



PD 14467



003097013

COBISS ◉

Univerzitet u Beogradu
Građevinski fakultet

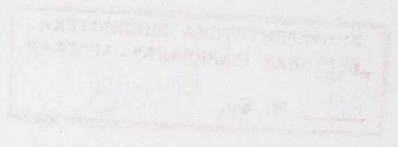
Biljana Deretić Stojanović

PRORAČUN SPREGNUTIH KONSTRUKCIJA
METODOM DEFORMACIJA

– Doktorska disertacija –

Beograd, 1992.

P2 14467



UNIVERZITET U BEOGRADU
GRAĐEVINSKI FAKULTET

PRORAČUN SPREGNUTIH KONSTRUKCIJA METODOM DEFORMACIJA

Doktorska disertacija

Mr. BILJANA DERETIĆ STOJANOVIĆ



BEOGRAD, 1992.

PRORAČUN SPREGNUTIH KONSTRUKCIJA METODOM DEFORMACIJA

UVOD

Pod spregnutim konstrukcijama podrazumevamo konstrukcije koje su sačinjene od dva i više materijala koji imaju različite reološke osobine.

Prvi uspešan oblik sprezanja dva materijala, betona i čelika u jedinstven konstruktivni element, je armirani beton. Koristeći velike mogućnosti koje pružaju kombinacije u sprezanju betona i čelika, stvoreni su novi oblici spregnutih konstrukcija. U njima su uglavnom uklonjeni poznati nedostaci klasičnog armiranog betona.

Sprezanjem betona sa prethodno napregnutim žicama, sprečava se pojava prslina, angažuje se čitav presek u prenošenju sila i u potpunosti se iskorišćava visokovredni čelik.

Sprezanjem čeličnog nosača u zategnutoj zoni preseka sa betonom u pritisnutoj zoni, izbegava se pojava prslina u betonu i smanjuje se sopstvena težina konstrukcije. Ovo je i najlogičniji oblik sprezanja čelika i betona.

Moguće je sprezanje prethodno napregnutih betonskih ploča sa čeličnim nosačima ili prethodno naprezanje spregnutih konstrukcija kao celine, a mogući su drugi specifični oblici sprezanja.

Iako su se od pojave armiranog betona stvarale spregnute konstrukcije one se dugo nisu tako primenjivale. Mnogobrojna merenja na konstrukcijama, kod kojih je armirano betonska ploča postavljena na čelične nosače, ukazivala su da postoji osetna razlika između merenih ugiba i ugiba sračunatih na pretpostavci da čelični nosač sam nosi celokupno opterećenje. Izmereni ugibi uvek su bili manji od računskih [40]. Iako je ova saradnja između



nosača i armirano betonske ploče uočena, sa njom se nije računalo, ona se čak raznim konstruktivnim merama i sprečavala.

Značajna ispitivanja saradnje betonske ploče i čeličnog nosača započeta su u SAD 1921. godine, u Engleskoj i Kanadi 1922. godine. Pri tome su posmatrani slučajevi čeličnih nosača koji su bili potpuno ili delimično ubetonirani. U ovim ogledima veza između betona i čelika bila je prirodna veza usled prijanjanja betona. Posle ispitivanja izvršenih u Švajcarskoj 1930. godine nastavljena su ispitivanja i u SAD koja su obuhvatala i istraživanja različitih tipova dodatnih sredstava za sprežanje betona i čelika. Vrlo značajne rezultate ispitivanja za dalji razvoj spregnutih konstrukcija objavio je 1932. godine prof. Štisi (Stusi) iz Švajcarske. Objavljeni rezultati merenja prof. Roša 1939. godine obavljena na mostu preko reke Save u Zagrebu pobudila su veliku pažnju stručne javnosti pa je interes za spregnute konstrukcije znatno povećan.

Značajnu primenu spregnutih konstrukcija usporavao je nedostatak jedne dovoljno razvijene teorije proračuna, koja se morala razlikovati od teorije proračuna homogenog nosača već i po tome što se spregnut nosač sastoji od materijala različitih reoloških osobina.

Nizom eksperimenata utvrđeno je da se napon i deformacija u betonu menjaju kroz vreme. Uočena je pojava skupljanja i puzanja, tj. viskoelastično ponašanje betona. Konsider (Considere) je krajem prošlog veka eksperimentalno utvrdio i prilično detaljno ispitaio pojavu skupljanja betona. Prva sistematska eksperimentalna ispitivanja pojave puzanja betona izvršili su krajem treće decenije ovog veka Glenvil (Glanville) [19], Dejvis (Davis) [8] i Fresinet (Freyssinet) [15].

Uočeno je da reološke osobine betona zavise od veličine

napona, istorije napona i deformacij, starosti betona u kojoj napon započinje delovanje, temperature, vlažnosti sredine, oblika i dimenzije elementa i dr. [1], [2].

Paralelno se razvijao i pravac u kome su se stvarne osobine materijala pretstavljale preko svojstava različitih reoloških modela. Prvi takav model za beton bio je Maksvelov (Maxwell) model preko koga je Maksvel pokazao zavisnost deformacije od vremena u obliku diferencijalne jednačine. Ovaj model je u literaturi poznat kao reološki model teorije starenja betona. Uz određena poboljšanja Dišinger (Dishinger) [9] je izveo diferencijalnu vezu između napona i deformacije koja je i danas u primeni. Nešto drugačije reološke modele predložili su Kelvin odnosno Voigt i drugi.

Čelik za prethodno naprezanje ima osobinu relaksacije koja zavisi od početnog napona i temperature sredine. Dugo je relaksacija čelika za prethodno naprezanje zanemarivana i nezavisno od veličine početnih napona ovaj čelik je tretiran kao elastičan materijal. Neželjene pojave na konstrukcijama ukazale su na potrebu preciznijeg uvođenja u proračun osobina čelika za prethodno naprezanje [24], [25].

Ostale vrste čelika koje se javljaju u spregnutim konstrukcijama imaju osobine linearnog elastičnog materijala.

U proračun spregnutih nosača reološke osobine betona i čelika za prethodno naprezanje uvode se sa većim ili manjim stepenom tačnosti, ne samo zbog složenih zavisnosti, već što se razni uticaji kao temperatura, vlažnost sredine ne mogu tačno predvideti.

Ispitivanjima Glanvila i Dejvisa dokazano je da se doformacije betona usled konstantnog napona u toku vremena povećavaju, ali da su proporcionalne naponu.

Za normalne uslove eksploatacije najvećeg broja spregnutih

konstrukcija tj. kada je napon u betonu manji od $0,4 f_{ck}$ (f_{ck} -karakteristična čvrstoća betona na pritisak) i kada beton očvršćava u nepromenljivim termohigrometrijskim uslovima, s dovoljnom tačnošću usvaja se linearna zavisnost deformacije puzanja betona od konstantnog napona i princip superpozicije za deformaciju puzanja. Ove pretpostavke dovode do integralne veze između napona i deformacije koju su teorijski razradili Bolcman (Boltzmann) [5] i Voltera (Volterra) [43].

Diferencijalne veze koje su dobijene razmatranjem reoloških modela nisu mogle tačno da opišu ponašanje uzorka u prvim trenucima vremena posle trenutnog nanošenja opterećenja, tako da su integralne veze, kao opštije, bile u prednosti.

Polazeći od integralne veze između napona i deformacije za beton i neizbežnih aproksimacija vezanih za reološke osobine materijala uspostavljene su tačne i približne metode proračuna spregnutih konstrukcija.

Kod tačnih metoda, za usvojeni oblik funkcije puzanja betona, bez ikakvih matematičkih zanemarenja izvode se izrazi za napone i pomeranja. Za ovu vrstu rešenja karakteristično je da su za različite analitičke oblike funkcije puzanja korišćene različite matematičke metode.

Koristeći Maslov-Arutjunjan-ovu funkciju puzanja Arutjunjan je izveo izraze za napone u čeliku i betonu za dva specijalna slučaja geometrijskih karakteristika preseka i jednostavne slučajeve opterećenja nepromenljivog sa vremenom [3].

Za funkciju puzanja teorije starenja, pri konstantnom modulu elastičnosti Đurić [12], Satler (Sattler) [38] i Frulih Frohlich [17] izvode izraze za napone kod statički određenih nosača, proizvoljnih geometrijskih karakteristika preseka, samo za slučaj kada su sile u preseku nepromenljive sa vremenom.

Funkciju puzanja teorije nasleđa koristio je Ržanjicin [37] pri rešavanju jednostavnih problema armirano betonskih elemenata. Za tu funkciju Lazić [29] daje rešenje metodom sila za statički neodređene spregnute nosače proizvoljnih geometrijskih karakteristika

U teoriji linearne viskoelastičnosti Mandel [31], [32] je uspostavio matematičku metodu u kojoj je koristio linearne integro-diferencijalne operatore, a Hije (Huet) [20], [21] je primenio ovaj operatorski postupak za rešavanje problema nosača u kome sadejstvuje više različitih linearnih viskoelastičnih materijala sa starenjem. Kako za ove operatore važe zakoni algebre običnih brojeva, problemi se rešavaju simbolički, jer se dobija samo pregled matematičkih operacija koje najkraćim putem dovode do rešenja. Prilikom izvođenja izraza za napone i pomeranja koji važe za proizvoljnu funkciju puzanja betona, za preseke proizvoljnih geometrijskih karakteristika i opterećenje promenljivo sa vremenom, Lazić J. i Lazić V. [23] uvode linearne integralne operatore. Pomoću ovih operatora, algebarskim operacijama razvili su celokupan postupak rešavanja statički određenih i neodređenih nosača metodom sila.

Uspostavljanje tačnih teorija je opravdano s praktične strane jer otvara mogućnost procene tačnosti postojećih približnih metoda, prirodu aproksimacije u njima i opravdanost njihove primene u praksi.

