutost fundamenta zadavanjem jediničnog harmonijskog pomeranja u pravcu određenog stepena slobode. Sila dobijena na taj način predstavlja traženu krutost. Za kruti fundament red matrice krutosti je 6×6 , dok je kod fleksibilnog on određen brojem tačaka na kontaktu između tla i fundamenta.

Treći korak je dinamička analiza konstrukcije oslonjene na fundament za koji je već poznata dinamička matrica krutosti.

Matematičku formulaciju izloženog postupka daćemo za slučaj analize u frekventnom domenu, koji se najčešće koristi u metodi podstruktura.

Ako sa D obeležimo dinamičku matricu krutosti u frekventnom domenu:

$$D = K (1 + 2i\xi) - \omega^2 M \quad (2.18)$$

gde su K i M matrice krutosti i mase sistema i ako izvršimo dekompoziciju matrice D na submatrice uz odgovarajuće stepene slobode pomeranja konstrukcije (s) i baze (b), dinamička jednačina kretanja konstrukcije (slika 2-4, b) glasi:

$$\begin{bmatrix} D_{ss} & D_{sb} \\ D_{bs} & D_{bb}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s^t \\ u_b^t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_s \\ P_b \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

Sa D_{bb}^s smo označili deo konstrukcije koji pripada bazi, u_s^t je vektor totalnog pomeranja tačaka konstrukcije, a u_b^t baze. P_s i P_b su vektori opterećenja odgovarajućih tačaka. Za slučaj dejstva zemljotresa na konstrukciju $P_s=0$, a silu P_b određujemo iz poznatog pomeranja u_b^g baze bez prisustva konstrukcije (slika 2-4, c). Sile interakcije postoje samo usled relativnog pomeranja baze, pa je:

$$P_b = -D_{bb}^g (u_b^t - u_b^g) \quad (2.20)$$

gde je D_{bb}^g je dinamička krutost tla a u_b^t vektor totalnog pomeranja baze.

Problem određivanja pomeranja baze bez prisustva konstrukcije pri zemljotresu u_b^g naziva se u literaturi *scattering problem*, a problem

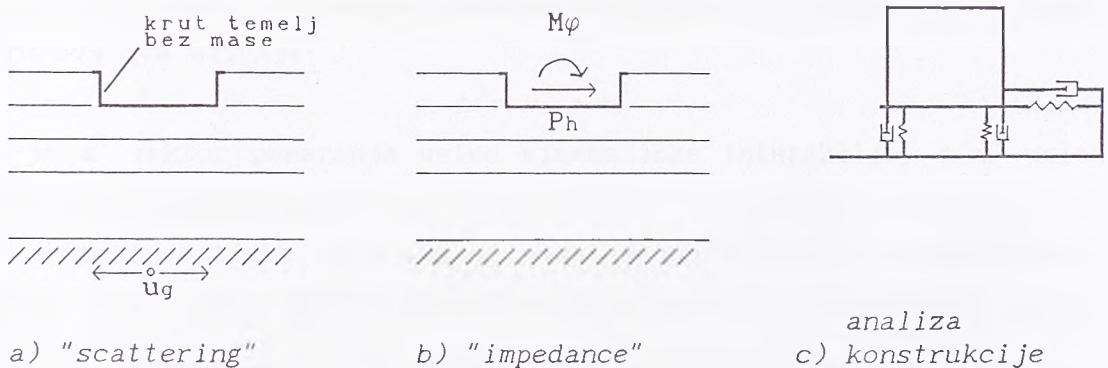
iznalaženja dinamičke krutosti tla *impedance problem*.

Ma osnovu (2.20) i (2.21) dobija se da je:

$$\begin{bmatrix} D_{ss} & D_{sb} \\ D_{bs} & D_{bb}^s + D_{bb}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s^t \\ u_b^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{bb}^g u_b^g \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

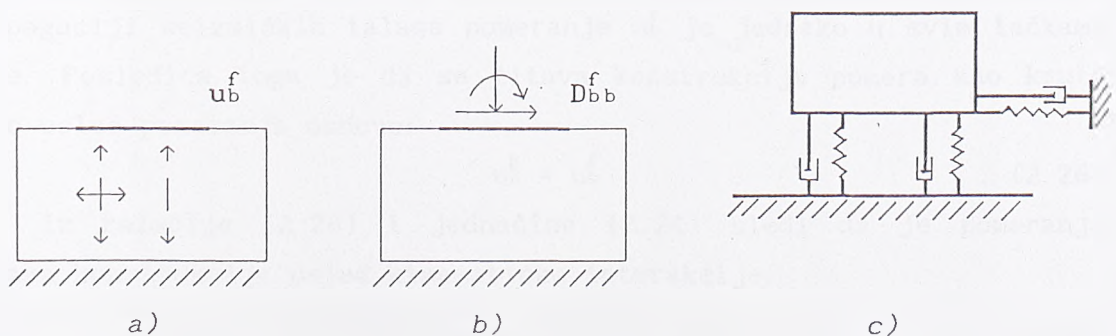
Jednačina (2.21) predstavlja dinamičku jednačinu kretanja konstrukcije kojoj je pridodata dinamička krutost tla. Jednačina je formulisana u funkciji od totalnog pomeranja u^t . Dinamičko opterećenje je pomeranje baze, koje se javlja u sistemu bez prisustva objekta, usled zemljotresa u_b^g .

Na slici 2-4 prikazane su sve tri faze metode podstrukture.



Slika 2-5

Problem određivanja u_b^g , tzv. *scattering*, nije nimalo jednostavan za slučaj ukopanog i fleksibilnog fundamenta. Predpostavka da je objekat fundiran na površini terena i da je reč i vertikalnoj propagaciji talasa znatno pojednostavljuje problem. Pomeranje u_b^g je tada jednako kontrolnom pomeranju (*free field*) u_b^f (slika 2-6).



Slika 2-6

Dinamička jednačina u tom slučaju glasi:

$$\begin{bmatrix} D_{ss} & D_{sb} \\ D_{bs} & D_{bb}^s + D_{bb}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s^t \\ u_b^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{bb}^f u_b^f \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Efekti interakcije tla i objekta pri seizmičkom ubrzanju su zajednički rezultat tzv. kinematičke i inercijalne interakcije. Pod kinematičkom interakcijom se podrazumeva relativno pomeranje fundamenta u odnosu na podlogu koje nastaje kao rezultat različite deformabilnosti fundamenta i okolnog tla. Izraženost efekta kinematičke interakcije zavisi od krutosti fundamenta, geometrije i ukopanosti fundamenta, karakteristika tla i seizmičkih talasa u zoni interakcije. Inercijalna interakcija je rezultat dejstva inercijalnih sila na konstrukciju izazvanih relativnim pomeranjem fundamenta u odnosu na okolno tlo. Ukupno pomeranje sistema tlo-objekat je jednako zbiru ova dva uticaja:

$$u^t = u^k + u^i \quad (2.23)$$

gde je u^k vektor pomeranja usled kinematičke interakcije, a u^i usled inercijalne interakcije.

Kod kinematičke interakcije masa konstrukcije je po definiciji jednaka nuli, pa dinamička jednačina za kinematičku interakciju glasi:

$$\begin{bmatrix} (1+2i\xi)K_{ss} & (1+2i\xi)K_{sb} \\ (1+2i\xi)K_{bs} & (1+2i\xi)K_{bb}^s + D_{bb}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s^k \\ u_b^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_{bb}^g u_b^g \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Na osnovu poznatog pomeranja u^k određujemo vektor pomeranja pri inercijalnoj interakciji iz dinamičke jednačine:

$$\begin{bmatrix} D_{ss} & D_{sb} \\ D_{bs} & D_{bb}^s + D_{bb}^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s^i \\ u_b^i \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M_{ss} & M_{sb} \\ M_{bs} & M_{bb}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s^k \\ u_b^k \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Za krut fundament na površini terena, izložen vertikalnoj propagaciji seizmičkih talasa pomeranje u_b^f je jednako u svim tačkama baze. Posledica toga je da se čitava konstrukcija pomera kao kruto telo usled pomeranja osnove:

$$u_b^k = u_b^f \quad (2.26)$$

Iz relacije (2.26) i jednačine (2.24) sledi da je pomeranje tačaka konstrukcije usled kinematičke interakcije:

$$u_s^k = K_{ss}^{-1} K_{sb} u_b^f = T_{sb} u_b^f \quad (2.27)$$

gde je T_{sb} matrica transformacije čiji elementi predstavljaju statička pomeranja čvorova s usled jediničnog pomeranja baze b .

Time je praktično problem kinematičke interakcije rešen. Inercijalnu interakciju rešavamo zamenjujući rešenje (2.27) u jednačinu (2.25). Tada se dobija dinamička jednačina oblika:

$$\begin{bmatrix} D_{ss} & D_{sb} \\ D_{bs} & D_{bb}^s + D_{bb}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s^i \\ u_b^i \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M_{ss} & M_{sb} \\ M_{bs} & M_{bb}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{sb} \\ I \end{bmatrix} u_b^f \quad (2.28)$$

gde je I jedinična matrica.

Na osnovu izloženog možemo zaključiti da za slučaj krutog fundamenta na površini terena problem interakcije tla i objekta obuhvata nekoliko koraka:

- 1) podela dinamičkog sistema na podstrukture;
- 2) izbor matematičkog modela za analizu pojedinih struktura;
- 3) određivanje pomeranja kontrolne tačke;
- 4) određivanje funkcija impedancije (dinamičke krutosti tla);
- 5) rešavanje problema inercijalne interakcije, jednačina (2.28).

Iako postupak izgleda komplikovan, čak i za najjednostavniji slučaj oslanjanja, metoda podstruktura pruža niz prednosti. Pre svega zbog mogućnosti razbijanja glomaznog modela na više manjih. Zatim, takav pristup dozvoljava primenu različitih stepena aproksimacije i različitih postupaka u rešavanju odgovora pojedinih podstruktura.

Prema izboru matematičkog modela i primenjenoj numeričkoj tehnici u analizi podstruktura sve metode se mogu svrstati u 3 grupe:

- metoda kontinuuma
- metoda konačnih elemenata
- metoda graničnih elemenata

2.4.2.1. Metoda kontinuuma

Metodu koja u rešavanju problema impedancije (dinamičke krutosti temelja) tlo analizira kao beskonačni poluprostor nazivamo metodom kontinuuma. Ona je jedno vreme imala široku primenu u rešavanju problema interakcije tla i objekta, jer se postupak određivanja dinamičke krutosti temelja zasnivao na gotovim, analitičkim rešenjima koja su bila jednostavna za primenu.

Mnogobrojna rešenja problema impedancije, koja postoje u literaturi, za različite uslove oslanjanja, baziraju se na

fundamentalnom radu *Bycroft*-a [16]. On je problem kružnog temelja na idealno elastičnom poluprostoru rešio polazeći od teorije rasprostiranja talasa, primenom integralnih jednačina. Posle njega sledi čitav niz radova *Luco* i *Westmann* [72] i [73], *Luco* i *Mita* [77], *Veletsos* i *Wei*, [114] i [115], *Veletsos* i *Verbič* [116] i [117], *Verbič* [121]. Svi navedeni radovi rešavaju problem koristeći numeričko rešenje integralnih jednačina, pri čemu jedni uvode različite granične uslove: potpun kontakt, delimičan kontakt tla i fundamenta, drugi, uticaj viskoznog prigušenja u poluprostoru. Rezultat je analitički izraz za dinamičku krutost temelja u obliku:

$$K_j = K_{oj} [k_j(a_0) + ia_0 c_j(a_0)] \quad (2.29)$$

gde je K_j komponenta krutosti $j=x, \phi, z$, K_{oj} komponenta statičke krutosti poluprostora, $a_0 = \omega r / c_s$ bezdimenzionalna frekvencija, a $k_j(a_0)$ i $c_j(a_0)$ koeficijenti krutosti i prigušenja.

Logičan nastavak započetih radova je određivanje dinamičke krutosti trakastih temelja, zatim pravougaonih, pa sve do fundamenta proizvoljnog oblika. Kako dubina fundiranja utiče na dinamičku krutost i prigušenje to je analiza proširena i na ukopan fundament. Neki od tih radova su navedeni u literaturi [19], [21], [24], [27], [36].

Metoda kontinuuma zahteva da tlo tretiramo kao linearno elastičan ili viskozan poluprostor. U realnim problemima taj uslov je teško ispuniti, tako da je pojavom MKE ova metoda potisnuta. Danas kada je MKE toliko uzela maha, čini nam se deplasirano diskutovati o prednostima i manama ova dva postupka. Da se nekada to pitanje ozbiljno postavljalo govori nam rad iz 1974. *Hadjian*-a, *Luco*-a i *Tsai*-a [40], čiji sam naslov, *Kontinuum ili konačni elementi?*, kazuje mnogo o dilemi koja je tada još uvek postojala.

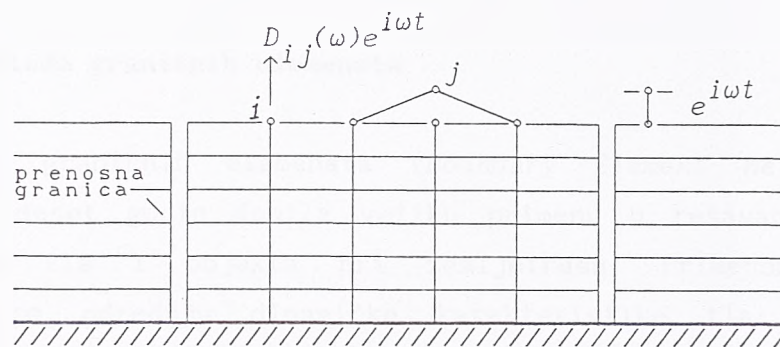
2.4.2.2. Metoda konačnih elemenata

Metoda konačnih elemenata, kao što smo već rekli; ima veliku primenu u rešavanjima problema intrakcije tla i objekta. U metodi podstruktura je pri tome, moguće kombinovati MKE sa nekim drugim metodama (metodom kontinuuma, metodom graničnih elemenata), kojima određujemo dinamičku krutost tla.

Ovde ćemo međutim, govoriti baš o primeni MKE u rešavanju

problema impedancije.

Suština postupka se sastoji u tome, da se u modelu konačnih elemenata, primenom analize u frekventnom domenu, odrede sile u svim čvorovima baze D_{ij} ($i, j=1, 2 \dots N_b$), usled jediničnog harmonijskog pomeranja u pravcu stepena slobode čvora baze j (slika 2-7). Ponavljanjem postupka za sve čvorove baze dobija se matrica dinamičke krutosti D_{bb} , potrebana za određivanje inercijalne interakcije konstrukcije.



Slika 2-7

Iako je određivanje funkcija impedancije primenom MKE složeniji postupak od puke primene već postojećih rešenja za kontinuum, MKE daje rešenja bliža tačnom od onog koje daje kontinuum.

U literaturi postoji niz radova koji rešavaju različite probleme fundiranja primenom MKE. Istačićemo, pre svega, rešenje ravnog problema *Gutierrez-a* i *Chopra-e* [38] i [39], rad [21] *Chopra* i dr. i rad [76] *Luco* i dr. Slučaj kružnog temelja su analizirali *Kausel* i *Roesset* [58], [59]. Ti "pra" radovi su otvorili široku primenu za rešavanje ovog problema primenom MKE. Tako su određene funkcije impedancije za pravougaoni fundament, temelj nepravilnog oblika, ukopan temelj, analiziran je problem uticaja suseda i sl.

Na osnovu izloženog možemo doneti sledeći zaključak:

Prednost MKE nad metodom kontinuuma se ogleda pre svega u tome što se diskretizacijom dela tla, koji ulazi u analizu, na konačne elemente, postiže dobro modeliranje posmatrane zone, tj. MKE možemo obuhvatiti sve nepravilnosti, kako u geometriji tako i u karakteristikama tla ispod fundamenta. To nije slučaj sa metodom kontinuuma, koja daje rešenje samo za polubeskonačan i slojevit poluprostor. Sa druge strane, primenom odgovarajućih elemenata moguće je rešiti različite probleme oslanjanja, od fundiranja na površini do

ukopanog fundamenta, bez ikakvih dodatnih teškoća. U metodi kontinuuma se sa pojavom ukopavanja fundamenta analiza komplikuje. Zatim, pored linearne analize u MKE možemo koristiti i nelinearnu analizu tj. ekvivalentnu linearnu analizu, dok se metoda kontinuuma ograničava samo na onu prvu. I, na kraju, MKE omogućava uvođenje i histerezisnog i viskoznog prigušenja u tlu, dok se u metodi kontinuuma histerezisno prigušenje uvodi aproksimativno.

2.4.2.3. Metoda graničnih elemenata

Metoda graničnih elemenata (*Boundary Element Method*) je u poslednjih deset godina dobila veliku primenu u rešavanju problema interakcije tla i objekta pri zemljotresu. Primenom graničnih elemenata se određuju dinamičke karakteristike tla: krutost i prigušenje, koje koristimo zatim u rešavanju odgovora sistema u metodi podstruktura. Dinamička krutost tla se dobija rešavanjem integralnih jednačina uz postavljanje odgovarajućih graničnih uslova.

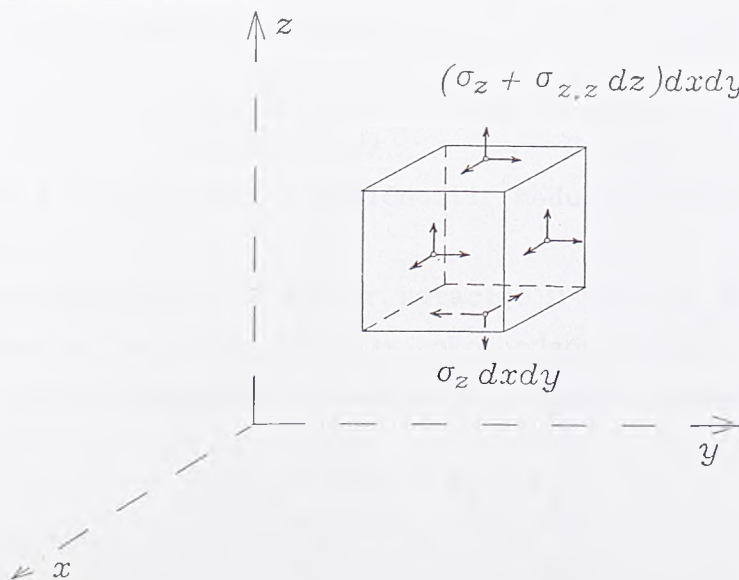
Detalji postupka se mogu naći u preglednom radu *Karablis-a i Beskos-a* [55], kao i u radu *Manolis-a* [80]. Indirektan postupak, za rešenje dinamičke krutosti tla potrebne za nelinearnu analizu sistema, su formulisali *Wolf* [131], odnosno *Wolf i Darbre* [126] .

GLAVA 3.

TALASNA JEDNAČINA U KARTEZIJSKIM KOORDINATAMA

Analiza sadejstva tla i objekta pri zemljotresu nije moguća bez poznavanja prirode seizmičkih talasa. Značajnu grupu seizmičkih talasa čine prostorni talasi (*body waves*).

Rešenje diferencijalnih jednačina kretanja talasa u elastičnoj sredini je poznato još od prvih radova Lord Rayleigh-ja iz 1885. i *Lamb*-a iz 1904. Detaljna izvođenja se danas mogu naći u delima mnogih autora: *Timošenko i Gudier*, 1962 [112]; *Eving, Jardecki i Pres*, 1972



Slika 3-1

[34]; Richart, Hall i Woods, 1970 [95] i dr. Zbog toga će u radu biti izložene samo osnovne talasne teorije neophodne za dalja izvođenja.

Do jednačine kretanja u homogenom, elastičnom, izotropnom poluprostoru, dolazimo polazeći od uslova ravnoteže beskonačno malog elementa (slika 3-1) u x , y i z -pravcu.

Jednačine kretanja glase:

$$\begin{aligned}\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} &= -\rho\omega^2 u \\ \tau_{yx,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} &= -\rho\omega^2 v \\ \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} + \sigma_{z,z} &= -\rho\omega^2 w\end{aligned}\quad (3.1)$$

gde su u , v i w komponente pomeranja u pravcu x , y i z -ose, a σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} i τ_{yz} komponente vektora napona.

Dobijeni sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina rešava se svodenjem na dve nezavisne talasne jednačine u kojima su nepoznate veličine kubna dilatacija e i vektor rotacije Ω . Ako levu stranu jednačine (3.1) izrazimo u funkciji pomeranja i uvedemo poznate veze između napona i deformacija :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda e + 2G\varepsilon_x & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda e + 2G\varepsilon_y & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\varepsilon_z & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}\end{aligned}\quad (3.2)$$

pomeranja i deformacije:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} & \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} \\ \varepsilon_y &= v_{,y} & \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x} \\ \varepsilon_z &= w_{,z} & \gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y}\end{aligned}\quad (3.3)$$

gde su λ i $\mu=G$ Lamé-ove konstante:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}\quad (3.4)$$

a veličine E , G i ν modul elastičnosti, modul smicanja i Poisson-ov koeficijent.

Kubna dilatacija e i vektor rotacije $\Omega = \{\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z\}$, (Ω_x , Ω_y i Ω_z su komponente vektora rotacije oko odgovarajućih osa), se mogu izraziti preko komponenti dilatacije, odnosno pomeranja na sledeći način:

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (3.5.1)$$

$$\Omega_x = (w_{,y} - v_{,z})/2 \quad (3.5.2)$$

$$\Omega_y = (u_{,z} - w_{,x})/2 \quad (3.5.3)$$

$$\Omega_z = (v_{,x} - u_{,y})/2 \quad (3.5.4)$$

Komponente vektora rotacije moraju da zadovolje uslov:

$$\Omega_{x,x} + \Omega_{y,y} + \Omega_{z,z} = 0 \quad (3.6)$$

Iz jednačina (3.1), (3.2), (3.4), (3.5) i (3.6) dobijamo tri relacije oblika:

$$(\lambda+2G) e_{,x} + 2G (\Omega_{y,z} - \Omega_{z,y}) = -\rho\omega^2 u \quad (3.7.1)$$

$$(\lambda+2G) e_{,y} + 2G (\Omega_{z,x} - \Omega_{x,z}) = -\rho\omega^2 v \quad (3.7.2)$$

$$(\lambda+2G) e_{,z} + 2G (\Omega_{x,y} - \Omega_{y,x}) = -\rho\omega^2 w \quad (3.7.3)$$

Diferenciranjem jednačine (3.7.1) po x , (3.7.2) po y i (3.7.3) po z i sumiranjem sve tri jednačine, dobija se prva talasna jednačina :

$$(\lambda+2G) (e_{,xx} + e_{,yy} + e_{,zz}) = -\rho\omega^2 (u_{,x} + v_{,y} + w_{,z}) \quad (3.8)$$

Ako uvedemo Laplace-ov operator $\nabla^2 a = a_{,xx} + a_{,yy} + a_{,zz}$, jednačinu (3.8) možemo pisati u obliku:

$$\nabla^2 e = - \frac{\omega^2}{c_p^2} e \quad (3.9)$$

Sa c_p smo obeležili brzinu propagacije P -talasa:

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda+2G}{\rho}} \quad (3.10)$$

Jednačina (3.9) predstavlja talasnu jednačinu kretanja kubne dilatacije e .

Druga talasna jednačina je vektorska, po tri komponente vektora rotacije. Prvu dobijamo diferenciranjem jednačine (3.7.2) po z , i (3.7.3) po y i sabiranjem dobijenih relacija, uzimajući u obzir jednačine (3.5):

$$G (\Omega_{x,xx} + \Omega_{x,yy} + \Omega_{x,zz}) = -\rho\omega^2 \Omega_x \quad (3.11.1)$$

Na isti način, dobijamo i preostale dve jednačine:

$$G (\Omega_{y,xx} + \Omega_{y,yy} + \Omega_{y,zz}) = -\rho\omega^2 \Omega_y \quad (3.11.2)$$

$$G (\Omega_{z,xx} + \Omega_{z,yy} + \Omega_{z,zz}) = -\rho\omega^2 \Omega_z \quad (3.11.3)$$

Ako sa c_s označimo brzinu propagacije rotacije Ω , jednačine (3.11) možemo pisati u vektorskom obliku:

$$\nabla^2 \Omega = - \frac{\omega^2}{c_s^2} \Omega \quad (3.12.1)$$

gde je:

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (3.12.2)$$

Jednačine (3.9) i (3.12) predstavljaju nezavisne talasne jednačine u kojima kao nepoznate figurišu kubna dilatacija e i vektor rotacije Ω . Iz gornje analize može se zaključiti da se u beskonačnom elastičnom prostoru javljaju dva tipa talasa, koji predstavljaju dva tipa kretanja različitim brzinama. Oni su u literaturi poznati kao:

1) longitudinalni, kompresioni, primarni ili P -talasi, koji propagiraju brzinom c_p , i

2) transverzalni, smičući, sekundarni ili S -talasi, propagiraju brzinom c_s .

Rešenje talasne jednačine tipa (3.9) i (3.12) je poznato i može se naći u literaturi np. [112]. Ovde ćemo prikazati talasnu jednačinu jednodimenzionalnog problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.13.1)$$

i oblik njenog rešenja rešenja:

$$u(x, t) = Ae^{i\omega(t-x/c)} + Be^{i\omega(t+x/c)} \quad (3.13.2)$$

Iz njih možemo sagledati osnovne veličine koje karakterišu talasno kretanje. To su frekvencija talasa ω , i brzina prostiranja talasa c u pravcu x -ose. Veličine A i B su amplitude talasa. A je amplituda talasa koji propagiraju u pravcu pozitivne x -ose i koji se nazivaju dolazeći (*incoming*) talasi. B je amplituda talasa koji propagiraju u pravcu negativne x -ose, tzv odlazeći (*out-going waves*).

3.1. Longitudinalni ili P -talasi

Rešenje talasne jednačine (3.1) se dakle svodi na rešavanje dve nezavisne talasne jednačine (3.9) i (3.12). Prvo ćemo diskutovati rešenje jednačine (3.9):

$$\nabla^2 e = -\frac{\omega^2}{c_p^2} e$$

koje smo pretpostavili, shodno jednačini (3.13.2) u obliku:

$$e = - \frac{i\omega}{c_p} A_p e^{- (i\omega/c_p)(l_x x + l_y y + l_z z)} e^{i\omega t} \quad (3.14)$$

gde smo radi uprošćenog pisanja, zadržali samo njen prvi član, tj. član od propagacije u napred. Da bi jednačina (3.14) bila rešenje talasne jednačine (3.9), ona mora da zadovolji uslov:

$$l_x^2 + l_y^2 + l_z^2 = 1 \quad (3.15)$$

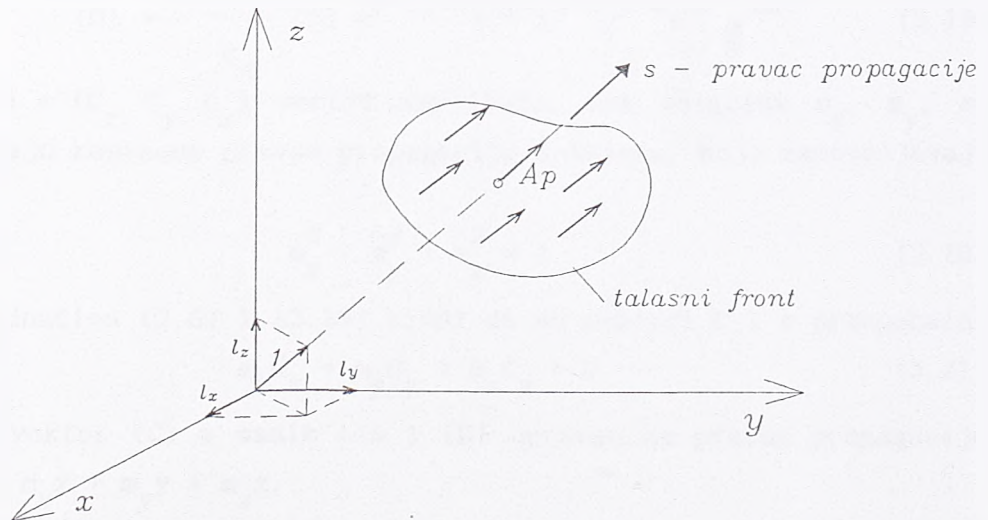
iz koga sledi da se veličine l_x , l_y i l_z mogu smatrati za kosinuse pravca propagacije talasa. Ako sa s obeležimo veličinu

$$s = l_x x + l_y y + l_z z \quad (3.16)$$

tada je:

$$e = - \frac{i\omega}{c_p} A_p e^{i\omega(t-s/c_p)} \quad (3.17)$$

jednačina propagacije talasa u s -pravcu. Kako relacija (3.16) predstavlja jednačinu ravni normalnu na pravac propagacije, to talasna jednačina (3.17) predstavlja jednačinu propagacije talasa u prostoru u pravcu s . Jednačina (3.16) predstavlja talasni front (sl.3-2).



Slika 3-2

Iz jednačina (3.6.1) i (3.14) određujemo amplitude pomeranja u x , y i z pravcu:

$$u_p = l_x A_p e^{- (i\omega/c_p)(l_x x + l_y y + l_z z)} \quad (3.18.1)$$

$$v_p = l_y A_p e^{- (i\omega/c_p)(l_x x + l_y y + l_z z)} \quad (3.18.2)$$

$$w_p = l_z A_p e^{- (i\omega/c_p)(l_x x + l_y y + l_z z)} \quad (3.18.3)$$

Iz jednačina (3.18) može se zaključiti da se pomeranje A_p poklapa sa pravcem propagacije talasa. Na osnovu toga možemo definisati P -talase kao talase u kojima čestice osciluju u pravcu propagacije talasa, a amplitude oscilacija A_p su jednake u svim tačkama ravni koje su upravne na pravac propagacije. Brzina propagacije c_p je konstantna i zavisi samo od materijalnih karakteristika sredine kroz koju se talas prostire.

3.2. Transverzalni ili S-talasi

Na analogan način rešenje talasne jednačine (3.12)

$$\nabla^2 \Omega = - \frac{\omega^2}{c_s^2} \Omega$$

pretpostavljamo u obliku

$$\{\Omega\} = - \frac{i\omega}{c_s} \{C\} e^{(-i\omega/c_s)(m_x x + m_y y + m_z z)} e^{i\omega t} \quad (3.19)$$

gde je $\{C\} = \{C_x \ C_y \ C_z\}$ vektor amplituda, dok veličine m_x , m_y , m_z predstavljaju kosinuse pravca propagacije S-talasa, koji zadovoljavaju uslov:

$$m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 = 1 \quad (3.20)$$

Iz jednačina (3.6) i (3.19) sledi da su vektori C i s ortogonalni:

$$m_x C_x + m_y C_y + m_z C_z = 0 \quad (3.21)$$

tj. da je vektor $\{C\}$ a samim tim i $\{\Omega\}$ upravna na pravac propagacije talasa $s = m_x x + m_y y + m_z z$.

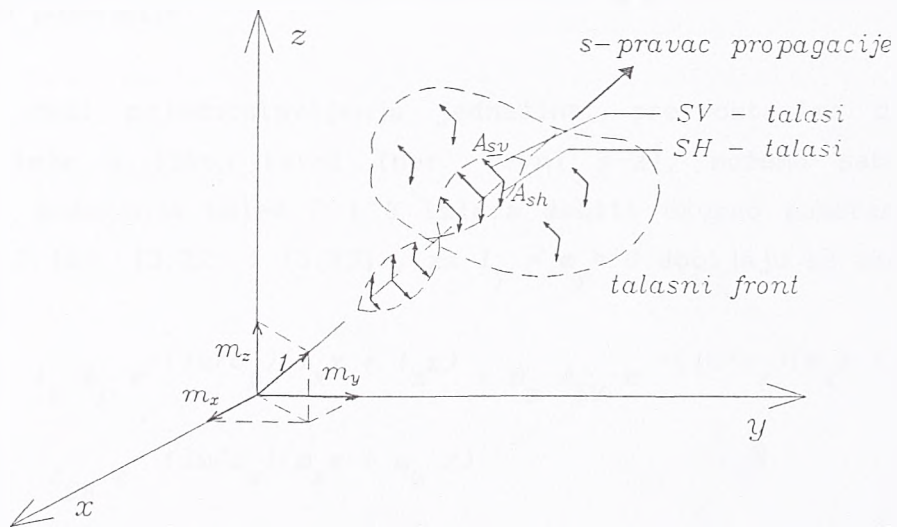
Polazeći od jednačina (3.5) i (3.19) dobijaju se odgovarajuće amplitude komponenti pomeranja u x , y i z pravcu:

$$u_s = (m_z C_y - m_y C_z) e^{(i\omega/c_s)(m_x x + m_y y + m_z z)} \quad (3.22.1)$$

$$v_s = (m_x C_z - m_z C_x) e^{(i\omega/c_s)(m_x x + m_y y + m_z z)} \quad (3.22.2)$$

$$w_s = (m_y C_x - m_x C_y) e^{-i(\omega/c_s)(m_x x + m_y y + m_z z)} \quad (3.22.3)$$

Iz jednačina (3.22) zaključujemo da su komponente pomeranja proporcionalne komponentama vektorskog proizvoda C i s . To znači da se čestice pri ovom talasnom kretanju pomeraju u ravnima koje su upravne na pravac propagacije. Na osnovu toga možemo definisati S-talase kao talase kod kojih čestice osciluju u ravnima upravnim na pravac propagacije. Brzina propagacije S-talasa je konstantna i zavisi od karakteristika sredine kroz koju se prostiru ($c_s = \sqrt{G/\rho}$).



Slika 3-3

Obično se komponente pomeranja S-talasa prikazuju preko horizontalne SH, odnosno vertikalne SV komponente S-talasa. Može se pokazati da su amplitude horizontalne komponente A_{SH} i vertikalne komponente A u obliku:

$$A_{SH} = \frac{C_z}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}} \quad A_{SV} = \frac{C_y m_x - C_x m_y}{\sqrt{m_x^2 + m_y^2}} \quad (3.23)$$

Komponente SH i SV leže u vertikalnoj ravni koja je definisana z-osom i pravcem propagacije (slika 3-3). U slučaju vertikalne propagacije S-talasa u x-z ravni, $m_x = m_y = 0$, pa su komponente pomeranja:

$$u_s = A_{SV} e^{-i(\omega/c_s)z} \quad (3.24.1)$$

$$v_s = A_{SH} e^{-i(\omega/c_s)z} \quad (3.24.2)$$

$$w_s = 0 \quad (3.24.3)$$

U polubeskonačnom prostoru javljaju se talasi pod proizvoljnim uglovima i pravcima propagacije. Kada su komponente l_x, l_y, l_z tj. m_x, m_y, m_z manje ili jednake broju jedan onda ih možemo interpretirati kao kosinuse pravca propagacije i tada je reč o takozvanim ravanskim talasima. Oni se sastoje od tri nezavisne grupe talasa poznatih kao P, SH i SV -talasi. Za vrednosti veće od jedan ili imaginarne, navedene formulacije važe sve dok su zadovoljene jednačine (3.15) i (3.20). Tada kažemo da su to generalisani površinski talasi.

3.3 Ukupno pomeranje

Ako, radi pojednostavljenja jednačina, pretpostavimo da P i S -talasi leže u istoj ravni (npr. ravni x - z), možemo sabiranjem komponenti pomeranja usled P i S talasa dobiti ukupno pomeranje. Iz relacija (3.18), (3.22) i (3.23), za $l_y = m_y = 0$ dobijaju se amplitude pomeranja:

$$u(x, z) = l_x A_P e^{-(i\omega/c_P)(l_x x + l_z z)} + m_z A_{SV} e^{-(i\omega/c_S)(m_x x + m_z z)}$$

$$v(x, z) = A_{SH} e^{-(i\omega/c_S)(m_x x + m_z z)} \quad (3.25)$$

$$w(x, z) = l_z A_P e^{-(i\omega/c_P)(l_x x + l_z z)} - m_x A_{SV} e^{-(i\omega/c_S)(m_x x + m_z z)}$$

Analizirajući napisanu jednačinu, vidimo da komponente u i w koje leže u ravni x - z , zavise od P i SV talasa, dok komponenta v , upravna na ravan zavisi samo od SH -talasa. Odavde proizilazi važan zaključak da se one mogu posmatrati nezavisno jedna od druge. Ako pretpostavimo da je fazna brzina P i S talasa ista tj.:

$$c = c_P/l_x = c_S/m_x = \omega/k \quad (3.26.1)$$

tada je:

$$l_z = \sqrt{1-l_x^2} = l_x s \quad s = \pm \sqrt{1/l_x^2 - 1} \quad (3.26.2)$$

$$m_z = \sqrt{1-m_x^2} = m_x r \quad r = \pm \sqrt{1/m_x^2 - 1} \quad (3.26.3)$$

gde su s i r nove promenljive, koje predstavljaju tangense uglova koje pravci propagacije P i S talasa zaklapaju sa x osom. Veličina $k = \omega/c$ se naziva talasni broj, a $c = c_P/l_x = c_S/m_x$ je fazna brzina talasa.

Komponente pomeranja možemo sada pisati u obliku:

$$u(x, z, t) = u e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.27.1)$$

$$v(x, z, t) = v e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.27.2)$$

$$w(x, z, t) = w e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.27.3)$$

gde su u , v i w amplitude komponenti pomeranja:

$$u = l_x (A_p e^{-iksz} + B_p e^{iksz}) + m_x t (A_{SV} e^{-ikrz} - B_{SV} e^{ikrz}) \quad (3.28.1)$$

$$v = A_{SH} e^{-iktz} + B_{SH} e^{ikrz} \quad (3.28.2)$$

$$w = l_x s (A_p e^{-iksz} - B_p e^{iksz}) - m_x (A_{SV} e^{-ikrz} + B_{SV} e^{ikrz}) \quad (3.28.3)$$

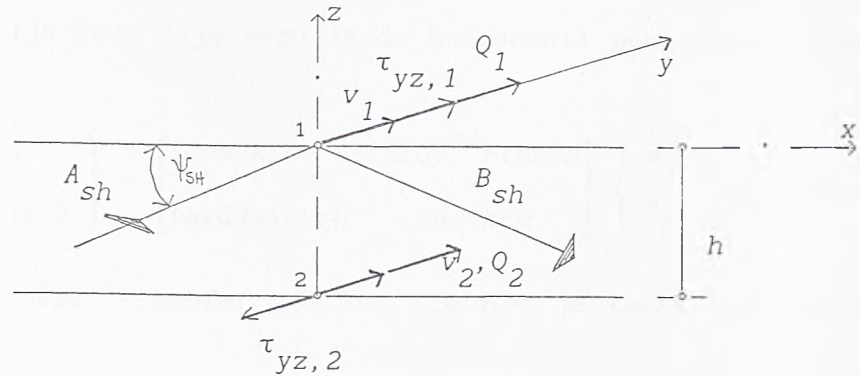
funkcije samo koordinate z . Da bi upotpunili rešenje (3.25), u jednačinama (3.28) pored dolazećih ("incoming") talasa uveli smo i odlazeće ("outgoing") talase sa amplitudama B_p , B_{SH} , B_{SV} , vodeći računa o znaku eksponencijalne funkcije. Naime uz B komponentu eksponent uz $iksz$ tj. $ikrz$ menja znak u odnosu na A komponentu.

3.4. Dinamičke matrice krutosti sloja

Po definiciji matrica krutosti je matrica koja uspostavlja vezu između sila i pomeranja u određenim tačkama. Poznajući pomeranja na krajevima i definišući konstitutivne relacije između napona i deformacija u tlu, moguće je i u slučaju talasnog kretanja odrediti matricu krutosti sloja tla određenih karakteristika. Kako smo u jednačinama (3.25) pokazali da su komponente pomeranja u ravni i upravno na ravan međusobno nezavisne, to se problem određivanja matrice krutosti pri talasnom kretanju raspada na dva nezavisna problema: u ravni x - z (P i SV -talasi), i upravno na ravan x - z (SH -talasi).

3.4.1. Dinamička matrica krutosti sloja za pomeranja upravna na ravan

Posmatrajmo sloj tla koji ima konstantne karakteristike materijala ρ i G , debljine h (slika 3-4) koji je izložen uticaju SH -talasa.



Slika 3-4

Do dinamičke matrice krutosti sloja debljine h , koja daje vezu između sila Q_1 i Q_2 i pomeranja v_1 i v_2 u tačkama 1 i 2 sloja, dolazimo polazeći od veze napona i pomeranja:

$$\tau_{yz}(x, z, t) = G \frac{\partial v(x, z)}{\partial z} e^{i\omega t} \quad (3.29)$$

Ako u njoj pomeranje $v(x, z)$ izrazimo jednačinama (3.27.2), odnosno (3.28.2), dobija se:

$$\tau_{yz}(x, z, t) = \tau_{yz} e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.30)$$

gde je τ_{yz} amplituda napona, koja se može pisati u obliku:

$$\tau_{yz} = iktG \left[-A_{SH} e^{-ikrz} + B_{SH} e^{ikrz} \right] \quad (3.31)$$

Vrednost amplituda pomeranja v i napona τ_{yz} u tački 1 dobijamo kada u jednačinama (3.28.2) i (3.31) stavimo da je $z=0$, u obliku:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \tau_{yz, 1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -ikrG & ikrG \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{SH} \\ B_{SH} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

Ako jednačinu (3.32) rešimo po A_{SH} i B_{SH} , dobija se:

$$\begin{Bmatrix} A_{SH} \\ B_{SH} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2ikrG} \begin{bmatrix} ikrG & -1 \\ ikrG & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \tau_{yz, 1} \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Na isti način se za tačku 2 dobija iz (3.28.2) i (3.31) za $z=-h$:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \tau_{yz, 2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{ikrh} & e^{-ikrh} \\ -ikrGe^{ikrh} & ikrGe^{-ikrh} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{SH} \\ B_{SH} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

Ako iz jednačina (3.34) i (3.33) eliminišemo nepoznate amplitude

A_{SH} i B_{SH} i eksponencijalne funkcije zamenimo trigonometrijskim, dobija se relacija koja daje vezu između komponenti pomeranja i napona u tačkama 1 i 2:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \tau_{yz,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos krh & -(krG)^{-1} \sin krh \\ (krG) \sin krh & \cos krh \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \tau_{yz,1} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

Matrica veze je tzv. transfer matrica. Za nju je karakteristično da nije simetrična.

Matricu krutosti sloja u globalnom sistemu dobijamo iz jednačine (3.35), kada napone izrazimo preko pomeranja i umesto njih uvedemo sile, stavljajući da je $Q_1 = \tau_{yz,1}$, a $Q_2 = -\tau_{yz,2}$:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{SH}^{SL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

Gde je matrica:

$$D_{SH}^{SL} = \frac{krG}{\sin krh} \begin{bmatrix} \cos krh & -1 \\ -1 & \cos krh \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

dinamička matrica krutosti sloja za slučaj talasa upravnih na ravan. Ona zavisi od talasnog broja k (frekvencije ω), tangensa upadnog ugla talasa r i karakteristika sloja G i h . Za svako $\omega > 0$ i $k \neq 0$ postoji rešenje za D_{SH}^{SL} .

Pri rešavanju dinamičke matrice krutosti sloja uočavamo tri karakteristična slučaja. Prvi kada je $\omega \neq 0$ a $k=0$ i drugi kada je $\omega=0$ a talasni broj $k=0$ ili $k \neq 0$.

1. Prvi slučaj, kada je $\omega \neq 0$ a $k=0$ odgovara slučaju vertikalne propagacije talasa. Naime, iz izraza za vrednost talasnog broja (3.26.3), sledi da je za $\omega \neq 0$, $k=0$ samo ako je ugao $\psi_{SH} = 90^\circ$. Tada je :

$$kr = k \sqrt{1/m_x^2 - 1} = \omega/c_s$$

Dinamička matrica krutosti dobija sledeći oblik:

$$D_{SH}^{SL} = \frac{G \omega/c_s}{\sin(\omega h/c_s)} \begin{bmatrix} \cos(\omega h/c_s) & -1 \\ -1 & \cos(\omega h/c_s) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

2. Drugi slučaj nastupa kada je $\omega=0$ i $k=0$. To je slučaj kada nema talasnog kretanja i matrica krutosti je jednaka statičkoj krutosti:

$$D_{SH}^{SL} = \frac{G}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

3. Treći slučaj nastupa za $\omega=0$ a $k \neq 0$. Kako je tada:

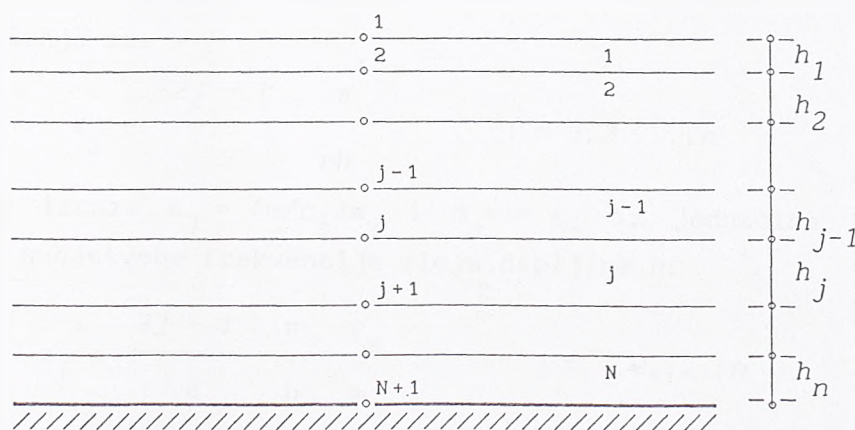
$$kr = k \sqrt{1/m_x^2 - 1} = ik$$

iz izraza za pomeranje v i sile na krajevima, dobija se novi oblik dinamičke matrice krutosti:

$$D_{SH}^{SL} = \frac{G k}{\sinh kh} \begin{bmatrix} \cosh kh & -1 \\ -1 & \cosh kh \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

3.4.1.1. Tačno rešenje svojstvenog problema SH-talasa

Kada poznajemo dinamičku matricu krutosti sloja (3.37), možemo formirati dinamičku matricu krutosti sistema od n slojeva D_{SH} (sl. 3-5). U dinamičkoj matrici sloja D_{SH} figuriše talasni broj k koji je konstantna vrednost za taj sloj. Iz uslova kompatibilnosti između slojeva sledi da je talasni broj isti za sve slojeve sistema.