Kod približnih metoda proračuna se uvođenjem izvesnih uprošćenja vrši prevođenje integralne veze između napona i deformacija za beton u algebarsku vezu. Na osnovu takve veze se dalje bez teškoća matematičke prirode dobijaju izrazi za napone i pomeranja nosača. U približnim metodama se dakle, pored neizbežnih aproksimacija fizičkih osobina betona vrše i određena matematička

zanemarenja, čije fizičko značenje nekad nije moguće sagledati, pa je neophodno njihovo upoređivanje sa tačnim rešenjima.

Najpoznatije algebarske veze između napona i deformacija za viskoelastične materijale su : metoda fiktivnog modula ili sažeto EM-metoda (Fric (Fritz) [17], Faber [14]), metoda srednjeg napona (Đurić [12], Ulickij [42]) i modifikovana metoda fiktivnog modula elastičnosti ili AAEM metoda i njoj odgovarajuće (Trost [41], Bažant [4], Lazić J. i Lazić V. [26]).

Primenjuje se i generalisana AAEM metoda koja polazi od tačnih veza između napona i deformacije , a jedina aproksimacija zbog koje je i svrstana u približne metode je pretpostavka da statički neodređene veličine linearno zavise od funkcije relaksacije betona. Tada se sistem uslovnih integralnih jednačina po statičkim nepoznatim svodi na sistem algebarskih jednačina (Lazić J., Lazić V. [27]). Satler ovakvu vezu naziva tačnom.

...

Predmet ovog rada je proračun spregnutih nosača metodom deformacija. U okviru matematičke teorije koja polazi od integralne veze između statičkih i deformacijskih veličina biće izvedeni tačni izrazi metode deformacija za spregnut nosač bez ikakvih matematičkih zanemarenja. Sve osnovne relacije prikazane su preko integralnih jednačina. Korišćenjem linearnih integralnih operatora algebarskim operacijama prikazuje se celokupan postupak rešavanja spregnutog deformacijski neodređenog nosača analogno postupku rešavanja elastičnog deformacijski neodređenog nosača. Svi izvedeni izrazi važiće za proizvoljnu funkciju puzanja betona, za proizvoljno promenljivo opterećenje i nosače proizvoljnih geometrijskih karakteristika.

Radi prikazivanja primene izvedenih izraza rešeni su primeri deformacijski neodređenih spregnutih nosača .

I. JEDNAČINE PROBLEMA I NJIHOVO REŠENJE

1. Osnovne pretpostavke

Prilikom proračuna spregnutog štapa uvode se određene pretpostavke kao što se to čini u tehničkoj teoriji savijanja štapa.

- Štap ima ravan simetrije pa i poprečni presek ima osu simetrije.
- Osa spregnutog štapa je geometrijsko mesto težišta površina idealizovanog preseka i leži u ravni simetrije.
- Dimenzije poprečnih preseka štapa su male u odnosu na poluprečnik krivine i u odnosu na dužinu štapa. Zanemaruje se uticaj transverzalnih sila na deformaciju štapa.
- Poprečni preseki se ne deformišu i posle deformacije ostaju ravni i upravni na nedeformisanu osu štapa - Bernulijeva (Bernuolli) hipoteza.
- Deformacija štapa je mala pa se kvadrati i viši stepeni pomeranja, obrtanja i dilatacija i kvadrati i viši stepeni njihovih izvoda mogu zanemariti (pretpostavka o malim pomeranjima- geometrijska linearnost).
- Uslovi ravnoteže se postavljaju na nedeformisanom štapu (statička linearnost).
- Spoljašnje opterećenje deluje u ravni simetrije štapa i funkcija je koordinate ose štapa i vremena t . Promena inteziteta opterećenja je mala pa se mogu zanemariti inercijalne sile.

Pored ovih pretpostavki koje ukazuju da će se rećenja tražiti u okviru linearne teorije uvode se i pretpostavke o fizičkim osobinama betona [1] , [2] , [33] , [34] i čelika za prethodno naprezanje [24] , [25].

- Beton je homogen i izotropan materijal.



-Usled trenutnog opterećenja ili rasterećenja u betonu se javlja trenutna konačna elastična deformacija koja zavisi od starosti betona.

-Pod dejstvom dugotrajnog opterećenja u betonu se javlja deformacija puzanja koja ostaje ograničena i za napone bliske naponu pri lomu, a prilikom rasterećenja deo ove deformacije je povratan a deo ostaje trajno.

-Pri delovanju konstantnog napona deformacija puzanja je linearna funkcija napona ; važi princip superpozicije za deformacije puzanja koje su nastale od priraštaja napona tokom vremena.

-Deformacija puzanja zavisi od starosti betona ; ako naponi započinju delovanje pri različitim starostima betona, tada se za isti vremenski interval i pri istom intezitetu napona ostvaruju različiti iznosi deformacije puzanja ; ova deformacija je manja ukoliko je veća starost betona.

-Prilikom očvršćavanja betona javlja se postupna deformacija, koja nije posledica delovanja spoljnih sila, tzv. skupljanje betona.

Na osnovu usvojenih pretpostavki, beton na referentnoj temperaturi pripada grupi linearno viskoelastčnih materijala sa osobinom starenja.

Čelik za prethodno naprezanje ima osobinu relaksacije.

Ostale vrste čelika koje se javljaju u spregnutim konstrukcijama imaju osobine linearnog elastičnog materijala.

Teorija koja je ovde data odnosi se na spregnute nosače u čijim se betonskim delovima ne javljaju prsline. Nosači sa prslinama u betonu nisu obuhvaćeni jer se prilikom njihovog rešavanja javljaju problemi koji nisu svojstveni kategoriji nosača koja se ovde izučava.

2. Integralna veza između napona i deformacije i osnovni operatori

2.1. Integralna veza

Matematičku formulaciju veze između napona i deformacije za beton, kao linearno viskoelastičnog materijala sa osobinom starenja, pri linearnom stanju napona, dali su Maslov [33] i McHenry [34]. Usvojili su princip superpozicije za naponske efekte, koji su modifikovani starošću betona. Princip superpozicije postavio je Bolcman [5], a uopštio Voltera [43].

Ovde će se izvesti integralna veza između napona i deformacije [23], [24].

Pretpostavlja se da pri linearnom stanju napona deluje konstantan napon σ_{bo} od trenutka t_0 :

$$\sigma_{bo}(t, t_0) = \sigma_{bo} H(t-t_0) \quad H(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

gde je t_0 starost betona u trenutku prvog delovanja napona ;
 $t = 0$ usvojeno je kao vreme spravljanja betona.

Na osnovu navedenih pretpostavki o osobinama betona, usled dugotrajnog delovanja konstantnog napona (2.1) u betonu će se pored elastične deformacije $\varepsilon_{el}(t, t_0)$ u proizvoljnom vremenu t :

$$\varepsilon_{el}(t, t_0) = \sigma_{bo} \frac{1}{E_{bo}(t)} \quad (2.2)$$

pojaviti i deformacija puzanja $\varepsilon_{puz}(t, t_0)$ koja je linearna funkcija napona :

$$\varepsilon_{puz}(t, t_0) = \sigma_{bo} \frac{\varphi^*(t, t_0)}{E_{b28}} \quad t \geq t_0 \quad (2.3)$$

Veličina $\varphi^*(t, t_0)$ je bezdimenziona funkcija i naziva se koeficijent stvarnog puzanja betona ; $E_b(t)$ je vrednost modula elastičnosti betona starosti t dana ; E_{b28} je vrednost modula

elastičnosti betona starosti 28 dana.

Ukupna deformacija $\varepsilon_T(t, t_0)$ u proizvoljnom vremenu t , usled delovanja konstantnog napona (2.1) može se tada napisati :

$$\varepsilon_T(t, t_0) = \sigma_{b_0} \left[\frac{1}{E_b(t)} + \frac{\varphi^*(t, t_0)}{E_{b28}} \right], \quad t \geq t_0 \quad (2.4)$$

ili

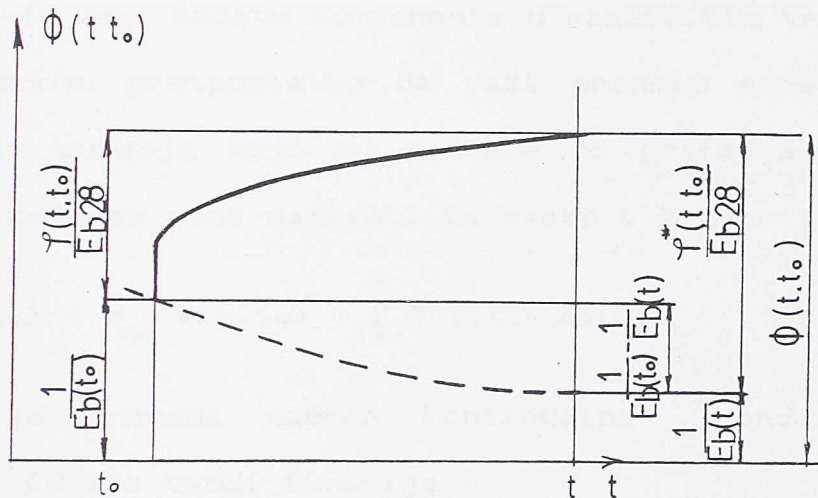
$$\varepsilon_T(t, t_0) = \sigma_{b_0} \Phi(t, t_0), \quad t \geq t_0 \quad (2.5)$$

Uvedena dimenziona funkcija :

$$\Phi(t, t_0) = \frac{1}{E_b(t)} + \frac{\varphi^*(t, t_0)}{E_{b28}} \quad t \geq t_0 \quad (a) \quad (2.6)$$

$$\Phi(t, t_0) = 0 \quad t < t_0 \quad (b)$$

naziva se funkcija puzanja [30] :



sl.2.1

Iz slike 2.1 neposredno sledi relacija :

$$\varphi^*(t, t_0) = \frac{E_{b28}}{E_b(t_0)} - \frac{E_{b28}}{E_b(t)} + \varphi(t, \tau), \quad (2.7)$$

gde je $\varphi(t, t_0)$ koeficijent prividnog puzanja. Po modelu propisa CEB [6] funkcija puzanja je data u obliku :

$$\Phi(t, t_0) = \frac{1}{E_b(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{b28}} \quad (2.8)$$

Vrednost modula elastičnosti betona starosti 28 dana E_{b28} uvedena je kao dimenzioni faktor uz koeficijent stvarnog $\varphi^*(t, t_0)$ i prividnog puzanja $\varphi(t, t_0)$, (2.6a) i (2.8) kao što je učinjeno u modelu CEB [6], [7].

Specijalno kada se pretpostavi nepromenljivost modula elastičnosti za $t \geq t_0$:

$$E_b(t) = E_b(t_0) = E_{b_0} \quad , \quad (2.9)$$

ne postoji razlika između koeficijenta stvarnog i prividnog puzanja :

$$\varphi^*(t, t_0) = \varphi(t, t_0) \quad . \quad (2.10)$$

Posmatra se slučaj kada je beton izložen dejstvu napona promenljivog stepenasto sa vremenom , prema izrazu:

$$\sigma_b(t, t_0) = \sigma_{b_0} H(t, t_0) + \sum_{j=1}^n \Delta\sigma(t_j) \quad t \geq t_n \quad (2.11)$$

$$\Delta\sigma(t_j) = \Delta\sigma_j H(t - t_j)$$

gde su σ_{b_0} i $\Delta\sigma_j$ zadate komponente u različitim vremenima t_j .

Na osnovu pretpostavke da važi princip superpozicije i za deformacije puzanja koje su nastale od priraštaja napona tokom vremena , može se tada napisati za svako $t \geq t_n$:

$$\varepsilon_T(t, t_0) = \sigma_{b_0} \Phi(t, t_0) + \sum_{j=1}^n \Phi(t, t_j) \Delta\sigma(t_j) \quad , \quad t \geq t_n \quad (2.12)$$

Ako je promena napona kontinualna , onda se , umesto zavisnosti (2.11) uvodi funkcija :

$$\sigma_b = \sigma_{b_0}(\tau, t_0) \quad , \quad t_0 \leq \tau \leq t \quad (2.13)$$

Ukupna deformacija određena je tada izrazom :

$$\varepsilon_T(t, t_0) = \sigma_{b_0} \Phi(t, t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) \frac{d\sigma_b(\tau, t_0)}{d\tau} d\tau \quad (2.14)$$

Izraz (2.14) predstavlja integro-diferencijalnu jednačinu u kojoj je nepoznata funkcija $\sigma_b(t, t_0)$ [33], [34]. Parcijalnom integracijom integrala ona se prevodi na oblik nehomogene integralne jednačine :

$$\varepsilon_T(t, t_0) = \frac{\sigma_b(t, t_0)}{E_b(t)} - \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(t, \tau) \sigma_b(\tau, t_0) d\tau \quad (2.15)$$

koja se transformacijama svodi na Volteraovu integralnu jednačinu II vrste [43]. Njeno jednoznačno rešenje je :



$$\sigma_b(t, t_0) = \varepsilon_T(t, t_0) E_b(t) - \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi(t, \tau) \varepsilon_l(\tau, t_0) d\tau \quad (2.16)$$

Dimenziona funkcija $\Psi(t, t_0)$ naziva se funkcija relaksacije betona.

Beton ima postupnu deformaciju, koja je posledica njegovog očvršćavanja, a ne delovanja napona, tzv. deformaciju skupljanja.

Uvođenjem deformacije skupljanja betona $\varepsilon_s(t, t_0)$ koja ispunjava uslov:

$$\varepsilon_s(t_0, t_0) = 0 \quad (2.17)$$

ukupna deformacija je:

$$\varepsilon_T(t, t_0) = \varepsilon(t, t_0) - \varepsilon_s(t, t_0) \quad (2.18)$$

tj.:

$$\varepsilon(t, t_0) - \varepsilon_s(t, t_0) = \frac{\sigma_b(t, t_0)}{E_b(t)} - \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(t, \tau) \sigma_b(\tau, t_0) d\tau \quad (2.19)$$

gde je $\varepsilon(t, t_0)$ celokupna deformacija nastala uled spoljašnjih uticaja i skupljanja.

2.2. Integralna veza u operatorskom obliku

Integralna veza između napona i deformacije (2.15) odnosno (2.19) prikazaće se u operatorskom obliku [23], [26], [prilog 1.].

Funkciju puzanja betona (2.6) na sl.2.1, možemo prikazati i u obliku:

$$\Phi^*(t, \tau) = \frac{1}{E_{b_0}} \left[\frac{1}{e(t)} + f^*(t, \tau) \right] = \frac{1}{E_{b_0}} F^*(t, \tau) \quad (2.20)$$

gde je:

$$e = e(t) = \frac{E_b(t)}{E_{b_0}}, \quad E_{b_0} = E_b(t_0), \quad e(t_0) = 1, \quad (2.21)$$

na osnovu (2.7):

$$f^*(t, \tau) = \frac{E_{b_0}}{E_b(\tau)} - \frac{E_{b_0}}{E_b(t)} + \frac{E_{b_0}}{E_{b_{2\theta}}} \varphi(t, \tau), \quad (2.22)$$

a funkcija

$$\varphi_r = \varphi_r(t, t_0) = \frac{E_{b_0}}{E_{b_{28}}} \varphi(t, t_0) \quad (2.23)$$

se naziva redukovani koeficijent puzanja .

Funkcija $F^*(t, \tau)$ je bezdimenziona funkcija puzanja :

$$F^*(t, \tau) = \frac{1}{e(t)} 1^* + f^*(t, \tau) . \quad (2.24)$$

Definiše se linearni integralni operator \hat{F}' koji je asociiran prvom izvodu funkcije $F^*(t, \tau)$ po argumentu τ (A 1.2), (A 1.4) :

$$\hat{F}' = \frac{1}{e} \hat{1}' + \hat{f}' . \quad (2.25)$$

Na osnovu stavova (A.1.5) i (A.1.6) i (2.20) je :

$$f^* = \hat{f}' 1^* , \quad (f^*)' = -f' , \quad (\Phi^*)' = -\frac{1}{E_{b_0}} f' . \quad (2.26)$$

Koristeći izraze (2.20) i (2.24)-(2.26) izraz (2.19) može se prikazati :

$$\varepsilon(t, t_0) - \varepsilon_s(t, t_0) = \frac{1}{E_b} \left[\frac{1}{e(t)} \sigma_b(t, t_0) + \int_t^{t_0} \frac{\partial}{\partial \tau} f(t, \tau) \sigma_b(\tau, t_0) d\tau \right] , \quad (2.27)$$

ili simbolički u operatorskom obliku :

$$\varepsilon - \varepsilon_s = \frac{1}{E_{b_0}} \hat{F}' \sigma_b . \quad (2.28)$$

U proračunu spregnutih konstrukcija obično se uvodi pretpostavka da je pojava skupljanja betona vremenski slična puzanju [12], [38], [23], [27]. Tada je funkcija deformacije usled skupljanja betona ε_s data izrazom :

$$\varepsilon_s = r (F^* - 1^*) , \quad (2.29)$$

a za svaki uočeni par (t, t_0) parametar r je konstantan :

$$r = \frac{\varepsilon_s(t, t_0)}{F^*(t, t_0) - 1^*} . \quad (2.30)$$

Rešenje integralne jednačine (2.23) odnosno (2.24) je :

$$\sigma_b = E_{b_0} \hat{R}' (\varepsilon - \varepsilon_s) . \quad (2.31)$$

Uvedeni operator \hat{R}' :

$$\hat{R}' = e \hat{1}' - \hat{\psi}' \quad (2.32)$$

asociran je prvom izvodu (A.1.4) funkcije $R^*(t, \tau)$:

$$R^*(t, \tau) = \hat{R}' 1^* = e 1^* - \psi^* \quad (2.33)$$

koja predstavlja bezdimenzionu funkciju relaksacije.

Operatori \hat{R}' i \hat{F}' su inverzni i za njih važi stav (A.1.8) :

$$\hat{R}' \hat{F}' = \hat{F}' \hat{R}' = \hat{1}' \quad (2.34)$$

ili posle integracije (A.1.9)

$$\hat{R}' F^* = \hat{F}' R^* = 1^* \quad (2.35)$$

U ovom radu će se uzeti u obzir i relaksacija čelika za predhodno naprezanje (p). Sa zadovoljavajućom tačnošću usvaja se sledeća veza između napona i deformacije za ovu vrstu čelika [25]:

$$\sigma_p = E_p \hat{R}'_p \varepsilon_p \quad (2.36)$$

Uvedeni operator \hat{R}'_p asociran je izvodu R'_p , funkcije R_p^* , koja predstavlja funkciju relaksacije čelika za predhodno naprezanje i linearno zavisi od funkcije relaksacije betona :

$$R_p^* = \hat{R}'_p 1^* = (1-\rho) 1^* + \rho R^* \quad (2.37)$$

Ovako izabrana veza (2.37) pored toga što je i eksperimentalno potvrđena, ispunjava uslov komutativnosti operatora \hat{R}'_p sa ostalim operatorima [28].

Za određeni t, t_0 i početni napon u čeliku σ_{p_0} , usvaja se konstantna vrednost parametra ρ . Ona se određuje iz izraza :

$$\rho = \frac{\zeta_p(t-t_0)}{1^* - R^*(t, t_0)} \quad (2.38)$$

gde je $\zeta_p = \zeta_p(t-t_0)$ relaksacija čelika za predhodno naprezanje.