Slika 3-5

Otuda možemo pisati da je dinamička matrica sistema slojeva :

Ideju prvi put srećemo u radu Lysmer-a i Waas-a [69]. Međutim postupak izvođenja diskretne matrice koji su oni predložili je isuviše komplikovan. Mnogo jednostavniji put za njeno je primenjen u ovom radu. Razvijajući trigonometrijske članove matrice krutosti u Tajlorov red i zadržavajući pri tome samo prva dva člana reda:

$$\begin{aligned} \sin krh &= krh - \frac{k^3 r^3 h^3}{6} \\ \cos krh &= 1 - \frac{k^2 r^2 h^2}{2} \end{aligned} \quad (3.46)$$

dobićemo dinamičku matricu krutosti u diskretnom obliku:

$$K_{SH}^{SL} = k^2 A + C - \omega^2 M \quad (3.47)$$

gde smo sa A , C i M obeležili matrice:

$$A = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2G & G \\ G & 2G \end{bmatrix} \quad C = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix} \quad M = \frac{\rho h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Iz izraza (3.48) vidimo da matrice A , C i M zavise samo od materijalnih konstanti G i ρ i od debljine sloja h . One ne zavise od talasnog broja i imaju konstantne vrednosti za sloj (za razliku od D_{SH}^{SL}). To znači da ih je potrebno samo jedanput odrediti za usvojeni raspored slojeva tla. Njihovo fizičko značenje je potpuno jasno iz jednačine (3.47). Matrica C predstavlja statičku krutost ($K_{SH}^{SL} = C$ za $\omega = 0$), matrica M je konzistentna matrica masa, a matricu A možemo shvatiti kao deo matrice inercijalnih sila koje potiču od talasnog kretanja. Ova poslednja tvrdnja sledi iz činjenice da ona ulazi u K_{SH}^{SL} pomnožena sa k^2 tj. da je njen uticaj proporcionalan sa ω^2 (jer je k proporcionalno ω).

Kada poznamo diskretnu matricu krutosti sloja K_{SH}^{SL} , lako možemo formirati matricu krutosti sistema slojeva K_{SH} :

$$K_{SH} = k^2 A + C - \omega^2 M \quad (3.49)$$

Matrice A , C i M predstavljaju matrice sistema slojeva koje se dobijaju na uobičajeni način iz matrica A , C i M za pojedine slojeve.

3.4.1.3. Diskretan problem svojstvenih vrednosti SH-talasa

Ako sistem slojeva nije opterećen, dinamička jednačina slobodnih vibracija, glasi:

$$(k^2 A + C - \omega^2 M) X = \{0\} \quad (3.50)$$

gde su A , C i M matrice sistema slojeva, a X vektor komponenti pomeranja sistema. Jednačina (3.50) za zadatu frekvenciju ω , predstavlja diskretan problem svojstvenih vrednosti po k . Problem svojstvenih vrednosti je linearan i može se napisati u obliku:

$$(A^{-1}\bar{C}) X = \lambda I \quad (3.51)$$

gde smo uveli obeležavanje da je:

$$\bar{C} = \omega^2 M - C, \quad \lambda = -k^2 \quad (3.52)$$

Svojstvene vrednosti k_j predstavljaju moguće talasne brojeve, a svojstveni vektori X_j odgovarajuće svojstvene oblike talasa, pri frekvenciji ω .

Matrice A i \bar{C} su simetrične i pozitivno definitne pa su otuda sve vrednosti λ realne. Kako je talasni broj $k = \pm\sqrt{\lambda}$, to vrednosti k mogu biti i realni i imaginarni brojevi u zavisnosti od znaka λ . Ako postoji n slojeva, matrične jednačine (3.50) i (3.51) su reda $n \times n$. Rešenja svojstvenog problema su $2n$ talasnih brojeva i n svojstvenih vektora. Od $2n$ talasnih brojeva k , n odgovara propagaciji unapred, a n propagaciji unatrag, i razlikuju se samo po znaku. Kako propagaciji unapred odgovara negativan znak eksponenta e^{-ikx} to će se za propagaciju unapred u slučaju kada je k_j realan broj usvojiti znak plus, a u slučaju imaginarnog broja k znak minus. Propagaciji u pravcu negativne x ose odgovara suprotan znak k talasnog broja. Svojstveni vektori su u oba slučaja isti.

Specijalan slučaj kada je $k = 0$, svodi problem svojstvenih vrednosti na standardan:

$$(C + \omega^2 M) X = \{0\} \quad (3.53)$$

a dobijene ω_j predstavljaju svojstvene vrednosti sistema slojeva u slučaju vertikalne propagacije talasa.

Za specijalan slučaj kada je $\omega = 0$, problem svojstvenih vrednosti glasi:

$$(k^2 A + C) X = \{0\} \quad (3.54)$$

U opštem slučaju jednačine (3.53) i (3.54) imaju $2n$ rešenja od kojih

biramo onih n rešenja koja zadovoljavaju *Sommerfeld*-ov radijacijski uslov (da ne postoji propagacija u pravcu negativne x -ose).

Za poznate vrednosti k_j i X_j možemo vektor amplituda pomeranja sistema slojeva pisati u obliku:

$$V(z) = \sum_{j=1}^n X_j \gamma_j \quad (3.55)$$

gde je γ_j faktor modalne participacije tona j . Vektor pomeranja sistema slojeva je onda:

$$V(x, z, t) = \left(\sum_{j=1}^n X_j \gamma_j \right) e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.56)$$

Ako je $n=1$, tj. postoji samo jedan sloj nad krutom bazom, diskretan problem svojstvenih vrednosti (3.50) se svodi na jednačinu oblika:

$$2(\lambda+2G) k^2 + G/h - \omega^2 \rho h/3 = 0 \quad (3.57)$$

Za zadato ω jednačina (3.57) ima dva rešenja po k u obliku:

$$k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 \rho h/3 - G/h}{2(\lambda + 2G)}} \quad (3.58)$$

U zavisnosti od ω moguća su sledeća rešenja k :

- (a) $\omega^2 > 3G/\rho h^2 \Rightarrow k_1$ i k_2 su realni brojevi;
- (b) $\omega^2 < 3G/\rho h^2 \Rightarrow k_1$ i k_2 su imaginarni brojevi;
- (c) $\omega^2 = 3G/\rho h^2 \Rightarrow k_1 = k_2 = 0$

Za $\omega=0$ iz jednačine (3.58) se dobija da je:

$$k_{1,2} = \pm i \frac{c_s}{c_p} \frac{1}{\sqrt{2h}} \quad (3.59)$$

Ako jednačinu (3.57) rešimo po ω , i u rešenje unesemo izraze za brzine talasa c_p i c_s , dobija se:

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2}{3h} c_p^2 k^2 + \frac{3}{h^2} c_p^2} \quad (3.60)$$

U slučaju vertikalne propagacije talasa $k = 0$. Iz (3.60) sledi

da je svojstvena frekvencija:

$$\omega_{1,2} = \pm \sqrt{3} (c_s/h) \quad (3.61)$$

Ako uporedimo približno rešenje ω_1^P (3.61) i tačno rešenje ω_1^t (3.46) za $j=1$, dobija se:

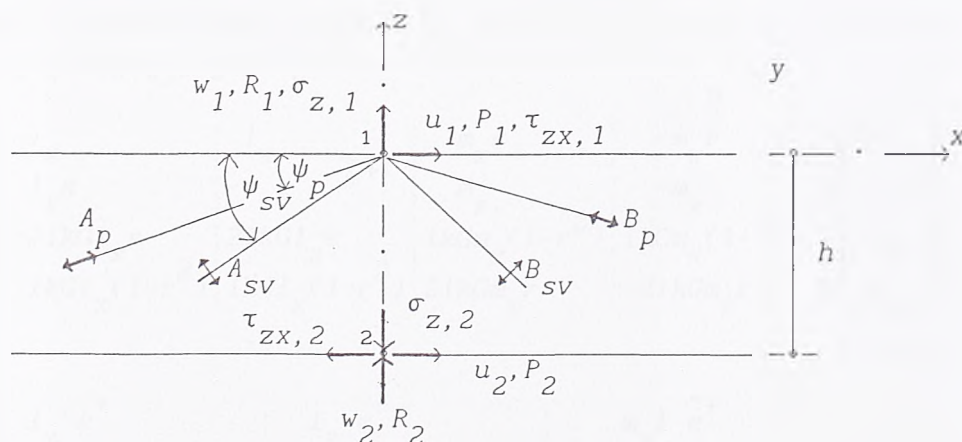
$$\omega_1^t = (\pi c_s) / (2h) = 1.5708 (c_s/h) \quad (3.62)$$

$$\omega_1^P = \sqrt{3} (c_s/h) = 1.7321 (c_s/h) \quad (3.63)$$

Vidimo da približno rešenje za slučaj sloja nad krutom bazom, daje nešto veću svojstvenu frekvenciju ω_1 od tačnog rešenja.

3.4.2. Dinamička matrica krutosti sloja za pomeranja u ravni

Do dinamičke matrice krutosti sloja debljine h za slučaj talasa koji leže u ravni x - z , dolazimo na isti način kao i kod SH -talasa, uspostavljanjem veze između sila i pomeranja tačaka 1 i 2 (slika 3-6).



Slika 3-6

Komponente vektora pomeranja i sila na krajevima 1 i 2 obeležimo sa:

$$P = \{ P_1 \ Q_1 \ P_2 \ Q_2 \}^t \quad \text{i} \quad U = \{ u_1 \ w_1 \ u_2 \ w_2 \}^t \quad (3.64)$$

Amplitude komponentalnih pomeranja u i v su date jednačinama (3.28.1) i (3.28.2), a ukupna pomeranja jednačinama (3.27.1) i (3.27.2). Pošto je funkcija napona jednaka funkciji pomeranja, možemo pisati da je:

$$\sigma_z(x, z, t) = \sigma_z e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.65.1)$$

$$\tau_{zx}(x, z, t) = \tau_{zx} e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.65.2)$$

gde smo sa σ_z i τ_{zx} obeležili amplitude napona, koje su funkcija samo koordinate z . Ako u poznate relacije između napona i deformacija:

$$\sigma_z(x, z, t) = \lambda u(x, z, t),_x + (\lambda + 2G) w(x, z, t),_z \quad (3.66.1)$$

$$\tau_{zx}(x, z, t) = G [u(x, z, t),_z + w(x, z, t),_x] \quad (3.66.2)$$

unesemo izraze za pomeranja (3.27.1) i (3.27.2), odnosno vrednosti za amplitude pomeranja (3.28.1) i (3.28.3), dobijaju se amplitude napona u obliku:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= ikGl_x(1-r^2) (A_p e^{-iks z} + B_p e^{iks z}) + 2ikGm_x r (A_{SV} e^{-ikr z} - B_{SV} e^{ikr z}) \\ \tau_{zx} &= -2ikGl_x s (A_p e^{-iks z} - B_p e^{iks z}) + ikGm_x(1-r^2) (A_{SV} e^{-ikr z} + B_{SV} e^{ikr z}) \end{aligned} \quad (3.67.2)$$

gde su veličine s i r , definisane jednačinama (3.26.1) i (3.26.2),

Vrednosti amplituda pomeranja i napona u tačkama 1 i 2 sloja dobijamo kada u jednačinama (3.28.1.), (3.28.3.), (3.67.1) i (3.67.2) stavimo da je $z = 0$ tj. $z = -h$:

$$\begin{pmatrix} u \\ w \\ \tau_{xz} \\ \sigma_z \end{pmatrix}_1 = \begin{bmatrix} l_x & l_x & m_x r & -m_x r \\ l_x s & -l_x s & m_x & -m_x \\ -2ikGl_x s & 2ikGl_x s & ikGm_x(1-r^2) & ikGm_x(1-r^2) \\ ikGl_x(1-r^2) & ikGl_x(1-r^2) & 2ikGm_x r & -2ikGm_x r \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_p \\ B_p \\ A_{SV} \\ B_{SV} \end{pmatrix} \quad (3.68.1)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ w \\ \tau_{xz} \\ \sigma_z \end{pmatrix}_2 = \begin{bmatrix} l_x e^+ & l_x e^- & m_x t \hat{e}^+ & \dots \\ l_x s e^+ & -l_x s e^- & m_x \hat{e}^+ & \dots \\ -2ikGl_x s e^+ & 2ikGl_x s e^- & ikGm_x(1-r^2) \hat{e}^+ & \dots \\ ikGl_x(1-r^2) e^+ & ikGl_x(1-r^2) e^- & 2ikGm_x r \hat{e}^+ & \dots \\ \dots & \dots & -m_x r \hat{e}^- & \dots \\ \dots & \dots & -m_x \hat{e}^- & \dots \\ \dots & \dots & ikGm_x(1-r^2) \hat{e}^- & \dots \\ \dots & \dots & -2ikGm_x r \hat{e}^- & \dots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_p \\ B_p \\ A_{SV} \\ B_{SV} \end{pmatrix} \quad (3.68.2)$$

gde smo uveli obeležavanje: $e^+ = e^{ikhs}$; $e^- = e^{-ikhs}$; $\hat{e}^+ = e^{ikhr}$ i

$$\hat{e}^- = e^{-ikhr}$$

Ako obeležimo vektore stanja pomeranja i napona u tačkama 1 i 2 :

$$u_1^t = \{u \ w \ \tau_{xz} \ \sigma_z\}_1 \quad (3.69.1)$$

$$u_2^t = \{u \ w \ \tau_{xz} \ \sigma_z\}_2 \quad (3.69.2)$$

Eliminacijom amplituda talasa iz jednačina (3.68.1) i (3.68.2), dobija se veza između vektora pomeranja i napona u tačkama 2 i 1:

$$u_2 = T u_1 \quad (3.70)$$

gde je matrica veze T , tzv. transfer matrica:

$$T = \begin{bmatrix} 2Cs & -iSs(1-r^2)/s & -(1/Gks)Ss & iCs/(Gk) \\ + (r^2-1)Ct & -2ir St & -r/(Gk)St & -iCr/(Gk) \\ \hline 2is Ss & (r^2-1)Cs & Ct/(Gk) & -s Ss/(Gk) \\ + iSt(1-r^2)/r & + 2 Ct & -iCr/(Gk) & -s St/(Gkr) \\ \hline 4Gks Ss & 2iGk(1-r^2)Cs & 2Cs & 2is Ss \\ + GkSt(1-r^2)/r & -2iGk(1-r^2)Ct & -(1-r^2)Ct & iSt(1-r^2)/r \\ \hline 2iGk(1-r^2)Cs & GkSs(1-r^2)/r & -iSs(1-r^2)/s & (r^2-1) Cs \\ -2iGk(1-r^2)Ct & 4Gks St & -2ir St & + 2 Ct \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Pri tome smo uveli obeležavanje: $Ss = \sin ksh$; $Cs = \cos ksh$; $St = \sin krh$; $Ct = \cos krh$. Transfer matrica nije simetrična. Ako iz nje izrazimo napone u funkciji pomeranja i uvedemo da su sile na krajevima: $P_1 = \tau_{xz,1}$, $R_1 = \sigma_{z,1}$, $P_2 = -\tau_{xz,2}$ i $R_2 = -\sigma_{z,2}$, dobićemo vezu između sila i pomeranja krajeva 1 i 2.

Dobijena matrica je nesimetrična sa imaginarnim članovima koja se može učiniti simetričnom ako umesto R_i i w_i , $i = 1,2$, uvedemo iR_i i iw_i , gde je $i = \sqrt{-1}$, imaginarna jedinica. Tako dobijena veza između vektora sila i pomeranja u tačkama 1 i 2 glasi:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ iR_1 \\ P_2 \\ iR_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{P-SV}^{SL} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ iw_1 \\ u_2 \\ iw_2 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

gde smo sa D_{P-SV}^{SL} obeležili dinamičku matricu krutosti sloja za pomeranja u ravni x-z:

$$D_{P-SV}^{SL} = \frac{(1+r^2)Gk}{D} D \quad (3.73)$$

gde je D matrica:

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} CsSt & -\frac{3-r^2}{1+r^2}(1-CsCt) & -s Ss & -Cs + Ct \\ + sSsCt & -\frac{1+2s^2r^2}{St(1+r^2)} SsSt & -\frac{1}{r} St & \\ \hline & (1/s)SsCt & Cs - Ct & -(1/s)Ss \\ + (1/r)CsSt & & & -rSt \\ \hline & \text{sim} & \frac{1}{r} CsSt & -\frac{r^2-3}{1+r^2}(1-CsCt) \\ + s SsCt & & & -\frac{r^2-2s^2r^2-1}{st(1+r^2)} SsSt \\ \hline & & & (1/s)SsCt \\ & & & + rCsSt \end{bmatrix}$$

a D veličina data jednačinom:

$$D = 2(1 - CsCt) + (sr + 1/sr)SsSt \quad (3.74)$$

Dinamička matrica krutosti je funkcija talasnog broja k (tj. ω i fazne brzine prostiranja talasa, $k=\omega/c$), kosinusa pravca P i SV-talasa, debljine sloja i karakteristika tla (λ, σ, ρ), i ona ima rešenje za $\omega \neq 0$ i $k \neq 0$.

Od interesa su slučajevi kada ω ili k dobijaju vrednost nula.

1) Prvi slučaj se javlja kada je $\omega = 0$ i $k = 0$. U predhodnom odeljku smo konstatovali da je to slučaj kada ne postoji talasno kretanje i kada je dinamička matrica jednaka statičkoj:

$$D_{P-SV}^{SL} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} G & 0 & -G & 0 \\ 0 & \lambda+2G & 0 & -(\lambda+2G) \\ -G & 0 & G & 0 \\ 0 & -(\lambda+2G) & 0 & \lambda+2G \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

2) Drugi slučaj, kada je $\omega \neq 0$ a $k = 0$, odgovara propagaciji talasa u vertikalnom pravcu, jer se iz uslova da je $k=0$ dobija da je $\Psi=90^\circ$. Dinamička matrica krutosti tada ima oblik dat jednačinom (3.76).

(3.76)

$$D_{P-SV}^{SL} = \frac{G\omega}{c_s} \begin{bmatrix} \cot(\omega h/c_s) & 0 & \frac{-1}{\sin(\omega h/c_s)} & 0 \\ \frac{c_p}{c_s} \cot(\omega h/c_p) & 0 & 0 & \frac{-(c_p/c_s)}{\sin(\omega h/c_p)} \\ \text{sim} & & \cot(\omega h/c_s) & 0 \\ & & & \frac{c_p/c_s}{\cot(\omega h/c_p)} \end{bmatrix}$$

3) Treći slučaj nastupa kada je $\omega = 0$ i $k \neq 0$. Dinamička matrica krutosti menja oblik i umesto trigonometrijskih funkcija sadrži hiperboličke funkcije:

$$D_{P-SV}^{SL} = \frac{2Gk}{D} D \quad (3.77)$$

gde je D matrica:

$(1 + c_s^2/c_p^2)ShCh$ $-(1 - c_s^2/c_p^2)kh$	$(1 + c_s^2/c_p^2)Sh^2$ $- D$	$(1 - c_s^2/c_p^2)khCh$ $-(1 + c_s^2/c_p^2)Sh$	$-kh(1 - c_s^2/c_p^2)Sh$
	$(1 + c_s^2/c_p^2)ShCh$ $+(1 - c_s^2/c_p^2)kh$	$kh(1 - c_s^2/c_p^2)Sh$	$-(1 - c_s^2/c_p^2)khCh$ $-(1 + c_s^2/c_p^2)Sh$
	<i>sim</i>	$(1 + c_s^2/c_p^2)ShCh$ $-(1 - c_s^2/c_p^2)kh$	$-(1 + c_s^2/c_p^2)Sh^2$ $+ D$
			$(1 + c_s^2/c_p^2)ShCh$ $+(1 - c_s^2/c_p^2)kh$

a D veličina:

$$D = (1 + c_s^2/c_p^2)Sh^2 - k^2 h^2 (1 - c_s^2/c_p^2)^2, \quad (3.78)$$

$$Sh = \sinh kh \quad a \quad Ch = \cosh kh$$

3.4.2.1. Tačno rešenje svojstvenog problema P i SV -talasa

Sve što smo rekli o svojstvenom problemu SH -talasa važi i u ovom slučaju, samo je broj nepoznatih dva puta veći.

Za $n = 1$, tj. u slučaju jednog sloja, svojstvena jednačina za talase u ravni glasi:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r} CsSt & -\frac{3-r^2}{1+r^2}(1-CsCt) \\ + sSsCt & -\frac{1+2s^2r^2-r}{sr(1+r^2)} SsSt \\ \hline -\frac{3-r^2}{1+r^2}(1-CsCt) & \frac{1}{s} SsCt \\ -\frac{1+2s^2r^2-r}{sr(1+r^2)} SsSt & +\frac{1}{r} CsSt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Rešenje svojstvenog problema možemo dobiti probanjem, iz uslova da je determinanta matrice $D_{P-SV}^{SL} = 0$. Vidimo da je za slučaj talasa u ravni $x-z$, zbog povećanja broja nepoznatih, tačno rešenje svojstvenih vrednosti komplikovano čak i za slučaj jednog sloja. Zbog toga je uputno umesto tačnog koristiti diskretan oblik matrice krutosti.

3.4.2.2. Diskretan oblik dinamičke matrice krutosti sloja K_{P-SV}^{SL}

Ako pretpostavimo da je talasna dužina velika u poređenju sa debljinom sloja, moguće je dinamičku matricu linearizovati, kao i u slučaju SH -talasa. Pri tome se dobija dinamička matrica K_{P-SV}^{SL} u diskretnom obliku:

$$K_{P-SV}^{SL} = k^2 A + kB + C - \omega^2 M \quad (3.80)$$

gde su A , B , C i M matrice:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{h}{G} \begin{bmatrix} 2(\lambda+2G) & 0 & \lambda+2G & 0 \\ 0 & 2G & 0 & G \\ \lambda+2G & 0 & 2(\lambda+2G) & 0 \\ 0 & G & 0 & 2G \end{bmatrix} & B &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \lambda-G & 0 & -\lambda-G \\ \lambda-G & 0 & \lambda+G & 0 \\ 0 & \lambda+G & 0 & -\lambda+G \\ -\lambda-G & 0 & -\lambda+G & 0 \end{bmatrix} \\
 C &= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} G & 0 & -G & 0 \\ 0 & (\lambda+2G) & 0 & -(\lambda+2G) \\ -G & 0 & G & 0 \\ 0 & -(\lambda+2G) & 0 & \lambda+2G \end{bmatrix} & M &= \frac{\rho h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

Matrice A , B , C i M imaju određeno fizičko značenje. Matrica C predstavlja statičku matricu krutosti sloja, jer je $K_{P-SV}^{SL} = C$ za $\omega=0$ i $k=0$. Matrica M je konzistentna matrica masa. Matrica B predstavlja matricu prigušenja. To se da zaključiti na osnovu činjenice da ako iz vektora sila i pomeranja eliminišemo imaginarnu jedinicu, matrica B postaje imaginarna. Na osnovu toga zaključujemo da matrica B predstavlja matricu viskoznog prigušenja (ono je proporcionalno brzini kretanja). Kako je matrica A proporcionalna talasnom broju k tj. ω , to se može shvatiti da ona predstavlja deo inercijalne sile.

Matrice A , B , C , i M zavise samo od debljine sloja h i karakteristika tla ρ i G . Za usvojeni raspored slojeva, poznajući matrice pojedinih slojeva A , B , C i M možemo formirati matrice sistema slojeva A , B , C i M , na uobičajeni način. One imaju konstantnu vrednost za usvojeni raspored slojeva i potrebno ih je samo jednom sračunati u toku proračuna. Jedina promenljiva veličina je talasni broj k , koji zavisi od frekvencije ω , i koga treba definisati za svako ω . Diskretan oblik dinamičke matrice krutosti sistema slojeva za zadatau frekvenciju glasi:

$$K_{P-SV} = k^2 A + k B + C + \omega^2 M \tag{3.82}$$

gde matrice A , B , C , i M predstavljaju matrice sistema slojeva.

3.4.2.3. Diskretan problem svojstvenih vrednosti P-SV-talasa

Svojstveni oblici propagacije talasa kroz sistem slojeva se mogu dobiti rešavanjem dinamičke jednačine u diskretnom obliku, kada je vektor opterećenje $P(\omega)=0$;

$$(k^2 A + k B + C - \omega^2 M) X = \{0\} \quad (3.83)$$

Jednačina (3.83) predstavlja kvadratni problem svojstvenih vrednosti po k za zadato ω . Ako uvedemo obeležavanje $\bar{C} = C - \omega^2 M$, jednačina (3.83) glasi:

$$(k^2 A + k B + \bar{C}) X = \{0\} \quad (3.84)$$

Kvadratni problem svojstvenih vrednosti se rešava svođenjem na linearni problem dva puta većih dimenzija. U našem slučaju, zahvaljujući obliku matrica A , B , C i M , moguće je problem rešiti na jednostavniji način. Jednačina (3.84) se može pisati u obliku:

$$\begin{bmatrix} k^2 A_x + \bar{C}_x & B_{xz} \\ k^2 B_{zx} & k^2 A_z + \bar{C}_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_x \\ kX_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.85)$$

gde su matrice sistema A_x , A_z , $B_{zx} = B_{xz}^t$, \bar{C}_x , \bar{C}_z dobijene iz submatrica sloja (3.81) uz komponente x i z :

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{h}{G} \begin{bmatrix} 2(\lambda+2G) & \lambda+2G \\ \lambda+2G & 2(\lambda+2G) \end{bmatrix} & A_z &= \frac{h}{G} \begin{bmatrix} 2G & G \\ G & 2G \end{bmatrix} \\ C_x &= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} G & -G \\ -G & G \end{bmatrix} & C_z &= \frac{1}{h} \begin{bmatrix} \lambda+2G & -(\lambda+2G) \\ -(\lambda+2G) & \lambda+2G \end{bmatrix} \\ B_{zx}^t = B_{xz} &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda-G & -\lambda-G \\ \lambda+G & -\lambda+G \end{bmatrix} & M_x = M_z &= \frac{\rho h}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.86)$$

gde je:

$$\bar{C}_x = C_x - \omega^2 M \quad (3.86.1)$$

$$\bar{C}_z = C_z - \omega^2 M \quad (3.86.2)$$

Iz (3.85) sledi da se jednačina svojstvenih vrednosti može prikazati u obliku:

$$(k^2 A^* + C^*) \{X^*\} = \{0\} \quad (3.87)$$

gde su:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_X & 0 \\ B_{ZX} & A_Z \end{bmatrix} \quad C^* = \begin{bmatrix} \bar{C}_X & B_{ZX} \\ 0 & \bar{C}_Z \end{bmatrix} \quad X^* = \begin{Bmatrix} X_X \\ kX_Z \end{Bmatrix} \quad (3.88)$$

Jednačina predstavlja linearan problem svojstvenih vrednosti po k , koji više nije simetričan. On se svodi na nesimetričan problem svojstvenih vrednosti:

$$[(A^*)^{-1} C^*] \{X^*\} = \lambda \{X^*\} \quad (3.89)$$

gde je $\lambda = -k^2$. Svojstvene vrednosti λ_j nesimetričnog linearnog problema i svojstveni vektori X_j mogu, po definiciji biti i realni i imaginarni brojevi. Ako su matrice A , B , C i M reda $2N \times 2N$, gde je N broj slojeva, rešenje svojstvenog problema (3.89) su $2N$ svojstvenih vrednosti λ_j i odgovarajućih svojstvenih vektora X_j^* tj. $2 \times 2N = 4N$ talasnih brojeva k_j i X_j . Od toga $2N$ vrednosti k_j i X_j odgovara proragaciji talasa u pravcu pozitivne x -ose, a $2N$ propagaciji u pravcu negativne x -ose. Ova dva rešenja se razlikuju samo u znaku talasnog broja k i znaku z -komponente vektora svojstvenih vrednosti.

Postavlja se pitanje šta predstavljaju rešenja svojstvenog problema k_j i X_j . Pa to su mogući talasni brojevi i oblici oscilovanja sistema slojeva za zadatau frekvenciju ω .

U sledećem poglavlju pokazaćemo da ti svojstveni oblici predstavljaju rešenje za kretanje u slučaju površinskih talasa.

Rešenja svojstvenog problema postoje za svako ω . Za slučaj kada je $\omega \neq 0$ a $k=0$ problem se svodi na standardni:

$$(C - \omega^2 M) \{M\} = \{0\} \quad (3.90)$$

U slučaju kada je samo $\omega=0$ problem se redukuje na:

$$(k^2 A + k B + C) \{X\} = \{0\} \quad (3.91)$$

3.5. Površinski talasi

Poseban slučaj talasa predstavljaju talasi koji nastaju na slobodnoj površini polu-beskonačnog prostora a koji opadaju sa dubinom tako, da se na nekoliko talasnih dužina od površine mogu zanemariti. Oni se nazivaju površinski talasi. Razlikujemo dva tipa površinskih talasa: *Rayleigh*-eve (R-talase), koji leže u ravni x,z i *Love*-ove (L-talase), koji su upravni na ravan x,z .

Površinski talasi su prvo otkriveni merenjima "in situ", da bi 1887. *Rayleigh* dao teorijske osnove proračuna talasa u ravni, koji su po njemu i dobili ime *Rayleigh*-evi talasi. Do rešenja je došao polazeći od elastodinamičke jednačine kretanja za poluprostor, postavljajući granične uslove na površini.

Drugi tip talasa, koji propagiraju u pravcu y -ose sa talasnim frontom u x,z ravni definisao je *Love* 1911 kao, "horizontalno polarizovane smičuće talase nastale višestrukom refleksijom u višeslojnoj sredini" [34]. On je do rešenja došao razmatrajući prostiranje *SH*-talasa kroz sloj iznad elastičnog poluprostora. Talasi koje je tada opisao su po njemu nazvani *Love*-ovi talasi.

Prostiranje površinskih talasa kroz složenu, slojevitú sredinu prvi je analizirao *Sezawa* 1927 .

Nažalost, autor nije bio u mogućnosti da dođe do njihovih izvornih radova. Detalje osnovnih teorijskih postavki je moguće naći kod *Ewing, Jardetzky i Press*-a [34].

Na osnovu njihovih pionirskih radova razvile su se matematičke teorije za propagaciju površinskih talasa kroz slojevitú nehomogenu sredinu. Sve one su se zasnivale na rešavanju sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina sa promenljivim koeficijentima. Tačna rešenja su bila isuviše komplikovana. Stoga su se za potrebe seizmologije u poslednjih dvadeset godina razvile polu-analitičke metode. Detaljni pregled metoda je dao *Malischewsky* [82]. U uvodnom, teorijskom delu, autor daje rešenje diferencijalnih jednačina sa odgovarajućim graničnim uslovima za površinske talase "otvorenog tipa", praćeno izvanrednim fizičkim tumačenjem prirode površinskih talasa.

Za primenu talasne teorije u proučavanju interakcije tla i objekta od značaja su numeričke metode za rešavanje talasnog kretanja.

One su se pojavile još početkom 50-tih, kada je prvo *Thompson* (1953) a zatim *Haskell* (1953) dao rešenje primenom tzv. transfer matrica (*Haskell-Thompson-ov* postupak). *Lysmer-ov* rad (1970) predstavlja nastavak predhodnih. U njemu je dat jednostavan numerički postupak za analizu generalisanih R-talasa u slojevitoj sredini primenom metode konačnih elemenata. Rad je pionirski u toj oblasti i čitava formulacija matrica i jednačina kretanja, u današnjem svetlu izgleda prilično nespretna. Moderniji pristup je izložen u predhodnim delovima ovog poglavlja za opšti slučaj talasa u prostoru. Kada je reč o površinskim talasima potrebno je izvršiti analizu uvodeći dodatne pretpostavke na granici.

Površinski talasi, matematički posmatrano, predstavljaju samo specijalan slučaj talasa u prostoru. To znači da sve relacije izvedene za prostorne talase (izrazi za komponente pomeranja i napone, matrice transformacije i matrice krutosti) važe i u slučaju površinskih talasa. Pri tome parametri koji definišu talasno kretanje (r, s, k), moraju biti određeni tako da zadovolje uslove koji važe za površinske talase, a to je:

1. da opadaju sa dubinom;
2. da ne postoji propagacija iz beskonačnosti ka posmatranom mestu (*Sommerfeld-ov* radijacijski uslov).

Druga pretpostavka ima za posledicu da su amplitude upadnih talasa u ovom slučaju jednake nuli, tj. $A_{SH} = A_P = A_{SV} = 0$. Jednačina kretanja za talase upravne na ravan tada glasi:

$$v(x, z, t) = B_{SH} e^{ikrz} e^{-ikx} e^{i\omega t} \quad (3.92)$$

Uslov da v teži nuli kada z teži minus beskonačnosti je zadovoljen za proizvoljno k samo ako je r negativan imaginarni broj, tj. :

$$r = -i \sqrt{1 - 1/m_x^2} \quad (3.93)$$

odnosno, ako je $m_x > 1$.

Potpuno na isti način bi se moglo zaključiti za R-talase, da je :

$$s = -i \sqrt{1 - 1/l_x^2} \quad (3.94)$$

tj. da je $l_x > 1$.

Znači talasne jednačine u kojima su m_x i l_x manje ili jednake 1 predstavljaju jednačine SH, P, tj. SV talasa koje u literaturi srećemo i pod imenom ravanski talasi. Ako su m_x i l_x veći od jedan tj. r i s

imaginarni brojevi reč je o površinskim talasima.

Pošto smo definisali varijaciju pomeranja u z -pravcu tako da zadovolji uslov za površinske talase, ostaje da se to uradi i za x -pravac. Iz jednačine (3.92) je jasno da promena pomeranja u x -pravcu zavisi od talasnog broja k . Kada je k realan broj usvaja se da je pozitivan ako je reč o propagaciji u pravcu pozitivne x -ose. Ako je k kompleksan broj, tada član uz x glasi:

$$e^{-ikx} = e^{-i\operatorname{Re}(k)x} e^{i\operatorname{Im}(k)x} \quad (3.95)$$

Prvi deo opisuje propagaciju u pravcu pozitivne x -ose ($e^{i(\omega t - \operatorname{Re}(k)x)}$), ako je $\operatorname{Re}(k) > 0$. Drugi deo, predstavlja faktor atenuacije. Da bi zadovoljili uslov da amplitude pomeranja opadaju sa porastom koordinate x mora $\operatorname{Im}(k)$ biti negativan broj. U slučaju da je k kompleksan broj i fazna brzina $c = \omega/k$ je kompleksan broj. Ako član uz x e^{-ikx} napišemo preko brzine dobiće se:

$$e^{-i\frac{\omega}{c}x} = e^{-\frac{i\omega x}{\operatorname{Re}(c) + i\operatorname{Im}(c)}} = e^{-\frac{i\omega \operatorname{Re}(c)}{|c|^2}x} e^{-\frac{\omega \operatorname{Im}(c)}{|c|^2}x} \quad (3.96)$$

Prvi deo jednačine predstavlja propagaciju u pravcu pozitivne x -ose prividnom brzinom c_a :

$$c_a = \frac{|c|^2}{\operatorname{Re}(c)} \quad (3.97)$$

a drugi predstavlja funkciju atenuacije kretanja.

Iz navedenih relacija zaključujemo da su površinski talasi disperzivni (brzina im zavisi od frekvencije), da propagiraju horizontalno prividnom brzinom c_a (koja je različita od faze brzine), i da opadaju sa porastom x (atenuacija).

Napred smo već istakli da jednačine pomeranja važe i za ravanske i za površinske talase. Takođe i izrazi za dinamičke matrice krutosti u tačnom obliku (3.37) i diskretnom obliku (3.48) za SH talase važe i za L -talase, odnosno dinamičke matrice krutosti za P - SV talase (3.73) i (3.80) važe i za R -talase.

3.5.1. Rayleigh-evi talasi

U slučaju određivanja odgovora sistema slojeva na uticaj Rayleigh-evih talasa, pretpostavka o nepostojanju izvora talasa dovodi do toga da je vektor spoljašnjeg opterećenja u dinamičkoj jednačini za sistem slojeva jednak nuli, tj. $\{Q\} = 0$. To praktično znači da se problem određivanja vektora pomeranja R-talasa svodi na rešavanje tačnog ili diskretnog problema svojstvenih vrednosti R-talasa izloženih detaljno u poglavlju 3.4.1.3.

U analizi diskretnog problema svojstvenih vrednosti talasa u ravni (generalisani R-talasi), jednačina (3.83), pokazali smo da, pošto je reč o kvadratnom problemu svojstvenih vrednosti, talasni brojevi k_j mogu biti realni, imaginarni ili kompleksni brojevi. Shodno tome i svojstveni oblici X_j mogu imati sve tri vrednosti. Problem svojstvenih vrednosti možemo proširiti i posmatrati u generalisanom smislu. U zavisnosti od rešenja, vektor ukupnog pomeranja tačke u sistemu slojeva N će biti:

a) kada je k_j realan broj

$$u = \begin{Bmatrix} u(x, z, t) \\ w(x, z, t) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{2N} \gamma_j X_j(z) e^{i(\omega t - k_j x)} \quad (3.99)$$

b) kada je k_j imaginaran broj

$$u = \begin{Bmatrix} u(x, z, t) \\ w(x, z, t) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{2N} \gamma_j X_j(z) e^{Im(k_j)x} e^{i\omega t} \quad (3.100)$$

c) kada je k_j kompleksan broj

$$u = \begin{Bmatrix} u(x, z, t) \\ w(x, z, t) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{2N} \gamma_j X_j(z) e^{Im(k_j)x} e^{i(\omega t - Re(k_j)x)} \quad (3.101)$$

gde je γ_j faktor participacije tona j , a $Re(k_j)$ i $Im(k_j)$ realni i imaginarni deo talasnog broja.

Analizirajmo jednu po jednu jednačinu. U prvom slučaju, kada je k_j realan broj, jednačina (3.99), kretanje pri propagaciji R-talasa je jednako zbiru talasa koji propagiraju u pravcu x -ose (uslov da je

$k_j > 0$), svojstvenim tonom $X_j(z)$, faznom brzinom ω/k_j sa talasnom dužinom $\lambda = 2\pi/k_j$. Na osnovu toga, svojstvene oblike X_j možemo shvatiti kao "karakteristične talase", koji zadovoljavaju i dinamičku jednačinu kretanja i granične uslove.

U slučaju kada je k imaginaran broj, jednačina (3.100), kretanje je harmonijsko ali nema propagacije talasa. Da bi zadovoljili *Sommerfeld*-ov radijacijski uslov mora biti $Im(k_j) < 0$, što znači da talasi opadaju u pravcu x -ose. To su tzv. "opadajući talasi".

Malischewsky [82] opisane tonove za koje je k_j realan ili čisto imaginaran broj naziva "normalni tonovi".

Slučaj kada je k kompleksan broj predstavlja analitičko proširenje "normalnog tona" ispod "cut-off" frekvencije. ("Cut-off" frekvencija je frekvencija ispod koje nema talasnog kretanja.) Svojstveni oblici su takođe kompleksni brojevi. Takvi talasi (3.101) propagiraju u pravcu x -ose, faznom brzinom $\omega/Re(k)$, prigušeni su (što znači da mora biti $Im(k) > 0$), sa faktorom atenuacije po talasnoj dužini $\lambda = 2\pi/Re(k_j)$:

$$\phi = e^{2\pi Im(k_j)/Re(k_j)} \quad (3.102)$$

Opšte je poznato da u modalnoj analizi značajnu ulogu ima samo nekoliko prvih tonova. To isto važi i u slučaju talasnog kretanja. Postavlja se pitanje koji je ton prvi kod R -talasa. Osnovni ton je ton koji ima najkraću talasnu dužinu ($\lambda = cT = 2\pi/k$), a samim tim i najmanju faznu brzinu. Iz toga sledi da je prvi ton u skupu realnih vrednosti talasnog broja k onaj za koji je najveća vrednost $Re(k_j)$. Ako su, za zadato ω , sve svojstvene vrednosti imaginarne, onda je prvi ton onaj za koji je najmanji $Im(k_j)$, tj. to je ton koji ima najmanju atenuaciju.

Brojni radovi su pokazali da je u slučaju R -talasa dovoljno u analizi posmatrati samo osnovni ton, naročito ako se ne radi o visokim frekvencijama. *Gomez-Masso* i dr. su u radu [37] rešili problem amplifikacije zemljotresnog ubrzanja od osnovne stene do slobodne tačke na površini posmatrajući samo osnovni ton R -talasa.

3.5.2. Love-ovi talasi

Sve što smo u predhodnim delu pokazali za R -talase važi i za L -talase, samo je problem znatno jednostavniji.

Amplitude pomeranja tačaka sistema slojeva usled $Love$ -ovih talasa su proporcionalne svojstvenim oblicima propagacije L -talasa. Detaljna analiza problema svojstvenih vrednosti i postupak rešavanja je dat u poglavlju 3.4.1.1.

Diskretan problem svojstvenih vrednosti L -talasa je linearan (3.50) i njegova rešenja su realne svojstvene vrednosti i svojstveni oblici, dok su talasni brojevi ili realni, pozitivni, ili imaginarni, negativni. To znači da se za L -talase javljaju samo "normalni tonovi". Pomeranja tačaka sistema od N slojeva će biti:

a) kada je k_j realan broj

$$v(x, z, t) = \sum_{j=1}^N \gamma_j X_j(z) e^{i(\omega t - k_j x)} \quad (3.103)$$

b) kada je k_j imaginaran broj

$$v(x, z, t) = \sum_{j=1}^N \gamma_j X_j(z) e^{Im(k_j)x} e^{i\omega t} \quad (3.104)$$

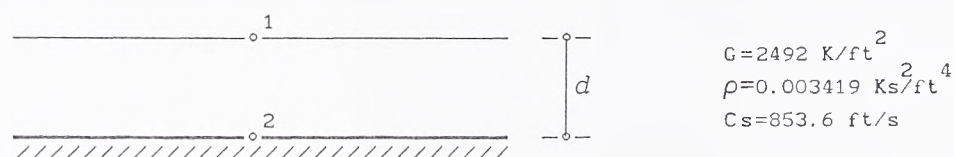
3.6. Analiza svojstvenih vrednosti L i R -talasa. Program L.FOR i R.FOR

Za sistem slojeva nad krutom bazom, sa konstantnim karakteristikama tla unutar sloja, na osnovu predhodno izložene teorije, napravljeni su programi za računar u FORTRAN-u 77. Prikaz programa za rešavanje svojstvenih vrednosti L -talasa L.FOR i programa za rešavanje svojstvenog problema R -talasa R.FOR su dati u DODATAK I.

Na osnovu rezultata dobijenih analizom prvo najjednostavnijeg slučaja, jednog sloja nad krutom bazom, a zatim modela sa više slojeva, izvedeni su predhodno izneti zaključci o svojstvenim vrednostima, tj. talasnim brojevima i svojstvenim oblicima L i R -talasa. Ovde ćemo ukratko izložiti karakteristične primere.

3.6.1. Primer 1

U prvom primeru su određeni talasni brojevi i fazne brzine jednog jedinog sloja debljine d nad krutom bazom, slika 3-7.



Slika 3-7

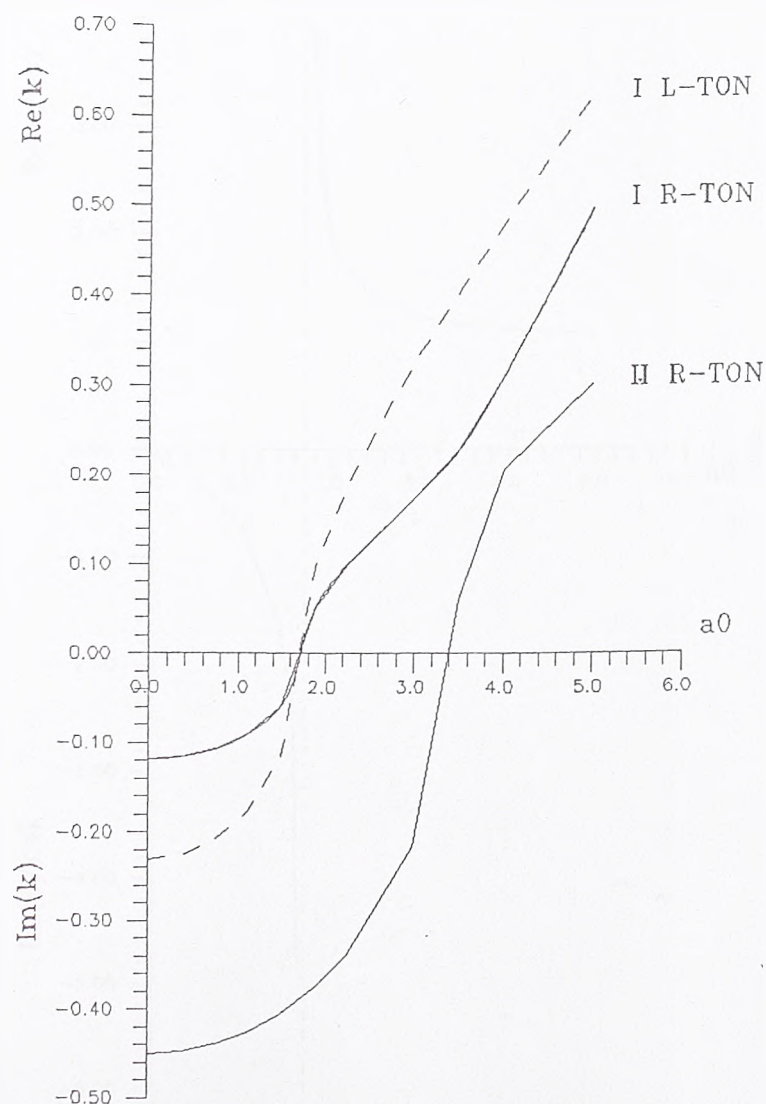
Ovako jednostavan slučaj je posmatran stoga što je, prvo, bilo lako kontrolisati rešenja dobijena programima L.FOR i R.FOR i drugo, na osnovu parametarske analize promene talasnog broja i fazne brzine sa promenom frekvencije ω mogli smo izvesti određene zaključke o ponašanju talasa.