Ostale vrste čelika : čelični nosač (n) i meko betonsko gvožđe (m) slede Hukov zakon.

$$\sigma_k = E_k \varepsilon_k \quad k = n, m \quad (2.39)$$

2.3. Osnovni izrazi spregnutog preseka

Uvedena je pretpostavka da za spregnut presek važi Bernulijeva hipoteza ravnih preseka :

$$\varepsilon = \eta + \kappa y \quad , \quad (2.40)$$

gde je :

$\varepsilon = \varepsilon(x, y, t, t_0)$ podužna dilatacija tačaka preseka sa ordinatom y ,

$\eta = \eta(x, t, t_0)$ podužna dilatacija ose štapa ($y=0$),

$\kappa = \kappa(x, t, t_0)$ promena krivine ose štapa (prilog 2.).

Uslovi ravnoteže između spoljnih u unutrašnjih sila u proizvoljnom preseku su :

$$\sum_k \int_{F_k} \sigma_k dF = N \quad , \quad k = b, p, n, m \quad (2.41)$$

$$\sum_k \int_{F_k} y \sigma_k dF = M \quad .$$

Normalna sila $N = N(x, t, t_0)$ i moment savijanja $M = M(x, t, t_0)$ su proizvoljne funkcije vremena.

Eliminacijom nepoznatih funkcija ε i σ_k ($k=b, p, n, m$) iz (2.28), (2.36), (2.39)-(2.41) dobijaju se jednačine :

$$E F \hat{R}'_{11} \eta + E S \hat{R}'_{12} \kappa = N \quad (2.42)$$

$$E S \hat{R}'_{12} \eta + E J \hat{R}'_{22} \kappa = M$$

koje predstavljaju sistem nehomogenih integralnih jednačina.

Operatori \hat{R}'_{hl} definisani su sledećim izrazima :

$$\hat{R}'_{hl} = (\delta_{hl} - \gamma_{hl}) \hat{1}' + \gamma_{hl} \hat{R}' \quad , \quad \delta_{hl} = \begin{cases} 1 & \text{za } h=1 \\ 0 & \text{za } h \neq 1 \end{cases} \quad (2.43)$$

$h, = 1, 2$

zbog osobine komutativnosti operatora , sistem (2.42) se rešava primenom Kramerovog pravila , pa je :

$$\eta = \frac{1}{E_u F_i} \hat{F}'_{11} N + \frac{1}{E_u S_i} \hat{F}'_{12} M \quad (2.44)$$

$$\alpha = \frac{1}{E_u S_i} \hat{F}'_{12} N + \frac{1}{E_u J_i} \hat{F}'_{22} M$$

gde je :

$$\hat{F}'_{11} = (\hat{D}')^{-1} \hat{R}'_{22}, \quad \hat{F}'_{22} = (\hat{D}')^{-1} \hat{R}'_{11}, \quad \hat{F}'_{12} = \hat{F}'_{12} = -(\hat{D}')^{-1} \hat{R}'_{12} \quad (2.45)$$

Operator \hat{D}' predstavlja determinantu matrice operatora $\left[\hat{R}'_{hl} \right]_{2,2}$:

$$\hat{D}' = \hat{R}'_{11} \hat{R}'_{22} - \hat{R}'_{12} \hat{R}'_{12}, \quad (2.46)$$

i može se izraziti kao proizvod glavnih vrednosti \hat{R}'_1 i \hat{R}'_2

matrice operatora $\left[\hat{R}'_{hl} \right]_{2,2}$:

$$\hat{D}' = \hat{R}'_1 \hat{R}'_2 = \hat{R}'_2 \hat{R}'_1, \quad (2.47)$$

gde je $\hat{R}'_h = e_h \hat{1}' - \gamma_h \hat{\psi}' = \gamma'_h \hat{1}' + \gamma_h \hat{R}$ h=1,2 (2.48)

$$e_h = \gamma'_h + \gamma e.$$

Njihovi inverzni operatori su

$$\hat{F}'_h = \frac{1}{e_h} \hat{1}' + \gamma_h \hat{\psi}'_h, \quad h=1,2 \quad (2.49)$$

Važi relacija :

$$\hat{R}'_h \hat{F}'_h = \hat{F}'_h \hat{R}'_h = \hat{1}' \quad (2.50)$$

Na osnovu izraza (2.47) i (2.50) definisan je operator $(\hat{D}')^{-1}$,

koji je inverzan operatoru \hat{D}' :

$$(\hat{D}')^{-1} = \hat{F}'_1 \hat{F}'_2 = \hat{F}'_2 \hat{F}'_1, \quad (2.51)$$

a prema (2.45) i operatori \hat{F}'_{hl} u sistemu jednačina (2.46) su :

$$\hat{F}'_{11} = \hat{F}'_1 \hat{F}'_2 \hat{R}'_{22}, \quad \hat{F}'_{22} = \hat{F}'_1 \hat{F}'_2 \hat{R}'_{11}, \quad \hat{F}'_{12} = \hat{F}'_{12} = -\hat{F}'_1 \hat{F}'_2 \hat{R}'_{12} \quad (2.52)$$

Operatori \hat{F}'_{hl} se mogu izraziti i preko glavnih vrednosti \hat{F}'_1 i \hat{F}'_2

matrice operatpra $\left[\hat{F}'_{hl} \right]_{2,2}$:

$$\hat{F}'_{11} = \frac{1}{\Delta\gamma} (\delta\gamma_2 \hat{F}'_{11} + \delta\gamma_1 \hat{F}'_{12})$$

$$\hat{F}'_{22} = \frac{1}{\Delta\gamma} (\delta\gamma_1 \hat{F}'_{21} + \delta\gamma_2 \hat{F}'_{22})$$

(2.53)

$$\hat{F}'_{12} = \hat{F}'_{21} = \frac{\gamma_{12}}{\Delta\gamma} (\hat{F}'_1 - \hat{F}'_2)$$

$$\hat{F}'_{11} \hat{F}'_{22} - \hat{F}'_{12} \hat{F}'_{21} = \hat{F}'_1 \hat{F}'_2$$

(2.54)

Koristiće se i relacije :

$$\hat{R}'_{11} = \hat{R}'_1 \hat{R}'_2 \hat{F}'_{22}, \quad \hat{R}'_{22} = \hat{R}'_1 \hat{R}'_2 \hat{F}'_{11}, \quad \hat{R}'_{12} = \hat{R}'_{12} = -\hat{R}'_1 \hat{R}'_2 \hat{F}'_{12}, \quad (2.55)$$

koje neposredno slede iz (2.52) .

Uvešće se i operatori :

$$\hat{B}'_h = \hat{R}'_h \hat{F}'_h \quad h=1,2, \quad (2.56)$$

koji su istovremeno i linearno zavisni od operatora \hat{F}'_h :

$$\hat{B}'_h = \frac{1}{\gamma_h} \hat{1}' - \frac{\gamma'_h}{\gamma_h} \hat{F}'_h \quad h=1,2 \quad (2.57)$$

Definišu se i osnovne funkcije :

$$B^*_h = B^*_h(\gamma_h, t, t_0) = \hat{B}'_h \hat{1}^* = \hat{R}'_h \hat{F}^*_h = \hat{F}'_h \hat{R}^*_h \quad h=1,2, \quad (2.58)$$

koje takođe linearno zavise od funkcije F^*_h :

$$B^*_h = \frac{1}{\gamma_h} \hat{1}^* - \frac{\gamma'_h}{\gamma_h} F^*_h \quad h=1,2 \quad (2.59)$$

Kada vezu između inverznih operatora \hat{R}'_h i \hat{F}'_h (2.50)

pomnožimo vezom između inverznih operatora \hat{R}' i \hat{F}' (2.35) dobijamo :

$$\hat{B}'_h \hat{K}'_h = \hat{1}' \quad h=1,2, \quad (2.60)$$

gde je uveden operator \hat{K}'_h :

$$\hat{K}'_h = \hat{F}'_h \hat{R}'_h \quad h=1,2 \quad (2.61)$$

Uvrštavanjem izraza (2.48) u (2.61) dobija se :

$$\hat{K}'_h = \gamma_h \hat{1}' + \gamma'_h \hat{F}' \quad h=1,2 \quad (2.62)$$

Funkcije K_h^* linearno zavise od funkcije puzanja F^* i od redukovanih geometrijskih karakteristika preseka :

$$K_h^* = K_h^*(\gamma_h, t, t_0) = \hat{K}'_h = \gamma_h \hat{1}^* + \gamma'_h \hat{F}^* \quad h=1,2 \quad (2.63)$$

Određivanje funkcija B_h^* ($h=1,2$) svodi se na rešavanje nehomogenih integralnih jednačina :

$$\hat{K}'_h B_h^* = 1 \quad h=1,2 \quad (2.64)$$

Kao specijalni slučaj posmatramo presek sa dve ose simetrije.

Na osnovu stava (B.1.16) iz priloga 2. sledi :

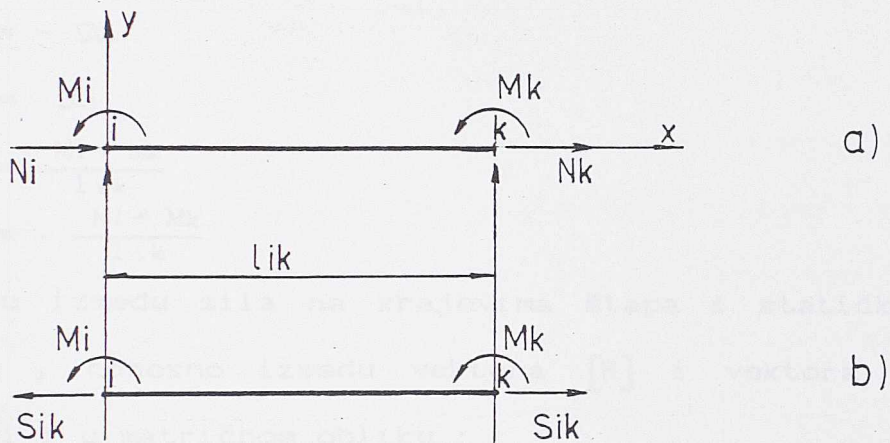
$$\begin{aligned} \hat{F}'_{12} &= 0 \\ \hat{F}'_{11} &= \hat{F}'_1 \\ \hat{F}'_{22} &= \hat{F}'_2 \end{aligned} \quad (2.65)$$

pa jednačine (2.44) postaju nezavisne integralne jednačine :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{E_u F_i} \hat{F}'_1 N \\ \varkappa &= \frac{1}{E_u J_i} \hat{F}'_2 M \end{aligned} \quad (2.66)$$

3. Osnovne statičke i deformacijske veličine štapa

3.1. Osnovne statičke veličine štapa



sl.3.1

Na slici (3.1a) prikazan je štap ik . Sile na krajevima štapa N_i, T_i, M_i i N_k, T_k i M_k čine vektor sila $[R]$:

$$[R] = \begin{bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_k \\ T_k \\ M_k \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Znaci sila su određeni u odnosu na desni koordinatni sistem, posmatrajući sile kao vektore. Vektor upravljen u pozitivnom smeru koordinatne ose predstavlja pozitivnu veličinu. Momenti su pozitivni u smeru suprotnom od smera kazaljke na satu.