Tabela 3-1

n	a_0	L-talasi		R-talasi			
		k_1	c/c_s	k_1	c/c_s	k_2	c/c_s
1	0	-0.231i	0	-0.119i	0	-0.450i	0
2	0.375	-0.226i	0.222i	-0.116i	0.432i	-0.447i	0.112i
3	0.75	-0.208i	0.480i	-0.107i	0.936i	-0.439i	0.227i
4	1.125	-0.176i	0.855i	-0.090i	1.662i	-0.425i	0.353i
5	1.5	-0.115i	1.734i	-0.059i	3.369i	-0.404i	0.496i
6	1.875	0.095	2.608	0.050	5.042	-0.375i	0.666i
7	2.25	0.192	1.565	0.100	3.011	-0.338i	0.888i
8	3.0	0.327	1.225	0.174	2.300	-0.216i	1.853i
9	3.5	0.405	1.151	0.228	2.046	0.059	7.91
10	4.0	0.481	1.110	0.310	1.721	0.206	2.589
11	5.0	0.625	1.066	0.497	1.341	0.302	2.207

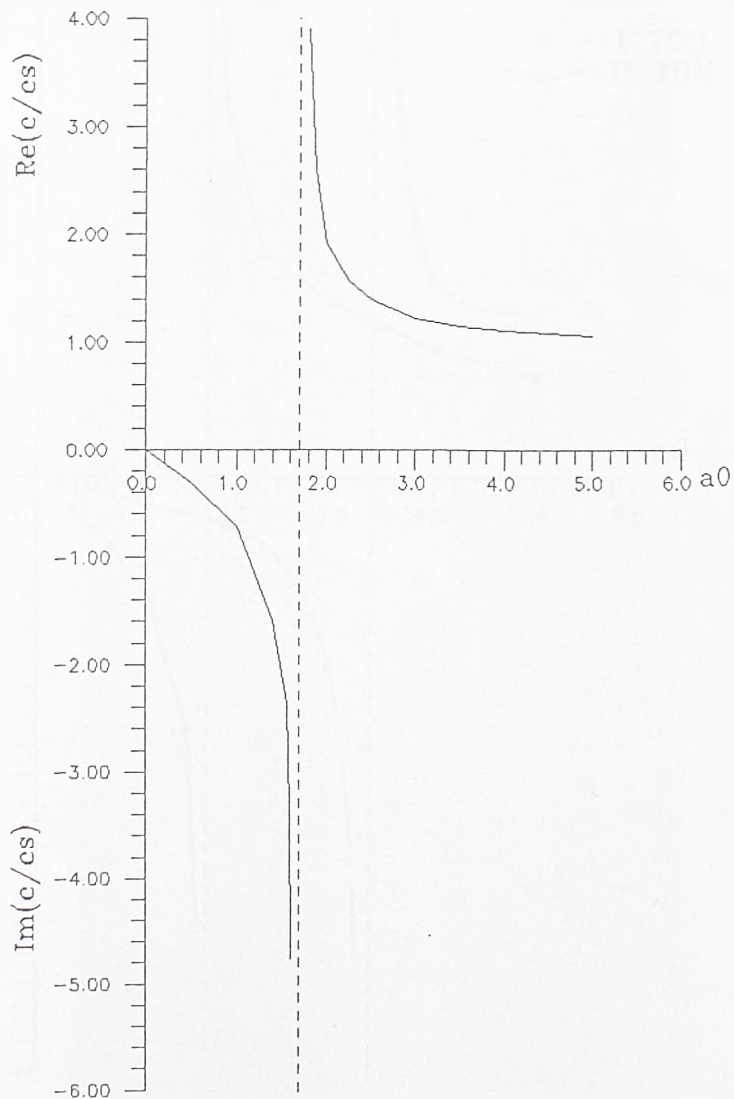
U tabeli 3-1 su, za L i R-talase, date vrednosti talasnog broja k i odnosa brzina c/c_s u funkciji bezdimenzionalne frekvencije $a_0=\omega d/c_s$. Sa c_s smo obeležili brzinu S-talasa. Indeksima 1 i 2 su obeleženi I i II ton. Napomenimo da programi L.FOR i R.FOR daju rešenja talasnih brojeva i tonova po redosledu rešavanja a da redosled tonova određujemo po već izloženom kriterijumu.

Promenu talasnog broja k u zavisnosti od a_0 najbolje možemo videti na slici 3-8. Jasno se sa slike vidi da je ispod prve "cut-off" frekvencije $a_{01} \cong 1.63$ talasni broj I tona i L i R-talasa imaginaran, tj. da je reč o "opadajućim talasima". Za II ton R-talasa takode je ispod "cut-off" frekvencije talasni broj imaginaran, tj. tek za frekvencije veće od "cut off" frekvencije $a_{02} \cong 3.4$ talasni brojevi su realni i dolazi do propagacije talasa.



Slika 3-8

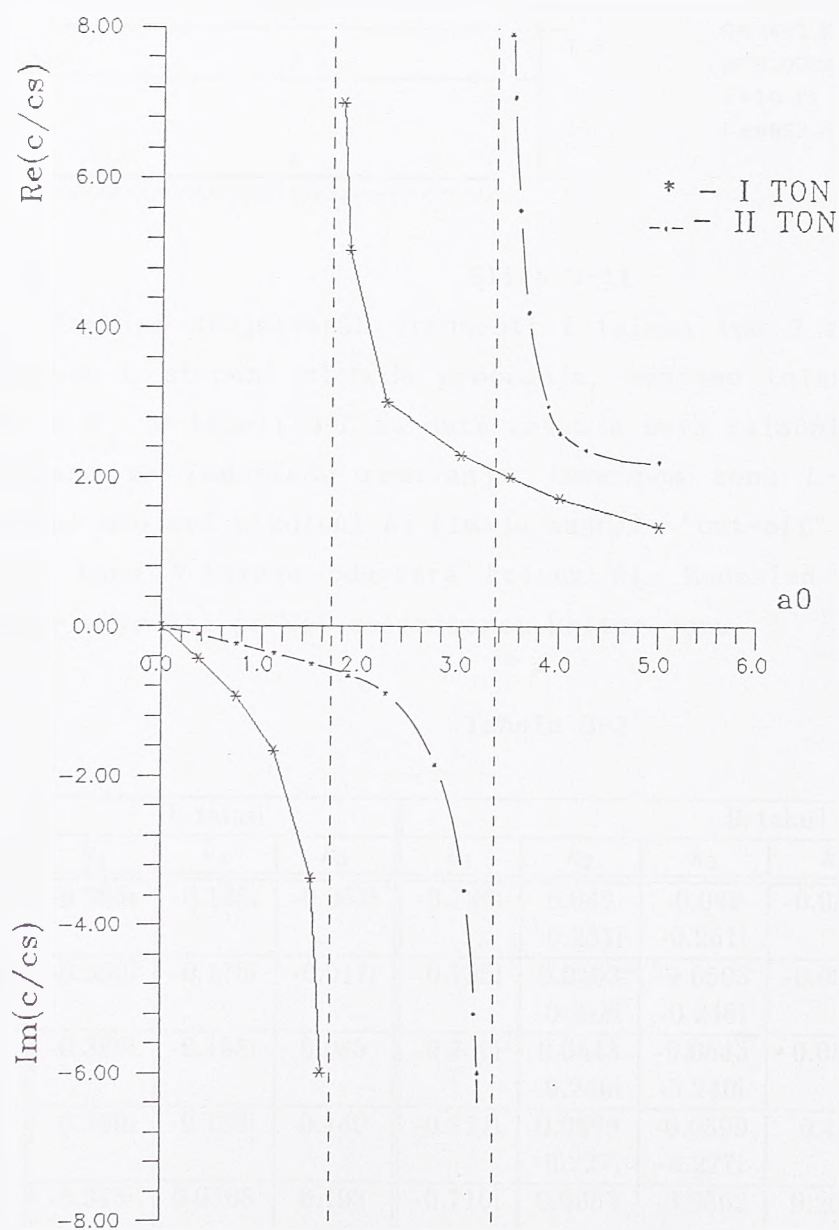
Istovremeno sa slike 3-9 vidimo da su za frekvencije ispod "cut-off" brzine tonova L -talasa imaginarne i menjaju se od vrednosti 0 za $\omega=0$ do beskonačne za $\omega=\omega_{cf}$. Za frekvencije iznad "cut-off" brzina L -talasa se menja od beskonačne za $\omega=\omega_{cf}$ i teži brzini S -talasa c_s kada ω teži beskonačnosti. Istu osobinu pokazuju i brzine I i II Rayleigh-evog tona, slika 3-10.



L - talasi

Slika 3-9

Sa slike se jasno vidi da I ton propagirajućih talasa ima manju brzinu od II tona, što znači da I ton propagira sporije i da duže ostaje u sistemu slojeva od viših tonova. To je još jedna potvrda da smo izveli pravilan zaključak da je ton sa najvećim talasnim brojem dominantan.

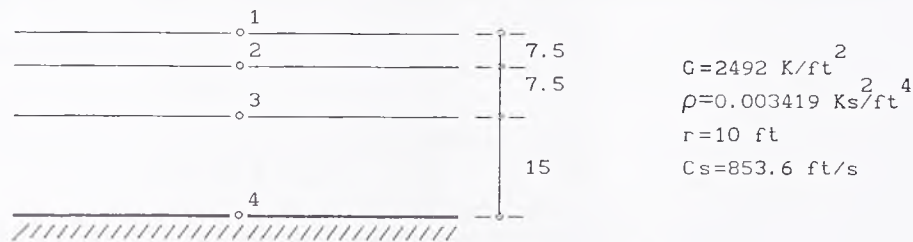


R - talasi

Slika 3-10

3.6.2. Primer 2

U Primeru 2 je analiziran problem svojstvenih vrednosti tri sloja, konstantnih karakteristika materijala, nad krutom bazom, slika 3-11.



Slika 3-11

Problem svojstvenih vrednosti L -talasa ima 3 stepena slobode, a R -talasa 6 stepeni slobode pomeranja, odnosno talasnih brojeva k_j i tonova X_j . U tabeli 3-2 su data rešenja svih talasnih brojeva k_j , L i R -talasa po redosledu rešavanja. Osnovnom tonu L -talasa odgovaraju talasni brojevi u koloni k_3 (imaju najnižu "cut-off" frekvenciju), dok prvom tonu R -talasa odgovara kolona k_4 . Redosled drugih tonova je moguće utvrditi po već definisanom kriterijumu.

Tabela 3-2

a_0	L-talasi			R-talasi					
	k_1	k_2	k_3	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6
0	-0.398i	-0.185i	-0.053i	-0.736i	0.049	-0.049	-0.0293i	0.0492	-0.0492
					-0.251i	-0.251i		-0.092i	-0.092i
0.5	-0.396i	-0.178i	-0.017i	-0.735i	0.0503	-0.0503	-0.0095i	0.0493	-0.0493
					-0.248i	-0.248i		-0.082i	-0.082i
1	-0.386i	-0.155i	0.085	-0.730i	0.0543	-0.0543	0.0537	0.0393	-0.0393
					-0.240i	-0.240i		-0.032i	-0.032i
1.5	-0.369i	-0.108i	0.140	-0.721i	0.0599	-0.0599	0.144	-0.045i	0.0771
					-0.227i	-0.227i			
2	-0.345i	0.0765	0.193	-0.710i	0.0663	-0.0663	0.2019	0.0356	0.1088
					-0.206i	-0.206i			
2.5	-0.311i	0.168	0.244	-0.694i	0.072	-0.072	0.2548	0.0823	0.1428
					-0.175i	-0.175i			
3	-0.263i	0.236	0.295	-0.675i	0.0746	-0.0746	0.306	0.118	0.1838
					-0.131i	-0.131i			
4	0.033	0.355	0.397	-0.625i	0.0105	0.160	0.407	0.182	0.3007
5	0.302	0.465	0.497	-0.554i	0.129	0.2335	0.506	0.2498	0.4235

3.6.3. Primer 3

U Primeru 3 su upoređeni svojstveni oblici prva tri tona R -talasa za BRK-model sa rezultatima rada [68]. BRK-model se sastoji od 20 horizontalno postavljenih slojeva tla, čije su karakteristike date u tabeli 3-3. Model obuhvata lokaciju seizmografa Berkelay i doseže do 134 km dubine.

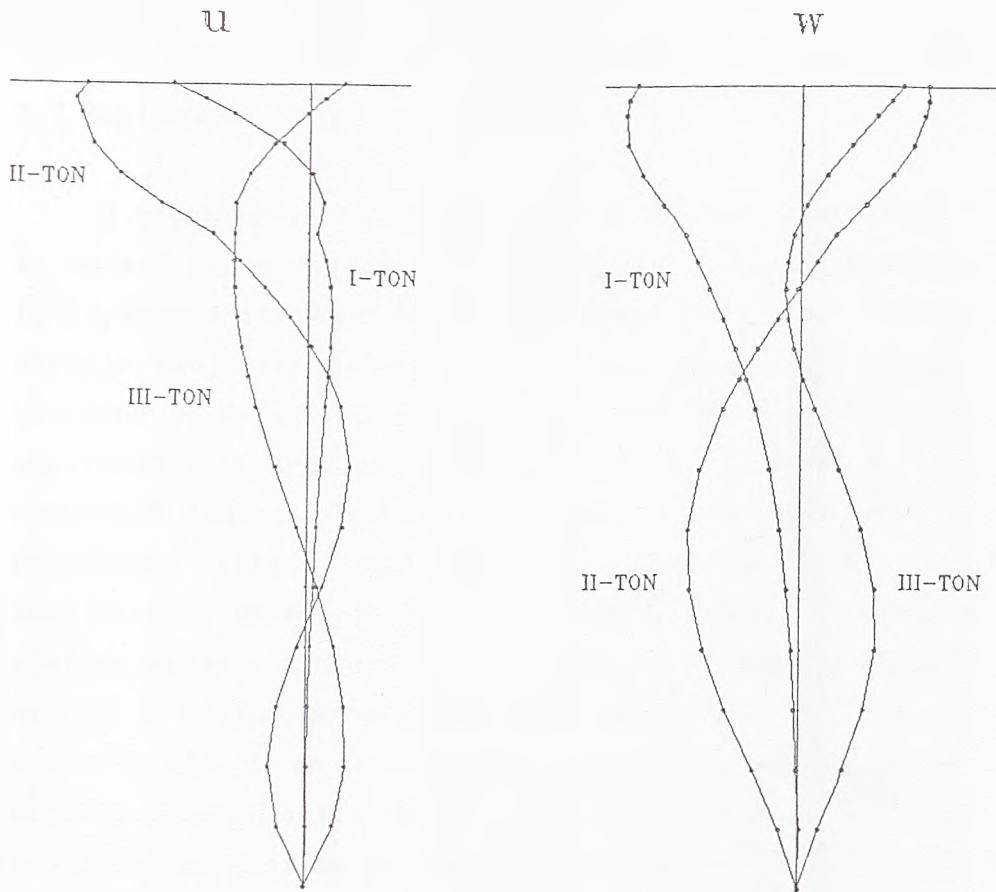
Tabela 3-3

i	h_i Km	ρ_i Kns ² /m ⁴	G_i Mn/m ²	ν_i
1	2.5	2.4	16224.0	0.30
2	2.5	2.4	16224.0	0.30
3	5.0	2.8	32368.0	0.30
4	5.0	2.8	32368.0	0.30
5	5.0	2.8	32368.0	0.30
6	5.0	2.8	32368.0	0.30
7	4.5	3.3	61017.0	0.30
8	4.5	3.3	61017.0	0.30
9	5.0	3.3	61017.0	0.30
10	5.0	3.3	61017.0	0.30
11	5.0	3.3	61017.0	0.30
12	5.0	3.3	61017.0	0.30
13	10.0	3.5	64715.0	0.30
14	10.0	3.5	64715.0	0.30
15	10.0	3.5	64715.0	0.30
16	10.0	3.5	64715.0	0.30
17	10.0	3.5	64715.0	0.30
18	10.0	3.5	64715.0	0.30
19	10.0	3.5	64715.0	0.30
20	10.0	3.5	64715.0	0.30

Da bi se dobili rezultati uporedivi sa rezultatima u [68], izvršeno je normiranje svojstvenih oblika u odnosu na:

$$[k] X^t A X [k] - X^t C X = I \quad (3.105)$$

gde je $[k]$ dijagonalna matrica talasnih brojeva, X modalna matrica a A i C matrice sistema slojeva. Napisana je sabrutina NORMB.FOR za normiranje i formiran glavni program BRK.FOR za određivanje prva 3 realna tona R -talasa (vidi DODATAK I).



Slika 3-12

Za zadati period $T=21.33 \text{ sec}$ ($\omega=0.2946 \text{ rad}$), rešen je problem svojstvenih vrednosti R -talasa. Od svih talasnih brojeva ($2 \times 19 = 38$) samo su 3 realna, tj. postoje samo 3 propagirajuća tona. Kako u radu [68] nije data vrednost *Poisson*-ovog broja, određeni su svojstveni oblici za $\nu = 0.45 \pm 0.20$. Za $\nu = 0.30$ dobijen je talasni broj I tona $k_1 = 0.817 \cdot 10^{-4}$. Odnos amplituda vertikalnog i horizontalnog pomeranja u tački 1 je najbliži onom iz [68] i iznosi 1.229 (1.19). Oblik prva 3 tona, dat na slici 3-12, je isti kao u referenci, sa karakterističnim skokom u tački 7 (*Mohorovičić discontinuity*).

Uočeno je da promena *Poisson*-ovog koeficijenta znatno utiče na oblik tonova, ali ne i na vrednost talasnog broja. To je očigledno posledica velike promene *Lame*-ove konstante λ sa promenom ν ($\lambda = G$ za $\nu = 0.25$ a $\lambda = 9G$ za $\nu = 0.45$). Stoga je bitno pravilno odrediti sve parametre tla koji ulaze u analizu prostiranja talasa.

3.7 Zaključak

U proračunima interakcije tla i objekta posmatramo deo tla koji se nalazi na relativno maloj dubini tj. blizu površine poluprostora. Iz predhodno izvedene definicije jasno je, da tu, naročito kada su u pitanju slojevite sredine, dominiraju površinski talasi. Osim toga, utvrđeno je da se $2/3$ energije kretanja prenosi R -talasima, kao i da amplitude R i L -talasa opadaju sporije sa porastom x od amplituda ravanskih talasa. Postoji još jedan razlog koji ističe u prvi plan površinske talase kod rešavanja interakcije tla i objekta pri zemljotresu. Naime, primena ravanskih talasa u određivanju odgovora sistema slojeva zahteva potpuno poznavanje njihove prirode, tj upadnih uglova i brzine prostiranja pri zadatoj frekvenciji. Mi, naravno, nismo u stanju da na zadatoj lokaciji tačno definišemo parametre mogućeg pomeranja tla, pa bi stoga svaka ozbiljnija studija zahtevala parametarsku analizu za različite tipove pobuđaja. To sa druge strane iziskuje isuviše vremena i novca, pri čemu polazne pretpostavke ne moraju uopšte biti pravilno određene.

Svi ti razlozi su naveli istraživače da u rešavanju problema interakcije koriste površinske talase. Može se reći da je prvi na tu ideju došao Lysmer još 1970., kada je iskoristio R -talase za rešenje odgovora tzv. "free field"-a. Posle toga se javio čitav niz radova koji su tretirali različite probleme interakcije primenom površinskih talasa. Neki od njih su navedeni u literaturi [17], [18], [34], [56], [65], [66], [67], [68], [98], [99].

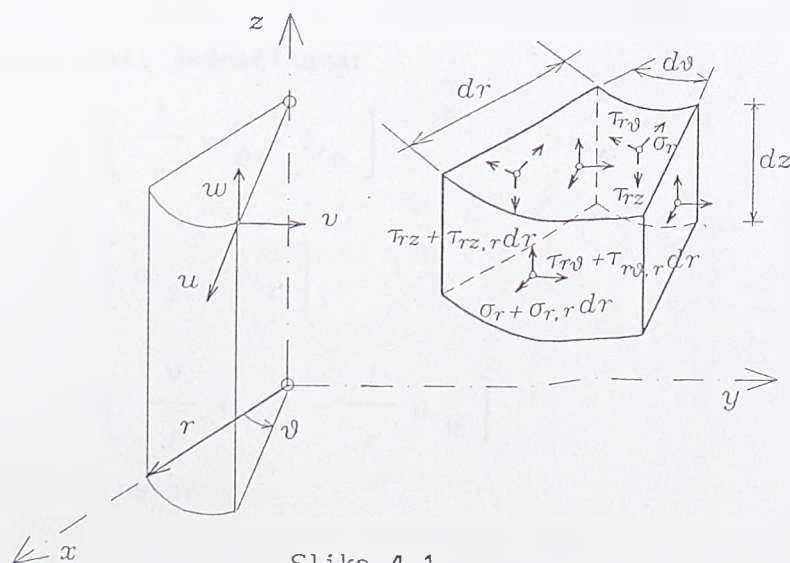
Detaljnu parametarsku studiju odgovora sistema slojeva na ravanske talase sa jedne i površinske talase sa druge strane dao je Wolf [129], polazeći od dinamičkih matrica krutosti sloja u tačnom obliku. Njegov rad je od značaja za sagledavanje prirode pojedinih talasa i njihovog uticaja na odgovor "free field"-a. Sa druge strane, primena tačnog oblika matrica krutosti komplikuje rešenje naročito u slučaju površinskih talasa, gde transcendentni problem svojstvenih vrednosti rešava tehnikom pretraživanja. Smatramo postupak isuviše komplikovanim za nekakvu primenu u praksi.

U svome radu smo, iz rešenja talasne jednačine, izveli odgovarajuće dinamičke matrice krutosti sloja, polazeći od ideje *Lysmer*-a, da se problem svojstvenih vrednosti talasa može rešiti primenom metode konačnih elemenata. Na osnovu toga smo napisali programe za računar i pokazali da oni daju rešenja koja odgovaraju rešenjima u literaturi.

GLAVA 4.

TALASNA JEDNAČINA U CILINDRIČNIM KOORDINATAMA

Da bi mogli da formulišemo dinamičku matricu krutosti za slučaj rotacione simetrije neophodno je formulisati talasne jednačine u cilindričnim koordinatama. Postupak definisanja talasnih jednačina je isti kao i u slučaju kartezijanskih koordinata opisanim u poglavlju 3., i može se naći u brojnoj literaturi, npr. *Wolf* [129]. Ovde ćemo ukratko izložiti osnovne veze u cilindričnim koordinatama, uslove ravnoteže beskonačno malog elementa i rešenja tako formulisanih talasnih jednačina.



Slika 4-1

Veze između pomeranja i deformacije u cilindričnim koordinatama glase:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= u, r \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} v, \theta \\
 \varepsilon_z &= w, z \\
 \gamma_{r\theta} &= \frac{u, \theta}{r} + v, r - \frac{v}{r} \\
 \gamma_{rz} &= u, z + w, r \\
 \gamma_{\theta z} &= v, z + \frac{1}{r} w, \theta
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Veze između deformacija i napona su date jednačinama:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu (\sigma_\theta + \sigma_z)] & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{G} \tau_{r\theta} \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \nu (\sigma_r + \sigma_z)] & \gamma_{rz} &= \frac{1}{G} \tau_{rz} \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_\theta + \sigma_r)] & \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{G} \tau_{\theta z}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Kubna dilatacija $e = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z$ je:

$$e = u, r + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} v, \theta + w, z \tag{4.3}$$

Vektori rotacija, dati jednačinama:

$$\begin{aligned}
 \Omega_r &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} w, \theta - v, z \right] \\
 \Omega_\theta &= \frac{1}{2} \left[u, z - w, r \right] \\
 \Omega_z &= \frac{1}{2} \left[\frac{v}{r} + v, r - \frac{1}{r} u, \theta \right]
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

moraju da zadovolje uslov:

$$\Omega_{r',r} + \frac{\Omega_r}{r} + \frac{1}{r} \Omega_{\theta',\theta} + \Omega_{z',z} = 0 \quad (4.5)$$

Veze napona i deformacija glase:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \lambda e + 2G\varepsilon_r & \tau_{r\theta} &= G\gamma_{r\theta} \\ \sigma_\theta &= \lambda e + 2G\varepsilon_\theta & \tau_{rz} &= G\gamma_{rz} \\ \sigma_z &= \lambda e + 2G\varepsilon_z & \tau_{\theta z} &= G\gamma_{\theta z} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Sada možemo prema slici 4-1 ispisati uslove ravnoteže beskonačno malog elementa u cilindričnim koordinatama:

$$\begin{aligned} \sigma_{r',r} + \frac{1}{r} \tau_{r\theta',\theta} + \tau_{rz',z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) &= -\rho\omega^2 u \\ \tau_{\theta r',r} + \frac{1}{r} \sigma_{\theta',\theta} + \tau_{\theta z',z} + \frac{2}{r} \tau_{\theta r} &= -\rho\omega^2 u \\ \tau_{zr',r} + \frac{1}{r} \tau_{z\theta',\theta} + \sigma_{z',z} + \frac{1}{r} \tau_{zr} &= -\rho\omega^2 u \end{aligned} \quad (4.7)$$

Ako u jednačine (4.7) unesemo izraze za napone (4.6) dobija se poznati oblik talasnih jednačina za cilindrične koordinate:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2G) e_{,r} + 2G \left[\Omega_{\theta',z} - \frac{1}{r} \Omega_{z',\theta} \right] &= -\rho\omega^2 u \\ \frac{(\lambda + 2G)}{r} e_{,\theta} + 2G \left[-\Omega_{r',z} + \Omega_{z',r} \right] &= -\rho\omega^2 v \\ (\lambda + 2G) e_{,z} + 2G \left[\frac{1}{r} \Omega_{r',\theta} - \Omega_{\theta',r} - \frac{1}{r} \Omega_\theta \right] &= -\rho\omega^2 w \end{aligned} \quad (4.8)$$

Do rešenja jednačina (4.8) dolazimo uvodeći potencijale pomeranja φ , ψ i χ , koji su funkcije od r, θ i z , a izabrani su tako da su pomeranja:

$$\begin{aligned} u &= \varphi_{,r} + \psi_{,rz} + \frac{1}{r} \chi_{,\theta} \\ v &= \frac{1}{r} \varphi_{,\theta} + \frac{1}{r} \psi_{,\theta z} - \chi_{,r} \\ w &= \varphi_{,z} - \psi_{,rr} - \frac{1}{r} \psi_{,r} - \frac{1}{r^2} \psi_{,\theta\theta} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Ako u jednačinama (4.3) i (4.4) pomeranja zamenimo izrazima (4.9), dobija se da je kubna dilatacija:

$$e = \nabla^2 \varphi \quad (4.10)$$

a vektori rotacija su:

$$\begin{aligned} \Omega_r &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{r} \nabla^2 \psi,_{\theta} + \chi,_{rz} \right] \\ \Omega_{\theta} &= \frac{1}{2} \left[\nabla^2 \psi,_{r} + \frac{1}{r} \chi,_{\theta z} \right] \\ \Omega_z &= \frac{1}{2} \left[-\nabla^2 \chi + \chi,_{zz} \right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Laplace-ov operator u ovom slučaju za proizvoljan skalar glasi:

$$\nabla^2 a = a,_{rr} + \frac{1}{r} a,_{,r} + \frac{1}{r^2} a,_{\theta\theta} + a,_{zz} \quad (4.12)$$

Ako umesto e i Ω u jednačinama (4.8) unesemo izraze (4.10) i (4.11) dobićemo tri nezavisne diferencijalne jednačine drugog reda po φ , ψ i χ :

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\omega^2}{c_p^2} \varphi \quad (4.13.1)$$

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\omega^2}{c_s^2} \psi \quad (4.13.2)$$

$$\nabla^2 \chi = -\frac{\omega^2}{c_s^2} \chi \quad (4.13.3)$$

Jednačine (4.13) predstavljaju talasne jednačine u kojima smo sa c_p obeležili brzinu P -talasa a sa c_s brzinu S -talasa. Do rešenja jednačina (4.13) dolazimo uvodeći pretpostavku da se promena amplituda pomeranja, kubne dilatacije, vektora rotacije, napona i potencijala u pravcu θ može prikazati u obliku *Fourier*-ovog reda:

$$u(r, z, \theta) = \sum_n \bar{u}_n^s \cos n\theta + \sum_n \bar{u}_n^a \sin n\theta \quad (4.14.1)$$

$$v(r, z, \theta) = -\sum_n \bar{v}_n^s \sin n\theta + \sum_n \bar{v}_n^a \cos n\theta \quad (4.14.2)$$

$$w(r, z, \theta) = \sum_n \bar{w}_n^s \cos n\theta + \sum_n \bar{w}_n^a \sin n\theta \quad (4.14.3)$$

$$e(r, z, \theta) = \sum_n \bar{e}_n^s \cos n\theta + \sum_n \bar{e}_n^a \sin n\theta \quad (4.15)$$

$$\Omega_r(r, z, \theta) = -\sum_n \bar{\Omega}_r^s \sin n\theta + \sum_n \bar{\Omega}_r^a \cos n\theta \quad (4.16.1)$$

$$\Omega_\theta(r, z, \theta) = \sum_n \bar{\Omega}_\theta^s \cos n\theta + \sum_n \bar{\Omega}_\theta^a \sin n\theta \quad (4.16.2)$$

$$\Omega_z(r, z, \theta) = -\sum_n \bar{\Omega}_z^s \sin n\theta + \sum_n \bar{\Omega}_z^a \cos n\theta \quad (4.16.3)$$

$$\varphi(r, z, \theta) = \sum_n \bar{\varphi}_n^s \cos n\theta + \sum_n \bar{\varphi}_n^a \sin n\theta \quad (4.17.1)$$

$$\psi(r, z, \theta) = \sum_n \bar{\psi}_n^s \cos n\theta + \sum_n \bar{\psi}_n^a \sin n\theta \quad (4.17.2)$$

$$\chi(r, z, \theta) = -\sum_n \bar{\chi}_n^s \sin n\theta + \sum_n \bar{\chi}_n^a \cos n\theta \quad (4.17.3)$$

U navedenim jednačinama smo koristili sledeće obeležavanje: sa \bar{a} -om smo označili amplitudu koja je funkcija koordinata r i z , oznaka s tj. a se odnosi na simetrične odnosno antisimetrične članove. Uvođenjem znaka minus kod veličina koje su antisimetrična funkcija od θ , dobili smo da sve jednačine imaju isti oblik i za simetrične i za antisimetrične komponente. Stoga ćemo u daljem tekstu izostaviti znak s tj. a podrazumevajući da jednačine važe u oba slučaja. Takođe ćemo izostaviti indeks n koji se odnosi na broj harmonika, i smatrati na dalje da sve jednačine važe za n -ti harmonik.

Na osnovu jednačina (4.3) i (4.15) možemo pisati da je amplituda n -tog harmonika kubne dilatacije jednaka:

$$\bar{e} = \bar{u},_r + \frac{\bar{u}}{r} - \frac{n}{r} \bar{v} + \bar{w} \quad (4.18)$$

a na osnovu jednačina (4.4) i (4.16) sledi da je:

$$\bar{\Omega}_r = \frac{n}{r} \bar{w} - \bar{v},_z \quad (4.19.1)$$

$$\bar{\Omega}_\theta = \bar{u},_z - \bar{w},_r \quad (4.19.2)$$

$$\bar{\Omega}_z = \frac{\bar{v}}{r} + \bar{v},_r - \frac{n}{r} \bar{u} \quad (4.19.3)$$

Iz jednačina (4.18), (4.19) i (4.8) dobijaju se talasne jednačine za n -ti harmonik:

$$(\lambda + 2G) \bar{e},_r + 2G \left[\bar{\Omega}_{\theta',z} + \frac{n}{r} \bar{\Omega}_{z',\theta} \right] = -\rho\omega^2 \bar{u} \quad (4.20.1)$$

$$\frac{n(\lambda + 2G)}{r} \bar{e} + 2G \left[-\bar{\Omega}_{r',z} + \bar{\Omega}_{z',r} \right] = -\rho\omega^2 \bar{v} \quad (4.20.2)$$

$$(\lambda + 2G) \bar{e},_z + 2G \left[\frac{n}{r} \bar{\Omega}_r - \bar{\Omega}_{\theta',r} - \frac{1}{r} \bar{\Omega}_\theta \right] = -\rho\omega^2 \bar{w} \quad (4.20.3)$$

iz kojih se uvođenjem veze između amplituda kubne dilatacije tj. vektora rotacije i amplituda potencijala, (jednačine (4.10) i (4.11)), dobijaju nezavisne talasne jednačine:

$$\nabla^2 \bar{\varphi} = - \frac{\omega^2}{c_p^2} \bar{\varphi} \quad (4.21.1)$$

$$\nabla^2 \bar{\psi} = - \frac{\omega^2}{c_s^2} \bar{\psi} \quad (4.21.2)$$

$$\nabla^2 \bar{\chi} = - \frac{\omega^2}{c_s^2} \bar{\chi} \quad (4.21.3)$$

Iz jednačina (4.21) nepoznate amplitude potencijala određujemo *Fourier*-ovom metodom razdvajanja promenljivih. Ako pretpostavimo da je:

$$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(r, z) = \varphi_r(z) \varphi_z(r) \quad (4.22)$$

iz jednačine (4.21.1) se dobija da je:

$$\varphi_r',_r r \varphi_z + \frac{1}{r} \varphi_r, r \varphi_z - \frac{n^2}{r^2} \varphi_r \varphi_z + \varphi_r \varphi_z',_{zz} = - \frac{\omega^2}{c_p^2} \varphi_r \varphi_z \quad (4.23)$$

odakle se razdvajanjem promenljivih dobija:

$$\frac{\varphi_r' r r'}{\varphi_r} + \frac{1}{r} \frac{\varphi_r' r'}{\varphi_r} - \frac{n^2}{r^2} = - \frac{\varphi_z' z z'}{\varphi_z} - \frac{\omega^2}{c_p^2} \quad (4.24)$$

Leve i desne strane jednačine (4.24) imaju iste vrednosti. Ako usvojimo da su one jednake konstanti $-k^2$, dobijamo dve nezavisne diferencijalne jednačine po φ_z i φ_r :

$$\varphi_z' z z' + \left(\frac{\omega^2}{c_p^2} - k^2 \right) \varphi_z = 0 \quad (4.25)$$

$$r^2 \varphi_r' r r' + r \varphi_r' r' + (k^2 r^2 - n^2) \varphi_r = 0 \quad (4.26)$$

Prva jednačina predstavlja diferencijalnu jednačinu drugog reda koja ima rešenje za φ_z :

$$\varphi_z = A e^{-i \sqrt{\frac{\omega^2}{c_p^2} - k^2} z} + B e^{i \sqrt{\frac{\omega^2}{c_p^2} - k^2} z} \quad (4.27)$$

Jednačina (4.27) predstavlja jednačinu propagacije talasa u pravcu pozitivne x -ose (član uz A) i u suprotnom pravcu (član uz B).

Druga grupa jednačina predstavlja *Bessel*-ovu diferencijalnu jednačinu čije je rešenje u obliku:

$$\varphi_r = C C_{1n}(kr) + D C_{2n}(kr) \quad (4.28)$$

gde su C i D konstante integracije a C_{1n} i C_{2n} jedne od cilindričnih funkcija (vidi DODATAK I). Za simuliranje talasnog kretanja koje opada sa porastom argumenta naročito su pogodne *Hankel*-ove funkcije *I* i *II* vrste, date redom:

$$H_n^{(1)}(kr) = J_n(kr) + i Y_n(kr) \quad (4.29.1)$$

$$H_n^{(2)}(kr) = J_n(kr) - i Y_n(kr) \quad (4.29.2)$$

gde su $J_n(kr)$ *Bessel*-ove funkcije *I* vrste reda n , a $Y_n(kr)$ *Bessel*-ova funkcija *II* vrste reda n , gde je n broj harmonika. Tada je rešenje za potencijal:

$$\varphi_r = C H_n^{(1)}(kr) + D H_n^{(2)}(kr) \quad (4.30)$$

Hankel-ovu funkciju *I* vrste $H_n^{(1)}(kr)$ koristimo za propagaciju talasa iz beskonačnosti ka izvoru i tada je:

$$\varphi_r = C H_n^{(1)}(kr) \quad (4.31.1)$$

a Hankel-ovu funkciju II vrste $H_n^{(2)}(kr)$ za propagaciju od centra ka beskonačnosti. U tom slučaju potencijal je:

$$\varphi_r = D H_n^{(2)}(kr) \quad (4.31.2)$$

Pošto su Hankel-ove funkcije singularne za $r=0$ ne mogu se koristiti kod problema koji sadrže koordinatni početak i tada koristimo Bessel-ove funkcije: $\varphi_r = C J_n(kr) + D Y_n(kr)$

Na isti način se dobijaju i rešenja za potencijale $\bar{\chi}$ i $\bar{\psi}$, tako da su rešenja jednačina (4.21) sledećeg oblika:

$$\bar{\varphi} = H_n(kr) \left[A_1 e^{-i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2 p^2} - k^2} z} + B_1 e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2 p^2} - k^2} z} \right] \quad (4.32.1)$$

$$\bar{\psi} = H_n(kr) \left[A_2 e^{-i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2 p^2} - k^2} z} + B_2 e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2 p^2} - k^2} z} \right] \quad (4.32.2)$$

$$\bar{\chi} = H_n(kr) \left[A_3 e^{-i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2 p^2} - k^2} z} + B_3 e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2 p^2} - k^2} z} \right] \quad (4.32.3)$$

Konstante $A_1, B_1, A_2, \dots, B_3$ su rezultat proizvoda konstanti A i C , tj B i C iz jednačina (4.27) i (4.28), a $H_n(kr)$ je odgovarajuća Hankel-ova funkcija.

Ako u izraze za pomeranja (4.9) uvrstimo amplitude potencijala (4.32) dobijaju se rešenja za amplitude komponenti pomeranja:

$$\begin{aligned} \bar{u} = & H_n(kr),_r \left(A_1 e^{-iks z} + B_1 e^{iks z} \right) + ikt H_n(kr),_r \left(-A_2 e^{-ikt z} + B_2 e^{ikt z} \right) - \\ & - \frac{n}{r} H_n(kr) \left(A_3 e^{-ikt z} + B_3 e^{ikt z} \right) \end{aligned} \quad (4.33.1)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} = & \frac{n}{r} H_n(kr) \left[\left(A_1 e^{-iks z} + B_1 e^{iks z} \right) + ikt \left(-A_2 e^{-ikt z} + B_2 e^{ikt z} \right) \right] \\ & - H_n(kr),_r \left(A_3 e^{-ikt z} + B_3 e^{ikt z} \right) \end{aligned} \quad (4.33.2)$$

$$\bar{w} = iks H_n(kr) \left(-A_1 e^{-iks z} + B_1 e^{iks z} \right) + k^2 H_n(kr) \left(A_2 e^{-ikt z} + B_2 e^{ikt z} \right) \quad (4.33.3)$$

U jednačinama (4.33) se javljaju poznate veličine: talasni broj k i

kosinusi upadnih uglova P i S talasa l_x i m_x :

$$k = \omega/c$$

$$s = \sqrt{1/l_x^2 - 1} \tag{4.34}$$

$$t = \sqrt{1/m_x^2 - 1}$$

Upoređivanjem jednačina (4.33) sa jednačinama pomeranja u kartezijskim koordinatama (3.28), vidimo da se uvođenjem relacija:

$$A_1 = l_x A_p \quad ikA_2 = m_x A_{SV} \quad -A_3 = A_{SH} \tag{4.35.1}$$

$$B_1 = l_x B_p \quad ikB_2 = m_x B_{SV} \quad -B_3 = B_{SH} \tag{4.35.2}$$

mogu uspostaviti veze između amplituda pomeranja u cilindričnim i kartezijskim koordinatama:

$$\bar{u} = H_n(kr),_r u(z) + \frac{n}{r} H_n(kr) v(z) \tag{4.36.1}$$

$$\bar{v} = \frac{n}{r} H_n(kr) u(z) + H_n(kr),_r v(z) \tag{4.36.2}$$

$$\bar{w} = k H_n(kr) i w(z) \tag{4.36.3}$$

gde su $u(z)$, $v(z)$ i $w(z)$ amplitude pomeranja u kartezijskim koordinatama, date jednačinama (3.28), $H_n(kr)$ odgovarajuća *Hankel*-ova funkcija reda n , $H_n(kr),_r$ izvod *Hankel*-ove funkcije po r a $i=\sqrt{-1}$. Napomenimo da veličini r u kartezijskim koordinatama odgovara veličina t u cilindričnim, tj. $r \Leftrightarrow t$. Kako su amplitude pomeranja funkcije samo od koordinate z jasno je da je promena amplituda u z pravcu ista u oba slučaja. Za razliku od ravanskih talasa, gde je varijacija u x -pravcu data funkcijom e^{-ikx} kod cilindričnih koordinata promena u pravcu radijusa je opisana odgovarajućim *Hankel*-ovim funkcijama reda n , argumenta kr .

U matričnom obliku jednačine (4.36) glase:

$$\begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = [H_n] \begin{pmatrix} u(z) \\ iw(z) \\ v(z) \end{pmatrix} \tag{4.37}$$

gde je H_n matrica transformacije, koja definiše promenu pomeranja u pravcu radijusa, za n -ti harmonik:

$$H_n = \begin{bmatrix} H_n(kr),_r & 0 & \frac{n}{r} H_n(kr) \\ 0 & k H_n(kr) & 0 \\ \frac{n}{r} H_n(kr) & 0 & H_n(kr),_r \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Ako vektor pomeranja i vektore odgovarajućih amplituda u cilindričnim koordinatama obeležimo sa $\bar{U}(r, z, \theta, t)$, $\bar{U}(r, z, \theta)$ i $\bar{U}(z)$ a vektor amplituda u kartezijanskim koordinatama sa $U(z)$:

$$\bar{U}(r, z, \theta, t) = \begin{Bmatrix} u(r, z, \theta, t) \\ w(r, z, \theta, t) \\ v(r, z, \theta, t) \end{Bmatrix} \quad \bar{U}(r, z, \theta) = \begin{Bmatrix} u(r, z, \theta,) \\ w(r, z, \theta,) \\ v(r, z, \theta,) \end{Bmatrix} \quad (4.39.1)$$

$$\bar{U}(z) = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix} \quad U(z) = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ v \end{Bmatrix} \quad (4.39.2)$$

možemo tada na osnovu jednačina (4.14) i (4.37) pisati da je:

$$\bar{U}(r, z, \theta, t) = \bar{U}(r, z, \theta) e^{i\omega t} \quad (4.40.1)$$

gde je:

$$\bar{U}(r, z, \theta) = \sum_n T_n H_n U(z) \quad (4.40.2)$$

U jednačini (4.40.2) smo sa T_n obeležili matricu transformacije u pravcu azimuta:

$$T_n = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix} & \\ & & \begin{pmatrix} -\sin n\theta \\ \cos n\theta \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Gornji članovi dijagonalnih elemenata se odnose na simetrične komponente (u, w) a donji na antimetričnu komponentu (v) pomeranja.

Iz jednačine (4.40.2) je jasna veza između cilindričnih i kartezijanskih koordinata, preko matrica transformacije H_n i T_n .

4.1. Dinamička matrica krutosti

Da bi formulisali dinamičku matricu krutosti u cilindričnim koordinatama potrebno je poznavati izraze za sile odnosno napone u cilindričnim koordinatama. Koristeći osnovne jednačine teorije elastičnosti, dobijaju se jednačine za napone koje su u potpunosti slične sa jednačinama za pomeranja (4.36):

$$\bar{\tau}_{zr} = H_n(kr),_r \tau_{zx}(z) + \frac{n}{r} H_n(kr) \tau_{zy}(z) \quad (4.42.1)$$

$$\bar{\tau}_{z\theta} = \frac{n}{r} H_n(kr) \tau_{zx}(z) + H_n(kr),_r \tau_{zy}(z) \quad (4.42.2)$$

$$\bar{\sigma}_z = k H_n(kr) i \sigma_z(z) \quad (4.42.3)$$

gde su: $\tau_{zx}(z)$, $\tau_{zy}(z)$ i $\sigma_z(z)$ amplitude napona u kartezijanskim koordinatama, date jednačinama (3.31), (3.67.1) i (3.67.2). U matričnom obliku ta veza glasi:

$$\begin{pmatrix} \bar{\tau}_{zr} \\ \bar{\sigma}_z \\ \bar{\tau}_{z\theta} \end{pmatrix} = [H_n] \begin{pmatrix} \tau_{zx}(z) \\ i\sigma_z(z) \\ \tau_{zy}(z) \end{pmatrix}$$

gde je H_n matrica *Hankel*-ovih funkcija (4.38).

Ako matricu krutosti parcionišemo u dve nezavisne matrice koje odgovaraju pomeranjima u pravcu azimuta (v) i pomeranjima u ravni (u, w), dobija se iz (4.43) i (3.36) tj. (3.72) da je:

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\tau}_{z\theta,1} \\ -\bar{\tau}_{z\theta,2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{SH}^{SL} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

$$\begin{pmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{R}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{R}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\tau}_{zr,1} \\ \bar{\sigma}_{z,1} \\ -\bar{\tau}_{zr,2} \\ -\bar{\sigma}_{z,2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} D_{P-SV}^{SL} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

gde su $\{\bar{Q}_1 \bar{Q}_2\}^t$ i $\{\bar{v}_1 \bar{v}_2\}^t$ vektori amplituda sila tj. pomeranja u pravcu azimuta, a $\{\bar{P}_1 \bar{R}_1 \bar{P}_2 \bar{R}_2\}^t$ i $\{\bar{u}_1 \bar{w}_1 \bar{u}_2 \bar{w}_2\}^t$ vektor amplituda sila i pomeranja u ravni u cilindričnim koordinatama, a D_{SH}^{SL} i D_{P-SV}^{SL} dinamičke matrice krutosti za talase u ravni date jednačinama (3.36) i (3.73). Iz uslova jednakosti raspodele pomeranja i napoma u pravcu z, dobili smo i da su dinamičke matrice krutosti u cilindričnim i kartezijskim koordinatama iste. Napominjemo da se u slučaju cilindričnih koordinata izgubio imaginarni član, tj. i uz komponentu sila odnosno pomeranja u pravcu z. Dinamička matrica krutosti je, kao što vidimo, nezavisna od Fourier-ovog člana n, tj. ima isti oblik za sve harmonike.

Iz predhodnog izlaganja sledi da se i dinamičke matrice krutosti za cilindrične koordinate mogu napisati u diskretnom obliku, pri čemu se dobija da su one jednake matricama za ravanske talase K_{SH}^{SL} i K_{P-SV}^{SL} date jednačinama (3.48) i (3.80). U vezama sila i pomeranja sloja (4.44) i (4.45) bi trebalo, u tom slučaju, pisati K_{SH}^{SL} umesto D_{SH}^{SL} , odnosno, K_{P-SV}^{SL} umesto D_{P-SV}^{SL} .

4.2. Problem svojstvenih vrednosti

Iz uslova da su dinamičke matrice krutosti iste za cilindrične i kartezijske koordinate, sledi da je i problem svojstvenih vrednosti isti. Određivanje svojstvenih vrednosti i oblika u cilindričnim koordinatama se svodi na rešavanje dva nezavisna problema svojstvenih vrednosti ravanskih talasa: 1) upravno na ravan (tačan oblik (3.42) tj. diskretan oblik (3.50) i 2) u ravni (tačan i diskretan (3.82) oblik).

GLAVA 5.

GRANIČNI USLOVI

Diskretizacija kontinuuma primenom MKE zahteva modeliranje beskonačnog prostora konačnim domenom, kome je potrebno zadati odgovarajuće granične uslove. Pod graničnim uslovima podrazumevamo vrednosti promenljivih, ili njihovih izvoda, na granici usvojenog modela, koje zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu problema. Postoje 3 tipa graničnih uslova: *Dirichlet-ov*, *Neumann-ov* i mešoviti granični uslova.

Dirichlet-ov granični uslov glasi:

$$u = g_1 \quad (5.1)$$

gde je u promenljiva, a g_1 vrednost promenljive na granici G_1 .

Neumann-ov granični uslov se može napisati u obliku:

$$a \frac{\partial u}{\partial n} + b \frac{\partial u}{\partial t} = g_2 \quad (5.2)$$

gde su a i b parametri a n i t su normala, odnosno tangenta na G_2 .

U mešovitom graničnom uslovu zadajemo na granici G_3 vrednosti i promenljive i njenih izvoda:

$$a \frac{\partial u}{\partial n} + b \frac{\partial u}{\partial t} + cu = g_3 \quad (5.3)$$

Poznavajući prirodu samog problema interakcije tla i objekta pri zemljotresu, kao i dinamičku jednačinu MKE, jasno je da postavljanje

granice u čvorovima mreže konačnih elemenata nije nimalo jednostavan zadatak. Ta granica mora, sa jedne strane, da zadovolji uslove po pomeranjima, a sa druge, da spreči refleksiju talasa u unutrašnju zonu, kako bi sprečila povećanje odgovora sistema (tzv. "box" efekat).

Sve granice, koje su se razvile u poslednjih 20 godina, u dinamičkoj analizi interakcije tla i objekta primenom MKE, možemo klasifikovati u četiri grupe:

- elementarna granica;
- viskozna granica;
- prenosna granica i
- beskonačni elementi

Elementarna (prosta) granica je najjednostavniji tip granice, kod koje se u čvorovima na granici mreže konačnih elemenata zadaju granični uslovi po pomeranjima. U praksi se obično razmatra najprostiji slučaj propagacije talasa kroz sistem horizontalno postavljenih slojeva, u vertikalnom ili horizontalnom pravcu. Na donjoj, horizontalnoj granici mreže, se usvaja da postoji osnovna stena i postavljaju oslonci koji sprečavaju pomeranja. Na vertikalnim bočnim granicama se zadaju oslonci koji omogućavaju pomeranja u pravcu propagacije talasa. Za slučaj vertikalne propagacije talasa, koja se obično uzima u obzir, to znači da se;

1. za *SH*-talase dozvoljava pomeranje u horizontalnom (*y*) pravcu;
2. za *SV*-talase je sprečava vertikalno pomeranje u ravni talasa, a dozvoljeno horizontalno pomeranje;
3. za *P*-talase je dozvoljava vertikalno a sprečava horizontalno pomeranje u ravni.

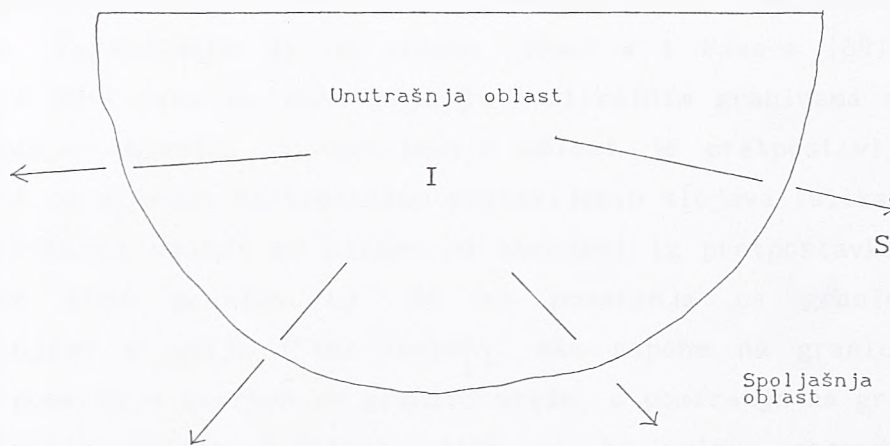


Slika 5-1

Za slučaj *SH*, *SV* ili *P*-talasa sa proizvoljnim upadnim uglovima, da bi sprečili pojavu refleksije talasa na granici, moramo granične uslove zadati ne samo po pomeranjima već i po silama.

Takođe, u opštem slučaju, kada se tlo ne može shvatiti kao sistem horizontalno postavljenih slojeva, niti se zemljotres može aproksimirati jednim tipom talasa, elementarna granica ne daje tačno rešenje. Ona se najčešće koristi i u takvim slučajevima, ali samo kao aproksimativno rešenje. Da li je ta aproksimacija dobra zavisi od tipa problema, veličine mreže, tj. njene udaljenosti od objekta i veličine histerezisnog prigušenja u tlu.

Viskozna granica predstavlja poboljšanje u odnosu na predhodnu. Granični uslovi se zadaju po silama. Formulirali su je *Lysmer* i *Kuhlemeyer* [67], polazeći od ideje da se jedan beskonačan prostor može aproksimirati konačnim, ako mu se zadaju specijalni viskozni granični uslovi.



Slika 5-2

Na slici 5-2 je prikazan beskonačan poluprostor u okviru koga je uočena unutrašnja oblast odvojena konveksnom granicom od spoljašnje oblasti. Osnovna pretpostavka je da je izvor poremećaja u unutrašnjoj zoni i da se propagacija energije odvija od unutrašnje oblasti ka spolja, pri čemu celokupna energija koja stiže na granicu prolazi u spoljašnju zonu. Uticaj spoljašnje oblasti na unutrašnju je jednak uticaju granice koja apsorbuje energiju, bez pojave refleksije. Razmatrajući različite mogućnosti za apsorpciju talasa, došli su do *Neumann*-ovih graničnih uslova u obliku:

$$\sigma = a \rho c_s \frac{\partial w}{\partial t} \quad (5.2.1)$$

$$\tau = b \rho c_s \frac{\partial u}{\partial t} \quad (5.2.2)$$

gde su σ i τ normalni i smičući napon, $\frac{\partial w}{\partial t}$ i $\frac{\partial u}{\partial t}$ brzine u

normalnom i tangencijalnom pravcu, c_s i c_p brzine S i P -talasa a a i b bezdimenzionalne konstante. Navedeni granični uslovi predstavljaju infinitezimalne prigušivače u pravcu normale i tangente na granici.

Primenjujući pretpostavku na S i P -talase ponaosob, autori su pokazali da se za $a=b=1$ dobijaju odlični rezultati u poređenju sa teorijskim rešenjima. Tako definisana viskozna granica, postavljena na određenoj udaljenosti od objekta predstavlja savršen apsorber elastičnih talasa. Pošto ne zavisi od frekvencije može se koristiti i za harmonijske i za neharmonijske talase, tj. i u vremenskom i u frekventnom domenu.

U slučaju R -talasa, može se pokazati da su parametri a i b funkcija koordinate z .

Konzistentna (consistent boundary) ili prenosna granica (transmitting boundary) je takođe granica na kojoj su zadati uslovi po silama. Formulirana je od strane *Lysmer*-a i *Waas*-a [69] za slučaj dejstva SH -talasa na zonu koja je vertikalnim granicama odvojena od spoljašnje oblasti. Za spoljašnju oblast je pretpostavljeno da se sastoji od sistema horizontalno postavljenih slojeva (slika 5-4).

Granični uslovi po silama su određeni iz pretpostavke da talasi prolaze kroz granicu tj. da su pomeranja na granici jednaka pomeranjima u polju ("far-field"). Ako napone na granici izrazimo preko pomeranja čvorova na granici mreže, a pomeranja na granici preko svojstvenih oblika L -talasa, lako se iz uslova raspodele napona određuju sile u čvorovima mreže:

$$P_b(\omega) = K_b(\omega) U_b(\omega) \quad (5.3)$$

gde je P_b vektor sila na granici, U_b vektor pomeranja a K_b matrica krutosti za čvorove na granici koja sadrži granične uslove. Vektor sila na granici je funkcija frekvencije ω , što govori da je konzistentnu granicu moguće koristiti samo u frekventnom domenu. Time je njena primena ograničena na linearnu dinamičku analizu, i ekvivalentnu linearnu metodu.

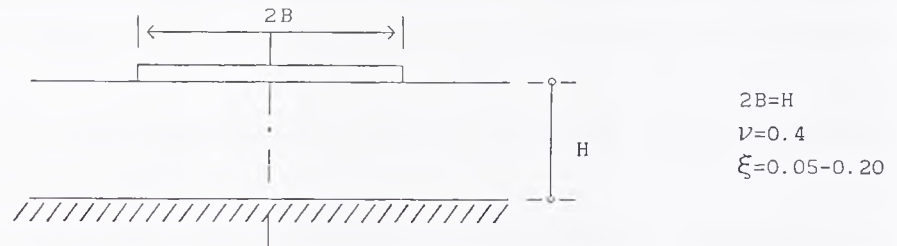
Opsežna parametarska analiza [69] je pokazala da granica daje odlične rezultate i za trakasti i za osnosimetrični temelj, čak i kad se postavi neposredno uz temelj posmatranog objekta.

U radu [99] *Roesset* i *Ettoney* su ispitivali i poredili uticaj elementarne, viskozne i konzistentne granice, na rešavanje dinamičkog problema interakcije tla i objekta primenom MKE. Pri tome

su razmatrali sva tri aspekta interakcije: amplifikaciju, impedanciju i odgovor trakastog temelja fundiranog na površini sloja debljine H (slika 5-3). Zaključci su sledeći:

1. Za linearnu analizu, konzistentna granica postavljena neposredno uz ivicu temelja, daje rezultate koji se odlično slažu sa teorijskim rešenjem;

2. Elementarna i viskozna granica daju zadovoljavajuće rezultate tek pošto se postave na dovoljnom rastojanju od ivice temelja. Rastojanje na koje treba postaviti granicu od ivice temelja, zavisi od veličine histerezisnog prigušenja u tlu.



Slika 5-3

Za srednje vrednosti prigušenja kod "steady state" harmonijskih vibracija rastojanje granice od ivice fundamenta mora biti veliko, reda $(10-20)B$ tj. $(5-10)H$. Za velike vrednosti prigušenja, može se smanjiti na $5B$.

Poseban slučaj granice, koja se zapravo zasniva na iskustvima predhodno pokazanih je *Smith*-ova granica. Polazeći od ideje da potpuno eliminiše refleksiju talasa u ravni od postavljene granice, *Smith* je uvodeći i *Dirichlet*-ov i *Neumann*-ov granični uslov definisao granicu koja važi u vremenskom domenu. Pošto koristi princip superpozicije, važi samo za linearnu analizu i ne može se koristiti u nelinearnoj analizi primenom MKE. Detalje postupka i jednačine je moguće naći u radovima [102] i [134].

Beskonačni elementi predstavljaju zapravo poseban tip granice koja "propušta" elastične talase. Prvi, *Lagrange*-ov periodični beskonačni element su formulisali *Bettes* i *Zienkiewicz* [11], a detalje o elementu i kompletnu bibliografiju je moguće naći u radovima *Bettes P.* i *J. Bettes* [12] i [13].

Chow i *Smith* su u radu [22] izložili *Serendipity* periodični beskonačni element. Element je formulisani u frekventnom domenu. Da bi

se došlo do rešenja potrebno je proceniti dominantni tipa talasa u pravcu element, što predstavlja znatnu teškoću. U radu [23] su zato formulisali jednostavan beskonačni element za slojevit poluprostor gde taj zahtev nije potreban.

Zhao i dr. [133] su definisali frekventno nezavisan konačni element, koji se zasniva na pretpostavci da se za dominantnu frekvenciju može usvojiti svojstvena frekvencija objekta. To omogućava upotrebu elementa u analizama u vremenskom domenu, a samim tim i primenu u nelinearnoj dinamičkoj analizi.

Svi beskonačni elementi u potpunosti zadržavaju logiku konačnih elemenata i jednostavno se uklapaju u mrežu. Razlikuju se od drugih konačnih elemenata po interpolacionom polinomu koji sadrži dva dodatna člana:

- prvi član, koji aproksimira talasno kretanje i zadovoljava Sommerfeld-ov radijacijski uslov;

- drugi član, koji predstavlja funkciju atenuacije i omogućava da se za veliko rastojanje od granice dobiju pomeranja jednaka nuli.

Interpolacioni polinom možemo prikazati u obliku:

$$N_j^*(\xi, \eta) = N_j(\xi, \eta) e^{-ik\xi} e^{(\xi_1 - \xi_2)/L} \quad (5.4)$$

gde je $N_j(\xi, \eta)$ - standardni interpolacioni polinom, k -talasni broj a L - dužina skale.

Iako je formulacija jednostavna postupak numeričkog sračunavanja integrala u kome figuriše beskonačna dimenzija nije nimalo jednostavan. Osim toga beskonačni elementi daju dobre rezultate u poređenju sa prenosnom granicom, tek kad ih postavimo na znatnoj udaljenosti od objekta [23].

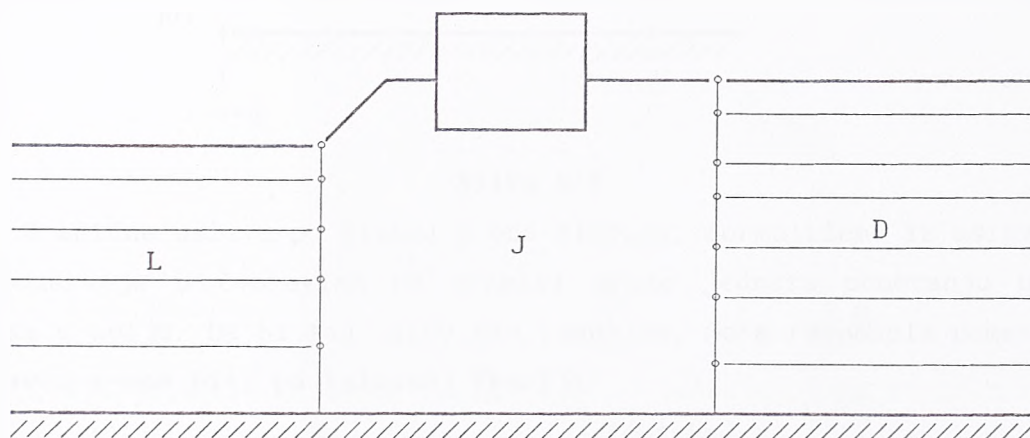
Imajući sve ovo u vidu, došli smo do zaključka da je konzistentna granica ona koja daje najbolje rezultate, sa jedne strane, uz najmanji utrošak vremena rada računara, sa druge. Postavljanjem konzistentne granice neposredno uz fundament svodimo mrežu konačnih elemenata na najmanju moguću meru. Pošto je formulisana u frekventnom domenu pogodna je u metodi podstruktura za određivanje funkcija impedancije, tj. dinamičkih karakteristika temelja: krutosti i prigušenja.

U sledećem delu rada ćemo, na osnovu Lysmer-ove ideje (iza koje je sledilo prilično nespretno izvođenje granice za SH-talase), izvesti konzistentnu granicu za L i R-talase u kartezijanskim koordinatama i

konzistentnu granicu u cilindričnim koordinatama za rotaciono simetrične uslove oslanjanja. Pri tome ćemo primeniti originalan postupak koji sledi neposredno iz predhodno izložene talasne teorije.

5.1 Konzistentna granica u kartezijanskim koordinatama

Formulacija konzistentna granice za prostorne, odnosno površinske talase u kartezijanskim koordinatama se sastoji od dva nezavisna problema: prvi je jednodimenzionalni problem propagacije SH tj. L -talasa, a drugi, ravanski problem propagacije P i SV , tj. R -talasa.



Slika 5-4

U oba slučaja važe polazne pretpostavke:

1) granica je vertikalna, postavljena između centralne zone tzv. "jezgra" J , i polubeskonačnih zona L i D , levo i desno od jezgra (slika 5-4);

2) jezgro predstavlja zonu ispod objekta, nepravilnog oblika i karakteristika tla, koje može imati i nelinearne osobine;

3) zone L i D se sastoje od sistema horizontalno postavljenih slojeva, konstantnih karakteristika materijala unutar sloja;

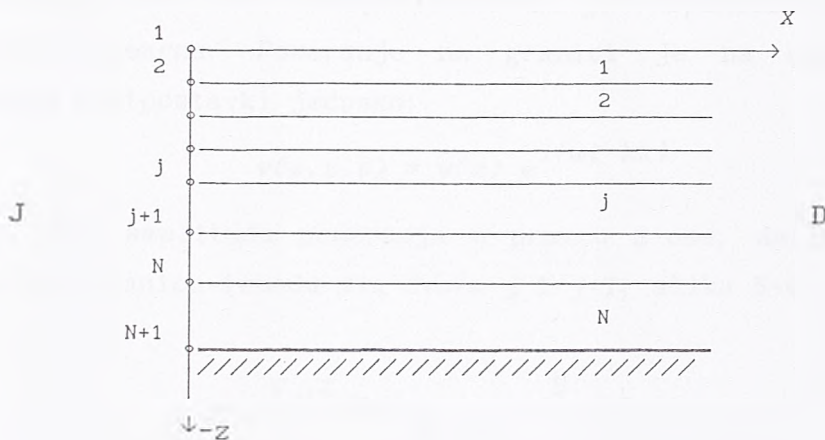
4) baza modela je kruta, tj. pomeranja čvorova baze su jednaka nuli;

5) izvor talasa se nalazi u unutrašnjoj zoni (jezgru), i talasi propagiraju od unutrašnosti ka spolja;

6) granica propušta talase, pa su pomeranja na granici jednaka

pomeranjima u polju (far-field).

U MKE jezgro delimo na konačan broj elemenata. Pomeranja unutar elemenata su data u funkciji pomeranja čvorova, koja predstavljaju osnovne nepoznate veličine u dinamičkoj jednačini problema. Na granici mreže konačnih elemenata i zona L i D čvorove biramo tako da se poklapaju sa slojevima tla (slika 5-5).



Slika 5-5

Granične uslove po silama u oba slučaja, formulišemo iz uslova da su pomeranje u čvorovima na granici mreže jednaka pomeranju usled talasa u polju. Da bi taj uslov bio ispunjen, mora raspodela pomeranja u pravcu x-ose biti po talasnoj teoriji:

$$u(x, z, t) = u(z) e^{i(\omega t - kx)} \quad (5.5)$$

gde je k talasni broj, ω frekvencija talasa, a $u(z)$ amplituda talasa.

Sa druge strane, raspodela pomeranja u pravcu z-ose na granici jednaka je raspodeli definisanoj izborom konačnih elemenata jezgra. Da bi pretpostavka o raspodeli pomeranja u pravcu z-ose bila zadovoljena, potrebno je da veličina elementa bude dovoljno mala u odnosu na talasnu dužinu. Po *Lysmer-u* minimalna visina elementa je $h_{min} = \lambda/6$, gde je λ talasna dužina.

Sa ovako usvojenom raspodelom pomeranja, moguće je, za usvojeni tip talasa, odrediti napone na granici. Poznavajući raspodelu napona između čvorova na granici, lako možemo odrediti sile u čvorovima. Tako određene sile predstavljaju *Neumann-ov* granični uslov u tačkama na granici "jezgra" sa zonama L i D.

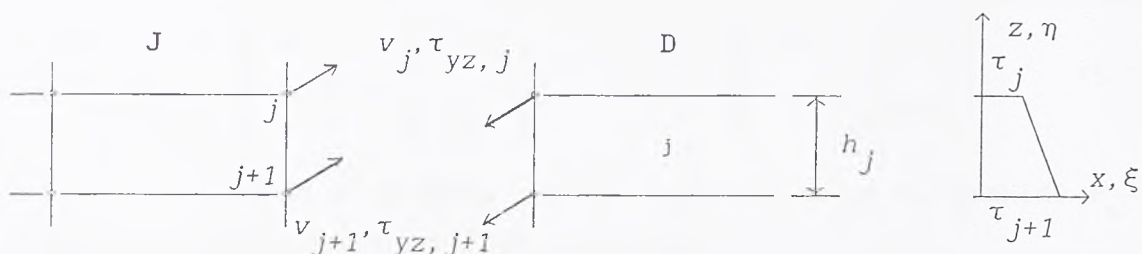
U narednom delu ćemo izvesti izraze za konzistentnu granicu za talase upravne na ravan (*L*-talasi) i talase u ravni (*R*-talasi).

5.1.1. Konzistentna granica za talase upravne na ravan

Posmatrajmo sistem u ravni (slika 5-4) izložen dejstvu talasa upravnih na ravan. Jezgro sistema je izdeljeno na kvadrilateralne konačne elemente, sa jednim stepenom slobode pomeranja u čvoru u pravcu y -ose $v(x, z, t)$. Predpostavimo da je raspodela pomeranja unutar elementa linearna. Pomeranje na granici je na osnovu predhodno izloženih pretpostavki jednako:

$$v(x, z, t) = v(z) e^{i(\omega t - kx)} \quad (5.6)$$

gde je $v(z)$ amplituda pomeranja u pravcu z -ose, definisana po MKE. Uočimo deo granice između dva čvora j i $j+1$, slika 5-6.



Slika 5-6

Pomeranje $v(z)$ unutar sloja je za pretpostavljenu linearnu raspodelu pomeranja jednako:

$$v(z) = \eta v_j + (1-\eta) v_{j+1} \quad (5.7)$$

gde su v_j i v_{j+1} pomeranja čvorova j i $j+1$, a η bezdimenzionalna koordinata. Na vertikalnoj granici postoji samo napon :

$$\tau_{yz}(x, z, t) = G \frac{\partial v(x, z, t)}{\partial x} \quad (5.8)$$

Zamenom jednačine (5.6), u (5.8) dobija se da je napon na granici:

$$\tau_{yz}(x, z, t) = -ik G v(z) e^{i\omega t} \quad (5.9)$$

Amplitude napona u čvorovima j i $j+1$ na granici elementa su:

$$\tau_j = -ik G_j v_j \quad (5.10.1)$$

$$\tau_{j+1} = -ik G_j v_{j+1} \quad (5.10.2)$$

Za linearnu raspodelu napona na granici dobija se da je

ekvivalentno čvorno opterećenje u čvorovima j i $j+1$:

$$T_j = -ik \frac{G_j h_j}{6} (2 v_j + v_{j+1}) \quad (5.10.1)$$

$$T_{j+1} = -ik \frac{G_j h_j}{6} (v_j + 2 v_{j+1}) \quad (5.10.2)$$

U matričnom obliku, vektor amplituda sila na krajevima sloja j glasi:

$$P = -ik A v \quad (5.11)$$

gde je P vektor sila, v vektor amplituda pomeranja na granici sloja, k talasni broj, a A matrica sloja (jednaka matrici A iz poglavlja 3.4.1.2, jednačina (3.48)):

$$P = \begin{Bmatrix} T_j \\ T_{j+1} \end{Bmatrix} \quad v = \begin{Bmatrix} v_j \\ v_{j+1} \end{Bmatrix} \quad A = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2G & G \\ G & 2G \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Za sistem od N slojeva, vektor amplituda sila na granici P_b se dobija na način uobičajen u MKE, superpozicijom:

$$P_b = -ik A v_b \quad (5.13)$$

gde je v_b vektor amplituda pomeranja čvorova na granici, a A matrica sistema slojeva. Za slučaj propagacije talasa kroz horizontalno uslojen prostor, vektor amplituda pomeranja u polju je jednak zbiru svojstvenih oblika pojedinih tonova (poglavljje 3.4.1.2):

$$v(z) = \sum_{j=1}^N \gamma_j X_j \quad (5.15)$$

Iz uslova jednakosti pomeranja na granici i u polju, sledi da je $v_b = v(z)$, pa je amplituda vektora sila na granici:

$$P_b = \sum_{j=1}^N -ik_j A \gamma_j X_j \quad (5.16)$$

Silu na granici P_b možemo shvatiti kao zbir sila usled pojedinih tonova propagacije. U matričnom obliku, jednačina (5.16) glasi:

$$P_b = -i A [k] X \gamma \quad (5.17)$$

gde je $[k]$ dijagonalna matrica talasnih brojeva, X modalna matrica sistema slojeva a $\gamma^t = \{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots \gamma_N\}$ vektor modalnih faktora

participacije. Iz uslova jednakosti pomeranja na granici $v(z)=v_b$, možemo odrediti vektor nepoznatih faktora participacije γ :

$$\gamma = X^{-1} v_b \quad (5.18)$$

Zamenom (5.18) u (5.17) dobija se da je vektor amplituda sila na granici:

$$P_b = -K_b v_b \quad (5.19)$$

gde smo sa K_b obeležili matricu krutosti na granici:

$$K_b = i A X [k] X^{-1} \quad (5.20)$$

Matrica K_b je kvadratna, simetrična matrica reda $N \times N$, gde je N broj slojeva sistema. Elementi matrice su generalno posmatrano imaginarni brojevi, što znači da predstavljaju sile viskoznog prigušenja (sile proporcionalne brzini). Zavise od frekvencije ω .

Jednačina (5.19) predstavlja izraz za silu na granici između jezgra i desne zone D. Kako talasi propagiraju od J ka D u pravcu pozitivne x-ose, to pri rešavanju svojstvenih vrednosti, od $2N$ mogućih talasnih drojeva biramo one za koje je $Re(k) > 0$ tj. $Im(k) < 0$.

Ista relacija ostaje da važi i za granicu između jezgra i zone L. Pošto je reč o propagaciji u pravcu negativne x-ose svojstveni oblici ostaju isti, dok talasni brojevi menjaju znak. Kako i napon na granici L menja znak, zbog negativne orijentacije normale, to sila P_b ostaje ista.

U dinamičku jednačinu MKE sistema uticaj viskoznih sila na granici se uvodi njihovim jednostavnim dodavanjem kao spoljašnjeg dinamičkog opterećenja. Kako su sile funkcije frekvencije ω , to dinamičku jednačinu moramo formulisati u frekventnom domenu:

$$(K - \omega^2 M) v = Q + P_L + P_D \quad (5.21)$$

gde smo sa K i M obeležili matricu krutosti i mase konačnih elemenata jezgra, v vektor pomeranja čvorova, Q vektor sila zadatog dinamičkog opterećenja a P_L i P_D vektore sila na granicama L i D.

Ako sa K_d obeležimo dinamičku matricu krutosti:

$$K_d = K - \omega^2 M + K_L + K_D \quad (5.22)$$

gde su K_L i K_D dinamičke matrice krutosti na granicama L i D prema jednačini (5.20), proširene nultim članovima tako da odgovaraju

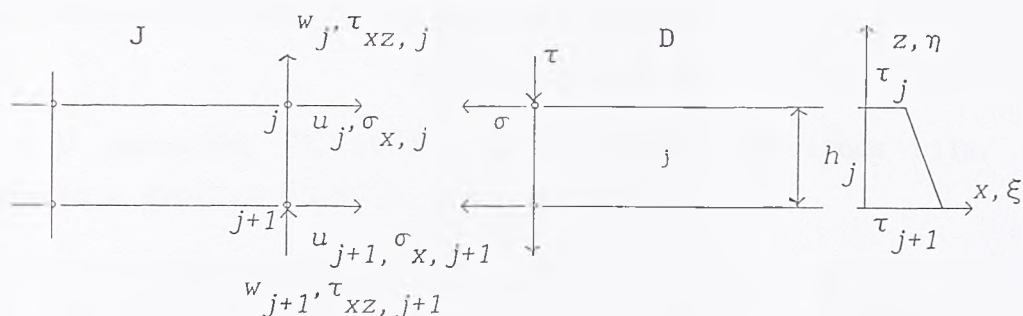
matrici krutosti sistema, tada dinamička jednačina dobija uobičajen oblik:

$$K_d \mathbf{v} = Q \quad (5.23)$$

Jednačina (5.23) predstavlja sistem linearnih jednačina sa kompleksnim koeficijentima, koji treba rešavati za zadatu frekvenciju ω .

5.1.2. Konzistentna granica za talase u ravni

Postupak izložen u predhodnom odeljku biće primenjen za slučaj talasa u ravni. Predpostavimo da je jezgro izdeljeno na kvadrilateralne elemente koji imaju po 2 stepena slobode pomeranja u čvoru u i w .



Slika 5-7

Na osnovu predhodno izloženog, komponente pomeranja na granici D (slika 5-7) su:

$$u(x, z, t) = u(z) e^{i(\omega t - kx)} \quad (5.24.1)$$

$$w(x, z, t) = w(z) e^{i(\omega t - kx)} \quad (5.24.2)$$

Amplitude komponentata pomeranja na granici se u MKE mogu izraziti preko amplituda pomeranja čvorova:

$$u(z) = \eta u_j + (1-\eta) u_{j+1} \quad (5.25.1)$$

$$w(z) = \eta w_j + (1-\eta) w_{j+1} \quad (5.25.2)$$

Na granici mreže konačnih elemenata, javljaju se naponi σ_x i τ_{xz} . Polazeći od veze napona i deformacija za ravno stanje deformacija:

$$\sigma_x = \lambda(\epsilon_x + \epsilon_z) + 2G\epsilon_x \quad (5.26.1)$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} \quad (5.26.2)$$

i veza između pomeranja i deformacija:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5.27)$$

uzimajući u obzir jednačine (5.25.), dobijaju se veze između napona i pomeranja u čvorovima na granici u matricnom obliku:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x,j} \\ \tau_{zx,j} \\ \sigma_{x,j+1} \\ \tau_{zx,j+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -ik(\lambda+2G) & \lambda/h & 0 & -\lambda/h \\ G/h & -ikG & -G/h & 0 \\ 0 & \lambda/h & -ik(\lambda+2G) & -\lambda/h \\ G/h & 0 & -G/h & -ikG \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_j \\ w_j \\ u_{j+1} \\ w_{j+1} \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

Za pretpostavljenu linearnu raspodelu, iz napona se dobija vektor amplituda ekvivalentnog čvornog opterećenja:

$$P = -(ik A + D) u \quad (5.29)$$

U jednačini (5.29) P i u su vektori amplituda sila, odnosno pomeranja čvorova sloja j , a A i D matrice sloja:

$$P = \begin{pmatrix} P_{x,j} \\ P_{z,j} \\ P_{x,j+1} \\ P_{z,j+1} \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_j \\ w_j \\ u_{j+1} \\ w_{j+1} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

$$A = ik \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2(\lambda+2G) & 0 & \lambda+2G & 0 \\ 0 & 2G & 0 & G \\ \lambda+2G & 0 & 2(\lambda+2G) & 0 \\ 0 & G & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad (5.30.1)$$

$$D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 & \lambda \\ -G & 0 & G & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \lambda \\ -G & 0 & G & 0 \end{bmatrix} \quad (5.30.2)$$

A i D su matrice sa konstantnim koeficijentima, koji zavise od konstanti materijala i debljine sloja. Elementi matrica su sile usled odgovarajućih pomeranja čvorova. Prvi član u jednačini (5.29) predstavlja viskoznu silu kojom zona D deluje na jezgro, dok drugi član predstavlja elastičnu komponentu sile na granici.

Vektor sila na granici J - D , P_b , se dobija sabiranjem sila u čvorovima pojedinih slojeva (elemenata) na način uobičajen u MKE:

$$P_b = -(ik A + D) u_b \quad (5.31)$$

gde smo sa A i D obeležili matrice sistema slojeva, a sa u_b vektor pomeranja čvorova na granici.

Ako vektor amplituda pomeranja u polju, prikažemo preko modalnih vrednosti, tada je:

$$u = \sum_{j=1}^{2N} \gamma_j X_j = X \gamma \quad (5.32)$$

gde je X modalna matrica R -talasa, a $\gamma^t = \{\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2N}\}$ vektor faktora participacije pojedinih tonova. Vektor γ određujemo iz uslova jednakosti pomeranja u polju i na granici ($u = u_b$), pa je:

$$\gamma = X^{-1} u_b \quad (5.33)$$

Na osnovu jednačina (5.31), (5.32) i (5.33) dobija se da je sila na granici:

$$P_b = -K_b u_b \quad (5.34)$$

gde je K_b matrica krutosti na granici:

$$K_b = i A X [k] X^{-1} + D \quad (5.35)$$

Problem svojstvenih vrednosti R -talasa formulisan je tako da su članovi uz koordinatu z pomnoženi sa imaginarnom jedinicom i . Da bi mogli da koristimo postojeće rešenje, moramo preformulisati jednačinu (5.34), uvođenjem i uz komponentu sila i pomeranja u pravcu z . Tada se dobija da je:

$$P_b^* = -i(k A + D^*) u_b^* \quad (5.36)$$

gde su vektori sila i pomeranja na granici sistema P_b^* i u_b^* dobijeni na način uobičajen u MKE iz vektora sila i pomeranja sloja:

$$P^* = \begin{Bmatrix} P_{x,j} \\ iP_{z,j} \\ P_{x,j+1} \\ iP_{z,j+1} \end{Bmatrix} \quad u^* = \begin{Bmatrix} u_j \\ iw_j \\ u_{j+1} \\ iw_{j+1} \end{Bmatrix} \quad (5.37)$$

a matrica D iz matrice D^* sloja:

$$D^* = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & \lambda \\ -G & 0 & G & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \lambda \\ -G & 0 & G & 0 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Ako silu izrazimo preko matrice krutosti na granici, dobija se:

$$P_b^* = -K_b^* u_b^* \quad (5.39)$$

gde je K^* :

$$K_b^* = i (A X [k] X^{-1} + D^*) \quad (5.40)$$

Poznajući sile na granici možemo formulirati dinamičku jednačinu sistema konačnih elemenata jezgra u frekventnom domenu:

$$(K - \omega^2 M) u = Q + P_L + P_D \quad (5.41)$$

Ako u jednačini sile na granici izrazimo preko matrica krutosti na granici (5.34), tj. (5.39) onda se dobija dinamička jednačina u obliku:

$$K_d v = Q \quad (5.42)$$

gde je:

$$K_d = K - \omega^2 M + K_L + K_D \quad (5.43)$$

Sa K_L i K_D smo obeležili matrice krutosti na granici L i D koje se dobijaju proširivanjem matrica, datih jednačinama (5.35) tj. (5.40)

nultim elementima, do reda matrice krutosti jezgra. Matrice krutosti na granici zavise od talasnog broja, modalne matrice i matrica sistema slojeva A i D.

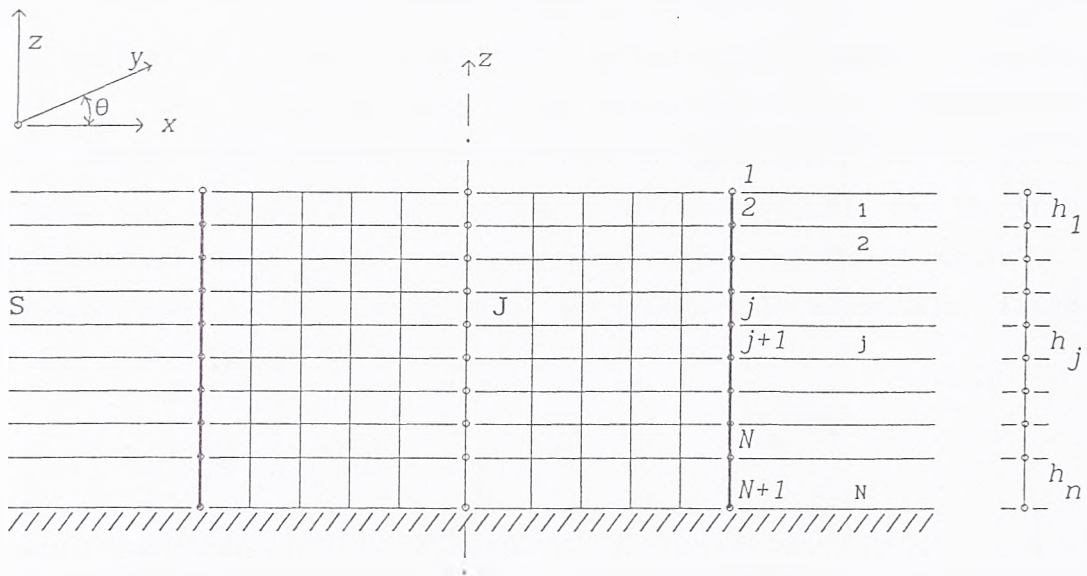
Ako su slojevi zona L i D različito raspoređeni, sa različitim karakteristikama materijala, potrebno je rešavati dva odvojena problema svojstvenih vrednosti R-talasa. Kako talasi propagiraju od unutrašnje oblasti J ka spolja, to se pri rešavanju svojstvenih vrednosti sistema slojeva zone D, modalna matrica i talasni brojevi k , dobijaju direktno programom R.FOR. Pri tome, od $2 \times 2N$ mogućih talasnih brojeva k biramo one za koje je $Re(k) > 0$ tj. $Im(k) < 0$.

Za granicu L potrebno je vršiti određene popravke. Naime, pošto je sada reč o propagaciji talasa u pravcu negativne x-ose, da bi zadovoljili Sommerfeld-ov radijacijski uslov, od svih rešenja za k biramo ona za koje je $Re(k) < 0$ tj. $Im(k) > 0$. Talasni brojevi u odnosu na rešenja za granicu D menjaju znak. Kako i naponi menjaju znak, to bi sile na granici ostale iste da nije još i uticaja modalne matrice. Modalne matrice zone L i D se razlikuju u znaku z-komponente modalnih vektora, što je rezultat deljenja z-komponente svojstvenih oblika sa k (vidi 3.85). Posledica toga je da se vektor sila na granici L razlikuje od vektora na granici D u znaku komponente z. Znači, potrebno je primenom programa za granicu D odrediti vektor sila na granici L, pa promeniti znak komponenti z.

Ako je raspored slojeva na granicama L i D isti, potrebno je samo jednom rešiti problem svojstvenih vrednosti i formirati silu $P_D = P_b$, odnosno matricu $K_D = K_b$, iz koje određujemo P_L , odnosno K_L , jednostavnom promenom znaka komponenti z.

5.2. Konzistentna granica u cilindričnim koordinatama

Da bi formirali konzistentnu granicu za slučaj rotacione simetrije, polazimo od pretpostavke da se tlo ispod objekta može idealizirati konačnom zonom J, "jezgrom", na koju se oslanja polubeskonačna zona S rotaciono simetričnih, horizontalno postavljenih slojeva (slika 5-8).



Slika 5-8

Jezgro analiziramo MKE, pri čemu koristimo četvorougani rotaciono simetrični konačni element, sa tri stepena slobode pomeranja u čvoru u , v i w . Predpostavljamo da je opterećenje proizvoljnog oblika i da se koristi poznati postupak razvijanja opterećenja u *Fourier*-ov red. Kako se i pomeranja čvorova mogu predstaviti *Fourier*-ovim redom, to se do rezultata dolazi superpozicijom rešenja po tonovima. Detalje o osno simetričnim komačnim elementima je moguće naći u literaturi [135], [108], [124].

Da bi formirali konzistentnu granicu, koja će verno da predstavi uticaj zone S na jezgro, polazimo od pretpostavke da granica "propušta" talase, tj. da talasi nastavljaju da propagiraju u pravcu $x=r$. Raspodela pomeranja na granici u pravcu koordinata z i ϑ je kao u izabranom konačnom elementu: u pravcu azimuta, u obliku *Fourier*-ovog reda, u pravcu z -ose, linearna između čvorova.

U poglavlju 4. smo pokazali da je vektor pomeranja talasa u cilindričnim koordinatama:

$$\bar{U}(r, z, \vartheta, t) = \bar{U}(r, z, \vartheta) e^{i\omega t} \quad (5.44)$$

gde je amplituda vektora pomeranja a:

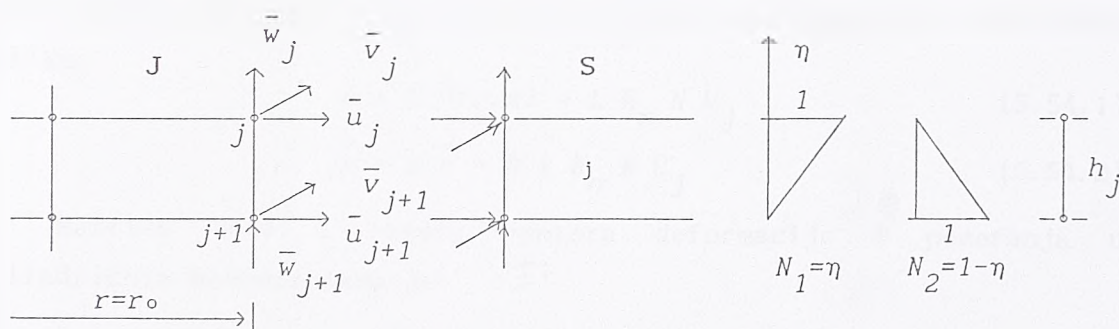
$$\bar{U}(r, z, \vartheta) = \sum_n T_n \bar{U}(r, z) \quad (5.45)$$

Matrica T_n , data jednačinom (4.41), definiše raspodelu pomeranja u pravcu azimuta ϑ , dok je $\bar{U}(r, z)$ vektor amplituda pomeranja n -tog harmonika:

$$\bar{U}(r, z) = \{ \bar{u}(r, z) \ \bar{w}(r, z) \ \bar{v}(r, z) \}^t \quad (5.46)$$

U poglavlju 4. smo istakli da, zahvaljujući pogodno izabranoj matrici T_n , sve relacije važe i za simetrične i za antimetrične tonove. Stoga ćemo se u daljem tekstu ograničiti na amplitude pomeranja tj. napona i deformacija, podrazumevajući da ih treba množiti koeficijentom *Fourier*-ovog reda za odgovarajućim harmonik.

Posmatrajmo sloj j , na granici mreže konačnih elemenata, između čvorova j i $j+1$ (slika 5-9).



Slika 5-9

Vektor amplituda pomeranja $\bar{U}(r, z)$, duž granice $r=r_0$ u sloju j , se može prikazati preko vektora pomeranja čvorova \bar{U}_j :

$$\bar{U}(r, z) = N \bar{U}_j \quad (5.47)$$

gde je N matrica interpolacionih funkcija $N_1 = \eta$ i $N_2 = 1 - \eta$:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

a \bar{U}_j vektor amplituda pomeranja čvorova u cilindričnim koordinatama:

$$\bar{U}_j = \{ \bar{u}_j \ \bar{w}_j \ \bar{v}_j \ \bar{u}_{j+1} \ \bar{v}_{j+1} \ \bar{w}_{j+1} \}^t \quad (5.49)$$

Neka je U_j vektor pomeranja čvorova u kartezijanskim koordinatama:

$$U_j = \{ u_j \ iw_j \ v_j \ u_{j+1} \ iw_{j+1} \ v_{j+1} \}^t \quad (5.50)$$

Ako uzmemo u obzir vezu između vektora amplituda pomeranja \bar{U}

u cilindričnim koordinatama i vektora U u kartezijanskim koordinatama datu jednačinom (4.37) :

$$\bar{U} = H_n U \quad (5.51)$$

dobija se da je vektor amplituda pomeranja na granici:

$$\bar{U}(r, z) = H_n N U_j \quad (5.52)$$

H_n je matrica *Hankell*-ovih funkcija data u poglavlju 4. relacijom (4.38), koja definiše transformaciju vektora pomeranja iz kartezijanskih u cilindrične koordinate.