Sile na krajevima štapa N_i, T_i, M_i i N_k, T_k i M_k su međusobno zavisne. One moraju da zadovolje uslove ravnoteže štapa kao celine.

Uočićemo veličine S_{ik}, M_i i M_k na (sl.3.1b). One su međusobno nezavisne i nezavisne su od uslova ravnoteže [13]. Ove se veličine nazivaju statički nezavisne veličine štapa i čine vektor statički

nezavisnih veličina štapu $[S]$:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{ik} \\ M_i \\ M_k \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Preostale četiri sile na krajevima štapu mogu se izraziti preko ovih sila :

$$\begin{aligned} N_i &= -S_{ik} \\ N_k &= S_{ik} \\ T_i &= \frac{M_i + M_k}{l_{ik}} \\ T_k &= -\frac{M_i + M_k}{l_{ik}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Vežu između sila na krajevima štapu i statički nezavisnih veličina, odnosno između vektora $[R]$ i vektora $[S]$ možemo prikazati i u matričnom obliku :

$$[R] = [C][S] \quad (a)$$

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ T_i \\ M_i \\ N_k \\ T_k \\ M_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l_{ik} & 1/l_{ik} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/l_{ik} & -1/l_{ik} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_{ik} \\ M_i \\ M_k \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

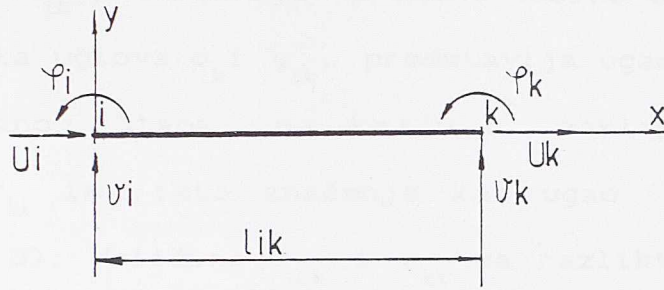
(b)

Izraz (3.4) predstavlja uslove ravnoteže štapu. Matrica $[C]$ je matrica ravnoteže štapu.

3.2 Osnovne deformacijske veličine štapu

Definisaćemo prvo vektor pomeranja $[q]$ štapu ik (sl.3.2)

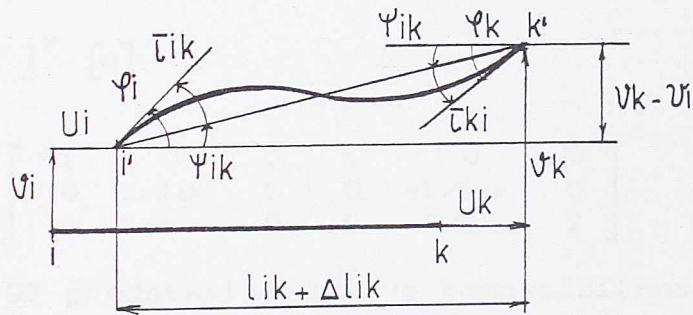
$$[q] = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \\ u_k \\ v_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} \quad (3.5)$$



sl.3.2

Elementi vektora $[q]$ predstavljaju komponente generalisanog pomeranja čvorova i i k štapa ik. Znaci ovih pomeranja određeni su u odnosu na desni koordinatni sistem posmatrajući pomeranja kao vektore. Vektor pomeranja upravljen u pozitivnom smeru koordinatne ose predstavljaće pozitivnu veličinu, a obrtanja su pozitivna u smeru suprotnom od skazaljke na satu (sl.3.2).

Ova pomeranja nisu međusobno nezavisna i ne predstavljaju čisto deformacijske veličine.



sl.3.3

Iz slike 3.3, na kojoj je prikazan štap ik pre i posle deformacije, a uz pretpostavku da važi teorija malih deformacija sledi :

$$\Delta l_{ik} = u_k - u_i$$

$$\tau_{ik} = \varphi_i - \psi_{ik}$$

$$\tau_{ki} = \varphi_k - \psi_{ki}$$

(3.6)

gde je :

$$\psi_{ik} = \frac{v_k - v_i}{l_{ik}}$$

(3.7)

Veličina Δl_{ik} predstavlja promenu dužine ose štapa. Veličina τ_{ik} , kao razlika uglova φ_k i ψ_{ik} , predstavlja ugao koji tangenta na osu deformisanog štapa, na kraju i , zaklapa sa tetivom tog štapa. Ugao τ_{ki} ima isto značenje kao ugao τ_{ik} samo za kraj k štapa (sl.3.3). Veličine τ_{ik} i τ_{ki} za razliku od ugla obrtanja štapa ψ_{ik} , su čisto deformacijske veličine, pa se zato nazivaju deformacioni uglovi štapa.

Promenu dužine štapa Δl_{ik} i deformacione uglove τ_{ik} i τ_{ki} nazivamo osnovnim deformacijski nezavisnim veličinama štapa.

Uvodi se vektor $[\delta]$ osnovnih deformacijski nezavisnih veličina štapa :

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \Delta l_{ik} \\ \tau_{ik} \\ \tau_{ki} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Veza između osnovnih deformacijski nezavisnih veličina i pomeranja krajeva štapa ik imožeemo prikazati i u matričnom obliku :

$$[\delta] = [C]^T [q] \quad (a)$$

(3.9)

$$\begin{bmatrix} \Delta l_{ik} \\ \tau_{ik} \\ \tau_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/l_{ik} & 1 & 0 & -1/l_{ik} & 0 \\ 0 & 1/l_{ik} & 0 & 0 & -1/l_{ik} & 1 \end{bmatrix} \quad (b)$$

Izraz (3.9) predstavlja uslove kompatibilnosti štapa. Matrica $[C]^T$ je matrica kompatibilnosti i jednaka je transponovanoj vrednosti matrice ravnoteže $[C]$ (3.4) [11].

3.3. Veza između osnovnih statičkih i deformacijskih veličina štapa

3.3.1. Štap promenljivog poprečnog preseka

Uspostaviće se veza između statičkih i deformacijskih veličina. Odrediće se ustvari izduženje ose štapa Δl_{ik} i deformacioni uglovi τ_{ik} i τ_{ki} usled pojedinačnog delovanja

sila S_{ik} , M_i i M_k . Pri tome će se koristiti princip virtualnih sila :

$$\xi = \int_L [\bar{M}(s, x) \kappa(s, t, t_0) + \bar{N}(s, x) \eta(s, t, t_0)] ds \quad (3.10)$$

gde je :

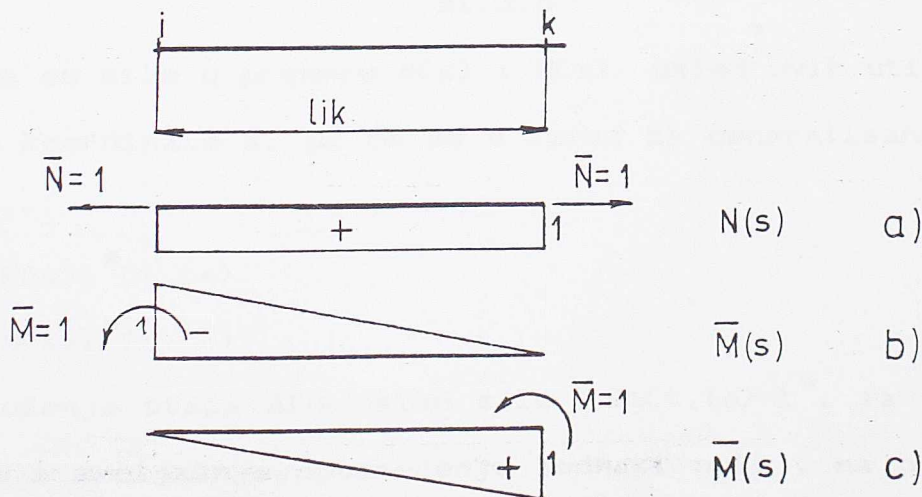
$\xi = \xi(x, t, t_0)$ generalisano pomeranje proizvoljne tačke ose nosača koja ima koordinatu x ;

$\bar{M}(s, x)$ i $\bar{N}(s, x)$ su moment savijanja i normalna sila u tački s ose štapa od jedinične sile $\bar{P} = 1$ u tački x ose nosača, koja odgovara generalisanom pomeranju ξ .

Uvođenjem izraza (2.40) za deformacijske veličine η i κ u izraz (3.10) generalisano pomeranje za spregnut štاپ će imati oblik :

$$\begin{aligned} \xi = \xi(x, t, t_0) = & \int_L \bar{M}(s, x) \hat{F}'_{22}(s, t, \tau) M(s, \tau, t_0) \frac{1}{E_u J_i(s)} ds + \\ & + \int_L \bar{N}(s, x) \hat{F}'_{11}(s, t, \tau) N(s, \tau, t_0) \frac{1}{E_u F_i(s)} ds + \\ & + \int_L \hat{F}'_{12}(s, t, \tau) [\bar{M}(s, x) N(s, \tau, t_0) + \bar{N}(s, x) M(s, \tau, t_0)] \frac{1}{E_u S_i(s)} ds \end{aligned} \quad (3.11)$$

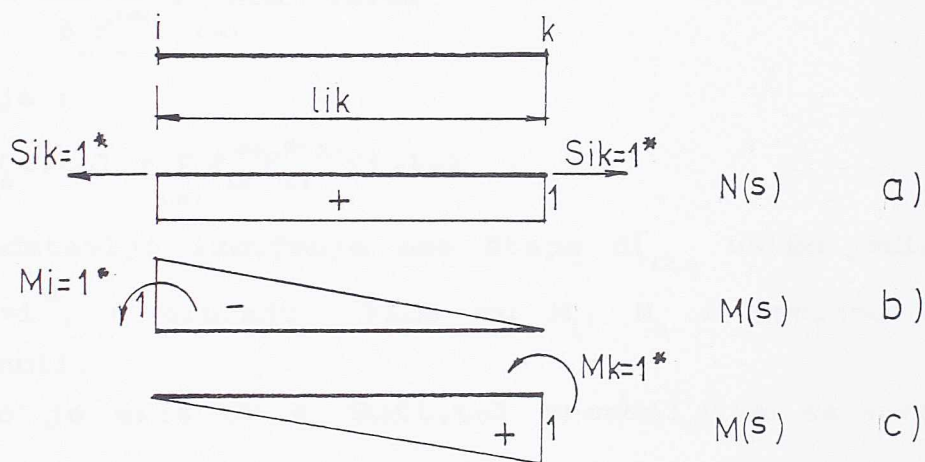
Jedinične virtualne sile i njihovi dijagrami koje odgovaraju traženim pomeranjima date su na slici 3.4.



s1.3.4

Zbog viskoelastičnih osobina betona i osobine relaksacije čelika za prethodno naprezanje, kao što je u prethodnim poglavljima i pokazano, u proračun spregnutih konstrukcija deformacijske i statičke veličine se tretiraju kao funkcije promenljive tokom vremena.

Posmatraće se prvo da od trenutka t_0 deluje jedinična sila $S_{ik} = S_{ik}(t, t_0) = 1^*$, odnosno $M_i = M_i(t, t_0) = 1^*$, odnosno $M_k = M_k(t, t_0) = 1^*$, sl.3.5, gde funkcija 1^* predstavlja Hevisajdovu (Heaviside) funkciju (prilog 1.).



sl.3.5

Tada su sile u preseku $N(s)$ i $M(s)$ usled ovih uticaja, samo funkcije koordinate s , pa će se u izraz za generalisano pomeranje uvoditi :

$$N \equiv N(s)1^*(t, t_0) \tag{3.12}$$

$$M \equiv M(s)1^*(t, t_0)$$

Izduženje štapa Δ_{lik} usled sile $S_{ik}(t, t_0) = 1^*$, za slučaj kada su M_i , M_k i spoljašnje opterećenje jednaki nuli, na osnovu izraza (3.11), (3.12) i stava (A.15) iz priloga 1. je :

$$\Delta l_{ik}(t, t_0) = \int_L \bar{N}(s) F_{11}^*(s, t, \tau) N(s) \frac{1}{E_u F_i(s)} ds \quad (3.13)$$

Funkcija F_{11}^* kao i funkcije F'_{hl} u izrazu (3.11) zavise od koordinate s , jer se u opštem slučaju geometrijske karakteristike preseka menjaju duž ose nosača. Uobičajeno je da se za štap promenljivog poprečnog preseka usvaja model štapa kod koga su u konačnom broju intervala konstantni poprečni preseci. Uočenom intervalu (a) dužine $L^{(a)}$ odgovaraju funkcije $F_{hl}^{*(a)}$ tj. $F'_{hl}^{(a)}$. I ostale funkcije koje se odnose na presek uočenog intervala imaće gornji indeks (a) . Shodno tome i na osnovu sl.3.4 i sl.3.5. uvodi se oznaka :

$$\mathcal{H}_{ik}^{(a)} = \frac{1}{E_u F_i^{(a)} L^{(a)}} \int \bar{N}(s) N(s) ds \quad (3.14)$$

i funkcija :

$$\delta_{ik,s}^*(t, t_0) = \sum_{(a)} \mathcal{H}_{ik}^{(a)} F_{11}^{*(a)}(t, t_0) \quad (3.15)$$

koja predstavlja izduženje ose štapa $\Delta l_{ik,s}$ usled jedinične sile $S_{ik}(t, t_0) = 1^*$, u slučaju kada su M_i , M_k i spoljno opterećenje jednaki nuli.

Kako je sila $S_{ik} = S_{ik}(t, t_0)$ promenljiva sa vremenom, to uvođenjem operatora :

$$\hat{\delta}_{ik,s}'(t, t_0) = \sum_{(a)} \mathcal{H}_{ik}^{(a)} \hat{F}_{11}^{(a)}(t, t_0) \quad (3.16)$$

izduženje ose štapa usled sile $S_{ik} = S_{ik}(t, t_0)$ možemo prikazati na sledeći način :

$$\Delta l_{ik,s}(t, t_0) = \hat{\delta}_{ik,s}'(t, \tau) S_{ik}(\tau, t_0) \quad (3.17)$$

Operator $\hat{\delta}_{ik,s}'$ je asociran funkciji $\delta_{ik,s}'$ čiji je integral funkcija $\delta_{ik,s}^*$ (3.15).

Deformacioni ugao $\tau_{ik,s}$ usled sile $S_{ik}(t, t_0) = 1^*$, u slučaju kada su M_i , M_k i spoljno opterećenje jednaki nuli, na osnovu izraza (3.11), (3.12) i (A.15) je :

$$\tau_{ik,s}(t, t_0) = - \int_L \bar{M}(s) F_{12}^*(s, t, \tau) N(s) \frac{1}{E_u S_i(s)} ds \quad (3.18)$$

Na osnovu sl.5b.,sl.6a. uvodi se oznaka :

$$\ell_{ik,s}^{(a)} = \frac{1}{E_u S_i^{(a)} L^{(a)}} \int \bar{M}(s) N(s) ds \quad , \quad (3.19)$$

i funkcija :

$$\alpha_{ik,s}^* (t, t_0) = \sum_{(a)} \ell_{ik,s}^{(a)} F_{12}^{*(a)} (t, t_0) \quad , \quad (3.20)$$

koja predstavlja deformacionu ugao $\tau_{ik,s}$ usled sile $S_{ik}(t, t_0) = 1^*$ u slučaju kada su M_i , M_k i spoljno opterećenje jednaki nuli.

Uvođenjem operatora

$$\hat{\alpha}'_{ik,s} (t, t_0) = \sum_{(a)} \ell_{ik,s}^{(a)} \hat{F}'_{12}{}^{(a)} (t, t_0) \quad , \quad (3.21)$$

deformacioni ugao usled sile $S_{ik} = S_{ik}(t, t_0)$, promenljive u toku vremena , može se prikazati izrazom :

$$\tau_{ik,s} (t, t_0) = - \hat{\alpha}'_{ik,s} (t, \tau) S_{ik}(\tau, t_0) \quad . \quad (3.22)$$

Operator $\hat{\alpha}'_{ik,s}$ je asociiran funkciji $\alpha'_{ik,s}$ čiji je integral funkcija $\alpha_{ik,s}^*$ (3.20).

Analogno se određuje i deformacioni ugao $\tau_{ki,s}(t, t_0)$ usled sile $S_{ik} = S_{ik}(t, t_0)$, promenljive u toku vremena , u slučaju kada su M_i , M_k i spoljno opterećenje jednaki nuli sl.3.5a ,sl.3.4c.

$$\tau_{ki,s} (t, t_0) = \hat{\alpha}'_{ki,s} (t, \tau) S_{ik}(\tau, t_0) \quad . \quad (3.23)$$

gde je uvedeni operator :

$$\hat{\alpha}'_{ki,s} (t, t_0) = \sum_{(a)} \ell_{ki,s}^{(a)} \hat{F}'_{12}{}^{(a)} (t, t_0) \quad (3.24)$$

asociiran funkciji $\alpha'_{ki,s}$ čiji je integral funkcija $\alpha_{ki,s}^*$ koja predstavlja deformacioni ugao kraja k štapa ik usled jedinične sile $S_{ik}(t, t_0) = 1^*$, u slučaju kada su M_i , M_k i spoljno opterećenje jednaki nuli.