Za ovako definisanu raspodelu pomeranja na granici možemo odrediti vektore deformacije i napona. Ako su $\bar{\varepsilon}$ i $\bar{\sigma}$ amplitude vektora deformacije i napona u cilindričnim koordinatama:

$$\bar{\varepsilon}^t = \{ \bar{\varepsilon}_r \quad \bar{\varepsilon}_\vartheta \quad \bar{\varepsilon}_z \quad \bar{\gamma}_{rz} \quad \bar{\gamma}_{r\vartheta} \quad \bar{\gamma}_{z\vartheta} \} \quad (5.53.1)$$

$$\bar{\sigma}^t = \{ \bar{\sigma}_r \quad \bar{\sigma}_\vartheta \quad \bar{\sigma}_z \quad \bar{\tau}_{rz} \quad \bar{\tau}_{r\vartheta} \quad \bar{\tau}_{z\vartheta} \} \quad (5.53.2)$$

veze između vektora $\bar{\varepsilon}$ i U_j , tj. $\bar{\sigma}$ i U_j se mogu napisati u matricnom obliku:

$$\bar{\varepsilon} = L \bar{U}(r, z) = L H_n N U_j \quad (5.54.1)$$

$$\bar{\sigma} = D \bar{\varepsilon} = D L H_n N U_j \quad (5.54.2)$$

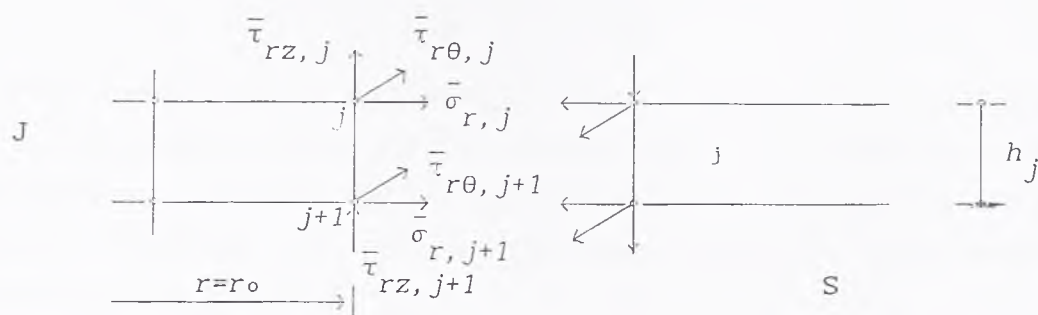
Matrica veze L između vektora deformacije i pomeranja u cilindričnim koordinatama je:

$$L = \begin{bmatrix} \partial/\partial r & 0 & 0 \\ 1/r & 0 & -n/r \\ 0 & \partial/\partial z & 0 \\ \partial/\partial z & \partial/\partial r & 0 \\ n/r & 0 & \partial/\partial r - 1/r \\ 0 & n/r & \partial/\partial z \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

Matrica elastičnih konstanti D je:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & & & \\ & & & G & & \\ & & & & G & \\ & & & & & G \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

Na granici $r=r_0$, postoje samo komponente napona σ_r , τ_{rz} i $\tau_{r\vartheta}$. (slika 5.10).



Slika 5-10

Obeležimo amplitudu vektora napona n -tog harmonika u sloju j sa $\bar{\sigma}$

$$\bar{\sigma}_j^t = \{ \bar{\sigma}_r \quad \bar{\tau}_{rz} \quad \bar{\tau}_{r\theta} \} \quad (5.57)$$

Iz veze napona i pomeranja (5.54.2), dobija se amplituda vektora napona na granici u sloju j :

$$\bar{\sigma}_j = S U_j \quad (5.58)$$

gde je S matrica data relacijom:

$$S = \begin{bmatrix} -\eta[(\lambda+2G)k^2 H_n^2 + 2G\alpha] & -(k/h)\lambda H_n & 2G\eta\alpha^* & \vdots \\ (G/h)\beta & -G\eta k\beta & (G/h)(n/r)H_n & \vdots \\ 2G\eta\alpha^* & 0 & G\eta[2\alpha - k^2 H_n^2] & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -(1-\eta)[(\lambda+2G)k^2 H_n^2 + 2G\alpha] & (\lambda/h)k H_n & (1-\eta)2G\alpha^* & \vdots \\ -(G/h)\beta & -(1-\eta)G\beta & -(G/h)(n/r)H_n & \vdots \\ 2G(1-\eta)\alpha^* & 0 & (1-\eta)G[2\alpha - k^2 H_n^2] & \vdots \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

u kojoj smo sa $\eta=z/h$ obeležili bezdimenzionalnu koordinatu, a sa α , α^* i β veličine:

$$\alpha = \frac{n(n+1)}{r^2} H_n - \frac{k}{r} H_{n-1} \quad (5.60.1)$$

$$\alpha^* = -\frac{n(n+1)}{r^2} H_n + n \frac{k}{r} H_{n-1} \quad (5.60.2)$$

$$\beta = k H_{n-1} - \frac{n}{r} H_n \quad (5.60.3)$$

Vektor napona na krajevima sloja j je jednak zbiru po svim harmonicima:

$$\sigma_j = \sum_n T_n \bar{\sigma}_{jn} \quad (5.61)$$

gde smo, radi kasnijeg izvođenja, uz $\bar{\sigma}_j$ uveli broj harmonika n .

Ako napone koji deluju na granici jezgra, shvatimo kao reaktivno opterećenje uklonjene polubeskonačne zone S , tada vektor sila na granici dobijamo iz rada površinskog reaktivnog opterećenja na odgovarajućim pomeranjima:

$$W = \frac{1}{2} \sum_m \sum_n \int_{\vartheta} \int_z \bar{U}_n^t T_n^t T_m \bar{\sigma}_{jm} r d\vartheta dz \quad (5.62)$$

U jednačini (5.62) smo indeksima n i m obeležili odgovarajuće harmonike vektora amplituda pomeranja $\bar{U}_n(r, z)$ odnosno napona $\bar{\sigma}_m(r, z)$.

Iz uslova ortogonalnosti trigonometrijskih funkcija dobija se da je:

$$\int_{\vartheta} T_n T_m d\vartheta = 0 \quad \text{za } n \neq m \quad (5.63.1)$$

$$\int_{\vartheta} T_n T_m d\vartheta = \alpha_n \quad \text{za } n = m \quad (5.63.2)$$

gde su α_n matrice koje za antimetričnu deformaciju imaju oblik:

$$\alpha_n^a = \begin{bmatrix} \pi & & \\ & \pi & \\ & & \pi \end{bmatrix} \quad n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.64.1)$$

a za simetričnu deformaciju:

$$\alpha_0^s = \begin{bmatrix} 2\pi & & \\ & 2\pi & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad \alpha_n^s = \begin{bmatrix} \pi & & \\ & \pi & \\ & & \pi \end{bmatrix} \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (5.64.2)$$

Iz jednačina (5.62) i (5.63) sledi da je rad:

$$W = \frac{1}{2} \sum_n \alpha_n r \int_z \bar{U}_n^t \bar{\sigma}_{jn} dz \quad (5.65)$$

Na osnovu toga je vektor sila u sloju j na granici, za n -ti harmonik:

$$\bar{P}_j = \Lambda_n r \int_z \bar{\sigma}_{jn} dz \quad (5.66)$$

gde smo sa Λ_n obeležili matricu koeficijenata:

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} \alpha_n & \\ & \alpha_n \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

a, sa \bar{P}_j vektor sila u čvorovima na granici za n -ti harmonik:

$$\bar{P}_j = \{ \bar{P}_{r,j} \bar{P}_{rz,j} \bar{P}_{r\vartheta,j} \bar{P}_{r,j+1} \bar{P}_{rz,j+1} \bar{P}_{r\vartheta,j+1} \}^t \quad (5.68)$$

Ako u jednačini (5.66) vektor amplituda napona izrazimo preko amplituda pomeranja krajeva sloja j , jednačina (5.58), dobija se vektor sila na granici u sloju j za n -ti harmonik u matricnom obliku:

$$\bar{P}_j = -\Lambda_n \left[rk^2 A H^* + k(rD+E+nF) \bar{H} + n\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{1}{r} J+Q) H^* \right] U_j \quad (5.69)$$

gde su A, D, E, F, G i Q matrice sloja:

$$A = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 2(\lambda+2G) & 0 & 0 & \lambda+2G & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 2G & 0 & 0 & G \\ \lambda+2G & 0 & 0 & 2(\lambda+2G) & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 & 0 & 2G & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad (5.70.1)$$

$$D = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ -G & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ -G & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.70.2)$$

$$E = \frac{Gh}{3} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.70.3)$$

$$F = \frac{Gh}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.70.4)$$

$$J = \frac{2Gh}{3} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (5.70.5)$$

(5.74)

$$X = \begin{bmatrix} X_{1,1}^r & X_{1,2}^r & \cdot & \cdot & X_{1,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ X_{2,1}^r & X_{2,2}^r & \cdot & \cdot & X_{2,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & X_{1,1}^l & \cdot & \cdot & X_{1,N}^l \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{j,1}^r & X_{j,2}^r & \cdot & \cdot & X_{j,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ X_{j+1,1}^r & X_{j+1,2}^r & \cdot & \cdot & X_{j+1,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & X_{j,1}^l & \cdot & \cdot & X_{j,N}^l \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{2N-1,1}^r & X_{2N-1,2}^r & \cdot & \cdot & X_{2N-1,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ X_{2N,1}^r & X_{2N,2}^r & \cdot & \cdot & X_{2N,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & X_{N,1}^l & \cdot & \cdot & X_{N,N}^l \end{bmatrix}$$

a Γ vektor faktora participacije pojedinih tonova:

$$\Gamma^t = \{ \gamma_1^r \ \gamma_2^r \ \dots \ \gamma_{2N}^r \ \vdots \ \gamma_1^l \ \gamma_2^l \ \dots \ \gamma_N^l \} \quad (5.75)$$

U matrici X superskriptima r i l smo označili *Rayleigh*-eve, odnosno, *Love*-ove svojstvene vektore, a u vektoru Γ odgovarajuće faktore participacije.

Iz jednačina (5.72) i (5.73) se dobija vektor sila na granici za n -ti harmonik:

$$\bar{P}_b = -\Lambda_n^* \left[rA\Psi[k^2] + (rD+E+nF)\Phi[k] + n\left(\frac{n+1}{2} \frac{1}{r} J+Q\right)\Psi \right] \Gamma \quad (5.76)$$

gde je matrica Ψ :

Matrica Φ je modifikovana modalna matrica:

$$\Phi = \bar{H} X \quad (5.80)$$

$$\Phi = \left[\begin{array}{cccc|cccc} H_{n-1} X_{1,1}^r & \cdot & \cdot & H_{n-1} X_{1,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ -H_n X_{2,1}^r & \cdot & \cdot & -H_n X_{2,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & H_{n-1} X_{1,1}^l & \cdot & \cdot & H_{n-1} X_{1,N}^l \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline H_{n-1} X_{j,1}^r & \cdot & \cdot & H_{n-1} X_{j,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ -H_n X_{j+1,1}^r & \cdot & \cdot & -H_n X_{j+1,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & H_{n-1} X_{j,1}^l & \cdot & \cdot & H_{n-1} X_{j,N}^l \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline H_{n-1} X_{2N-1,1}^r & \cdot & \cdot & H_{n-1} X_{2N-1,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ -H_n X_{2N,1}^r & \cdot & \cdot & -H_n X_{2N,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & H_{n-1} X_{N,1}^l & \cdot & \cdot & H_{n-1} X_{N,N}^l \end{array} \right]$$

Nepoznate vrednosti vektora Γ određujemo iz uslova jednakosti pomeranja u polju i na granici $\bar{U} = \bar{U}_b$, u cilindričnim koordinatama. Vektor pomeranja čvorova na granici u cilindričnim koordinatama se može prikazati preko modalnih koordinata, prema jednačinama (5.51) i (5.73):

$$\bar{U}_b = \bar{U} = H U = H X \Gamma \quad (5.81)$$

Proizvod matrica:

$$W = H X \quad (5.82)$$

predstavlja modifikovanu modalnu matricu. Ako uvedemo obeležavanje da je:

$$H_{n,r} = \frac{\partial}{\partial r} H_n^2(k,r) \quad (5.83)$$

matrica W glasi:

(5.84)

$$W = \begin{bmatrix} H_{n,r} X_{1,1}^r & \dots & H_{n,r} X_{1,2N}^r & \frac{n}{r} H_n X_{1,1}^l & \dots & \frac{n}{r} H_n X_{1,N}^l \\ -k_1^r H_n X_{2,1}^r & \dots & -k_{2N}^r H_n X_{2,2N}^r & 0 & \dots & 0 \\ \frac{n}{r} H_n X_{1,1}^r & \dots & \frac{n}{r} H_n X_{1,2N}^r & H_{n,r} X_{1,1}^l & \dots & H_{n,r} X_{1,N}^l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{n,r} X_{j,1}^r & \dots & H_{n,r} X_{j,2N}^r & \frac{n}{r} H_n X_{j,1}^l & \dots & \frac{n}{r} H_n X_{j,N}^l \\ -k_1^r H_n X_{j+1,1}^r & \dots & -k_{2N}^r H_n X_{j+1,2N}^r & 0 & \dots & 0 \\ \frac{n}{r} H_n X_{j,1}^r & \dots & \frac{n}{r} H_n X_{j,2N}^r & H_{n,r} X_{j,1}^l & \dots & H_{n,r} X_{j,N}^l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{n,r} X_{2N-1,1}^r & \dots & H_{n,r} X_{2N-1,2N}^r & \frac{n}{r} H_n X_{N,1}^l & \dots & \frac{n}{r} H_n X_{N,N}^l \\ -k_1^r H_n X_{2N,1}^r & \dots & -k_{2N}^r H_n X_{2N,2N}^r & 0 & \dots & 0 \\ \frac{n}{r} H_n X_{2N-1,1}^r & \dots & \frac{n}{r} H_n X_{2N-1,2N}^r & H_{n,r} X_{N,1}^l & \dots & H_{n,r} X_{N,N}^l \end{bmatrix}$$

Na osnovu jednačina (5.81) i (5.82) dobija se da je:

$$\Gamma = W^{-1} \bar{U}_b \tag{5.85}$$

Iz (5.85) i (5.76) sledi da je sila na granici za n -ti harmonik:

$$\bar{P}_b = -K_b \bar{U}_b \tag{5.86}$$

gde je K_b matrica krutosti na granici za n -ti harmonik:

$$K_b = \Lambda_n^* \left[rA\Psi[k^2] + (rD+E+nF)\Phi[k] + n \left(\frac{n+1}{2} \frac{1}{r} J+Q \right) \Psi \right] W^{-1} \tag{5.87}$$

Matrica krutosti na granici zavisi od rasporeda i karakteristika sistema slojeva, od rednog broja harmonika n i frekvencije ω . Matrice sistema slojeva A, D, E, F, J , i Q je, za zadati raspored slojeva, potrebno odrediti samo jednom. Međutim, za svaku frekvenciju ω potrebno je rešiti problem svojstvenih vrednosti L i R -talasa,

formirati dijagonalnu matricu talasnih brojeva k i modalnu matricu X , iz koje se množenjem matricama *Hankell*-ovih funkcija dobijaju matrice Ψ i Φ , odnosno matrica W .

Za svaku od zadatih frekvencija ω potrebno je formirati dinamičku jednačinu u frekventnom domenu sa zadatima graničnim uslovima po silama. Dinamička jednačina sistema konačnih elemenata jezgra, za n -ti harmonik, glasi:

$$(K - \omega^2 M + K_b^*(\omega)) \bar{U}(\omega) = \bar{P}(\omega) \quad (5.88)$$

gde je K matrica krutosti jezgra za n -ti harmonik, M matrica masa a K_b^* matrica na granici dobijena proširenjem matrice K_b odgovarajućim nultim elementima do reda matrice K . Vektor \bar{U} je vektor nepoznatih pomeranja čvorova jezgra, a \bar{P} vektor dinamičkog opterećenja.

Jednačina (5.88) predstavlja sistem linearnih jednačina sa kompleksnim koeficijentima, koji treba rešiti za svaku zadatau frekvenciju ω .

5.2.1. Matrica krutosti na granici. Program GRANICA

Matrica krutosti na granici K_b , data relacijom (5.87), je kvadratna, simetrična matrica reda $3N \times 3N$, gde je N broj slojeva na granici. Elementi matrice krutosti su u opštem slučaju kompleksni brojevi, koje možemo pisati u obliku zbira realnog i imaginarnog člana:

$$K_b(i, j) = K_{br}(i, j) + i K_{bi}(i, j) \quad (5.89)$$

Član $K_{br}(i, j)$ predstavlja elastičnu, reaktivnu silu u pravcu stepena slobode i usled pomeranja $j=1$. $K_{bi}(i, j)$ predstavlja viskoznu silu tj, prigušenje nastalo propagacijom talasa kroz zonu J . To prigušenje je poznato kao radijacijsko prigušenje.

Pokazali smo da izraz (5.87) važi za bilo koji, n -ti harmonik simetričnih i antisimetričnih vibracija. U analizi interakcije tla i objekta rotaciono simetričnih sistema, usled horizontalnog pomeranja osnove, javlja se samo prvi simetrični harmonik ($n=1$), a pri vertikalnom pomeranju osnove samo nulti simetrični ton ($n=0$).

Za $n=0$, iz jednačine (5.87) dobija se da je matrica krutosti na granici za nulti harmonik:

$$K_0 = \Lambda_0^* \left[rA\Psi_0[k^2] + (rD+E)\Phi_0[k] \right] W_0^{-1} \quad (5.90)$$

Za $n=1$ matrica krutosti na granici je:

$$K_1 = \Lambda_1^* \left[rA\Psi_1[k^2] + (rD+E+F)\Phi_1[k] + \left(\frac{1}{r} J+Q\right)\Psi_1 \right] W_1^{-1} \quad (5.91)$$

Matrice Ψ_0 , Φ_0 , W_0 , Ψ_1 , Φ_1 i W_1 su date u DODATKU III.

Na osnovu izvedenih jednačina (5.90) i (5.91) napisan je program GRANICA, koji određuje matricu krutosti na granici za $n=0$ i $n=1$, za zadati raspored slojeva i zadatu frekvenciju ω . Prikaz glavnog programa sa podprogramima dat je u DODATKU IV.

Korišćenjem programa GRANICA je analizirana matrica krutosti na granici za najjednostavniji slučaj: jedan sloj nad krutom bazom (PRIMER 1, Glava 4). Vrednosti K_b su određene za niz bezdimenzionalnih frekvencija a_0 od 0 do 6. Rezultati su se mogli porediti sa rešenjima dobijenim analitički. Potom je posmatran slučaj 3 sloja nad krutom bazom (PRIMER 2, poglavlja 4). Na osnovu toga su izvedeni sledeći zaključci:

- za $\omega=0$, $K_b(0)$ su realni brojevi, koji predstavljaju statičke, elastične sile kojom sistem slojeva S deluje na jezgro J:
- za $\omega < \omega_{\text{cut-off}}$ svi elementi matrice krutosti K_b ostaju realni brojevi, što znači da za frekvencije manje od "cut-off" frekvencije nema sila prigušenja, tj. nema radijacijskog prigušenja u sistemu;
- za $\omega > \omega_{\text{cut-off}}$ elementi K_b postaju kompleksni brojevi, kod kojih sa porastom ω realni deo opada a imaginarni raste. To znači da sa porastom frekvencije ω reaktivne sile opadaju, dok sile radijacijskog prigušenja rastu.

GLAVA 6.

ROTACIONA SIMETRIJA

Problem određivanja odgovora rotaciono simetričnih konstrukcija na seizmički input je složen. Dugo godina se rešavao zamenom rotaciono-simetričnog sistema konzolom sa koncentrisanim masama, kruto uklještenom na površini terena. U inženjerskoj praksi se i danas metoda koncentrisanih masa najčešće primenjuje za dinamičku analizu dimnjaka, vodotornjeva. sl. Postepeno, sa pojavom nuklearnih elektrana, uticaj fundamenta se uvodi u analizu preko elastičnih oslonaca [32],[33],[41],[113]. Sa razvitkom konačnih elemenata i pojavom rotaciono-simetričnih elemenata dolazi do njihove primene i u analizi uticaja zemljotresa. Pri tome se obično predpostavlja da je objekat fundiran na površini terena i da je temelj krut. Za seizmički input se usvaja najjednostavniji slučaj vertikalne propagacije talasa, koji prouzrokuje samo horizontalno tj. samo vertikalno pomeranje osnove. U tom slučaju u analizi učestvuje samo prvi simetrični, tj. nulti harmonik. Ovom predpostavkom je izbegnuto rešavanje odgovora po pojedinim harmonicima "step-by-step" integracijom i superpozicija dobijenih rešenja, čime je postupak sveden na minimum.

Proračun interakcije tla i objekta osno-simetričnih konstrukcija primenom MKE su među prvima *Ghosh* i *Willson* [124] sproveli na klasičan način, primenom direktne metode u vremenskom domenu. Koristili su i modalnu analizu i "step-by-step" integraciju. Granične uslove su

zadavali po pomeranjima. Uticaj interakcije je analiziran formiranjem dovoljno velike mreže konačnih elemenata u tlu. Postupak koji su primenili u to vreme, nije pružao veće mogućnosti, međutim analiza u vremenskom domenu korišćenjem rotaciono-simetričnog elementa ljuske ni do danas nije napredovala. I danas je, za analizu u vremenskom domenu moguće koristiti samo elementarnu granicu, pošto ni viskozna, ni *Smith*-ova granica, a ni beskonačni elementi, nisu formulisani u cilindričnim koordinatama.

Sa druge strane, problemom interakcije rashladnih tornjeva se bavio *Gould*, koji je postojeća saznanja iz dinamike fundamenta implementirao u dinamičku analizu rotaciono-simetričnih ljuski u frekventnom domenu primenom MKE i metode podstruktura [32],[33],[36].

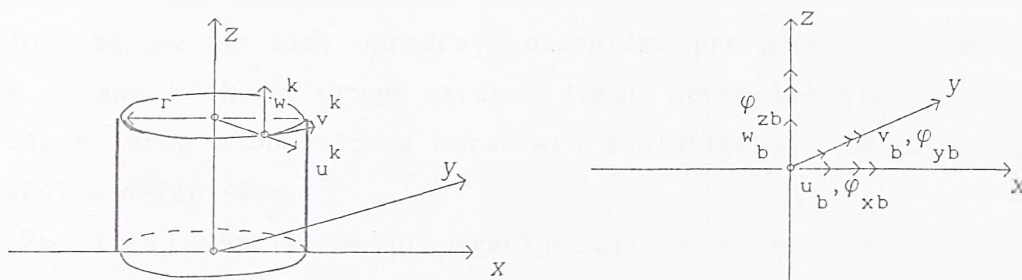
Znači, da bi pojednostavili postupak analitičari su se okrenuli metodi podstruktura, gde se određivanjem funkcija impedancije problem svodi na rešavanje odgovora konstrukcije fundirane na bazi čije su nam karakteristike poznate. Pri tome moženo kombinovati metode i tipove analize za pojedine podstrukture: kontinuum i MKE, granični elementi i MKE ili MKE i MKE.

U daljem radu ćemo se posvetiti problemu određivanja dinamičke krutosti tla primenom MKE. Osnovna pretpostavka koju činimo je da je temelj krut, fundiran na sistemu elastičnih slojeva i da se na granici mreže zadaju uslovi po silama, kako bi se i uticaj radijacijskog prigušenja uzeo u obzir. Primenićemo tzv. prenosnu ili konzistentnu granicu. Pretpostavka, da je temelj fundiran na površini terena, je u velikom broju slučajeva i zadovoljena. Naime u literaturi smatraju da se dubina fundiranja ispod 5% od visine objekta može tretirati kao fundiranje na površini. Druga pretpostavka da je temelj krut i da je izložen jednakom pomeranju je ispunjena kada je temeljna ploča velike debljine, što je slučaj sa zgradama nuklearnih reaktora i sl.

Pre nego što pređemo na određivanje dinamičkih karakteristika tla, nužno je definisati dinamički input, tj. seizmičke talase kojima je fundament izložen.

6.1. Prostorna analiza seizmičkih talasa

Predpostavimo da je reč o talasnom kretanju pod proizvoljnim uglom u odnosu na beskonačno krut rotaciono simetričan temelj. Pomeranje tačaka baze je definisano sa 6 komponentata pomeranja centra baze, 3 translacije i 3 rotacije u pravcu koordinatnih osa: u_b , v_b , w_b , φ_{xb} , φ_{yb} , φ_{zb} (slika 6-1).



Slika 6-1

Pomeranje tačaka konstrukcije je jednako zbiru pomeranja nastalog usled kretanja konstrukcije kao krutog tela pri pomeranju baze (kinematička interakcija) i pomeranja usled dejstva inercijalnih sila (inercijalna interakcija):

$$u^t = u^k + u^i \quad (6.1)$$

Komponente pomeranja tačaka pri kinematičkoj interakciji su:

$$\begin{aligned} u^k &= u_b \cos\vartheta + v_b \sin\vartheta - z\varphi_{xb} \sin\vartheta + z\varphi_{yb} \cos\vartheta \\ v^k &= -u_b \sin\vartheta + v_b \cos\vartheta - z\varphi_{xb} \cos\vartheta - z\varphi_{yb} \sin\vartheta + r\varphi_{zb} \\ w^k &= w_b + r\varphi_{xb} \sin\vartheta - r\varphi_{yb} \cos\vartheta \end{aligned} \quad (6.2)$$

Iz jednačina (6.2) vidimo da se kod pomeranja usled kinematičke interakcije javljaju samo nulti i prvi član *Fourier*-ovog reda. Pažljivom analizom komponentata pomeranja može se izvesti sledeći zaključak: u komponentalnim pomeranjima tačaka konstrukcije komponente pomeranja baze u_b i φ_{yb} daju prvi simetrični harmonik, v_b i φ_{xb} prvi antimetrični harmonik, w_b daje nulti simetrični a φ_{zb} nulti antimetrični harmonik. To znači da pomeranja u_b , w_b i φ_{yb} predstavljaju čistu simetričnu deformaciju, dok v_b , φ_{xb} i φ_{zb} predstavljaju čistu antimetričnu deformaciju.

Inercijalno opterećenje, nastalo kao proizvod mase i kinematičke komponente pomeranja, variraće na isti način kao i odgovarajuće pomeranje. Znači, i u inercijalnoj interakciji će se javiti samo nulti

i prvi harmonik.

Ovom analizom smo pokazali da se pri proizvoljnom seizmičkom inputu, za slučaj krute baze, u odgovoru sistema javljaju samo dva harmonika 0-ti i I-vi, čime se analiza uticaja zemljotresa znatno pojednostavljuje. Za slučaj fleksibilne baze problem je mnogo složeniji.

Predpostavka o vertikalnoj propagaciji talasa, dovodi do daljeg pojednostavljenja problema. Ona se najčešće i koristi u analizi zemljotresa jer se time uprošćava dinamički proračun konstrukcije sa jedne strane, dok sa druge strane, takvu aprokcimaciju ne smatramo pogrešnom, zbog stohastičkog karaktera zemljotresa i nemogućnosti da ga tačnije definišemo.

Za slučaj vertikalne propagacije talasa u ravni xz, komponente pomeranja osnove su u_b i w_b . Usled horizontalnog pomeranja u_b baze iz jednačine (6.2) dobija se da su komponente pomeranja tačke na konstrukciji:

$$u^k = u_b \cos \vartheta \quad v^k = -u_b \sin \vartheta \quad w^k = 0 \quad (6.3)$$

Usled vertikalnog pomeranja baze w_b biće:

$$u^k = v^k = 0 \quad w^k = w_b \quad (6.4)$$

Od interesa nam je još i uticaj rotacije temelja oko y-ose. Pri rotaciji φ_{yb} dolazi samo do vertikalnog pomeranja tačaka baze:

$$u_b = v_b = 0 \quad w_b = -r\varphi_{yb} \cos \vartheta \quad (6.5)$$

dok se u konstrukciji javljaju sve 3 komponente pomeranja:

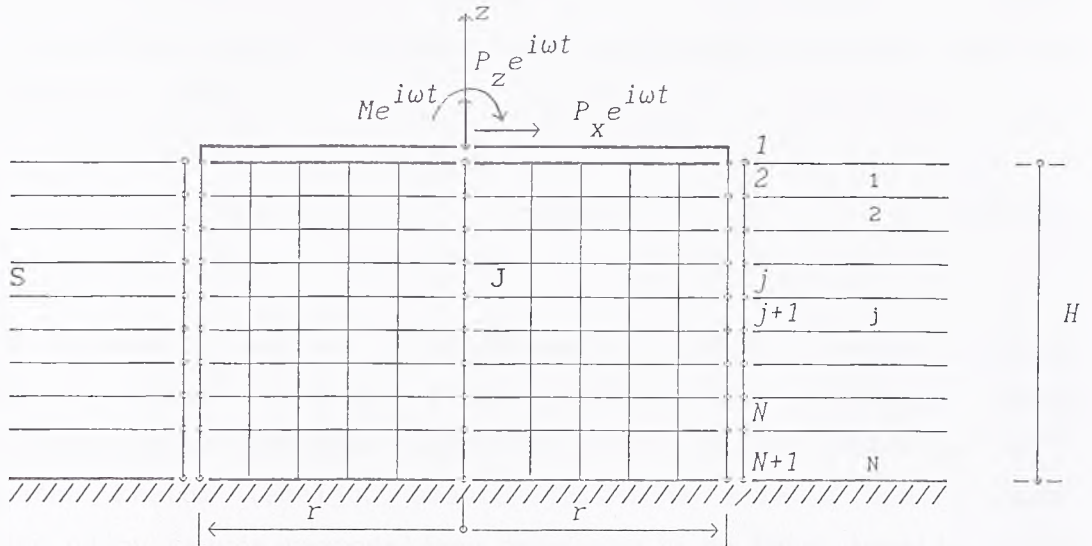
$$u^k = z\varphi_{yb} \cos \vartheta \quad v^k = -z\varphi_{yb} \sin \vartheta \quad w^k = -r\varphi_{yb} \cos \vartheta \quad (6.6)$$

Iz jednačina (6.3), (6.4) i (6.6) sledi zaključak: horizontalno pomeranje krute baze i obrtanje fundamenta oko y-ose, izaziva u konstrukciji samo prvi harmonik simetrične deformacije. Usled vertikalnog pomeranja krute baze javlja se samo nulti harmonik simetrične deformacije (komponente w^k). Znači, za svaku komponentu pomeranja baze potrebno je analizirati samo jedan harmonik vibracija.

Uvođenjem predpostavke o vertikalnoj propagaciji talasa znatno smo pojednostavili postupak određivanja odgovora rotaciono simetričnih sistema.

6.2. Dinamička krutost kružnog temelja. Programi AXYB i INTAXB

Predpostavimo da je krut, kružni temelj, poluprečnika r , fundiran na sloju debljine H iznad osnovne stene (slika 6-2).



Slika 6-2

Dinamička krutost temelja predstavlja vezu između vektora amplituda generalisanih sila i pomeranja baze:

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ M \\ P_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x(a_0) & K_{x\varphi}(a_0) & 0 \\ K_{\varphi x}(a_0) & K_\varphi(a_0) & 0 \\ 0 & 0 & K_z(a_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ \varphi_b \\ w_b \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

gde je P_j amplituda generalisane harmonijske sile $P_j(t) = P_j e^{i\omega t}$, u_b i w_b amplitude pomeranja, odnosno rotacije $\varphi_g = \varphi_{yb}$, $a_0 = \omega r / c_s$ bezdimenzionalna frekvencija, ω frekvencija, r poluprečnik, c_s brzina S-talasa, a $K_j(a_0)$ kompleksna funkcija, koja predstavlja dinamičku krutost baze. Iz jednačine (6.7) vidimo da su x-koordinatna komponenta x i rotacija φ međusobno spregnute. Radovi *Luco-a*, *Kausel-a* i *Wolf-a* su pokazali da su efekti sprežanja mali i da se u praktičnim problemima mogu zanemariti, tj. $K_{x\varphi} \approx 0$. Ako uvedemo takvu pretpostavku dobija se nezavisan sistem jednačina oblika:

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ M \\ P_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x(a_0) & 0 & 0 \\ 0 & K_\varphi(a_0) & 0 \\ 0 & 0 & K_z(a_0) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b \\ \varphi_b \\ w_b \end{Bmatrix} \quad (6.8)$$

Elemente dinamičke krutosti $K_j(a_0)$ ćemo odrediti primenom MKE sa konzistentnom graničnim uslovima na krajevima mreže (slika 6-2). Zonu

ispod temelja diskretizujemo kvadrilateralnim rotaciono-simetričnim elementima. Na granici jezgra i sistema horizontalnih slojeva poluprostora postavljamo granične uslove prema (5.78). Temelj, za koji predpostavljamo da je bez mase i beskonačne krutosti, takođe delimo na elemente kod kojih je $\rho=0$, a modul elastičnosti E veliki broj. Dinamičku matricu krutosti baze određujemo inverzijom matrice fleksibilnosti baze:

$$F(a_0) = \begin{bmatrix} f_x(a_0) & & \\ & f_\varphi(a_0) & \\ & & f_z(a_0) \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Do elemenata matrice fleksibilnosti dolazimo primenom principa virtualnih sila: element $f_j(a_0)$ predstavlja poneranje usled generalisane sile jedinične amplitude $P_j=1$, $j=x, \varphi, z$. Kako je reč o beskonačno krutom temelju, umesto jedinične sile u centru baze, zadajemo odgovarajuće raspodeljeno opterećenje po ivici temelja, i to:

- a) za $K_x(a_0)$ opterećenje $p_r = (1/r\pi)\cos\vartheta$
- b) za $K_\varphi(a_0)$ opterećenje $p_z = -(1/r^2\pi)\cos\vartheta$
- c) za $K_z(a_0)$ opterećenje $p_z = -(1/2\pi)$

Sva tri slučaja opterećenja predstavljaju čistu simetriju oko x-ose. Pri tome opterećenje pod a) i b) sadrži samo prvi harmonik, a pod c) nulti.

Rešavanjem dinamičke jednačine metode konačnih elemenata u frekventnom domenu:

$$[K - \omega^2 M + K_b(\omega)] U(\omega) = P_j(\omega) \quad (6.10)$$

za sva tri slučaja opterećenja $j=x, \varphi, z$, dobijamo da je fleksibilnost:

$$f_j(a_0) = u_{p_j}(a_0) \quad (6.11)$$

gde smo sa $u_{p_j}(a_0)$ obeležili generalisano pomeranje tačke ispod opterećenja p_j u pravcu p_j , $j=x, \varphi, z$.

Dinamičku krutost dobijamo inverzijom fleksibilnosti:

$$K_j(a_0) = \frac{1}{f_j(a_0)} = \text{Re}(K_j(a_0)) + i \text{Im}(K_j(a_0)) \quad (6.12)$$

Da bi naše rešenje mogli da poredimo sa već poznatim teorijskim rešenjima *Bycroft*-a [16], *Veletsos*-a i *Verbič*-a [117], za poluprostor, odnosno *Luco*-a za sloj nad poluprostorom [74] kao i sa rešenjima koje daje *Wolf* [129] primenom graničnih elemenata, potrebno je napisati dinamičku krutost u obliku:

$$K_j(a_0) = K_j(a_0=0) (k_j + ia_0c_j) \quad (6.13)$$

gde smo sa $K_j(a_0=0)$ označili krutost sloja za $a_0=0$ (statička krutost sloja), a sa k_j i c_j bezdimenzionalne funkcije Poisson-ovog broja i frekvencije a_0 :

$$k_j = \frac{\operatorname{Re}(K_j(a_0))}{K_j(a_0=0)} \quad c_j = \frac{1}{a_0} \frac{\operatorname{Im}(K_j(a_0))}{K_j(a_0=0)} \quad (6.14)$$

Radi daljeg poređenja, dinamičku krutost normiramo u odnosu na krutost polubeskonačnog elastičnog prostora [129]:

$$K_x = \frac{8Gr}{2-\nu} \quad K_\varphi = \frac{8Gr^3}{3(1-\nu)} \quad K_z = \frac{4Gr}{1-n} \quad (6.15)$$

tako da je:

$$K_j(a_0) = \alpha_j K_j (k_j + ia_0c_j) \quad (6.16)$$

Broj α_j predstavlja odnos statičke krutosti sloja (za $\omega=0$) i krutosti poluprostora za $j=x, \varphi, z$:

$$\alpha_j = \frac{K_j(a_0=0)}{K_j} \quad (6.17)$$

U izrazu za dinamičku krutost $K_j(a_0)$, jednačina (6.16), $k_j(a_0)$ predstavlja koeficijent krutosti a $c_j(a_0)$ koeficijent viskoznog (radijacijskog) prigušenja. Uticaj materijalnog (histerezisnog) prigušenja u frekventnu analizu uvodimo preko kompleksnih modula:

$$E^* = E (1+2i\xi) \quad (6.18.1)$$

$$G^* = G (1+2i\xi) \quad (6.18.2)$$

gde je ξ koeficijent materijalnog prigušenja.

Matrica krutosti u metodi konačnih elemenata je funkcija elastičnih konstanti, tako da će se iz (6.18) dobija da je:

$$K^* = K (1+2i\xi) \quad (6.19.1)$$

Granična matrica K_b , u kojoj smo uzeli u obzir uticaj materijalnog prigušenja u tlu, se takođe dobija jednostavnim množenjem:

$$K_b^* = K_b (1+2i\xi) \quad (6.19.2)$$

U praktičnoj analizi uticaj materijalnog prigušenja se aproksimativno uvodi jednostavnim množenjem dinamičke krutosti sa $(1+2i\xi)$:

$$K_j^*(a_0) = \alpha_j K_j (k_j + ia_0c_j)(1+2i\xi) \quad (6.20)$$

odnosno, možemo pisati da je:

$$K_j^*(a_0) = \alpha_j K_j (\bar{k}_j + ia_0\bar{c}_j) \quad (6.21)$$

gde su \bar{k}_j i \bar{c}_j koeficijenti krutosti i prigušenja u slučaju kada materijalno prigušenje uzmemo u obzir:

$$\bar{k}_j = k_j - 2a_0\xi c_j \quad (6.22.1)$$

$$\bar{c}_j = c_j + \frac{2\xi}{a_0} k_j \quad (6.22.2)$$

Iz jednačina (6.22) sledi zaključak da histerezisno prigušenje ξ smanjuje koeficijent krutosti tla k_j , a povećava koeficijent prigušenja c_j .

Tačan uticaj pojedinih prigušenja, materijalnog i radijacijskog, nije međutim nigde u literaturi detaljno analiziran, tako da bi u daljem radu tome trebalo posvetiti pažnju.

Dinamičku krutost tla smo odredili primenom programa AXIB i INTAXB. Program AXIB je FORTRAN-ski program koji određuje matrice krutosti i masa i vektor opterećenja u čvorovima jezgra, koristeći kvadrilateralni rotaciono-simetrični element, sa interpolacionim polinomom prvog stepena. Program INTAXB formira dinamičku jednačinu kretanja u frekventnom domenu, zadajući na granici uslove po silama, primenom prenosne matrice krutosti K_b . Koncipiran je tako da se može uzeti u obzir i histerezisno prigušenje u tlu korišćenjem kompleksnih modula. Rešavanjem kompleksnog sistema jednačina dobijaju se pomeranja svih čvorova jezgra usled zadatog dinamičkog opterećenja. Svi detalji o konačnom elementu i programima mogu se naći u DODATKU V.

Na osnovu ovako dobijenog rešenja za pomeranja usled generalisane sile, određujemo iz fleksibilnosti koeficijente dinamičke krutosti, tj. koeficijente k_j i c_j , primenom manjeg programa K.FOR.

Ispitivanje dinamičke krutosti sloja nad krutom bazom sprovedeno je sa ciljem da se, pre svega, verifikuje izraz za prenosnu granicu u cilindričnim koordinatama koji smo izveli u poglavlju 5. Drugo, poznajući dinamičku krutost, moguće je analizirati uticaj frekvencije prinudne sile na odgovor sistema, zatim, zavisnost krutosti tj. prigušenja od debljine sloja i uticaj dimenzija elemenata. Treće, sa tako dobijenom dinamičkom krutošću moguće je odrediti odgovor rotaciono simetričnog objekta na zemljotres, odbacujući tlo i zamenjujući njegov uticaj dobijenim funkcijama (metoda podstruktura).

6.2.1. Primeri

Da bi odredili dinamičku krutost kružnog temelja, posmatrali smo krut disk poluprečnika r , fundiran na sloju tla debljine H iznad krute baze. Analizirana su tri slučaja dubine fundiranja $H/r=1,3,5$ (slika 6-3) i tri modela mreže: gruba, regularna i fina.

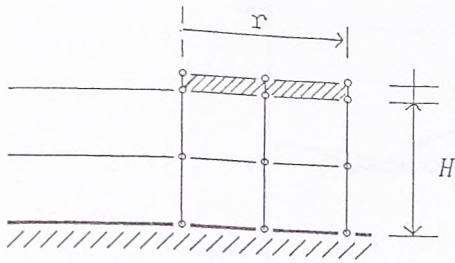
Primenom programa *AXYB*, *INTAXB* i *K.FOR* odredili smo bezdimenzionalne koeficijente $k_j(a_0)$ i $c_j(a_0)$ i parametar α_j , $j=x, \varphi, z$, za niz frekvencija $a_0=0 \div 3$. Računali smo do vrednosti $a_0=3$ jer njoj odgovara kružna frekvencija $\omega=256$ rad, tj. $f=40.8$ Hz, koja predstavlja visoku frekvenciju za realne konstrukcije, tako da računanje dinamičke krutosti iznad $a_0=3$ ima više teorijskog nego praktičnog značaja.

Na slikama 6-4 i 6-5 su data teorijska rešenja *Wolf*-a i *Luco*-a, sa kojima su poređeni rezultati. *Wolf* (slika 6-4) je odredio dinamičku krutost za sloj nad poluprostorom i za sloj nad krutom bazom primenom graničnih elemenata, do kojih je došao polazeći od rešenja talasne teorije [129].

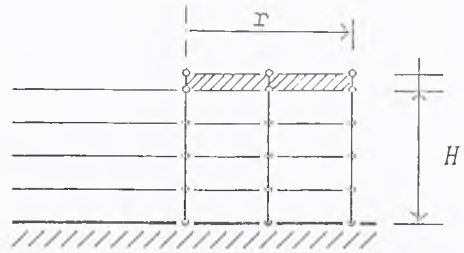
Luco (slika 6-5) je rešio dinamičku krutost sloja nad poluprostorom, određenih karakteristika primenom integralnih jednačina [74]. Prikazana su ona rešenja za koja je odnos krutosti poluprostora i sloja 0.2. Dinamički koeficijenti tla nisu redukovani statičkom krutošću sloja, tako da vrednosti treba podeliti sa $K_j(a_0)$, $j=z, x, \varphi$.

Slična rešenja dobijaju *Kausel*, *Roesset* i *Waas* [56] za sistem slojeva nad krutom bazom, primenom MKE.

Da bi mogli upoređivati rezultate nužno je formirati isti model. U navedenim referencama, na žalost nisu dati potpuni podaci. Sa druge strane, i koeficijent krutosti k_j i prigušenja c_j su bezdimenzionalna funkcija ν i a_0 . što znači da su i sa različito dobijenim podaci, rezultati međusobno uporedivi. Modeli 1,2 i 3 (slika 6-3) su formirani prema primeru analiziranom u poglavlju 4. Usvojen je *Poisson*-ov broj $\nu=1/3$ i koeficijent histerezisnog prigušenja u tlu $\xi=0.05$.

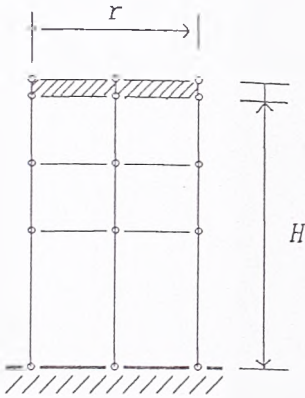


a.1. gruba mreža

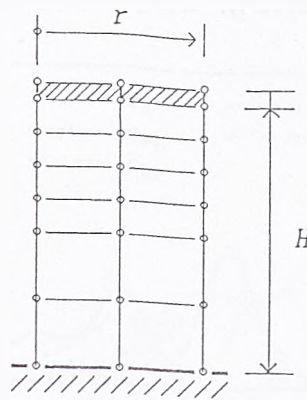


a.2. regularna mreža

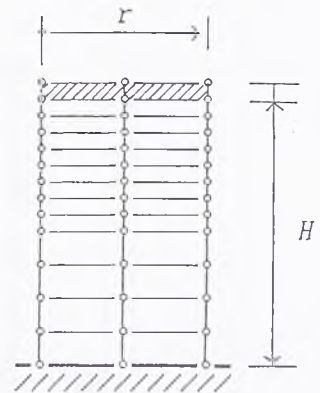
a) Model 1 ($H/r=1$)



b.1. gruba mreža

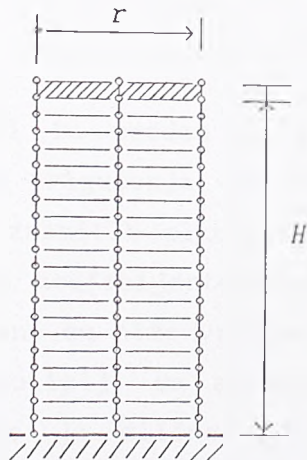


b.2. regularna mreža



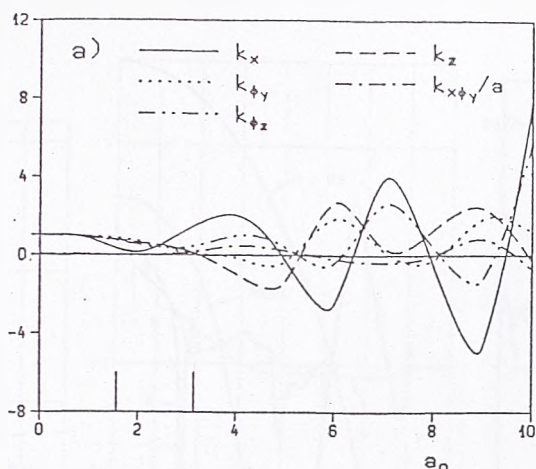
b.3. fina mreža

b) Model 2 ($H/r=3$)



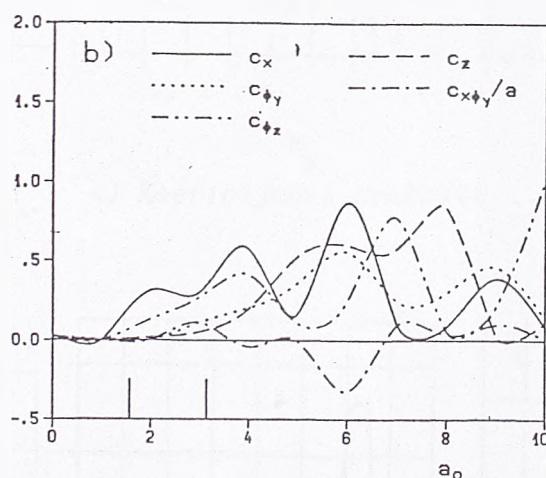
c) Model 3 ($H/r=5$)

$$\begin{aligned}
 r &= 10 \text{ ft} \\
 G &= 2492 \text{ K/ft}^2 \\
 \rho &= 0.003419 \text{ Ks}^2/\text{ft}^4 \\
 c_s &= 853.6 \text{ ft/sec} \\
 \nu &= 1/3
 \end{aligned}$$



$$\alpha_x=1.56 \quad \alpha_\phi=1.28 \quad \alpha_z=2.56$$

a) Koeficijent krutosti

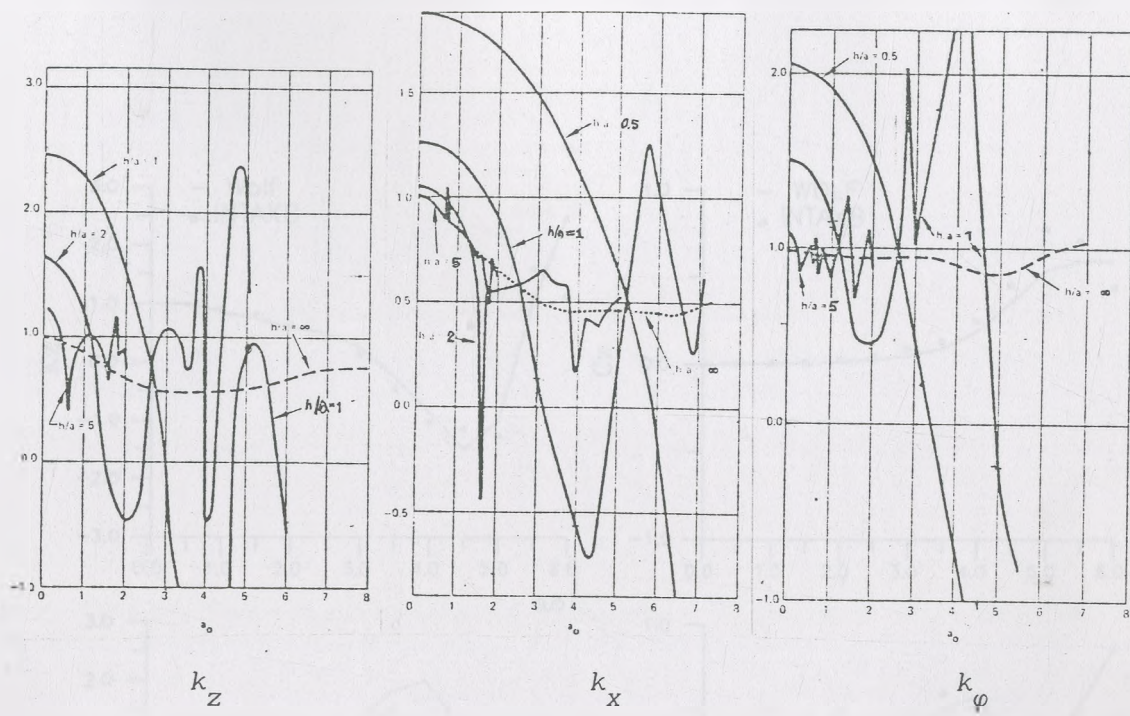


b) Koeficijent prigušenja

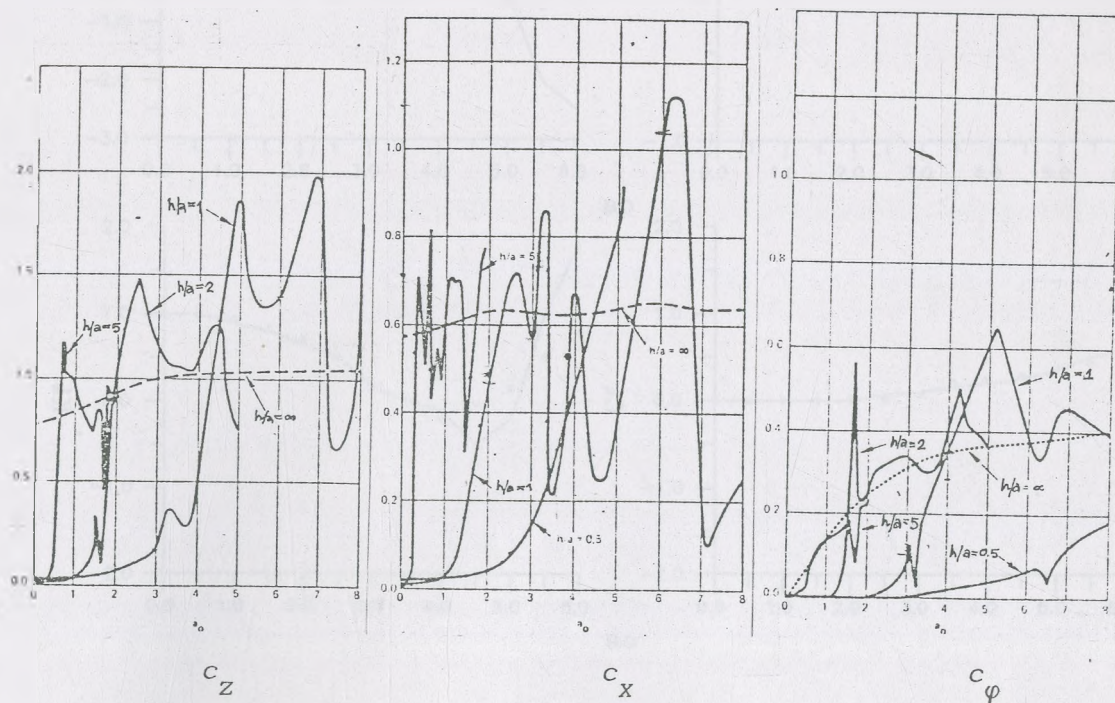
Disk nad krutom bazom (Wolf [129])

Slika 6-4

Za Model 1a urađen je proračun dinamičke krutosti sa i bez histerezisnog prigušenja. Za slučaj sa prigušenjem dobijaju se glatke krive, bez izrazitih pikova, što je uticalo da sve naredne analize sprovedemo sa koeficijentom histerezisnog prigušenja od 5%. Sa druge strane dobijene su niže vrednosti krutosti k_j i prigušenja c_j , što je u izvesnoj koliziji sa aproksimativnim postupkom koji se u praksi koristi. Kako je slične zaključke izveo i *Hadjian* [42] pitanje prigušenja u analizi interakcije ostaje otvoreno. Naime, mi smo prigušenje posmatrali na veoma uprošćenom modelu sa grubom mrežom konačnih elemenata, koji je služio da nam potvrdi ispravnost programa i matrice krutosti na granici, nikako i za finu parametarsku analizu.



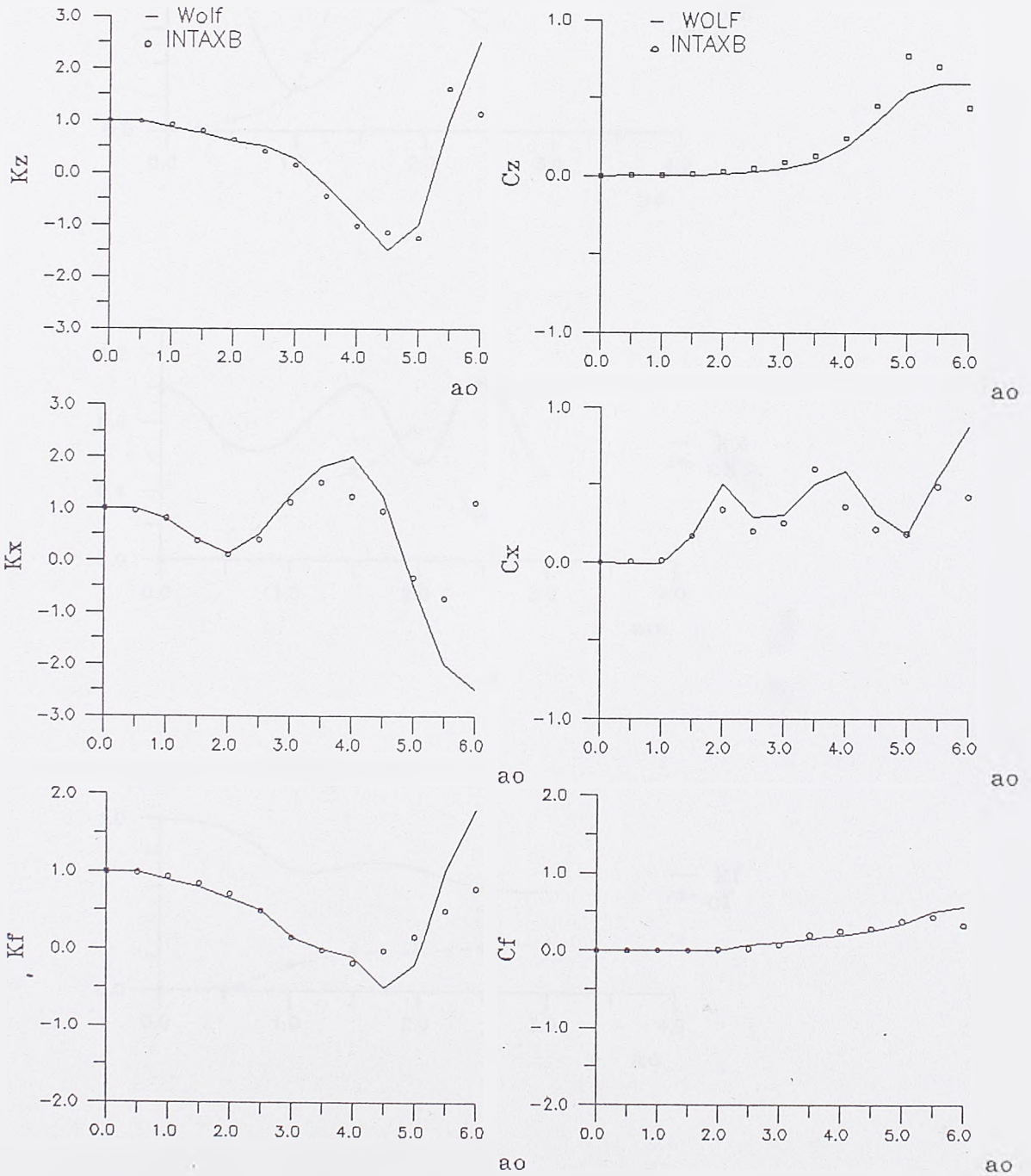
a) Koeficijenti krutosti



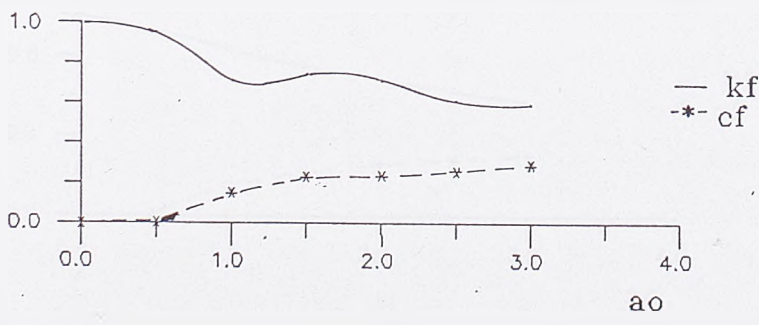
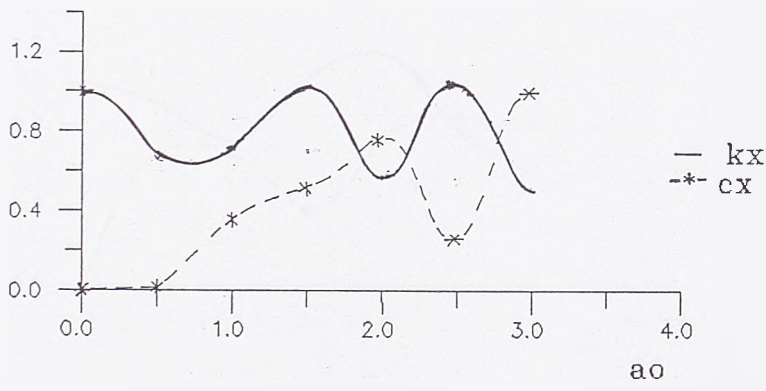
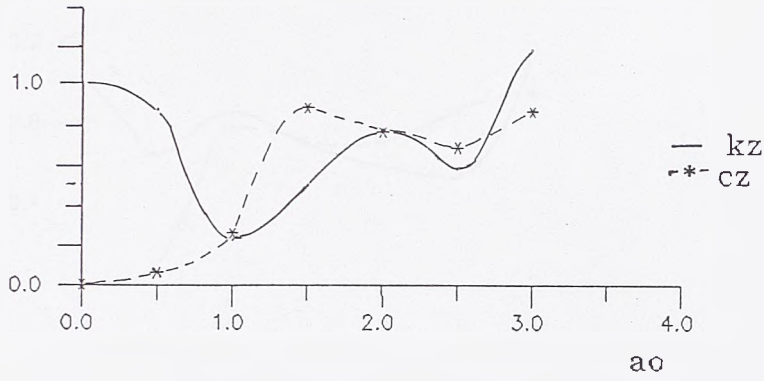
b) Koeficijenti prigušenja

Sloj na poluprostoru ($c_{s1}/c_{s2}=0.2$, $\nu_1=0.35$, $\nu_2=0.25$)

Slika 6-5

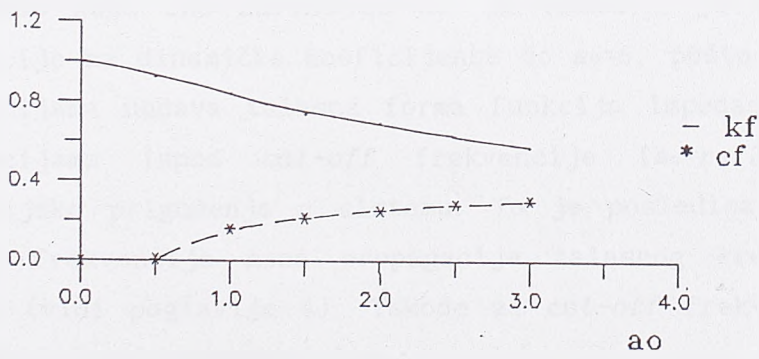
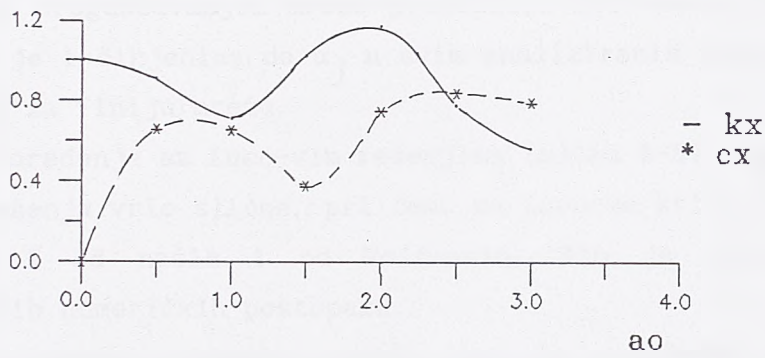
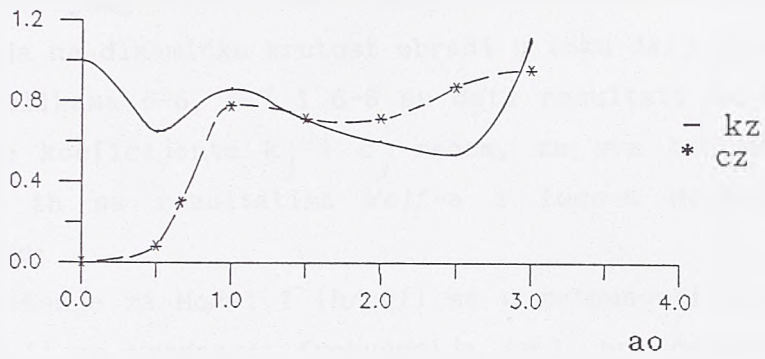


Model 1, fina mreža
 ($H/r=1$, $\xi=0.05$, $\nu=1/3$)



Model 2, fina mreža
 ($H/r=3$, $\xi=0.05$, $\nu=1/3$)

Slika 6-7



Model 3, fina mreža
 ($H/r=5$, $\xi=0.05$, $\nu=1/3$)

Slika 6-8

Uticaoj prigušenja se naročito manifestuje pri višim frekvencijama. Za visoke frekvencije izabrani model pak ne daje dovoljno dobre rezultate zbog nepovoljnog odnosa $\lambda/h \ll 1$. Stoga ostaje da se uticaoj histerezisnog prigušenja na dinamičku krutost obradi u toku daljeg rada.

Na slikama 6-6, 6-7 i 6-8 su dati rezultati za bezdimenzionalne dinamičke koeficijente k_j i c_j redom, za sva tri modela $H/r=1,3,5$. Poredeći ih sa rezultatima *Wolf*-a i *Luco*-a dolazimo do sledećih zaključaka:

1. Rešenje za Model 1 ($h/r=1$) se u potpunosti slaže sa *Wolf*-ovim (slika 6-4) za vrednosti frekvencija $a_2 < 3$, pri čemu smo dobili nešto veće koeficijente α_j , $j=x, \varphi, z$, tj. nešto veću dinamičku krutost. Smatramo da je to posledica relativno grube mreže konačnih elemenata i da bi se proglašavanjem mreže približili *Wolf*-ovom rešenju. U prilog tvrdnji je i činjenica da α_j u svim analiziranim slučajevima ima nižu vrednost za finiju mrežu.

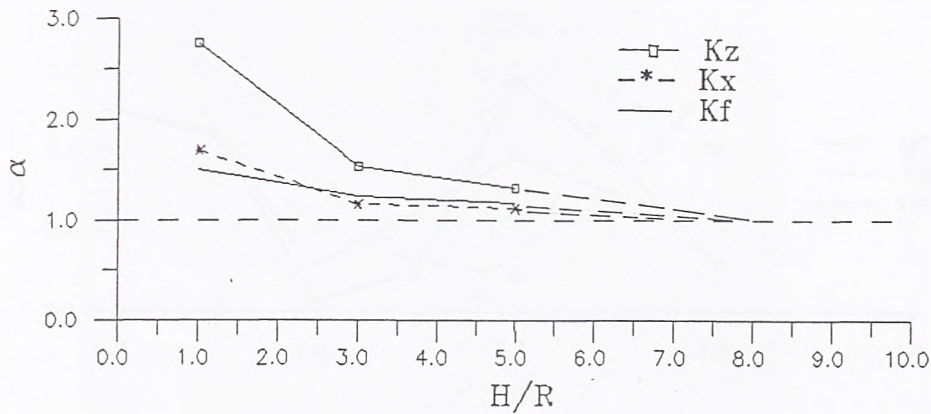
2. Poređenje sa *Luco*-vim rešenjima (slika 6-5), dovodi do zaključka da su rešenja vrlo slična, pri čemu su *Luco*-ve krive impedancije znatno oštrije i od naših i od *Wolf*-ovih, što je verovatno posledica različitih numeričkih postupaka..

3. Tačnost rešenja dovodi nas do zaključka da smo ispravno formulisali prenosnu granicu u cilindričnim koordinatama.

Pošto smo odredili krive impedancije, $k_j(a_0)$ i $c_j(a_0)$ pogledajmo kako one zavise od a_0 . Za Model 1 je analiziran uticaoj frekvencije na dinamičke koeficijente do $a_0=6$, pošto se tek pri višim frekvencijama uočava talasna forma funkcija impedancije. Naime, pri frakvencijama ispod *cut-off* frekvencije ($a_0=r\pi/2H$), ne postoji radijacijsko prigušenje u sistemu. To je posledica pojave da ispod *cut-off* frekvencije nema propagacije talasnog kretanja u sistemu slojeva (vidi poglavlje 4). Takođe za *cut-off* frekvenciju dolazi do pada koeficijenta krutosti k_j .

Navedene osobine su naročito uočljive kod Modela 2 ($H/r=3$). Minimalne vrednosti $k_j(a_0)$ odgovaraju svojstvenim frekvencijama sloja.

Sa porastom debljine sloja H rešenje se sve više približava onom za poluprostor (slika 6-4,a). Za $H/r=5$ funkcije impedancije u potpunosti odgovaraju rešenju za poluprostor, pri čemu je talasna forma više izražena kod translatorne komponente k_x . To je verovatno posledica veće širine elementa u pravcu radijusa $d_{el}=5>h_{el}$.



Slika 6-9

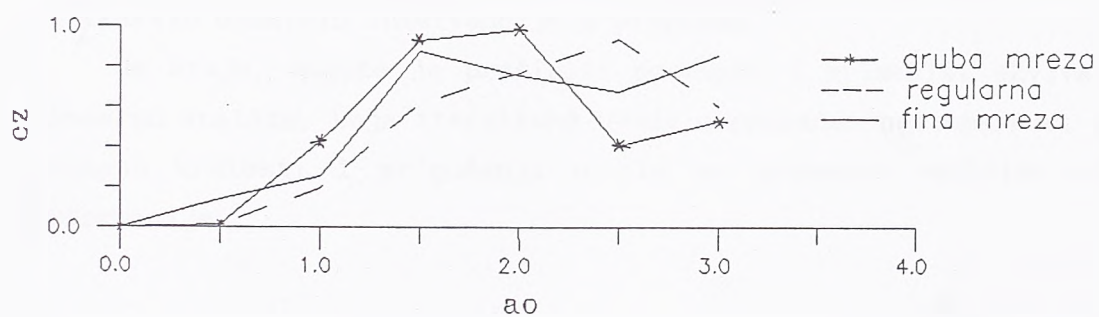
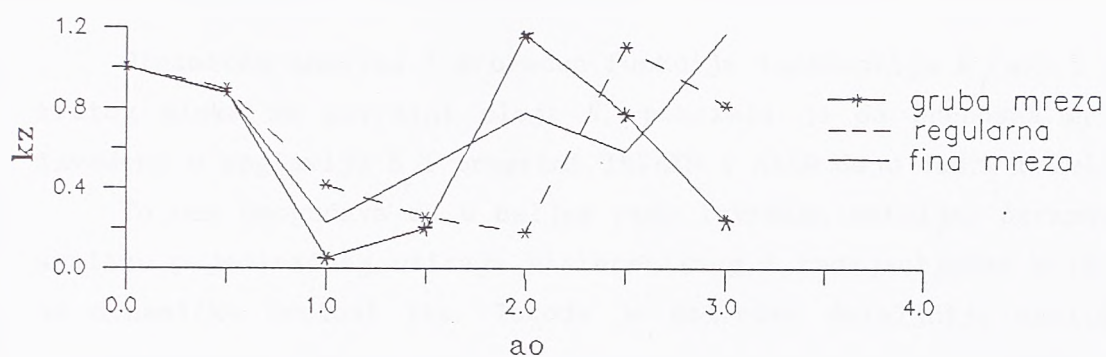
Na slici 6-9 je prikazana zavisnost odnosa statičkih krutosti sloja i poluprostora $\alpha_j = K_j(a_0=0)/K_j$ od debljine sloja, tj. od odnosa H/r . Vidimo da kriva zavisnosti konvergira ka jedinici, tj. ka rešenju za poluprostor, s tim da najveću osetljivost na dubinu fundiranja pokazuje koeficijent vertikalne krutosti k_z , dok su krutost na savijanje i smicanje znatno manje osetljivi. Za odnos $H/r=5$ rešenje za sloj je vrlo blisko rešenju za poluprostor. U svom radu *Luco* dolazi do istog zaključka. Daljom analizom je došao do istovetnih rešenja za sloj i poluprostor za odnos $H/r=8$. Iz slike 6-9 se jasno vidi da se produžetkom funkcija zavisnosti one seku sa jedinicom za isti taj odnos, tako da možemo izvesti isti zaključak i bez dodatne analize.

Uticaj dimenzije elementa je analiziran na Modelu 2, ($H/r=3$), za vertikalnu komponentu $k_z(a_0)$ tj. $c_z(a_0)$. Na slici 6-10 su prikazana rešenja za sva tri slučaja: grube, regularne i fine mreže.

Između fine i grube mreže se znatna odstupanja javljaju u koeficijentu krutosti $k_j(a_0)$ za $a_0 > 1$. Ako za tu vrednost frekvencije odredimo talasnu dužinu, dobija se da je:

$$\lambda = c_s \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi r}{a_0} \quad (6.24)$$

tj. $\lambda = 20\pi$. Kako je za grubu mrežu $\max h_{e1} = 15$, to je odnos $\lambda/h_{e1} \approx 1/4$. Iz toga možemo izvući zaključak da se zadovoljavajući rezultati mogu dobiti sve dok je talasna dužina 4 puta veća od dužine elementa. *Lysmer* predlaže stroži kriterijum, po kome dužina elementa može biti najviše $\lambda/6$ tj. $\lambda/8$. Pošto je isuviše neodređenih parametara u analizi

Model 2 ($H/r=3$)

Slika 6-10

interakcije tla i objekta smatramo da ne treba insistirati na previše finoj mreži i predlažemo da se u praktičnim problemima može koristiti maksimalna dimenzija elementa:

$$\max h_{el} = \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} \frac{r}{a_0} \quad (6.25)$$

tim pre što se za visoke frekvencije dobija mala visina elemenata, samim tim i velika mreža konačnih elemenata.

6.2.2. Zaključak

Dinamička analiza i proračun funkcija impedancije $k_j(a_0)$ i $c_j(a_0)$ krutog diska na površini sloja H , pokazala je da prenosna granica, izvedena u poglavlju 5 i programi INTAXB i AXYB daju dobre rezultate.

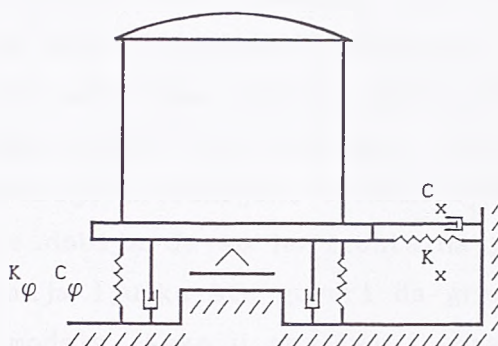
To nam omogućava da u daljem radu izvršimo detaljnu parametarsku analizu pojedinačnog uticaja histerezisnog i radijacijskog prigušenja na dinamičku krutost tla. Takođe je potrebno detaljnije analizirati uticaj širine elementa, koja je u ovom radu zadržana konstantnom.

U nastavku rada bi trebalo proširiti polaznu pretpostavku i na slučaj ukopanog fundamenta. Ovde dolazi do izražaja prednost MKE, koja samo zahteva formiranje novog modela i mreže konačnih elemenata, bez ikakvih dodatnih intervencija u programu.

Na kraju, moguće je proširiti postupak i primeniti ekvivalentnu linearnu analizu, koja iterativno uvodi u proračun nelinearnost tla tj. promenu krutosti i prigušenja u tlu sa promenom veličine smičuće deformacije.

6.3. Odgovor sistema primenom metode podstruktura

Odgovor rotaciono-simetričnog sistema tlo-objekat primenom metode podstruktura, svodi se na rešavanje dinamičke jednačine konstrukcije oslonjene na sistem opruga i prigušivača, čije su nam frekventne karakteristike poznate (slika 6-11).



Slika 6-11

U zavisnosti od programa kojima raspolažemo moguće je koristiti i različite nivoe proračuna za dobijanje željenog odgovora.

Danas, pre svega, najveću primenu ima MKE i to element za rotaciono simetričnu ljusku, kojim se jednostavno modelira objekat, ili element tanke ljuske kojim se formira mreža konačnih elemenata za ceo objekat, bez obzira na rotacionu simetriju. Prvi postupak, sa rotaciono simetričnim elementom ljuske, koji u velikoj meri olakšava primenu MKE, koristili su *Wilson* i *Ghosh* [124] za dinamičku analizu u vremenskom domenu, dok je detaljnu analizu dinamičkog odgovora rotaciono-simetričnih ljuski primenom MKE dao *Gould* [36]. On je razvio niz postupaka za dinamičku analizu rashladnih tornjeva, između ostalog i metodu podstruktura. Pri tome je koristio različite metode za određivanje funkcija impedancije. Do odgovora sistema je uglavnom dolazio analizom u frekventnom domenu [32], [33], [137], [138].

Pored potpune dinamičke analize primenom MKE, koja nam bez posedovanja potrebnih programa nije ni dostupna, moguće je u analizi interakcije tla i rotaciono-simetričnih objekata koristiti i aproksimativne metode.

Brojni radovi pokazuju da se rotaciono-simetrične ljuske mogu uspešno aproksimirati konzolom sa koncentrisanim masama. Tu pre svega, mislimo na dimnjake, vodotornjeve, rashladne kule, zgrade nuklearnih

elektrana i sl. Između niza radova ističemo studiju *Wolf*-a [129] i [125]. Upoređujući rezultate, za zaštitnu ljusku nuklearnog reaktora visine $h=63$ m, dobijene MKE i metodom konzole sa koncentrisanim masama, *Wolf* je pokazao da se rezultati gotovo ne razlikuju. Pri tome je koristio model ljuske sa 36 izoprametarskih rotaciono-simetričnih elemenata višeg reda (prvi i nulti harmonik), sa jedne strane i gredni element sa druge strane. Za dinamičku analizu je bilo dovoljno podeliti reaktor na samo 14 grednih elemenata. Poredeći svojstvene frekvencije prva dva harmonika dobjeno je da svojstvene frekvencije linijskog modela imaju nešto više vrednosti, ali da su te razlike pri nižim tonovima zanemarljive (linijski element: $\omega_1=4.41$, element ljuske: $\omega_1=4.338$). Takođe se dobija da su horizontalna pomeranja grede manja od radijalnih pomeranja ljuske što govori da gredni element doprinosi povećanju krutosti modela. Kako u analizi interakcije tla i objekta, za slučaj horizontalnog pomeranja osnove, samo niži tonovi utiču bitno na odgovor sistema, to *Wolf* zaključuje da se navedeni tip ljuske može uspešno aproksimirati konzolom sa koncentrisanim masama. Time se, naravno, znatno pojednostavljuje dinamička analiza.

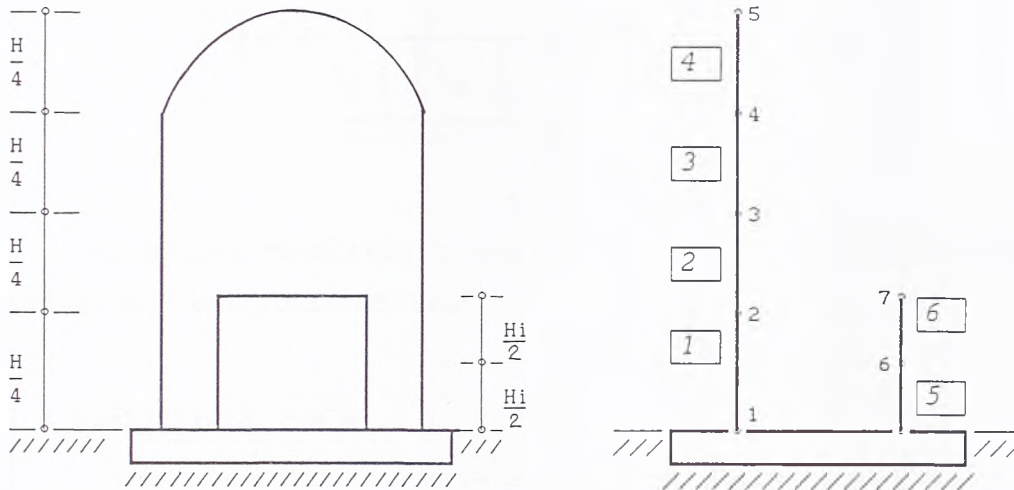
Pored ovog postupka *Wolf*, u istim radovima, predlaže jednostavnu metodu za preliminarnu analizu interakcije tla i objekta, poznatu pod imenom ekvivalentna metoda, koja se sastoji u tome da se objekat posmatra kao krut, fundiran na tlu odrednih karakteristika. Postupak su prvi predložili *Veletsos* i *MEEK* [118], 1974., za sistem sa jednim stepenom slobode pomeranja, da bi ga kasnije niz autora prihvatio i proširio na sisteme sa više stepeni slobode pomeranja *Bielak* [14], *Kausel i dr.* [61], *Roesset i dr.* [97].

Imajući pred nama sve mogućnosti, sa jedne strane, nismo bili u mogućnosti da primenimo sva tri navedena nivoa analize problema interakcije tla i rotaciono simetričnih struktura, sa druge. Uzrok je nepostojanje programa za rotaciono-simetrične ljuske na koji bi mogli implementirati funkcije impedancije određene programom INTAXB i tako primenom metode podstruktura rešiti problem interakcije tla i objekta. Stoga smo se odlučili da problem interakcije rešimo primenom metode podstruktura u kojoj smo dinamičke karakteristike tla odredili primenom MKE i prenosne granice, dok ćemo objekat analizirati korišćenjem:

1. ekvivalentne metode sa 2 stepena slobode pomeranja;

2. metode sa koncentrisanim masama, primenom programa SUPERSAP.

U oba slučaja smo analizirali zaštitni betonski omotač nuklearnog reaktora [113]. Prema autoru rada nazvaćemo ga model Tsai.



Model Tsai [113]

Slika 6-12

6.3.1. Ekvivalentna metoda

U prvom slučaju je urađena parametarska studija zgrade nuklearnog reaktora fundiranog na "mekom" tlu i "tvrdom" tlu primenom ekvivalentne metode.

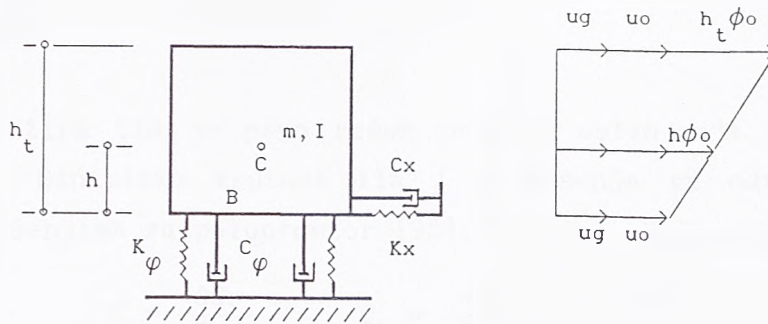
Suština postupka se sastoji u tome da se do odgovora beskonačno krutog objekta dolazi rešavanjem jednačina ravnoteže sila i momenata u odnosu na tačku *B* (slika 6-13).

U uslovima dinamičke ravnoteže pored inercijalnih sila učestvuju i reaktivne sile tla: horizontalna sila i moment:

$$P_x = K_x u_o + C_x \dot{u}_o = K_x (1 + 2i\xi_x + 2i\xi_h) u_o \quad (6.26.1)$$

$$M_\varphi = K_\varphi \phi_o + C_\varphi \dot{\phi}_o = K_\varphi (1 + 2i\xi_\varphi + 2i\xi_h) \phi_o \quad (6.26.2)$$

gde je u_o horizontalno pomeranje baze, ϕ_o obrtanje baze, ξ_x i ξ_φ komponente radijacijskog prigušenja a ξ_h materijalno (histerezisno prigušenje) u tlu.



Slika 6-13

Iz uslova ravnoteže u odnosu na B dobija se dinamička jednačina kretanja u matričnim obliku:

$$\begin{bmatrix} K_x(1+2i\xi_x+2i\xi_h) - \omega^2 m & -\omega^2 m h \\ -\omega^2 m h & K_\varphi(1+2i\xi_\varphi+2i\xi_h) - \omega^2(mh^2+I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_o \\ \phi_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\omega^2 \\ m\omega^2 h \end{bmatrix} u_g \quad (6.27)$$

gde je m masa objekta, I moment inercije mase oko težišta C , h visina težišta u odnosu na B , a u_g zadato pomeranje osnove.

Iz jednačine (6.27) sledi direktno jednačina svojstvenih vrednosti:

$$\left\{ \begin{bmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_\varphi \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m & mh \\ mh & I + mh^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_o \\ \phi_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

gde je $D_j = (1+2i\xi_j+2i\xi_h)$ dinamička krutost, za $j=x, \varphi$.

Model Tsai je analiziran za dva tipa tla različite krutosti i za tri slučaja odnosa dubine fundiranja i poluprečnika $d/r=1, 3, \infty$. Podaci o modelu i karakteristike tla date su u tabeli 6-1.

Tabela 6-1

konstrukcija			tlo			
m	KNsec ² /m	58990.6		meko	tvrd	
I_o	KNmsec ²	49335 10^3	G	MN/m ²	120	3380
h	m	25.03	ρ	KNs ² /m ⁴	1.76	2.0
ht	m	85.65	ν		1/3	1/3
r	m	19.0	c_s	m/s	260	1300

a) Poluprostor

Za oba tipa tla je prvo rešen problem oslanjanja na elastičan poluprostor. Dinamička krutost tla i prigušenje su određeni prema poznatima rešenjima za poluprostor [95], *Richart, Hall i Woods*:

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{8Gr}{1-\nu} & C_x &= \frac{4.6}{2-\nu} \rho c_s r^3 \\ K_\varphi &= \frac{8Gr^3}{3(1-\nu)} & C_\varphi &= \frac{0.4}{1-\nu} \rho c_s r^4 \end{aligned} \quad (6.29)$$

Ovako definisano prigušenje je tzv. radijacijsko prigušenje u kome gubitak energije usled unutrašnjeg trenja čestica tla nije uzeto u obzir (materijalno prigušenje).

U tabeli 6.2. su date vrednosti dinamičkih parametara tla. Ako analiziramo radijacijsko prigušenje poluprostora, vidimo da je koeficijent radijacijskog prigušenja za "meko" tlo pri translaciji $\xi_x = C_x / 2K_x = 2\%$, znatno veći od koeficijenta pri rotaciji $\xi_\varphi = C_\varphi / 2K_\varphi = 0.54\%$. Taj odnos je isti i za "tvrdo" tlo, pri čemu su vrednosti radijacijskog prigušenja za "tvrdo" tlo znatno niže (pet puta): $\xi_x = 0.4\%$ i $\xi_\varphi = 0.1\%$.

Sa ovako definisanim dinamičkim karakteristikama tla odredili smo svojstvene vrednosti združenog sistema ω_1 i ω_2 , prema (6.28), i bezdimenzionalne frekvencije a_{o1} i a_{o2} (tabela 6-2), gde je $a_o = \omega r / c_s$. Svojstvene frekvencije za "meko" tlo su znatno niže (oko pet puta) nego za "tvrdo" tlo, tj. period oscilovanja združenog sistema za slučaj "mekog" tla je znatno duži.

Za slučaj elastičnog poluprostora, krutosti i prigušenja (6.29) ne zavise od frekvencije ω , pa su koeficijenti jednačine (6.27) konstantni. Ta činjenica u mnogome olakšava rešavanje problema. Do odgovora ekvivalentnog sistema dolazimo rešavanjem dinamičke jednačine (6.27) za svako ω iz posmatranog spektra po nepoznatim: relativno pomeranje baze u_o i rotacija baze ϕ_o . Dinamičku jednačinu smo rešavali za slučaj kada ne postoji materijalno prigušenje u tlu $\xi_h = 0$ i kada ono postoji i iznosi 5%. Sve vrednosti su sračunate u odnosu na zadato pomeranje osnove u_g , a za vrednosti a_o od 0 do 5. U tabeli 6-2 su date maksimalne vrednosti amplifikacije pomeranja baze u_o/u_g i vrha konstrukcije usled rotacije $h_i \phi_o/u_g$.

Prednost prikazivanja pomeranja u funkciji bezdimenzionalne frekvencije je u tome da se dobijaju funkcije pomeranja nezavisne od krutosti. Naime, crtajući vrednosti odnosa apsolutnih pomeranja $|u_0|/|u_g|$, $|ht\phi_0|/|u_g|$ i $|u_0+ht\phi_0|/|u_g|$ u funkciji od a_0 dobijene su gotovo identične krive za "meko" i "tvrdo" tlo. Stoga smo na slici 6-14 a) prikazali samo funkciju $|u_0|/|u_g|$ za "meko" tlo sa i bez histerezisnog prigušenja. Na grafiku se jasno vide dva pika koja odgovaraju svojstvenim frekvencijama sistema. Takode je jasno uočljiva redukcija vrednosti za slučaj kada materijalno prigušenje tla uzimamo u obzir.

b) Sloj nad krutom bazom

Za druga dva slučaja oslanjanja konstrukcije, na sloj tla iznad krute baze, kada je $d/r=1$ i $d/r=3$, postupak rešavanja jednačine (6.27) se komplikuje. Koeficijenti dinamičke jednačine nisu više konstantne vrednosti već zavise od frekvencije ω : $K_x(\omega)$, $C_x(\omega)$, $K_\varphi(\omega)$, $C_\varphi(\omega)$. To znači da za svako ω treba prvo odrediti vrednosti dinamičke krutosti i prigušenja tla, pa pristupiti rešavanju sistema. Čak i kod ovako jednostavnih modela, sa malim brojem nepoznatih, postupak je komplikovan. Pokazalo se da se zadovoljavajući rezultati dobijaju za vrednost ω koja odgovara svojstvenoj vrednosti sistema ω_1 . Metoda je u literaturi poznata pod imenom metoda konstantnih parametara a prvi ju je primenio *Veletsos* [118], 1974. Danas se uglavnom ona i koristi u metodi podstruktura.

Primenjujući izloženi algoritam, primenom programa INTAXB i AXYB odredili smo dinamičke parametre tla za vrednost osnovne svojstvene frekvencije združenog sistema ω_1 . Pri tome je ω_1 određena iz dve iteracije, polazeći od parametara tla za poluprostor (6.29) i to za sva četiri slučaja $d/r=1,3$, "meko"/"tvrdo" tlo. U tabeli 6-2 su date vrednosti parametara tla i svojstvene frekvencije združenog sistema, kao i odgovarajuće bezdimenzionalne frekvencije a_0 , za sve analizirane slučajeve.