Na osnovu sl.3.5a.,sl.3.4c. :

$$\ell_{ki,s}^{(a)} = \frac{1}{E_u S_i^{(a)} L^{(a)}} \int \bar{M}(s) N(s) ds \quad . \quad (3.25)$$

Izduženje ose štapa $\Delta l_{ik,Mk}$, deformacioni uglovi $\tau_{ik,Mk}$ i $\tau_{ki,Mk}$ usled momenta $M_i(t, t_0)$ promenljivog u toku vremena, u slučaju kada su S_{ik} , M_k i spoljašnje opterećenje jednaki nuli, određuje se analogno prethodnom:

$$\Delta l_{ik,M_i}(t, t_0) = - \hat{\delta}'_{ik,M_i}(t, \tau) M_i(\tau, t_0) \quad (a)$$

$$\tau_{ik,M_i}(t, t_0) = \hat{\alpha}'_{ik}(t, \tau) M_i(\tau, t_0) \quad (b) \quad (3.26)$$

$$\tau_{ki,M_i}(t, t_0) = \hat{\beta}'_{ki}(t, \tau) M_i(\tau, t_0) \quad (c)$$

Gde je:

$$\hat{\delta}'_{ik,M}(t, t_0) = \sum_{(a)} \hat{\ell}'_{ik,M}(a) \hat{F}'_{12}(a)(t, t_0), \quad (3.27)$$

na osnovu sl.3.4a., sl.3.5b. i (3.19):

$$\hat{\ell}'_{ik,M}(a) = \frac{1}{E_u S_i^{(a)} L} \int \bar{N}(s) M(s) ds = \hat{\ell}'_{ik,s}(a), \quad (3.28)$$

pa je:

$$\hat{\delta}'_{ik,M}(t, t_0) = \hat{\alpha}'_{ik,s}(t, t_0). \quad (3.29)$$

Operator $\hat{\alpha}'_{ik}$ je oblika:

$$\hat{\alpha}'_{ik}(t, t_0) = \sum_{(a)} \hat{M}'_{ik}(a) \hat{F}'_{22}(a)(t, t_0), \quad (3.30)$$

gde je na osnovu sl.3.4b., sl.3.5b.:

$$\hat{M}'_{ik}(a) = \frac{1}{E_u J_i^{(a)} L} \int \bar{M}(s) M(s) ds \quad (3.31)$$

Operator $\hat{\beta}'_{ki}$ je oblika:

$$\hat{\beta}'_{ki}(t, t_0) = \sum_{(a)} \bar{M}'_{ik}(a) \hat{F}'_{22}(a)(t, t_0), \quad (3.32)$$

gde je na osnovu sl.3.4c., sl.3.5b.:

$$\bar{M}'_{ik}(a) = \frac{1}{E_u J_i^{(a)} L} \int \bar{M}(s) M(s) ds \quad (3.33)$$

Uvedeni operatori $\hat{\delta}'_{ik,M}$, $\hat{\alpha}'_{ik}$ i $\hat{\beta}'_{ki}$ asocirani su funkcijama

$\delta'_{ik,M}$, α'_{ik} i β'_{ki} čiji su integrali funkcije $\delta^*_{ik,M}(t, t_0)$, $\alpha^*_{ik}(t, t_0)$ i $\beta^*_{ki}(t, t_0)$ koje predstavljaju izduženje ose štapa i deformacione

uglove usled jediničnog momenta $M_i(t, t_0) = 1^*$, u slučaju kada su S_{ik} , M_k i spoljašnje opterećenje jednaki nuli.

Analogno se određuje izduženje ose štapa $\Delta l_{ik, M_k}$, deformacioni uglovi τ_{ik, M_k} i τ_{ki, M_k} usled momenta $M_k(t, t_0)$ promenljivog u toku vremena :

$$\Delta l_{ik, M_k}(t, t_0) = \hat{\delta}'_{ki, M_k}(t, \tau) M_k(\tau, t_0) \quad (a)$$

$$\tau_{ik, M_k}(t, t_0) = \hat{\alpha}'_{ki}(t, \tau) M_k(\tau, t_0) \quad (b) \quad (3.34)$$

$$\tau_{ki, M_k}(t, t_0) = -\hat{\beta}'_{ik}(t, \tau) M_k(\tau, t_0) \quad (c)$$

gde je :

$$\hat{\delta}'_{ki, M}(t, t_0) = \sum_{(a)} \ell_{ki, M}^{(a)} \hat{F}'_{12}{}^{(a)}(t, t_0) \quad (3.35)$$

Na osnovu sl.3.4a. , sl.3.5c. i (3.26) :

$$\ell_{ki, M}^{(a)} = \frac{1}{E_u S_i^{(a)} L^{(a)}} \int \bar{N}(s) M(s) ds = \ell_{ki, s}^{(a)}, \quad (3.36)$$

pa je :

$$\hat{\delta}'_{ki, M}(t, t_0) = \hat{\alpha}'_{ki, s}(t, t_0) \quad (3.37)$$

Operator $\hat{\alpha}'_{ki}$ je oblika :

$$\hat{\alpha}'_{ki}(t, t_0) = \sum_{(a)} \mathcal{M}_{ki}^{(a)} \hat{F}'_{22}{}^{(a)}(t, t_0), \quad (3.38)$$

gde je na osnovu sl.3.4b. , sl.3.5c. :

$$\mathcal{M}_{ki}^{(a)} = \frac{1}{E_u J_i^{(a)} L^{(a)}} \int \bar{M}(s) M(s) ds \quad (3.39)$$

Operator $\hat{\beta}'_{ik}$ je oblika :

$$\hat{\beta}'_{ik}(t, t_0) = \sum_{(a)} \bar{\mathcal{M}}_{ki}^{(a)} \hat{F}'_{22}{}^{(a)}(t, t_0), \quad (3.40)$$

gde je na osnovu sl.3.4c. , sl.3.5c. i (3.34) :

$$\bar{\mathcal{M}}_{ki}^{(a)} = \frac{1}{E_u J_i^{(a)} L^{(a)}} \int \bar{M}(s) M(s) ds = \bar{\mathcal{M}}_{ik}^{(a)} \quad (3.41)$$

pa je :

$$\hat{\beta}'_{ik}(t, t_0) = \hat{\beta}'_{ki}(t, t_0) \quad (3.42)$$

Usled sila $S_{ik} = S_{ik}(t, t_0)$, $M_i = M_i(t, t_0)$ i $M_k = M_k(t, t_0)$ na osnovu

principa superpozicije i na osnovu izraza (3.17), (3.26a), (3.29), (3.34b) i (3.37) izduženje $\Delta_{ik} = \Delta_{ik}(t, t_0)$ se može izraziti na sledeći način :

$$\Delta_{ik} = \hat{\delta}'_{ik,s} S_{ik} - \hat{\alpha}'_{ik,s} M_i + \hat{\alpha}'_{ki,s} M_k, \quad (3.43)$$

na osnovu izraza (3.22), (3.26b), (3.34b) deformacioni ugao $\tau_{ik} = \tau_{ik}(t, t_0)$ je :

$$\tau_{ik} = -\hat{\alpha}'_{ik,s} S_{ik} + \hat{\alpha}'_{ik} M_i - \hat{\beta}'_{ik} M_k, \quad (3.44)$$

na osnovu izraza (3.23), (3.26c), (3.34c) deformacioni ugao $\tau_{ki} = \tau_{ki}(t, t_0)$ je :

$$\tau_{ki} = \hat{\alpha}'_{ki,s} S_{ik} - \hat{\beta}'_{ik} M_i + \hat{\alpha}'_{ki} M_k, \quad (3.45)$$

Veza između osnovnih deformacioni nezavisnih veličina (3.8) i osnovnih statički nezavisnih veličina (3.2) izražena relacijama (3.43)-(3.45) može se prikazati i u matričnom obliku :

$$[\delta] = \left[\hat{f}' \right] [S] \quad (3.46)$$

Uvedena matrica operatora :

$$\left[\hat{f}' \right] = \begin{bmatrix} \hat{\delta}'_{ik,s} & -\hat{\alpha}'_{ik,s} & \hat{\alpha}'_{ki,s} \\ -\hat{\alpha}'_{ik,s} & \hat{\alpha}'_{ik} & -\hat{\beta}'_{ik} \\ \hat{\alpha}'_{ki,s} & -\hat{\beta}'_{ik} & \hat{\alpha}'_{ki} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

naziva se operatorska matrica fleksibilnosti. Elementi ove matrice su operatori koji su međusobno komutativni.

3.3.2. Štap konstantnog poprečnog preseka

Svi izrazi izvedeni u poglavlju 3.3.1. za štap promenljivog poprečnog preseka, kao opšti izrazi, važe i za štap konstantnog preseka.

Pri tome je :

$$\hat{\delta}'_{ik,s}(t, t_0) = \frac{1_{ik}}{E_u F_i} \hat{F}'_{11}(t, t_0) \quad ,$$

$$\hat{\alpha}'_{ik,s}(t, t_0) = \frac{1_{ik}}{2E_u S_i} \hat{F}'_{12}(t, t_0) = \hat{\alpha}'_{ki,s}(t, t_0)$$

(3.48)

$$\hat{\alpha}'_{ik}(t, t_0) = \frac{1_{ik}}{3E_u J_i} \hat{F}'_{22}(t, t_0) = \hat{\alpha}'_{ki}(t, t_0)$$

$$\hat{\beta}'_{ik}(t, t_0) = \frac{1_{ik}}{6E_u J_i} \hat{F}'_{22}(t, t_0)$$

Kao specijalni slučaj posmatramo štap konstantnog poprečnog preseka koji ima dve ose simetrije .

Na osnovu izraza (2.65) i (3.48) sledi :

$$\hat{\delta}'_{ik,s}(t, t_0) = \frac{1_{ik}}{E_u F_i} \hat{F}'_1(t, t_0) \quad , \quad (a)$$

$$\hat{\alpha}'_{ik,s}(t, t_0) = \hat{\alpha}'_{ki,s}(t, t_0) = 0 \quad , \quad (b)$$

(3.49)

$$\hat{\alpha}'_{ik}(t, t_0) = \frac{1_{ik}}{3E_u J_i} \hat{F}'_2(t, t_0) = \hat{\alpha}'_{ki}(t, t_0) \quad , \quad (c)$$

$$\hat{\beta}'_{ik}(t, t_0) = \frac{1_{ik}}{6E_u J_i} \hat{F}'_2(t, t_0) \quad . \quad (d)$$

4. Matrica krutosti

Izvešće se matrice krutosti štapa tipa "k" tipa "g" i štapa tipa "s" čiji su poprečni preseki proizvoljnih geometrijskih karakteristika. Matrice krutosti predstavljaju matrice operatora i biće izvedene iz baznih operatorskih matrica krutosti do kojih se dolazi preko operatorskih matrica fleksibilnosti [39], [11], [36], [18].

4.1. Matrica krutosti štapa tipa "k"

4.1.1. Bazna matrica krutosti štapa tipa "k"

Štap tipa "k" je štap koji je na oba kraja kruto vezan. Krajeve tog štapa obeležavamo sa i i k , a odgovarajuće momente koji su različiti od nule sa M_{ik} i M_{ki} . Takav štap bio je tretiran i u poglavlju 3 (sl 3.1a) i (sl 3.2).