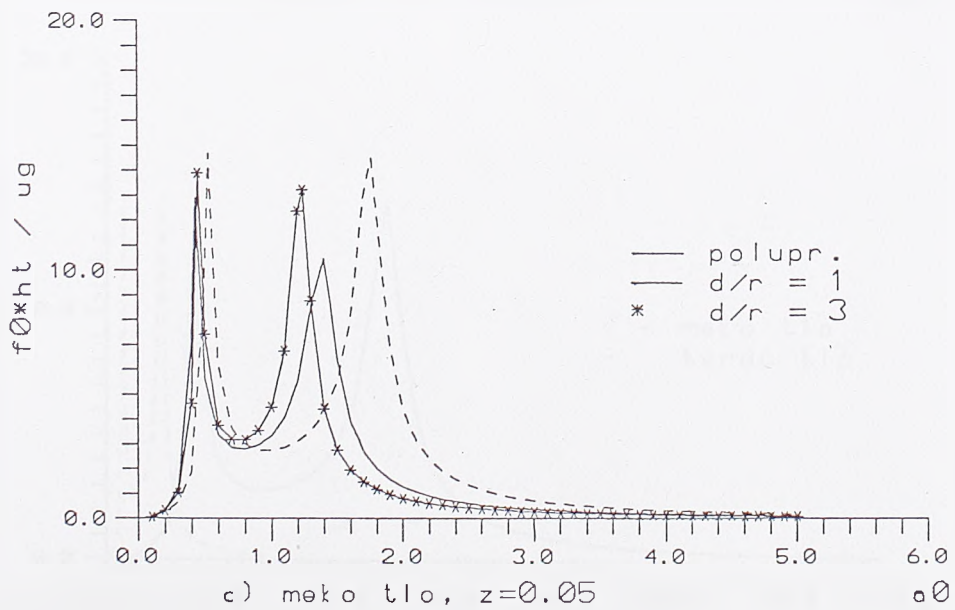
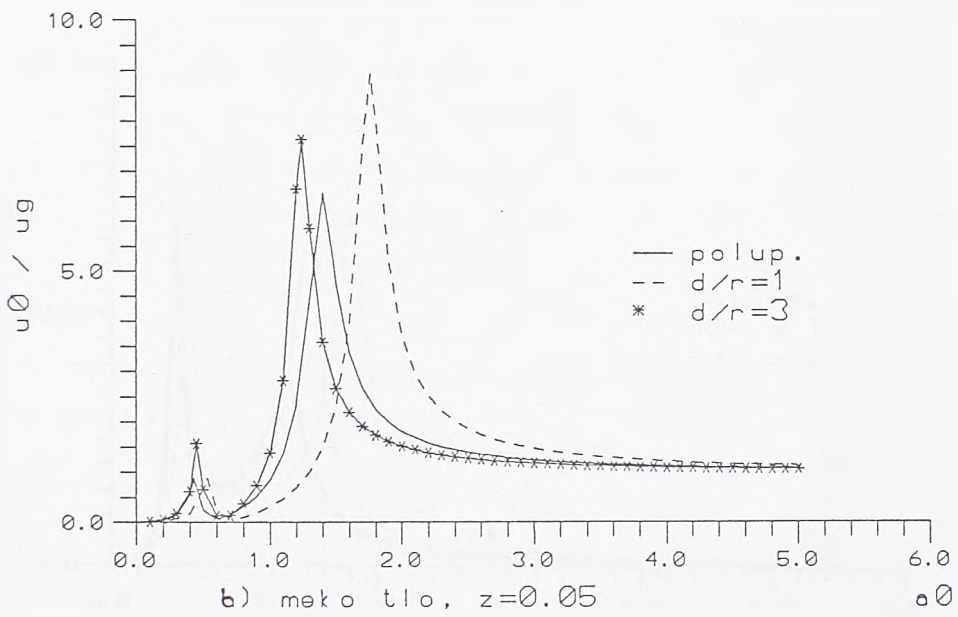
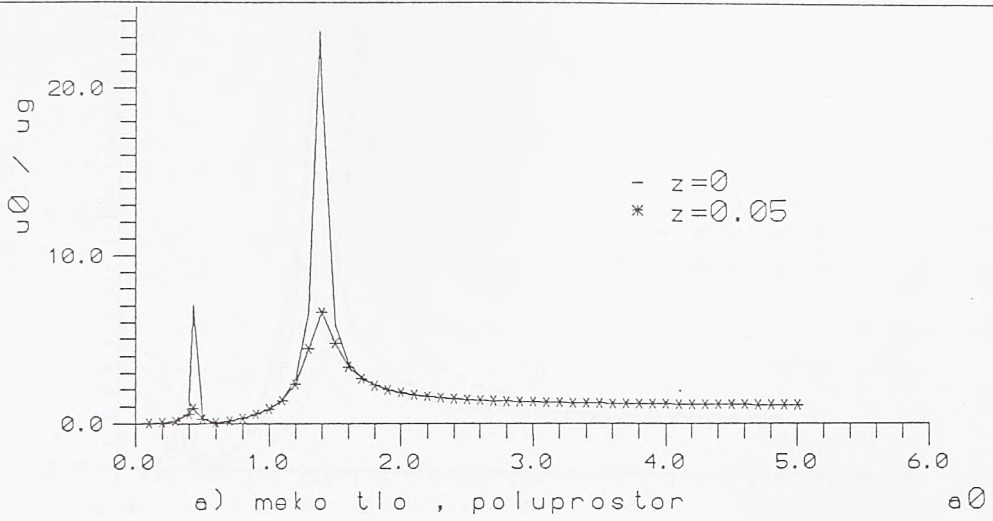
Tabela 6-2

	d/r=1		d/r=3		poluprostor	
	meko tlo	tvrdno tlo	meko tlo	tvrdno tlo	meko tlo	tvrdno tlo
$K_x(GN/m)$	17.67	465.0	8.187	235.0	10.942	308.2
$C_x(GN/m)$	0.0462	1.919	0.1015	2.967	0.4558	0.259
$K_\varphi(GNm/rad)$	4861.0	136300	3828.0	108500	3290.0	92730
$C_\varphi(GNm/rad)$	4.935	180.8	7.784	228.1	35.760	203.2
ω_1	7.198	38.5	6.261	33.07	5.890	31.273
ω_1	23.94	130.17	17.415	91.21	18.884	100.4
a_{01}	0.256	0.562	0.458	0.483	0.430	0.457
a_{02}	1.749	1.900	1.273	1.333	1.380	1.464

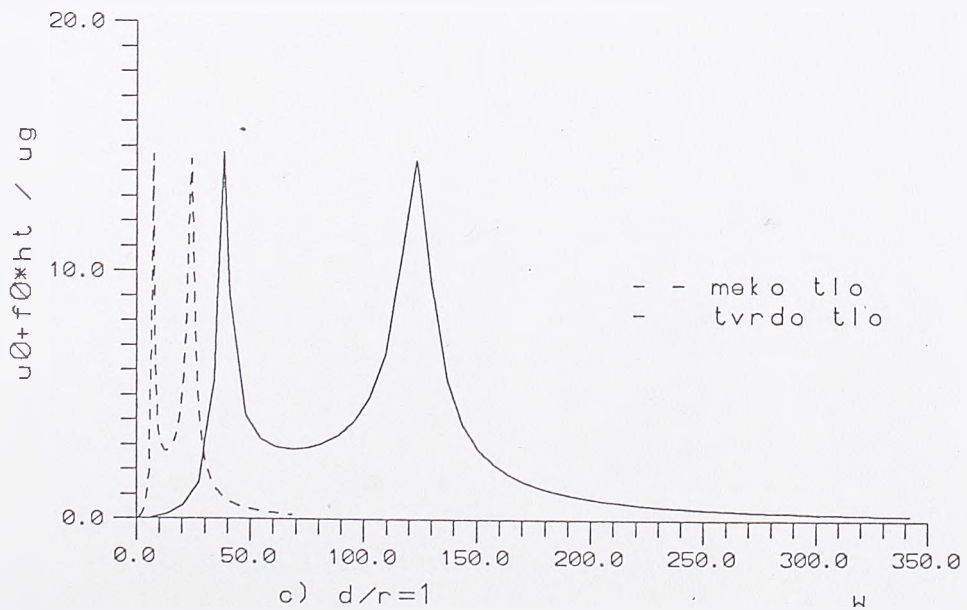
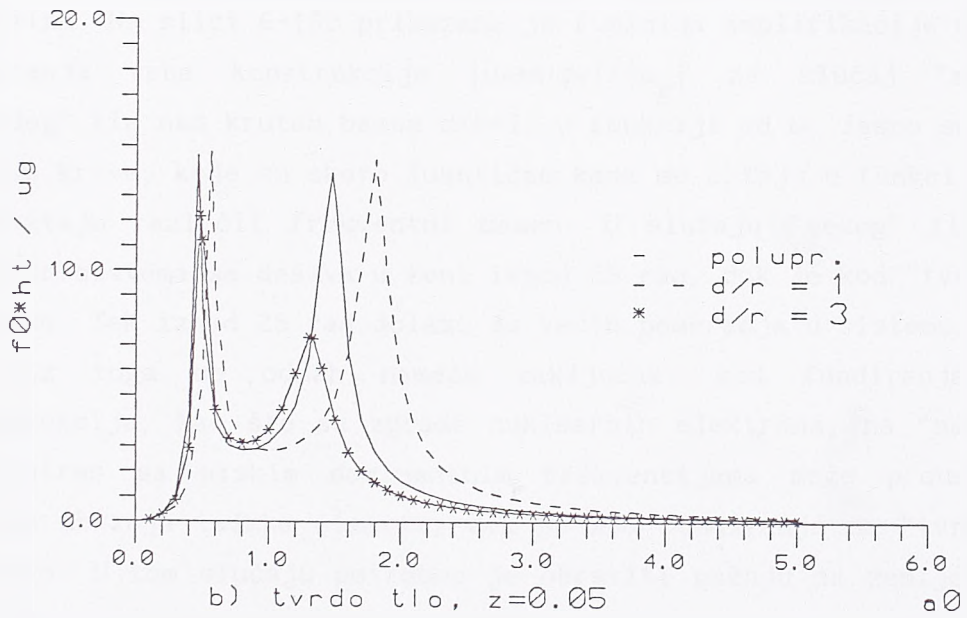
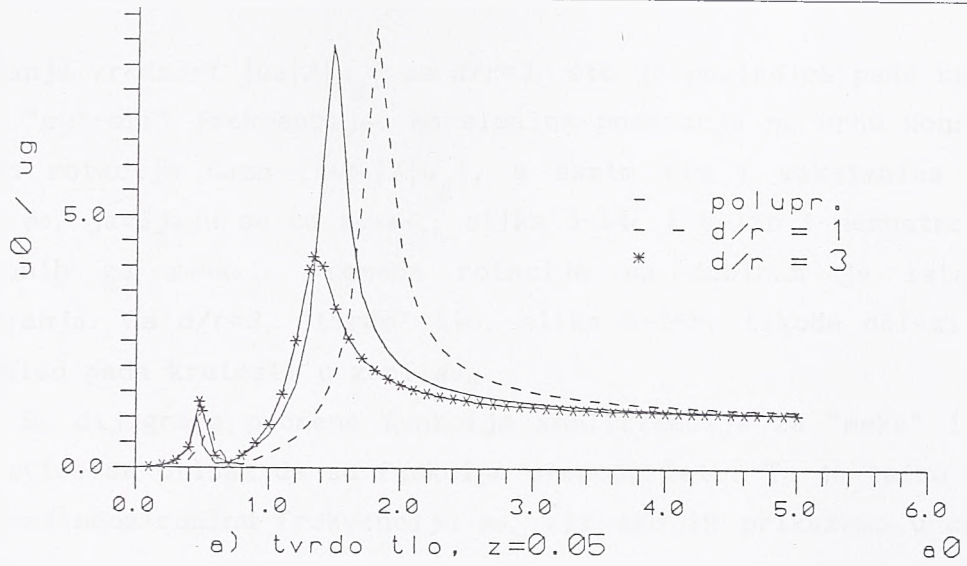
Poređenjem krutosti i radijacijskog prigušenja u tlu vidimo da je za $d/r=1$ krutost sloja veća od krutosti poluprostora istih karakteristika, dok je radijacijsko prigušenje manje. Za slučaj sloja kod koga je $d/r=3$ svojstvena frekvencija združenog sistema za slučaj "mekog" tla je bliska "cut-off" frekvenciji sloja. Zbog toga je došlo do pada smičuće krutosti. Pojava pada krutosti sistema u zoni oko "cut-off" frekvencije, gde inače ne postoji radijacijsko prigušenje koje bi smanjilo odgovor sistema, je rizična i zahteva pažljivu i detaljnu analizu takvih sistema, primenom finijih metoda analize. U poslednje vreme ta pojava postaje predmet većih razmatranja [132]. Na dijagramu promene dinamičke krutosti sa frekvencijom za $d/r=3$ (slika 6-7) vidi se pad krutosti za $\omega=\omega_1$.

Sa tako definisanim parametrima tla odredili smo nepoznata pomeranja u_0 i ϕ_0 za $a_0=0.5$, sa priraštajem $\Delta a_0=0.01$, kako bi uhvatili ekstremne vrednosti funkcija pomeranja. Proračun je sproveden za $\xi_h=0$ i $\xi_h=0.05$. Za sve slučajeve su dobijene vrlo visoke vrednosti amplifikacije za frekvencije koje odgovaraju svojstvenim frekvencijama sistema a_{01} i a_{02} . Zbog toga smo na slikama 6-14, i 6-15 prikazali samo vrednosti funkcija amplifikacije $|u_0|/|u_g|$ i $|h\phi_0|/|u_g|$ za $\xi_h=0.05$.

Na slici 6-14b i 6-15a su uporedno prikazane funkcije $|u_0|/|u_g|$ za "meko" i "tvrdno" tlo a za odnos $d/r=1,3,\infty$. Najveće vrednosti pomeranja baze se dobijaju, u oba slučaja, za frekvenciju blisku a_{02} za $d/r=1$. To je posledica prisustva krute baze na dubini r , koja maksimalno amplifikuje pomeranje tla. Za slučaj "mekog" tla najmanja amplifikacija je za poluprostor slika 6-14b, dok je za "tvrdno" tlo



Slika 6-14



Slika 6-15

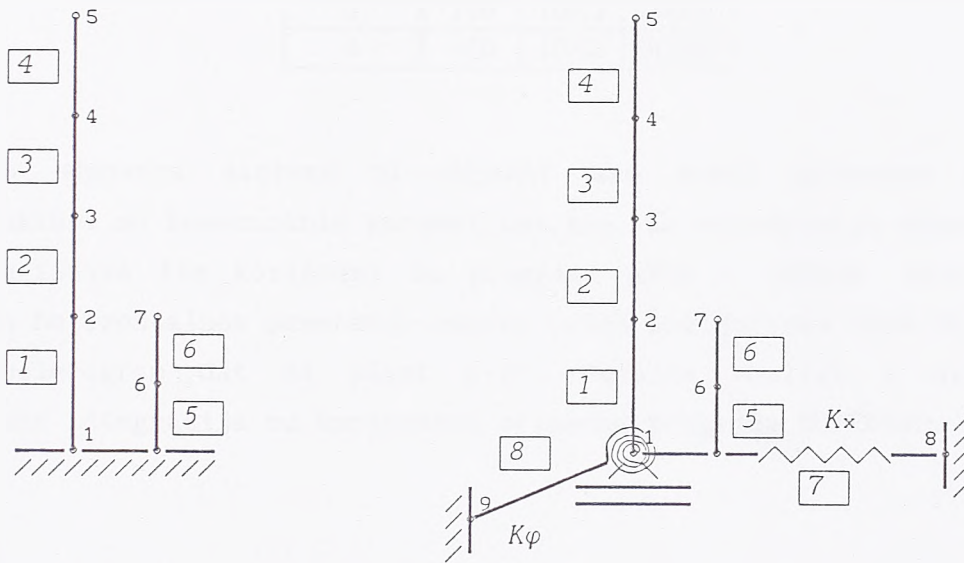
najmanja vrednost $|u_0|/|u_g|$ za $d/r=3$, što je posledica pada krutosti u zoni "cut-off" frekvencije. Maksimalna pomeranja na vrhu konstrukcije usled rotacije baze $|ht\phi_0|/|u_g|$, a samim tim i maksimalna rotacija baze ϕ_0 , javljaju se za $a_0=a_{01}$, slika 6-14c i 6-15b i neznatno su veća od onih za $a_0=a_{02}$. Promena rotacije sa dubinom je ista kao i pomeranja. Za $d/r=3$, "tvrdo" tlo, slika 6-15b, takođe dolazi do pada ϕ_0 usled pada krutosti u zoni a_{02} .

Sa dijagrama promene funkcija amplifikacije za "meko" i "tvrdo" tlo stiže se utisak da su funkcije promene iste. To je tačno u odnosu na bezdimenzionalnu frekvenciju a_0 , ali ako ih prikažemo u odnosu na frekvenciju ω , videćemo da se one kreću u različitim frekventnim opsezima. Na slici 6-15c prikazana je funkcija amplifikacije ukupnog pomeranja vrha konstrukcije $|u_0+ht\phi_0|/|u_g|$ za slučaj "mekog" i "tvrdog" tla nad krutom bazom $d/r=1$, u funkciji od ω . Jasno se vidi da te dve krive, koje su skoro identične kada se crtaju u funkciji od a_0 , oduhvataju različit frekventni domen. U slučaju "mekog" tla, čitav odgovor sistema se dešava u zoni ispod 35 rad , dok je kod "tvrdog" tla obratno. Tek iznad 25 rad dolazi do većih pomeranja u sistemu.

Iz toga se odmah nameće zaključak: kod fundiranja krutih konstrukcija, kao što su zgrade nuklearnih elektrana, na "mekom" tlu zemljotres sa niskim dominantnim frekvencijama može prouzrokovati velika ubrznja tačaka sistema, dok je kod fundiranja na "tvrdom" tlu obrnuto. U tom slučaju potrebno je obratiti pažnju na zemljotrese sa visokim frekventnim karakteristikama.

6.3.2. Metoda koncentrisanih masa

Isti model je analiziran i kao konzola sa koncentrisanim masama (slika 6-16), oslonjena na krutu bazu i sloj nad krutom bazom odnosa $d/r=3$, za slučaj "mekog" i "krutog" tla.



a) kruto uklještena konzola

b) elastično uklještena konzola

Slika 6-16

Podaci o geometriji modela dati su u tabelama 6-3 i 6-4.

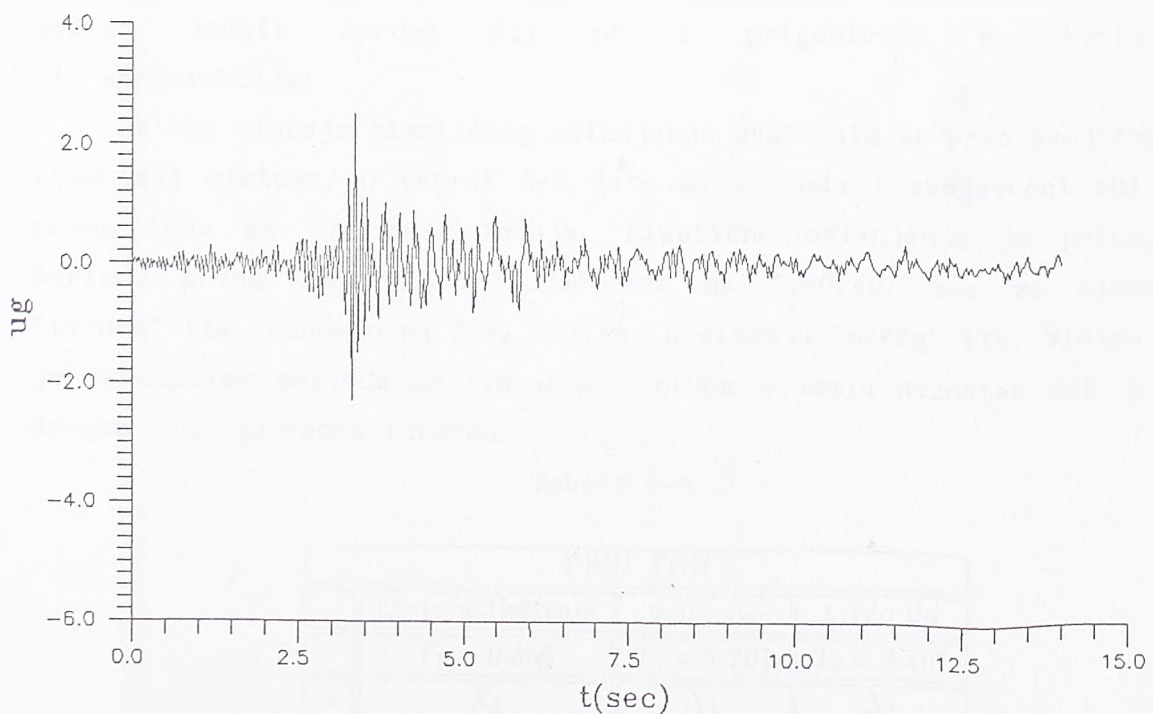
Tabela 6-3

i	h_i (m)	m_i (MN sec ² /m)	I_{mi} (MN sec ² m)
1	0	20.5068	2129.0
2	21.4	7.4408	1396.0
3	42.8	7.4408	1396.0
4	64.25	7.4408	1396.0
5	85.65	3.7204	696.8
6	12.2	8.3039	306.8
7	24.4	4.1371	181.1

Tabela 6-4

element	F_i (m^2)	F_{si} (m^2)	I_{yi} (m^4)
1	195	97.5	36422
2	195	97.5	36422
3	195	97.5	36422
4	195	97.5	36422
5	140	108.2	30000
6	140	108.2	30000

Do odgovora sistema tlo-objekat smo došli primenom metode podstruktura sa konstantnim parametrima tla. Za određivanje dinamičkih karakteristika tla korišćeni su programi AXYB i INTAXB. Sistem je izložen horizontalnom pomeranju osnove usled zemljotresa IRAN 90, čiji je akcelerogram dat na slici 6-17. Modalna analiza i direktna vremenska integracija su sprovedene primenom programa SUPERSAP.



Slika 6-17

Primenom programa SUPERSAP, određene su svojstvene vrednosti kruto uklještene konstrukcije, čije su mase koncentrisane u čvorovima. Zbog relativno velikog poluprečnika uzet je u obzir i moment inercije mase I_m oko ose. Dobijena je kružna frekvencija prvog tona $\omega_1=17.173$ rad i period oscilovanja $T_1=0.356$ sec. Za tako dobijenu osnovnu frekvenciju programima AXYB i INTAXB su sračunate vrednosti dinamičkih parametara za "meko" i "tvrdo" tlo. Dobijene su sledeće vrednosti:

$$\begin{aligned} \text{"meko tlo"} & \quad \left\{ \begin{array}{ll} K_x = 9.01210^6 \text{ Kn/m} & C_x = 4.22710^6 \text{ KN/m} \\ K_\varphi = 2.88210^9 \text{ KNm/rad} & C_\varphi = 0.60310^9 \text{ KNm/rad} \end{array} \right. \\ \text{"tvrdo tlo"} & \quad \left\{ \begin{array}{ll} K_x = 3.003 \cdot 10^8 \text{ Kn/m} & C_x = 1.430 \cdot 10^6 \text{ KN/m} \\ K_\varphi = 1.118 \cdot 10^{11} \text{ KNm/rad} & C_\varphi = 1.141 \cdot 10^8 \text{ KNm/rad} \end{array} \right. \end{aligned}$$

U okviru programa SUPERSAP postoje tzv. granični elementi, pomoću kojih možemo uzeti u obzir uticaj elastičnog oslanjanja, direktnim zadavanjem krutosti. Međutim, potpuna analiza interakcije, sa svim njenim osobenostima, nije moguća zato što program nema opciju direktnog zadavanja radijacijskog prigušenja. Ukratko, SUPERSAP-om možemo zadati opruge ali ne i prigušivače na kontaktu tlo-konstrukcija.

Za oba slučaja elastičnog oslanjanja sračunate su prvo svojstvene vrednosti sistema. U tabeli 6-5 date su periode i svojstveni oblici prvog tona za sva tri slučaja. Elastično oslanjanja je povećalo periodu prvog tona sa $T_1=0.356$ sec na $T_1=0.407$ sec za slučaj "tvrdog" tla, odnosno na $T_1=1.201$ sec u slučaju "mekog" tla. Vidimo da je produžetak perioda oscilovanja u prvom slučaju neznan dok je u drugom slučaju veoma izražen.

Tabela 6-5

PRVI TON			
	kruto uklještenje	meko tlo	tvrdo tlo
	$T_1 = 0.356$	$T_1 = 1.201$	$T_1 = 0.407$
i	X_1	X_1	X_1
5	1.000	1.000	1.000
4	0.725	0.764	0.731
3	0.430	0.524	0.449
2	0.197	0.317	0.222
1	0.000	0.060	0.012

Sa tako dobijenim svojstvenim vrednostima sračunati su koeficijenti α i β Rayleigh-eve matrice prigušenja:

$$C = \alpha M + \beta K \quad (6.30)$$

$$\alpha = \frac{2\xi\omega_1\omega_2}{\omega_1+\omega_2} \quad \beta = \frac{2\xi}{\omega_1+\omega_2} \quad (6.31)$$

gde je $\xi=0.05$ usvojeni koeficijent modalnog prigušenja, a ω_1 i ω_2 svojstvene frekvencije I i II tona.

Sa tako definisanom matricom prigušenja odredili smo dinamički odgovor sistema "step-by-step" integracijom za oba slučaja elastičnog oslanjanja. Dužina trajanja zemljotresa je $T=14$ sec sa inkrementom $\Delta t=0.02$ sec.

U tabeli 6-6 su date maksimalne vrednosti pomeranja tačaka baze, na vrhu konstrukcije i na vrhu unutrašnje konstrukcije: 1,5,7. Maksimalno pomeranje tačke 5 u slučaju mekog tla javlja se u trenutku $t=7.86$ sec, a u slučaju tvrdog tla u trenutku $t=7.72$ sec.

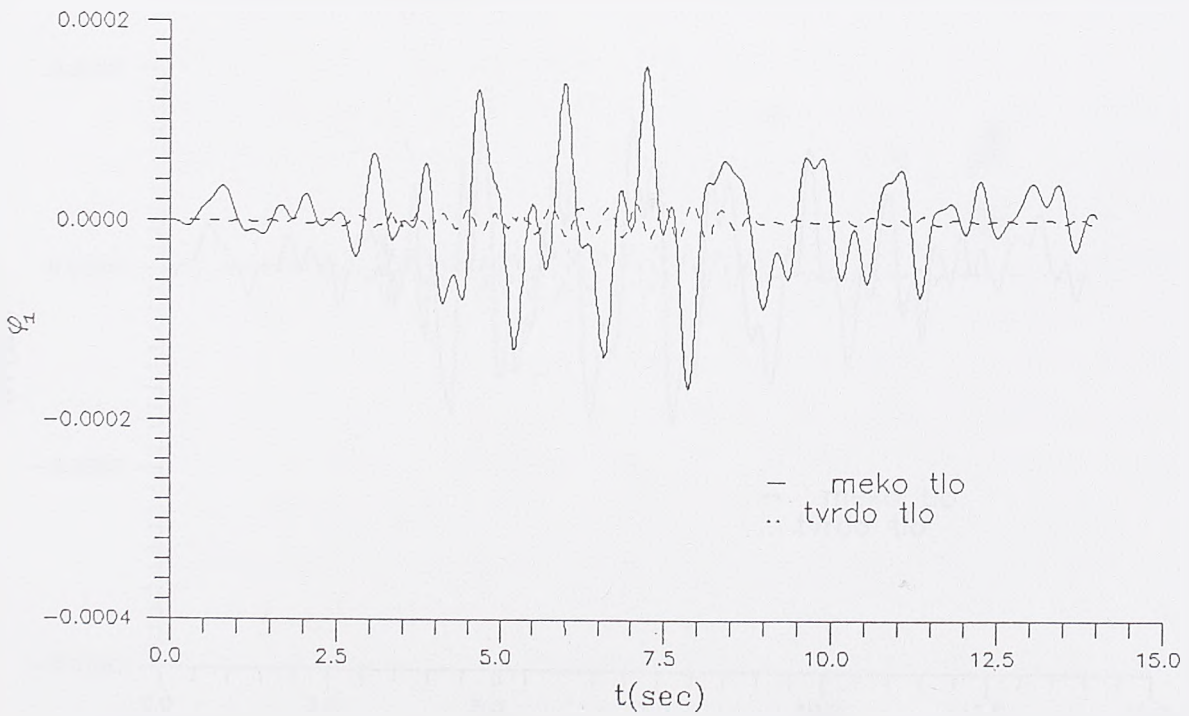
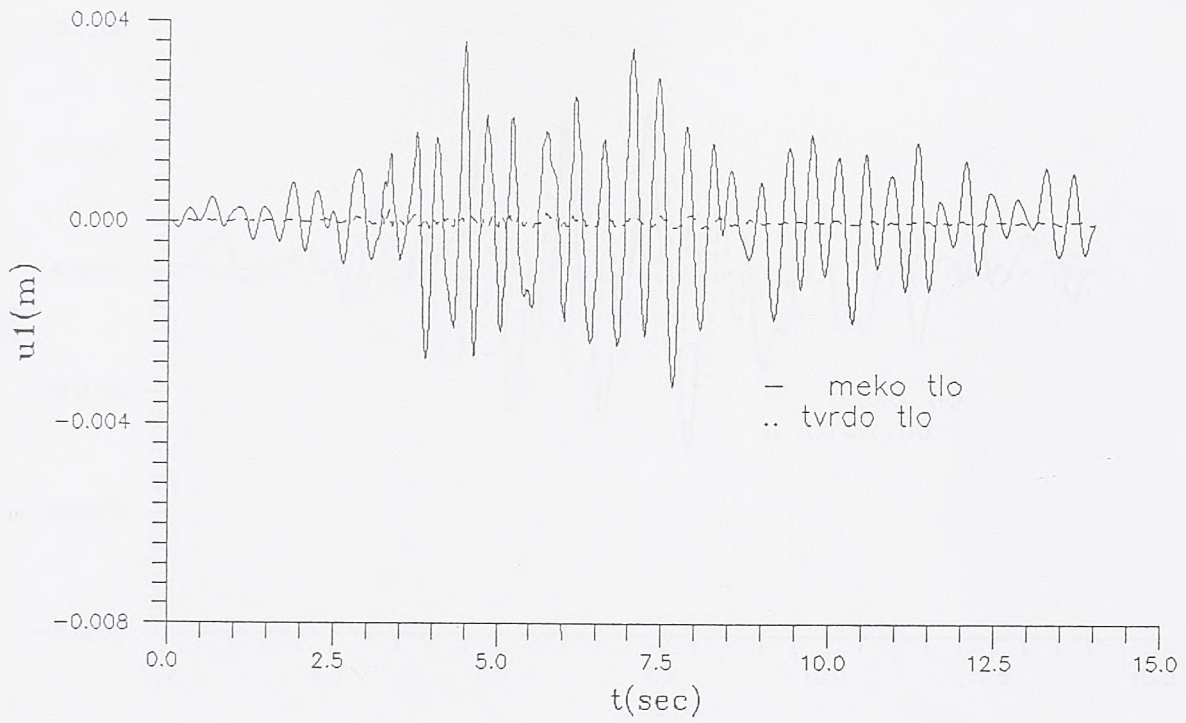
Tabela 6-6

	I meko tlo	II tvrdog tlo
u_1	3.500 (mm)	0.220 (mm)
u_5	14.70 (mm)	9.290 (mm)
u_7	3.930 (mm)	0.999 (mm)
φ_1	$1.91 \cdot 10^{-4}$ (rad)	$1.86 \cdot 10^{-5}$ (rad)

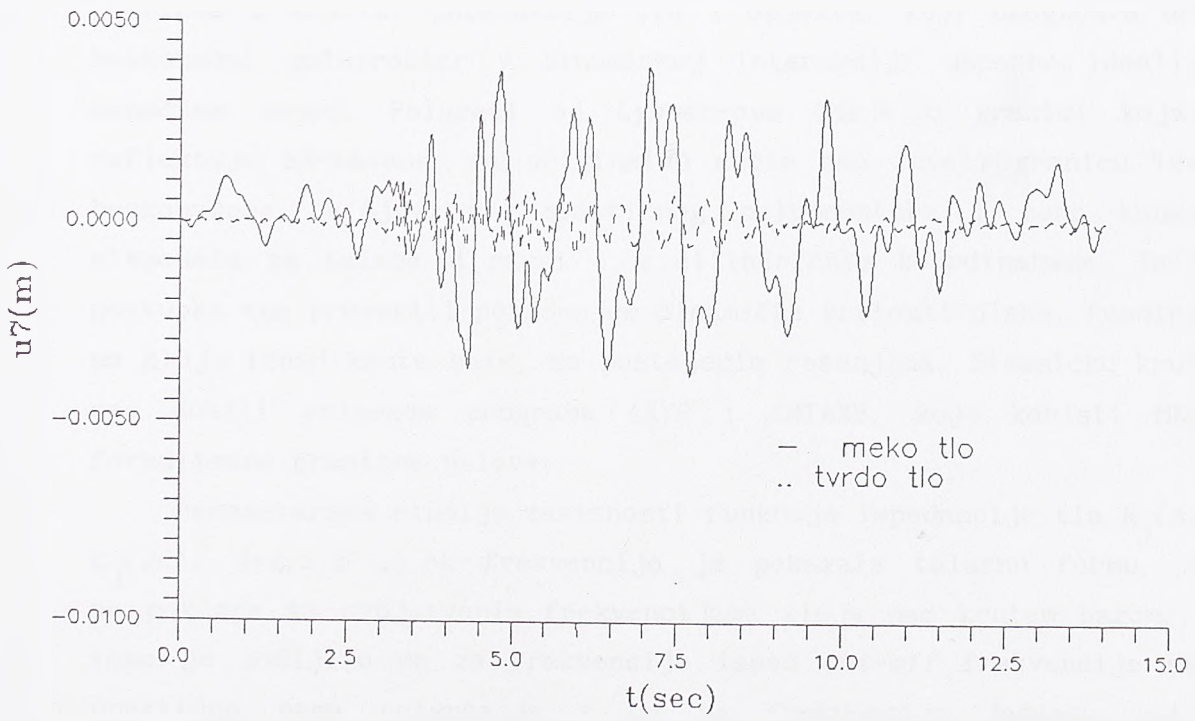
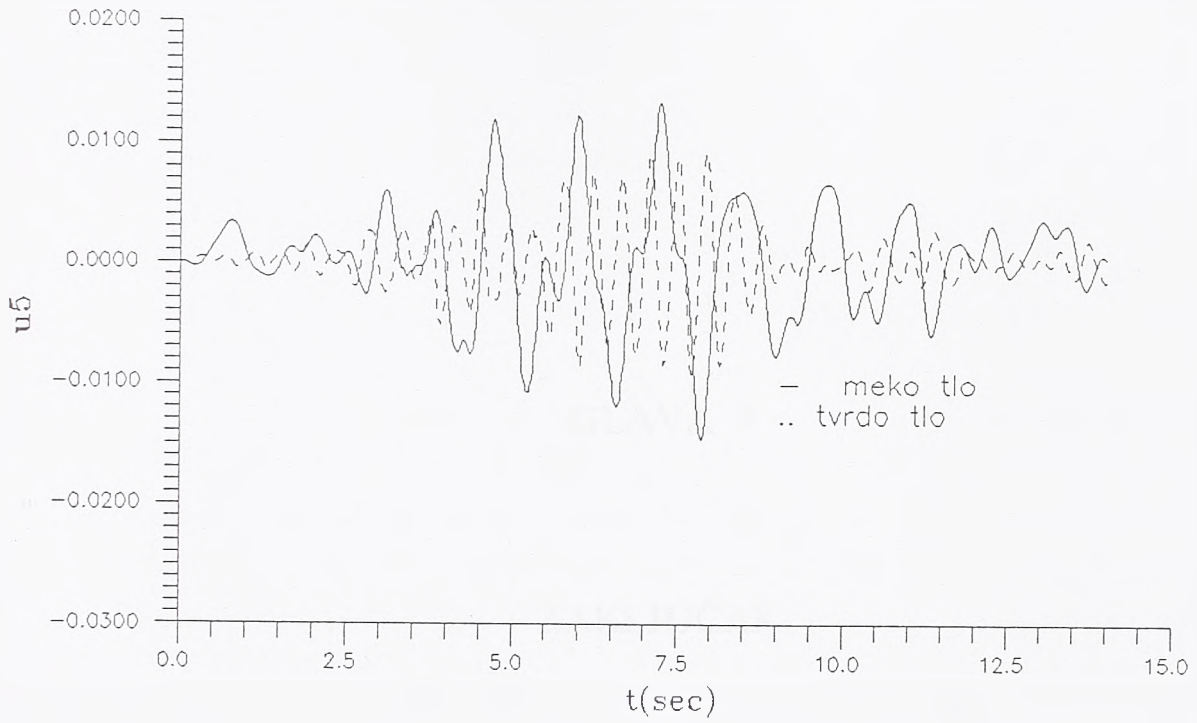
Vidimo da su pomeranje baze u_1 i rotacija ϕ_1 znatno veće u I-om nego u II-om slučaju, Na slici 6-18 su prikazane vremenske istorije pomeranja u_1 i obrtanja ϕ_1 , gde se jasno vidi razlika u odgovoru za oba sistema.

Na slici 6-19 prikazan je dijagram pomeranja tačaka u_5 i u_7 . Za tačku 5 na vrhu konstrukcije su razlike u odgovoru za slučaj oslanjanja I i II manje nego u osnovi objekta, što govori da je ideo inercijalne interakcije na odgovor sistema u ovom slučaju veći nego kinematičke interakcije.

Analiza je pokazala da postoje razlike u odgovoru u zavisnosti od krutosti tla na kome fundiramo objekat. Iako u oba slučaja nije došlo do velikih pomeranja tačaka sistema jasno je da zanemarivanje interakcije može dovesti do neočekivanog ponašanja združenog sistema i da ga treba uzeti u obzir.



Slika 6-18



Slika 6-19

GLAVA 7

ZAKLJUČAK

U radu je prikazan jedan postupak za rešavanje graničnog problema u analizi interakcije tla i objekta, koji omogućava da se beskonačni poluprostor u dinamičkoj interakciji uspešno idealizuje konačnom zonom. Polazeći od *Lysmer*-ove ideje o granici koja ne reflektuje *SH*-talase, na originalan način smo izveli granicu između beskonačnog, slojevitog, elastičnog poluprostora i zone konačnih elemenata za talase u ravni i u cilindričnim koordinatama. Tačnost postupka smo proverili poređenjem dinamičke krutosti diska, fundiranog na sloju iznad krute baze, sa postojećim rešenjima. Dinamičku krutost smo dobili primenom programa *AXYB* i *INTAXB*, koji koristi *MKE* i formulisane granične uslove.

Parametarska studija zavisnosti funkcija impedancije tla $k_j(a_0)$ i $c_j(a_0)$, $j=x, z, \varphi$, od frekvencije je pokazala talasnu formu, koja se poklapa sa svojstvenim frekvencijama sloja nad krutom bazom. Pri tome je uočljivo da za frekvencije ispod *cut-off* frekvencije sloja praktično nema prigušenja a da za frekvenciju jednaku *cut-off* frekvenciji krutost dobija minimalnu vrednost. Za visoke frekvencije, koje se praktično i ne javljaju u realnim sistemima, se dešava da pojedine krutosti dobijaju i negativan znak.

Parametarska studija zavisnosti funkcija impedancije od dubine baze je pokazala da se sa povećanjem dubine rešenje približava rešenju

za poluprostor ($H/r=5$). Analiziran je takođe i uticaj veličine elementa. Za niže vrednosti frekvencija i relativno gruba mreža konačnih elemenata daje dobre rezultate, dok se za visoke frekvencije ona mora progustiti. Smatramo da se može ići na maksimalnu veličinu elementa do $\lambda/4$, gde je λ talasna dužina smičućih talasa u sloju.

Uticaj dinamičkih parametara tla na odgovor sistema smo pokazali na primeru zgrade nuklearnog reaktora. Primenjena su dva postupka analize u metodi podstruktura: ekvivalentna metoda i metoda koncentrisanih masa.

Ekvivalentna metoda, pogodna za preliminarnu parametarsku studiju interakcije tla i objekta, na osnovu koje se može izvesti zaključak o tome kako bi sistem tlo-objekat reagovao na zemljotres određenog frekventnog sastava, je pokazala da bi u slučaju mekog tla zemljotres niskog frekventnog sastava imao nepovoljno dejstvo. U slučaju tvrdog tla to bi važno za zemljotres gde se velika ubrzanja javljaju pri visokim frekvencijama.

Metoda koncentrisanih masa nam daje podatke i o odgovoru konstrukcije. I modalna analiza i vremenska istorija su pokazale da se u ovakvom slučaju (izrazito kruta konstrukcija), dobija da je fundiranje na mekom sloju tla iznad osnovne stene nepovoljno, jer povećava odgovor sistema.

Obe metode nam daju sliku o odgovoru sistema. Potpunu analizu bi dobili primenom postupka u kome bi i konstrukciju modelirali rotaciono-simetričnim elementom ljuske. Proširivanje napisanog programa za računar u tom smislu, će biti nastavak ovoga rada.

Iz svega ovoga možemo izvesti sledeći zaključak: konzistentna granica u frekventnom domenu je tačno formulisana i postavljena neposredno uz zonu temelja u MKE daje dobre rezultate. Time se ne samo smanjuje broj elemenata potreban za dinamičku analizu već i uspešno predstavlja beskonačni poluprostor, sa svim svojim dinamičkim karakteristikama: krutošću i radijacijskim prigušenjem. Ta činjenica nam otvara mogućnosti za dalji rad, koji bi obuhvatao:

- 1) izradu program za direktnu dinamičku analizu rotaciono-simetričnih sistema metodom konačnih elemenata u frekventnom domenu,
- 2) proširenje programa za direktnu dinamičku analizu metodom konačnih elemenata za sisteme u ravni, u frekventnom domenu [88], pri čemu je moguće, pored linearne analize, primeniti i ekvivalentnu

linearnu analizu,

3) rešenje problema amplifikacije primenom *Rayleigh*-evih talasa,

4) primena konzistentne granice na rešenje nelinearnih problema metodom podstruktura.

Što se tiče tačke 4), važno je istaći, da bi nelinearna analiza obuhvatila samo konstrukciju i zonu tla koje ima nelinearno ponašanje, dok bi se uticaj beskonačnog poluprostora, sa linearnim karakteristikama zamenio odgovarajućim silama na granici. Primena konzistentne granice, formulisane u frekventnom domenu, u rešavanju nelinearnih problema zahteva kombinaciju analize u frekventnom i vremenskom domenu, koja nam se čini komplikovana i nepristupačna za uobičajenu analizu. U tom smislu smatramo da bi primena viskozne granice, formulisane u vremenskom domenu, mogla biti za nelinearnu analizu pogodnije rešenje. Međutim, viskozna granica još uvek nije definisana u cilindričnim koordinatama, pa bi njena formulacija i primena na rotaciono-simetrične sisteme takode mogla biti predmet našeg budućeg istraživanja.

LITERATURA

1. Abramowitz, M. & I. Stegun, Handbook of Matemactical Functions, 1964.
2. Akiyoshi T., "Compatible viscous boundary for discrete models", *J.Eng.Mech.Div.*, ASCE, Vol 104, EM5, pp.1253-1266, 1978.
3. Aničić, D., Fajfar, P., Petrović, B., Szavits-Nossan, A., M. Tomažević, Zemljotresno inženjerstvo, Građevinska knjiga, Beograd, 1990.
4. Ashok K. V. & A. K. Chopra, "Earthquake Finite Element Analysis of Structure-Foundation Systems", Report No EERC-73-9, 1973., University of California, Berkeley
5. Ashok K. V & A. K. Chopra, "Earthquake Finite Element Analysis of Structure-Foundation Systems ", *J.Eng.Mech.Div.* ASCE, Vol 100, EM6, 1974.
6. Bathe, K.-J. & E. Wilson, Numerical Method in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, 1976.
7. Bathe, K. J., Bolcouchi, S., Ramaswany, S., M. D. Snyder, "Save Computational Capabilites for Nonlinear Finite Element Analysis", *Nuclear Eng.Design.* Vol 46, pp. 429-455, 1978.
8. Bathe, K. J. & S. Gracewski, "On Nonlinear Dynamic Analysis Using Substructuring and Mode Superposition", *Computers and Structures*, Vol 13, pp.699-707, 1981.
9. Bayo E. & E. Wilson, "Numerical Tehniques for the Evaluation of Soil-Structure Interaction Effects in the Time Domain", *Rep. EERC-83/04*, Univ. of California, Berkeley, 1983.
10. Bayo E. & E. Wilson, "Use of Ritz Vectors in Wave Propagation and Foundation Response", *Earthqake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 12, pp.499-505, 1984.
11. Bettles P. & O. C. Zienkiewicz, "Diffraction and Refraction of Surface Waves Using Finite Elements", *Int.J.Num.Meth.Eng.*, Vol 11, No 8, pp. 1271-1290, 1977.

12. Bettles P. & J. Bettles, "Infinite Elements For Dynamic Problems : Part 1", *Engineering Computations*, Vol 8, pp. 99-124, 1991.
13. Bettles P. & J. Bettles, "Infinite Elements For Dynamic Problems : Part 2", *Engineering Computations*, Vol 8, pp. 99-124, 1991.
14. Bielak J., "Modal Analysis for Building-Soil Interaction", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, Vol 102, EM5, 1976.
15. Brčić V. & M. Sekulović, Savremeni problemi dinamike inženjerskih konstrukcija, III seminar ciklusa : "Inovacije znanja iz oblasti tehničke mehanike i teorije konstrukcija ", Beograd, 1982.
16. Bycroft G. N., "Forced Vibrations of a Rigid Circular Plate on a Semi-Infinite Elastic Space and on an Elastic Stratum", *Philosophical Transactions*, Royal Society of London, Series A, No 948, Vol 248, pp. 327-368, 1956.
17. Chen Y. & T. Krauthammer, "Seismic Effects on Large Reinforced Concreet Lifelines - I Theory", *Computers and Structures*, Vol 42, No2, pp. 129-135, 1992.
18. Chen Y. & T. Krauthammer, "Seismic Effects on Large Reinforced Concreet Lifelines - II Implementation", *Computers and Structures*, Vol 42, No 2, pp. 137-144, 1992.
19. Chen C.H. & J. Penzien, "Dynamic Modelling of Axisymmetric Foundations", *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol 14, pp. 823-840, 1986.
20. Chopra A. K. & J. A. Gutierrez, "Earthquake Analysis of Multistorey Buildings Including Foundation Interaction", *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol 3, pp. 65-77, 1974.
21. Chopra A. K., Chakrabarti P., G. Dasgupta, "Dynamic Stiffness Matrices for Viscoelastic Half-Plane Foundations", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, EM3, pp. 497-514, 1976.
22. Chow Y. K. & J. M. Smith, "Static and Periodic Infinite Solid Elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol 17, pp. 503-526, 1981.
23. Chow Y. K. & J. M. Smith, "Infinite Elements for Dynamic Foundation Analysis", *Numerical Methods in Geomechanics*, Edmonton, 1982.
24. Chow Y. K., "Simplyfied Analysis of Dynamic Response of Rigid Foundations with Arbitrary Geometries ", *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol 14, pp. 643-653, 1986.
25. Christian J. T., Roesset J. M., C. S. Desai, "Two and Three-Dimensional Dynamic Analyses", *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, McGraw-Hill, 1977.
26. Constantino C. J., Miller C. A., L. A. Lufrano, "Soil-Structure Interaction Parameters from Finite Element Analysis", *Nuclear Engineering and Design*, Vol 38, No 2, pp. 289-302, 1976.
27. Dasgupta G. & A. K. Chopra, "Dynamic Stiffness Matrices for Viscoelastic Half Planes", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, EM5, pp. 730-745, 1979.

-
28. Desai C. S., J. T. Christian, "Introduction, Numerical Methods and Special Topic", *Numerical Method in Geotechnical Engineering*, pp. 1-64, McGraw-Hill, 1977.
29. Dowrick D. J., Earthquake Resistant Design, John Willey & Sons, 1977.
30. Drake, L. A., "Love and Rayleigh Waves in Nonhorizontally Layered Media", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol 62, pp 1241-1258, 1972.
31. Drake, L. A., "Rayleigh Waves At a Continental Boundary by the Finite Element Method", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol 62, pp 1241-1258, 1972.
32. El-Shafee O. & Gould P., "Dynamic Axisymmetric Soil Model For a Flexible Ring Footing", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 8, pp. 479-498, 1980.
33. El-Shafe & Gould P., "Cooling Tower Founded on Soil", *Int. J. Str. Div.*, ASCE, Vol 108, ST4, pp. 800-813, 1982.
34. Eving W. M., Jardecki W. S., F. Pres, *Elastični talasi u slojevitim sredinama*, BIGZ, Beograd, 1972.
35. Fagel L.W., "Earthquake Interaction for Multistory Buildings", *J.Eng.Mech.Div.*, ASCE, EM4, pp. 929-945, 1972.
36. Gould P. L., Finite element Analysis of Shells of Revolution, Pitman Publishing LTD, London, 1985.
37. Gomez-Masso, A., Lysmer J., Chen J. C., H.B. Seed, "Soil-Structure Interaction With Rayleigh Waves", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 11, 567-583, 1983.
38. Gutierrez J. A. & Chopra A. K., "A Substructure Method for Earthquake Analysis of Structure-Soil Interaction", Report UBC-EERC, 76-9, University of California , Berkeley, 1976.
39. Gutierrez J. A. & Chopra A. K., "A Substructure Method for Earthquake Analysis of Structures Including Structure-Soil Interaction", *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol 6, pp. 61-69, 1978.
40. Hadjian A. H., Luco J. E., N. C. Tsai, "Soil-Structure Interaction: Continuum or Finite Element ?", *Nuclear Engineering and Design*, Vol 31, No 2, pp. 151-167, 1974.
41. Hadjian A. H., Niehoff D., J. Guss, "Simplified Soil-Structure Interaction Analysis with Strain Dependent Soil Properties", *Nuclear Engineering and Design* , Vol 31, No 2, pp. 218-233, 1974.
42. Hadjian A. H., "Soil-Structure Interaction - an Engineering Evaluation", *Nuclear Engineering and Design*, Vol 38, No 2, pp.262-272, 1976.
43. Hakuno, M., "Seismic Uplift and Sliding of Structures From Supporting Ground", State-of-the Art Report, Proceeding of Ninth World Conference on Earthquake Engineering, August 2-9, 1988, Tokyo-Kyoto, Japan

-
44. Hall J.R. & Kissenpfenning J.F., "Special Topic on Soil-Structure Interaction", *Nuclear Engineering and Design*, Vol 38, No 2, pp. 273-288, 1976.
 45. Hall J. F., "An FFT Algorithm for Structural Dynamics", *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol 10, pp. 797-811, 1982.
 46. Hardin B. O. & V. P. Drnevich, "Shear Modulus and Damping in Soils: Design Equations and Curves", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, SM7, 1972.
 47. Harti V. C. & M. T. Rubinstein, *Dinamika konstrukcija*, BIGZ, 1973.
 48. Hinton E. & D. R. J., Owen, Finite Element Programing, Academic Press, 1977.
 49. Holzlohner U., "Dynamic Soil-Structure Interaction", Proceeding of DMSR 77, Karlsruhe, 5.-16. Sept. 1977. A.A. Balkema, Rotterdam, 1978.
 50. Ibrahimbegović A. & Wilson, E. L. "A Methodology for Dynamic Analysis of Linear Structure-Foundation Systems with Local Non-Linearities", *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol 19, pp. 1197-1208, 1990.
 51. *IMSL Library Reference Manual*, 1980., IMSL Inc. Houston Texas
 52. Jahnke E. & F. Emde, Tables of Functions, 1933., Berlin
 53. Jennings A., Matrix Computation for Engineers and Scientist, John Wiley & Sons
 54. Jennings P. C. & Bielak J., "Dynamics of Building-Soil Interaction", *Bull. Seism. Soc. Am.*, vol 63, pp. 9-48, 1973.
 55. Karabalis D. L. & D. E. Beskos, "Dynamic Response of 3-D Rigid Surface Foundations by Time Domain Boundary Method", *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol 12, pp. 73-93, 1984.
 56. Kausel E. & Roesset J. M., G. Waas, "Dynamic Analysis of Footings on Layerd Media", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, EM5, Vol 101, pp. 679-693, 1975.
 57. Kausel E. & Roesset J. M., "Dynamic Stiffness of Circular Foundations", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, EM6, Vol 101, pp. 771-785, 1975.
 58. Kausel E., Roesset J. M., J. T. Christian, "Nonlinear Behaviour in Soil-Structure Interaction", *J. Geot. Eng. Div.*, ASCE, Vol 102, GT11, pp. 1159-1169, 1976.
 59. Kausel E. & Roesset J. M., "Dynamic Stiffness of Circular Foundation", *Closure*, ASCE, Vol 103, EM1, pp. 223, 1977.
 60. Kausel E. & Roesset J. M., "Semianalytic Hyperelement for Layerd Strata", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, EM4, Vol 103, pp. 569-588, 1977.
 61. Kausel E., Whitman R. V., Morray J. P., F. Elsabee, "The Spring Method for Embeded Foundations", *Nuclear Engineering and Design*, Vol 48, No 2&3, pp. 377-392, 1978.
 62. Kausel E. & Roesset J. M., "Stiffness Matrices for Layerd Soils", *Bul. Seism. Soc. Am.*, Vol 71, No 6, 1981.
 63. Kitamura Y. & S. Sakurai, "A Numerical Method for Determining Dynamic Stiffness", *Numerical Method in Geomechanics*, pp. 393-339, Edmonton, 1982.

-
64. Kuhlemeyer R. & J. Lysmer, "Finite Element Method Accuracy for Wave Propagation Problems", *technical notes, J.Eng.Mech.Div.*, ASCE, Vol 99, SM5, 1973.
65. Kundu T., Mathur R. P., C. S. Desai, "Three Dimensional Soil-Structure Interactions Analysis : Deformable Structures in Multilayered Soil Mass", *Engineering Computations*, Vol 8, pp. 153-180, 1991.
66. Liou Gin-Show, "Analytical Solutions For Soil-Structure Interaction In Layered Media", *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol 18, pp. 667-686, 1989.
67. Lysmer J. & R. L. Kuhlemeyer, "Finite Dynamic Model for Infinite Media", *J.Eng.Mech.Div.*, ASCE, Vol 95, EM4, pp. 859-877, 1969.
68. Lysmer J., "Lumped Mass Method for Rayleigh Waves", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol 60, pp 89-104, 1970.
69. Lysmer J. & G. Waas, "Shear Waves in Planare Infinite Structures", *J.Eng.Mech.Div.*, ASCE, Vol 98, EM5, pp. 85-105, 1972.
70. Lysmer J., Udak T., Seed B., R. Hwang "LUSH2-A Computer Program for Complex Response Analysis of Soil-Structure System", Report No EERC-74-4, University of California, Berkeley, 1974.
71. Lysmer J., "Analytical Procedures in Soil Dynamics", Report No EERC-78/29, University of California, Berkeley, 1978.
72. Luco J. E. & R. Westmann, "Dynamic Response of Circular Footings", *J.Eng.Mech.Div.*, ASCE, Vol 97, EM5, pp. 1381-1396, 1971.
73. Luco J.E. & R. Westmann, "Dynamic Response of Rigid Footing Bonded to an Elastic Half Space", *J. App. Mech.*, ASME, Vol 39, pp. 527-534, 1972.
74. Luco J. E., "Impedance Functions for a Rigid Foundation on Layered Medium", *Nuclear Engineering and Design*, Vol 31, No 2, pp. 204-217, 1974.
75. Luco J.E., & A. H. Hadjian, "Two Dimensional Approximations to the Three Dimensional Soil-Structure Interaction Problem", *Nuclear Engineering and Design*, Vol 31, No 2, pp. 195-203, 1974.
76. Luco J. E., Hadijan A. H., A. D. Boss, "The Dynamic Modeling of the Half-Plane by Finite Element", *Nuclear Engineering and Design*, Vol 31, No 2, pp. 184-194, 1974.
77. Luco J. E., Wong H. L., M. D. Trifunac, "A Note on the Dynamic Response of Rigid Embedded Foundations", *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol 4, pp. 119-127, 1975.
78. Luco J. & A. Mita, "Response of the Circular Foundation on a Uniform Half-Space to Elastic Waves", *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol 15, pp.105-118, 1987.
79. Luke Y. L., Mathematical Functions and their Approximations, Accademic Press, New York, 1975.
80. Manolis G. D., "A Comparative Study of the Tree Boundary Element Method Approaches to Problems in Elastodynamics", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol 19, pp. 73-91, 1983.
81. Meek J. & A. S. Velesztos, "Dynamic Analysis by Extra Fast Fourier Transform", *J.Eng.Mech.Div.*, ASCE, Vol 98, EM2, 1972.

-
82. Malischewsky P., Surface Waves and Discontinuities, Akademie-Verlag Berlin, 1987.
83. Mitrinović D.S., Uvod u specijalne funkcije, Građevinska knjiga, Beograd, 1975.
84. Narayanan G .V. & D. E. Beskos, "Use of Dynamic Influence Coefficients in Forced Vibration Problems with the Aid of Fast Fourier Transform", *Computers and Structures*, Vol 9, pp. 145-150, 1977.
85. Parmelee R. A., "Building-Foundation Interaction Effects", *J.Eng.Mech.Div.*, ASCE, Vol 92, EM2, pp 131-162, 1967.
86. Parmelee R. A., Derlman D. S., Lee S. L., L. M. Keer, "Seismic Response of Structural-Foundation Systems", *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, EM6, Vol 94, 1968.
87. Parmelee R. A., Perelman D. S., S.L. Lee, "Seismic Response of Multiple-Story Structures on Flexible Foundations", *Bul. Seis. Soc. Am.*, Vol 59, No 3, 1969.
88. Petronijević M., Prilog ravnom problemu interakcije tla i objekta, Magistarska teza, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 1984.
89. Petronijević M., " Interakcija tla i objekta pri zemljotresu", Simpozijum Saveza Društava Građevinskih Konstruktera Jugoslavije, Dubrovnik, april, 1985.
90. Petronijević M., "Neki efekti promene dinamičkih karakteristika tla pri zemljotresu", VIII Kongres Građevinskih Konstruktera Jugoslavije, Cavtat, 7-10. 04. 1987.
91. Petronijević M., "Analiza interakcije tla i objekta pomoću ekvivalentnog modela sa jednim stepenom slobode pomeranja", Simpozijum Saveza Društava Građevinskih Konstruktera Jugoslavije, Dubrovnik, 25-27. IV 1989.
92. Petronijević M., "Primena metode kompleksnog odgovora u interakciji tla i objekta pri zemljotresu", V Kongres Saveza Društava za Seizmičko Građevinarstvo Jugoslavije, Bled, 24.-26. 04. 1990.
93. Prakash S., Soil Dynamics, McGraw-Hill
94. Press W. H., Planery B. P., Teukolsky S. A., W. T. Vetterling, Numerical Recipes, Cambridge University Press, 1986.
95. Richart F. E., J. R. Hall, J. R. D. Woods, Vibrations of Soils and Foundations, Prentice Hall, 1970.
96. Richart F. E., "Some Effects of Dynamic Soil Properties on Soil-Structure Interaction", *J. Geot. Mech. Div.*, GT12, 1975.
97. Roesset J. M., Whitman R. V., R. Dobry, "Modal Analysis for Structures with Foundation Interaction", *J. Eng. Struc. Div. ASCE*, Vol 99, ST3, 1973.
98. Roesset J. M., "Soil Amplification of Earthquakes", *Numerical Methods in Geotechnical Engineering*, pp. 638-683, 1977.
99. Roesset J. M. & M. M. Ettouney, "Transmitting Boundaries : a comparison", *Int. J. Num. Anal. Meth. Geom.*, Vol 1, 1977.

-
100. Roesset J.M. & J. Gonzalez, "Dynamic Interaction Between Adjacent Structures", *Proceeding of Dynamic response and wave propagation in soils*, Karlsruhe, September, pp. 127-166., Balkema, Rotterdam, 1978.
101. Sanazin M. A., Roesset J. M., R. V. Whitman, "Dynamic Soil-Structure Interaction", *Int. J. Str. Div.*, ASCE, Vol 98, ST2, pp. 1527-1544, 1972.
102. Scanlan R. H., "Seismic Wave Effects on Soil-Structure Interaction" *Earthquake Engineering and Structural Dynamic*, Vol 4, pp 379-388, 1976.
103. Seed H. B., Idriss J. M., F. W. Kefer, "Characteristics of Rock Motions During Earthquakes", *Int.J.Str.Div.*, ASCE, Vol 95, SM5 ,pp. 1198-1218, 1969.
104. Seed H. B. & J. M. Idriss, "Influence of Soil Conditions on Ground Motions During Earthquake", *Int.J.Str.Div.*, ASCE, Vol 95, SM1 , 1969.
105. Seed H. B., Lysmer J., R. Hwang, "Soil-Structure Interaction Analysis for Seismic Response", *Int.J.Geot.Div.*, ASCE, Vol 101, GT5, 1975.
106. Seed H. B., Whitman R. V., Dezfulian H., Dobry R., J. Idriss, "Soil Conditions and Building Damage in 1967 Caracas Earthquake", *Int. J. Str. Div.*, ASCE, Vol 98, SM8, 1972.
107. Seed H. B. & J. M. Idriss, "Soil-Structure Interaction Analysis by Finite Elements - State of Art", *Nuclear Engineering and Design*, Vol 46, No1, pp. 349-365, 1978.
108. Sekulović M., Metod konačnih elemenata ,Građevinska knjiga, Beograd
109. Smith W. D. "A Nonreflecting Plane Boundary for Wave Propagation Problems", *Journal of Computational Physics*, Vol 15, pp. 492-503, 1974.
110. Spyrakos C. C. & Beskos D. E., "Dynamic Response of Frameworks by Fast Fourier Transform", *Computers and Structures*, Vol 15, No 5, pp. 495-505, 1982.
111. Takemiya H. "Simplified Model for Building-Foundation Interaction", *Technical note*, ASCE, Vol 103, EM2, pp. 345-351, 1977.
112. Timošenko S. & J.N. Gudier, Teorija elastičnosti. Građevinska knjiga, 1962.
113. Tsai N. C., Niehoff D., Swatta M., A. H. Hadjian, "The Use of Frequency-Independent Soil-Structure Interaction Parameters", *Nuclear Engineering and Design*, Vol 31, No 2, pp. 168-183, 1974.
114. Veletsos A. & Y. Wei, "Lateral and Rocking Vibration of Footings", *Int.J.Str.Meh.*, ASCE, Vol 97, SM9, pp. 1227-1248, 1971.
115. Veletsos A. & Y. Wei, "Lateral and Rocking Vibration of Footings", Report No 8, Department of Civil Engineering, Rice University, Houston, Texas, 1971.

-
116. Veletsos A. S. & B. Verbič, "Vibration of Viskoelastic Foundations", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 2, pp. 87-102, 1973.
117. Veletsos A. S. & B. Verbič, "Basic Response Functions for Elastic Foundations", *Int.J.Eng.Meh.*, ASCE, Vol 100, EM2, pp. 189-201, 1974.
118. Veletsos A. S. & J.W. Meek, "Dynamic Behaviour of Building-Foundation Systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 3, pp. 121-138, 1974.
119. Veletsos A. S. & C. E. Ventura, "Efficient Analysis of Dynamic Response of Linear Systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 12, pp. 521-536, 1984.
120. Veletsos A. S., Prasad A.M., Yu Tang, "Design Approaches for Soil-Structures Interaction", State-of-the Art Report, Proceedings of Ninth Conference on Earthquake Engineering, August 2-9, 1988., Tokyo-Kyoto, Japan
121. Verbič B., "Dynamic Stiffness of Rigid Foundations", Rep. No 1, Institut for Materials and Structures, Civil Engineering Department, University of Sarajevo, Sarajevo, 1982.
122. Watson G. N., A Treatise on the Theory of Bessel Funcions , Cambridge University Press, 1944.
123. Whitman R. V. & Richart F. E., "Design Procedures for Dynamically Loaded Foundations", *Int. J. Str. Meh.*, ASCE, SM6, 1967.
124. Wilson E. & S. Ghosh, "Dynamic Stress Analysis of Axisymmetric Structures Under Arbitrary Loading", Report No. EERC 69-10, Revised September 1975, University of California, Berkeley, 1975.
125. Wolf J. P., "Seismic Analysis of Cooling Towers", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 8, 1986.
126. Wolf J. P. & G. R. Darbre, "Dynamic Stiffness Matrix of Soil by Boundary Method: Conceptual Aspects", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 12, pp. 385-400, 1984.
127. Wolf J.P. & P. Obernhuber " Non-Linear Soil-Structure-Interaction Analysis Using Dynamic Stiffness or Flexibility of Soil in the Time Domain", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 13, pp. 195-212, 1985.
128. Wolf J.P. & P. Obernhuber " Non-Linear Soil-Structure-Interaction Analysis Using Green's Functions of Soil in the Time Domain", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 13, pp. 213-223, 1985.
129. Wolf J. P., Dynamic Soil-Structure Interaction. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.
130. Wolf J. P. & D. R. Somaini, "Approximate Dynamic Model of Embedded Foundation in Time Domain", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 14, pp. 683-703, 1986.
131. Wolf J. P., Soil-Structure-Interaction Analysis in Time Domain. Prentice Hall, 1988.

132. Wolf J. P. , J. Meek., "Insights on Cutoff Frequency for Foundation on Soil Layer", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 20, pp. 651-665, 1991.
133. Zhao C., Valliappan S., Y. C. Wang, "An Approximate Method for Simulating Infinite Media", *Computers and Structures*, Vol 41, No 5, 1991.
134. Zienkiewicz O. C., Bićanić N., F. Q. Shen, "Earthquake input definition and transmitting boundary condition", Report of Institute for Numerical Methods in Engineering, C/R/583/1987., Swansea, U.K.
135. Zienkiewicz O. C., The Finite Element Method, McGraw-Hill, 1974.
136. Čubrinovski M., "Sporedba na metodite za seizmička analiza so interakcija počva-konstrukcija", magistrski rad, Institut za zemjotresno inženerstvo i inženerska seizmologija na Univerzitetot "Kiril i Metodij", Skopje, 1989.
137. Lee B. J., P. L. Gould, "Complex Response Analysis of Shells of Revolution Including Uniform Base Translation and Rocking", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol 12, pp. 507-519, 1984.
138. Lee B. J., P. L. Gould, "Seismic Response of Pile Supported Cooling Tower", *Jour. Struct. Div.*, ASCE VOL 111, pp. 1930-1947, 1985.



DODATAK

DODATAK I

D1. L.FOR

Program za rešavanje svojstvenog problema L -talasa, se sastoji od glavnog programa L.FOR i dva glavna podprograma LOVE i EIGENL koji pozivaju još 12 podprograma (slika DI.1). Podprogram LOVE formira matrice sistema slojeva A,C i M za rešavanje svojstvenog problema *Love*-ovih talasa (3.48). Podprogram EIGENL svodi linearan svojstveni problem na problem svojstvenih vrednosti jednesimetrične matrice (3.51) i poziva podprogram EIGEN koji određuje sve svojstvene vrednosti i oblike L -talasa. U okviru programa EIGENL od $2N$ talasnih brojeva se određuju samo oni koji zadovoljavaju *Sommerfeld*-ov radijacijski uslov.

Ulazni podaci za L.FOR i R.FOR su isti, dati u slobodnom opisu:

1.KARTICA (KOD,NS,FR)

KOD = 0 NE ŠTAMPA MEDUREZULTATE
1 ŠTAMPA MEDUREZULTATE

NS = BROJ SLOJEVA

FR = FRKVENCIJA

2.KARTICA (I,H(I),RO(I),G(I),PO(I))

I = BROJ SLOJA

H(I) = DEBLJINA SLOJA

RO(I) = GUSTINA SLOJA I

PO(I) = *Poisson*-ov BROJ ZA SLOJ I

Svakom sloju odgovara po jedna kartica 2.

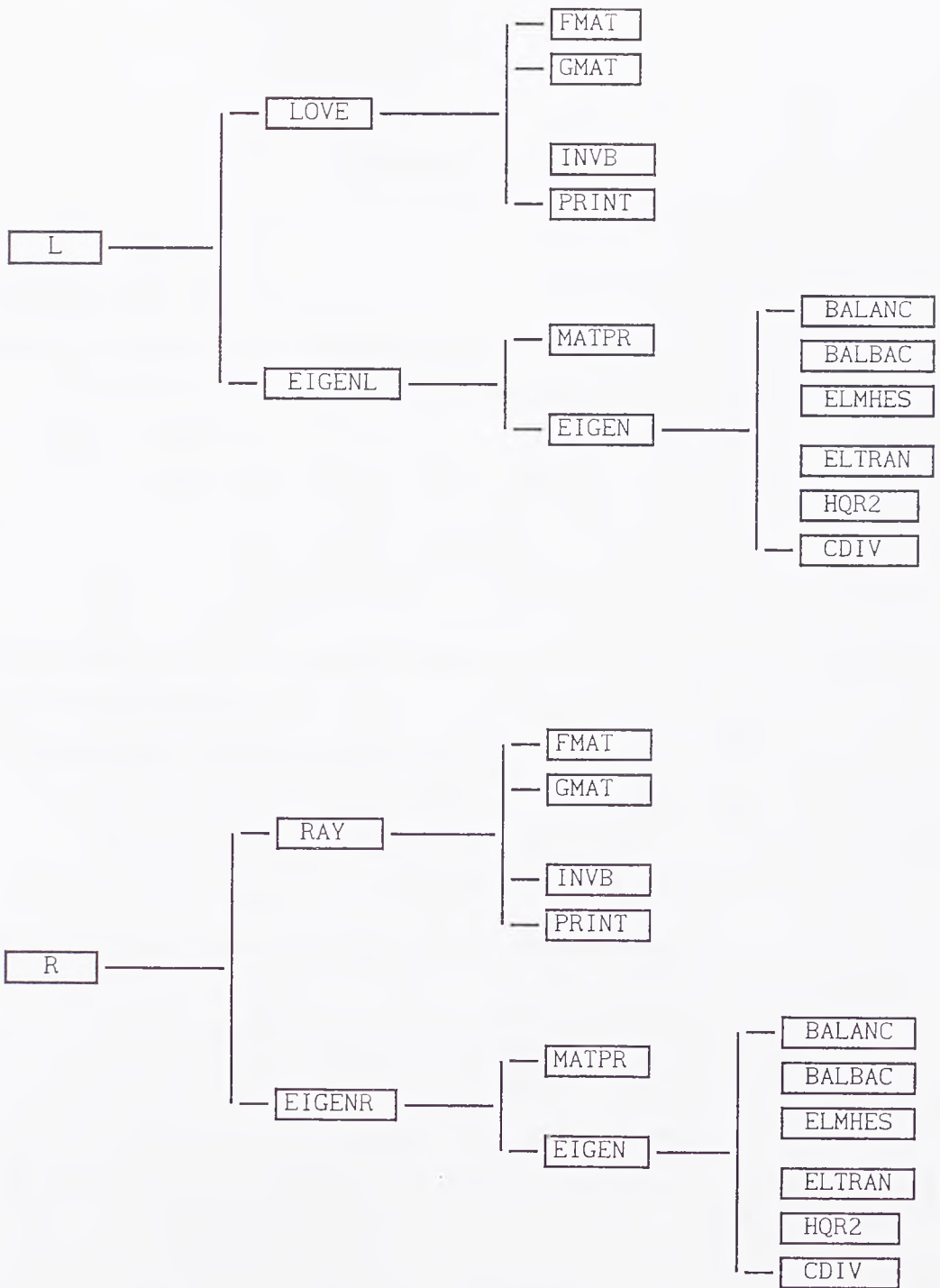
DI.2 R.FOR

Program R.FOR za rešenje svojstvenog problema R -talasa, se sastoji od 2 glavna podprograma RAY i EIGENR i još 12 pomoćnih podprograma (shema DI.1). Podprogram RAY formira matrice sistema slojeva za R -talase: A,B,C,M, dok EIGENR rešava kvadratni problem svojstvenih vrednosti svodenjem na realnu nesimetričnu matricu, na način opisan u 3.4.2.3.. Podprogram EIGEN određuje sva rešenja svojstvenog problema ($4N$), od kojih u EIGENR usvajamo samo ona koja zadovoljavaju *Sommerfeld*-ov radijacijski uslov.

DI.3 EIGEN

Podprogram EIGEN rešava sve svojstvene vrednosti i sve svojstvene vektore realne matrice, koristeći *QR*-postupak za svodenje matrice na gornju *Hessenberg*-ovu formu. Detalje postupka je moguće naći u literaturi [53]. Za formiranje programa su korišćene standardni podprogrami programskog paketa EISPACK:

- BALANC - balansira realnu matricu i izoluje svojstvene vrednosti
- BALBAC - rešava svojstvene vektore transformacijom unazad
- ELMHES - svodi realnu matricu na gornju *Hessenberg*-ovu formu
- ELTRAN - akumulira transformacije koje koristi ELMHES
- HQR2 - nalazi svojstvene vrednosti i vektore primenom *QR*-metode
- CDIV - pomoćni program za štampu



Shema DI.1

Programi L.FOR i R.FOR sa podprogramima

DODATAK II

DII.1 Cilindrične funkcije

Rešenje Bessel-ove diferencijalne jednačine:

$$z^2 w(z)'' + z w(z)' + (z^2 - n^2) w(z) = 0 \quad (\text{DII.1})$$

se može pisati u obliku:

$$\begin{aligned} w(z) &= C_1 J_n(z) + C_2 J_{-n}(z) \\ &= C_3 J_n(z) + C_4 Y_n(z) \\ &= C_5 H_n^{(1)}(z) + C_6 H_n^{(2)}(z) \end{aligned} \quad (\text{DII.2})$$

gde su C_i , $i=1,2,\dots,6$ konstante integracije a J_n , Y_n , $H_n^{(1)}$ i $H_n^{(2)}$ su tzv. cilindrične funkcije :

1) Bessel-ove funkcije prve vrste:

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! (n+k)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{n+2k} \quad (\text{DII.3})$$

2) Bessel-ove funkcije druge vrste (Neuman-ove):

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= -\frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{z}{2} \right) J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-r-1)!}{r!} \left(\frac{z}{2} \right)^{n-2r} \\ &- \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r! (n+r)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{n+2r} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+r} \right) \end{aligned} \quad (\text{DII.4})$$

gde je Euler-ova konstanta $\gamma=0.5772\dots$, a n ceo broj.

3) Bessel-ove funkcije III vrste (Hankel-ove funkcije I i II vrste reda n):

$$H_n^{(1)} = J_n(z) + i Y_n(z) \quad (\text{DII.5})$$

$$H_n^{(2)} = J_n(z) - i Y_n(z) \quad (\text{DII.6})$$

gde je $i=\sqrt{-1}$ imaginarna jedinica.

Za sve cilindrične funkcije važe iste rekurentne formule:

$$\begin{aligned}
 J_{-n}(z) &= (-1)^n J_n(z) \\
 J_n(-z) &= (-1)^n J_n(z) \\
 J_n(z),_z &= \frac{J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)}{2} \\
 J_{(n-1)}(z) &= \frac{n}{z} J_n(z) + J_n(z),_z \\
 J_{(n+1)}(z) &= \frac{n}{z} J_n(z) - J_n(z),_z
 \end{aligned} \tag{AII.7}$$

Više o cilindričnim funkcijama može se naći u [1], [52], [79], [122].

DII.2 Hankell-ove funkcije

Talasna jednačina je oblika:

$$r^2 w(kr)'' + r w(kr)' + (k^2 r^2 - n^2) w(kr) = 0 \tag{DII.8}$$

Za primenu je od velikog značaja da, među *Bessel*-ovim funkcijama, jedino *Hankel*-ove funkcije teže nuli kada kompleksan argument teži beskonačnosti, i to za $H_n^{(1)}$ ako je imaginarni deo kompleksnog broja pozitivan, a za $H_n^{(2)}$ ako je imaginarni deo negativan. Zbog toga *Hankell*-ove funkcije koristimo za rešavanje problema propagacije talasa.

Kako je argument talasne jednačine $z=kr$, to rekurentna formula (DII.7.3) za *Hankell*-ove funkcije glasi:

$$H_n(kr),_r = k H_{n-1}(kr) - \frac{n}{r} H_n(kr) \tag{DII.9}$$

Argument kr može biti realan, imaginaran i kompleksan broj.

Vrednosti funkcije za proizvoljni argument dobijemo primenom programa HANKEL.

Kada su argumenti realni brojevi vrednosti funkcije dobijamo po definiciji, preko redova. Pri tome je:

$$\begin{aligned}
 Y_0(z) &= \frac{2}{\pi} \left(\gamma + \ln \frac{z}{2} \right) J_0(z) + \\
 &+ \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{z^2}{4} \frac{(z^2/4)^2}{(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{(z^2/4)^3}{(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \dots \right\} \tag{DII.10}
 \end{aligned}$$

$$Y_1(z) = \frac{2}{\pi} \left\{ \left(\gamma + \ln \frac{z}{2} \right) J_1(z) - \frac{1}{z} - \frac{z}{4} \left[1 - \frac{z^2/4}{1!2!} \left(2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{(z^2/4)^2}{2!3!} \left(2 \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{3} \right) - \dots \right] \right\} \quad (\text{DII.11})$$

Za slučaj kada je $z=kr$ kompleksan broj vrednosti funkcije $H_n^2(z)$, za $n=0,1$, koje su nam potrebne za određivanje granice, dobijamo na sledeći način:

1. Za $|z| < 4$, funkciju sračunavamo po definiciji:

$$H_n^2(z) = J_n(z) - iY_n(z) \quad (\text{DII.12})$$

gde $J_n(z)$ i $Y_n(z)$ određujemo direktno prema jednačinama (DII.3) i (DII.4), sve dok poslednji član reda ne zadovolji uslov da je;

$$\arg(z_n) < 10^{-10} \quad (\text{DII.13})$$

2. Za $|z| \geq 4$, koristimo aproksimativni polinom [1], oblika:

$$H_n^2(z) = \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{-0.5} \left[P(n, z) - i Q(n, z) \right] e^{-i\kappa} \quad (\text{DII.14})$$

gde je:

$$\kappa = z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}, \quad -2\pi < \arg(z) < \pi \quad (\text{DII.15})$$

a $P(n, z)$ i $Q(n, z)$ su polinomi oblika:

$$P(n, z) = 1 - \frac{(n-1)(n-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(n-1)(n-9)(n-25)(n-49)}{4!(8z)^4} - \dots \quad (\text{DII.16.1})$$

$$Q(n, z) = 1 - \frac{(n-1)}{8z} + \frac{(n-1)(n-9)(n-25)}{3!(8z)^3} - \dots \quad (\text{DII.16.2})$$

DODATAK III

DIII. Modifikovane modalne matrice

Nulti harmonik

Matrica krutosti na granici:

$$K_{\circ} = \Lambda_{\circ}^* [rA\Psi_{\circ}[k^2] + (rD+E)\phi_{\circ}[k]] W_{\circ}^{-1} \quad (\text{DIII.1})$$

Modifikovana modalna matrica Ψ_{\circ} :

$$\Psi_{\circ} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} H_{\circ} X_{1,1}^r & \cdot & \cdot & H_{\circ} X_{1,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ -H_1 X_{2,1}^r & \cdot & \cdot & -H_1 X_{2,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & H_{\circ} X_{1,1}^l & \cdot & \cdot & H_{\circ} X_{1,N}^l \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline H_{\circ} X_{2N-1,1}^r & \cdot & \cdot & H_{\circ} X_{2N-1,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ -H_1 X_{2N,1}^r & \cdot & \cdot & -H_1 X_{2N,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & H_{\circ} X_{N,1}^l & \cdot & \cdot & H_{\circ} X_{N,N}^l \end{array} \right]$$

(DIII.2)

Prvi harmonik

Matrica krutosti na granici:

$$K_1 = \Lambda_1^* \left[rA\Psi_1[k^2] + (rD+E+F)\Phi_1[k] + \left(\frac{1}{r} J+Q\right) \Psi_1 \right] W_1^{-1} \quad (\text{DIII.6})$$

Modifikovana modalna matrica Ψ_1 :

$$\Psi_1 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} H_1 X_{1,1}^r & \cdot & \cdot & H_1 X_{1,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ H_0 X_{2,1}^r & \cdot & \cdot & H_0 X_{2,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & H_1 X_{1,1}^l & \cdot & \cdot & H_1 X_{1,N}^l \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline H_1 X_{2N-1,1}^r & \cdot & \cdot & H_1 X_{2N-1,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ H_0 X_{2N,1}^r & \cdot & \cdot & H_0 X_{2N,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & H_1 X_{N,1}^l & \cdot & \cdot & H_1 X_{N,N}^l \end{array} \right]$$

(DIII.7)

Modifikovana modalna matrica Φ_1 je:

$$\Phi_1 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} H_0 X_{1,1}^r & \cdot & \cdot & H_0 X_{1,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ -H_1 X_{2,1}^r & \cdot & \cdot & -H_1 X_{2,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & H_0 X_{1,1}^l & \cdot & \cdot & H_0 X_{1,N}^l \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline H_0 X_{2N-1,1}^r & \cdot & \cdot & H_0 X_{2N-1,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ -H_1 X_{2N,1}^r & \cdot & \cdot & -H_1 X_{2N,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & H_0 X_{N,1}^l & \cdot & \cdot & H_0 X_{N,N}^l \end{array} \right]$$

(DIII.8)

Modifikovana modalna matrica W_1 :

$$W_1 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} H_{01}^1 X_{1,1}^r & \cdot & \cdot & H_{01}^{2N} X_{1,2N}^r & \frac{1}{r} H_1 X_{1,1}^l & \cdot & \cdot & \frac{1}{r} H_1 X_{1,N}^l \\ -k_1^r H_1 X_{2,1}^r & \cdot & \cdot & -k_{2N}^r H_1 X_{2,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{1}{r} H_1 X_{1,1}^r & \cdot & \cdot & \frac{1}{r} H_1 X_{1,2N}^r & H_{01}^{11} X_{1,1}^l & \cdot & \cdot & H_{01}^{N1} X_{1,N}^l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline H_{01}^1 X_{2N-1,1}^r & \cdot & \cdot & H_{01}^{2N} X_{2N-1,2N}^r & \frac{1}{r} H_1 X_{N,1}^l & \cdot & \cdot & \frac{1}{r} H_1 X_{N,N}^l \\ -k_1^r H_1 X_{2N,1}^r & \cdot & \cdot & -k_{2N}^r H_1 X_{2N,2N}^r & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{1}{r} H_1 X_{2N-1,1}^r & \cdot & \cdot & \frac{1}{r} H_1 X_{2N-1,2N}^r & H_{01}^{11} X_{N,1}^l & \cdot & \cdot & H_{01}^{N1} X_{N,N}^l \end{array} \right] \quad (DIII.9)$$

gde je uvedeno obeležavanje:

$$\begin{aligned} H_{01}^j &= k_j^r H_0(k_j^r r) - \frac{1}{r} H_1(k_j^r r) \\ H_{01}^{jl} &= k_j^l H_0(k_j^l r) - \frac{1}{r} H_1(k_j^l r) \end{aligned} \quad (DIII.10)$$

Matrica transformacije za 1-vi harmonik:

$$\Lambda_1^* = \left[\begin{array}{cccccccc} \pi & & & & & & & \\ & \pi & & & & & & \\ & & \pi & & & & & \\ & & & \pi & & & & \\ & & & & \pi & & & \\ & & & & & \pi & & \\ & & & & & & \pi & \\ & & & & & & & \pi \end{array} \right] \quad (DIII.11)$$

U izvođenju modifikovanih matrica korišćene su rekurentne formule za Hankell-ove funkcije iz DODATKA II, tako da je:

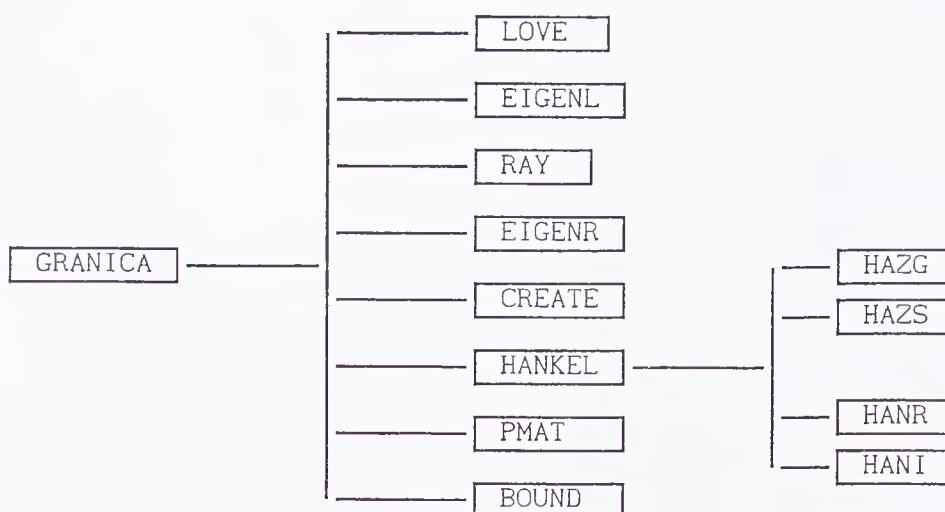
$$\begin{aligned} H_{-1} &= -H_1 \\ H_{0,r} &= -k H_1 \end{aligned} \quad (DIII.12)$$

gde je $H_0 = H_0^2(k_j r)$, Hankell-ova funkcija II vrste, nultog reda, a $H_1 = H_1^2(kr)$, Hankell-ova funkcija II vrste, prvog reda.

DODATAK IV

DIV. GRANICA

Program GRANICA rešava matrice krutosti na granici rotaciono simetrične zone za nulti i prvi harmonik. Napisan je u programskom jeziku FORTRAN 77 i sastoji se od glavnog programa, 8 većih i više manjih podprograma (shema DIV.1)



Shema DIV.1

Prva 4 podprograma smo već koristili za rešavanje svojstvenih vrednosti R i L -talasa. Njihovo objašnjenje je dato u DODATKU I. Ostali podprogrami imaju sledeću ulogu:

-
- CREATE - formira matrice svojstvenog problema X i [k]
HANKEL - formira vektore *Hankell*-ovih funkcija H0, H1 i H01
PMAT - formira matrice graničnog problema A,D,E,F,G,J i Q
BOUND - formira modifikovane modalne matrice i matricu
krutosti na granici K_b za $n=0$ i $n=1$.

Podprogram HANKEL određuje vrednosti *Hankell*-ovih funkcija u okviru 4 podprograma, koji računaju vrednosti funkcija za realne (HANR), imaginarne (HANI) i kompleksne argumente (HAZG i HAZS). Pri tome smo koristili rešenje preko redova, za male vrednosti argumenata, dok smo za veliku vrednost argumenta ($z>4$), koristili aproksimativne polinome [1], [52].

Fleksibilnost podprograma je postignuta korišćenjem modularnog povezivanja putem zajedničkih područja tzv. COMMON-a.

Ulazni podaci su isti kao za programe L.FOR tj. R.FOR (vidi DODATAK I).

DODATAK V

D5.1. Program AXYB

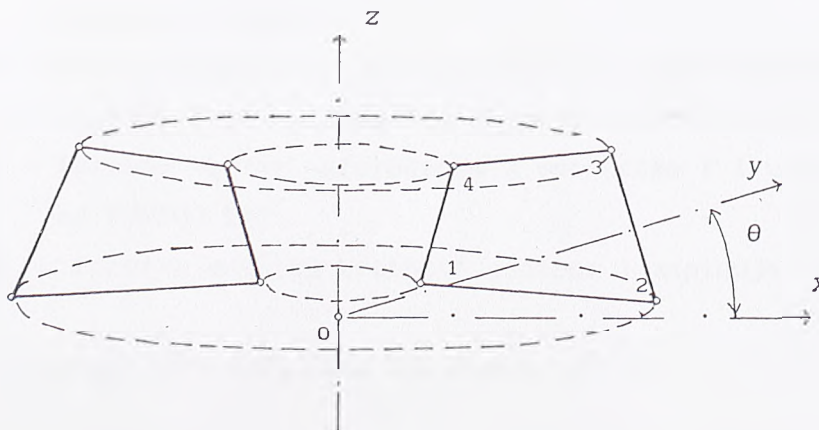
Program AXYB rešava odgovor rotaciono simetričnog problema primenom MKE sa konzistentnim graničnim uslovima u frekventnom domenu.

Dinamička jednačina kretanja glasi:

$$[K - \omega^2 M + K_b(\omega)] U(\omega) = P(\omega) \quad (\text{DV.1})$$

gde su K i M matrice krutosti i mase "jezgra" konačnih elemenata, K_b matrica krutosti na granici a U i P vektori pomeranja čvorova tj. dinamičkog opterećenja jezgra.

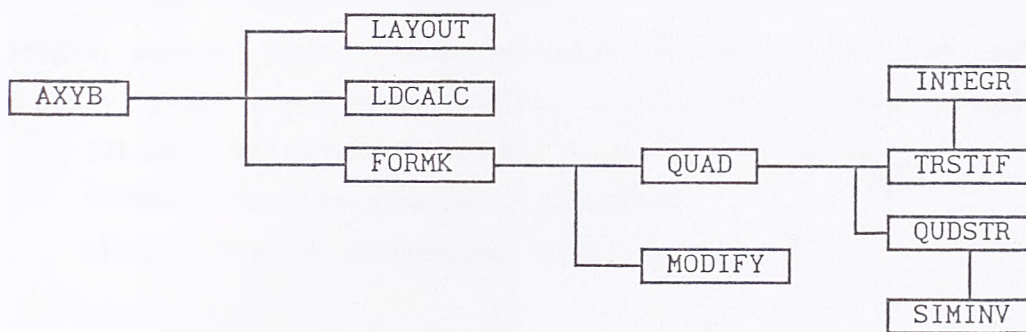
Matrice krutosti i mase jezgra se određuju na uobičajeni način u MKE, primenom osno-simetričnog, četvorougaoanog elementa (slika DV-1). Element ima tri stepena slobode pomeranja u čvorovima: u , w , v . Usvojena je linearna raspodela pomeranja između čvorova. Matrica krutosti je dobijena zbirom matrica krutosti za 4 trougaona elementa uz eliminaciju srednjeg čvora statičkom kondenzacijom. Korišćena je koncentrisana matrica masa. Sve detalje o elementu, kao i matrice M i K za element se mogu naći u referenci [124].



Slika DV-1

Program rešava slučaj opterećenja koje je simetrično u odnosu na x -osu, razvijanjem u n članova *Fourier*-ovog reda, pri čemu mi koristimo samo dva harmonika: $n=0$ i $n=1$. Matrice krutosti i masa sistema i vektor amplituda ekvivalentnog opterećenja u čvorovima P ($P(\omega)=Pe^{i\omega t}$) rešavamo samo jednom i upisujemo na FOR001.DAT FOR002.DAT i FOR003.DAT. Za svaku frekvenciju ω program GRANICA, za zadati raspored slojeva, formira matricu krutosti na granici K_b i upisuje na FOR007.DAT. Zatim, za svako ω formiramo i rešavamo kompleksan sistem jednačina DV-1. Rešenje sistema je vektor pomeranja čvorova jezgra $U(\omega)$.

Shema programa AXYB je data u DV-1.



Shema DV-1

Program AXYB se sastoji od tri glavna podprograma:

LDCALC - učitava podatke o geometriji i materijalu i smešta ih u dinamički vektor

LAYOUT - učitava opterećenje u čvorovima za svaki harmonik;
 - formira matricu masa M i upisuje na FOR002.DAT
 - formira vektor opterećenja u čvorovima P i upisuje na FOR003.DAT

FORMK - formira matricu krutosti sistema i zapisuje na FOR001.DAT

i više podprograma od kojih ćemo samo neke istaći:

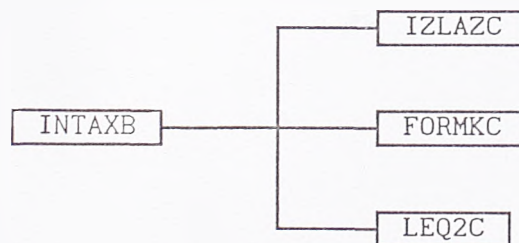
QUAD - formira matricu krutosti kvadrilateralnog elementa iz matrice krutosti četiri trougaona elementa

- TRISTIF- formira matricu krutosti rotaciono-simetričnog trougaonog elementa
- INTEGR - sračunava vrednosti integrala potrebnih za matricu krutosti
- MODIFY - uvodi granične uslove u matricu krutosti sistema zadajući svim elementima matrice koji odgovaraju sprečenom pomeranju vrednost jednaku nuli, sem dijagonalnom elementu koji dobija vrednost jedan
- QUDSTR - računa napone u težištu elementa

D5.2. Program INTAXB

Program INTAXB učitava čvorove na granici, matricu krutosti jezgra, matricu masa, vektor opterećenja, matricu krutosti na granici i poziva podprograme koji formiraju i rešavaju dinamičku jednačinu:

- IZLAZC - učitava matrice M i K, vektor P i K_b
- FORMKC - formira dinamičku jednačinu
- LEQ2C - rešava kompleksnu dinamičku jednačinu



Shema DV-2