Osnovne statički nezavisne veličine (3.2) štapa možemo odrediti iz relacije (3.46) ako poznajemo osnovne deformcijske veličine, tj. :

$$[S] = \left[\hat{f}' \right]^{-1} [\delta] \quad (4.1)$$

Invreznna matrica operatorske matrice fleksibilnosti (3.47) je matrica operatora koju nazivamo bazna operatorska matrica krutosti štapa tipa "k" :

$$\left[\hat{K}'_o \right] = \left[\hat{f}' \right]^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{N}'_{ik} & \hat{S}'_{ik} & \hat{S}'_{ki} \\ \hat{S}'_{ik} & \hat{A}'_{ik} & \hat{B}'_{ik} \\ \hat{S}'_{ki} & \hat{B}'_{ik} & \hat{A}'_{ki} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

pa će relacija (4.1) imati oblik :

$$[S] = \left[\hat{K}'_o \right] [\delta] \quad (a)$$

$$\begin{bmatrix} S_{ik} \\ M_{ik} \\ M_{ki} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{N}'_{ik} & \hat{S}'_{ik} & \hat{S}'_{ki} \\ \hat{S}'_{ik} & \hat{A}'_{ik} & \hat{B}'_{ik} \\ \hat{S}'_{ki} & \hat{B}'_{ik} & \hat{A}'_{ki} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta l_{ik} \\ \tau_{ik} \\ \tau_{ki} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

(b)

Elementi bazne operatorske matrice krutosti su operatori \hat{N}'_{ik} , \hat{S}'_{ik} , \hat{S}'_{ki} , \hat{A}'_{ik} , \hat{B}'_{ik} i \hat{A}'_{ki} koji su asocirani funkcijama N'_{ik} , S'_{ik} , S'_{ki} , A'_{ik} , B'_{ik} i A'_{ki} čiji su integrali funkcije $N'_{ik}(t, t_0)$, $S'_{ik}(t, t_0)$, $S'_{ki}(t, t_0)$, $A'_{ik}(t, t_0)$, $B'_{ik}(t, t_0)$ i $A'_{ki}(t, t_0)$ a koje predstavljaju generalisane sile u čvorovima i i k usled jediničnog izduženja štapa odnosno jediničnog deformacionog ugla u čvoru i odnosno k.

4.1.2. Elementi bazne operatorske matrice krutosti

štapa tipa " k" promenljivog poprečnog preseka

Zbog osobine komutativnosti operatora matrice $\left[\hat{f}' \right]$, elemente operatorske matrice $\left[\hat{K}'_o \right]$ odredićemo kao elemente inverzne matrice (4.2).

Determinanta matrice operatora $\left[\hat{f}' \right]$ je operator \hat{D}'_k :

$$\begin{aligned}
\hat{D}'_k = & \hat{\delta}'_{ik,s} \left(\hat{\alpha}'_{ik} \hat{\alpha}'_{ki} - \hat{\beta}'_{ik} \hat{\beta}'_{ik} \right) + \\
& + \hat{\alpha}'_{ik,s} \left(- \hat{\alpha}'_{ik,s} \hat{\alpha}'_{ki} + \hat{\alpha}'_{ki,s} \hat{\beta}'_{ik} \right) + \\
& + \hat{\alpha}'_{ki,s} \left(\hat{\alpha}'_{ik,s} \hat{\beta}'_{ik} - \hat{\alpha}'_{ki,s} \hat{\alpha}'_{ik} \right)
\end{aligned} \quad (4.4)$$

a elementi operatorske matrice $\left[\hat{K}'_o \right]$ su :

$$\hat{N}'_{ik} = \left(\hat{\alpha}'_{ik} \hat{\alpha}'_{ki} - \hat{\beta}'_{ik} \hat{\beta}'_{ik} \right) \left(\hat{D}'_k \right)^{-1} \quad (a)$$

$$\hat{A}'_{ik} = \left(\hat{\delta}'_{ik,s} \hat{\alpha}'_{ki} - \hat{\alpha}'_{ki,s} \hat{\alpha}'_{ki,s} \right) \left(\hat{D}'_k \right)^{-1} \quad (b)$$

$$\hat{A}'_{ki} = \left(\hat{\delta}'_{ik,s} \hat{\alpha}'_{ik} - \hat{\alpha}'_{ik,s} \hat{\alpha}'_{ik,s} \right) \left(\hat{D}'_k \right)^{-1} \quad (c)$$

$$\hat{B}'_{ik} = \left(\hat{\delta}'_{ik,s} \hat{\beta}'_{ik} - \hat{\alpha}'_{ik,s} \hat{\alpha}'_{ki,s} \right) \left(\hat{D}'_k \right)^{-1} = \hat{B}'_{ki} \quad (d) \quad (4.5)$$

$$\hat{S}'_{ik} = \left(- \hat{\alpha}'_{ki,s} \hat{\beta}'_{ik} + \hat{\alpha}'_{ik,s} \hat{\alpha}'_{ki} \right) \left(\hat{D}'_k \right)^{-1} \quad (e)$$

$$\hat{S}'_{ki} = \left(\hat{\alpha}'_{ik,s} \hat{\beta}'_{ik} - \hat{\alpha}'_{ki,s} \hat{\alpha}'_{ik} \right) \left(\hat{D}'_k \right)^{-1} \quad (f)$$

4.1.3. Elementi bazne operatorske matrice krutosti

štapa tipa "k" konstantnog poprečnog preseka

Elementi bazne operatorske matrice krutosti štapa tipa "k" konstantnog poprečnog preseka izvode se iz izraza (4.4) i (4.5) kao opštih izraza.

Na osnovu izraza (3.48) iz izraza (4.5) sledi :

$$\hat{A}'_{ik} = \hat{A}'_{ki} \quad (a) \quad (4.6)$$

$$\hat{S}'_{ik} = -\hat{S}'_{ki} \quad (b)$$

Uvođenjem izraza (3.49) u izraz (4.4) determinanta matrice operatora $\left[\hat{f}' \right]$ dobija oblik :

$$\hat{D}'_k = \frac{l^3_{ik}}{12 E^a_{u i i} F_{i i}} \hat{F}'_{22} \left(\hat{F}'_{11} \hat{F}'_{22} - \hat{F}'_{12} \hat{F}'_{12} \right) . \quad (4.7)$$

Na osnovu izraza (2.54) i uz oznaku :

$$d_k = \frac{l_{ik}^3}{12 E_u^3 F_{ii} J_i}, \quad (4.8)$$

sledi :

$$\hat{D}'_k = d_k \hat{F}'_{22} \hat{F}'_1 \hat{F}'_2 \quad (4.9)$$

Odrediće se inverzni operator $(\hat{D}'_k)^{-1}$ operatora \hat{D}'_k .

$$(\hat{D}'_k)^{-1} \hat{D}'_k = \hat{1}' \quad (4.10)$$

$$(\hat{D}'_k)^{-1} = \frac{1}{d_k} (\hat{F}'_{22})^{-1} (\hat{F}'_1 \hat{F}'_2)^{-1} \quad (4.11)$$

Uvodi se operator \hat{I}'_{22} [10], tako da je :

$$\hat{F}'_{22} \hat{I}'_{22} = \hat{1}' \quad (4.12)$$

Operator \hat{I}'_{22} može se izraziti na sledeći način :

$$\hat{I}'_{22} = \frac{\gamma'_1 \gamma'_2}{\gamma'_{11}} \hat{1}' + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_{11}} \hat{R}' + \left(1 - \frac{\gamma'_1 \gamma'_2}{\gamma'_{11}} - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_{11}} \right) \hat{B}'_{11} \quad (4.13)$$

Operator \hat{B}'_{11} asociran je funkciji B'_{11} čiji je integral funkcija

B^*_{11} koja se određuje rešavanjem nehomogene integralne jednačine :

$$\hat{\mathcal{K}}'_{11} B^*_{11} = \hat{1}^* \quad (4.14)$$

Funkcija \mathcal{K}^*_{11} linearno zavisi od funkcije puzanja betona F^* i od geometrijskih karakteristika preseka, tj :

$$\mathcal{K}^*_{11} = \gamma_{11} 1^* + \gamma'_{11} F^* \quad (4.15)$$

analogno izrazima (2.63) i (2.64).

Za usvojenu funkciju puzanja betona F^* , može se uvek odrediti funkcija I^*_{22} koja predstavlja integral funkcije I'_{22} kojoj je asociran operator \hat{I}'_{22} .

Korišćenjem izraza (2.47), (2.51) i (4.12) izraz (4.11) je :

$$(\hat{D}'_k)^{-1} = \frac{1}{d_k} \hat{I}'_{22} \hat{R}'_1 \hat{R}'_2 \quad (4.16)$$

Korišćenjem izraza (3.48), (4.16) i (2.55) elementi bazne

operatorske matrice krutosti (4.5) za štap konstantnog poprečnog preseka imaju sledeći oblik :

$$\hat{N}'_{ik} = \frac{E_u F_i}{l_{ik}} \hat{R}'_{11} \quad (a)$$

$$\hat{A}'_{ik} = \frac{E_u J_i}{l_{ik}} \hat{R}'_{22} + \frac{3E_u J_i}{l_{ik}} \hat{I}'_{22} = \hat{A}'_{ki} \quad (b)$$

(4.17)

$$\hat{B}'_{ik} = -\frac{E_u J_i}{l_{ik}} \hat{R}'_{22} + \frac{3E_u J_i}{l_{ik}} \hat{I}'_{22} \quad (c)$$

$$\hat{S}'_{ik} = -\frac{E_u S_i}{l_{ik}} \hat{R}'_{12} = -\hat{S}'_{ki} \quad (d)$$

Kao specijalni slučaj posmatramo štap konstantnog poprečnog preseka koji ima dve ose simetrije .

Na osnovu izraza (2.65), (3.49) i (4.5) sledi :

$$\hat{N}'_{ik} = \frac{E_u F_i}{l_{ik}} \hat{R}'_{11} \quad (a)$$

$$\hat{A}'_{ik} = \frac{4E_u J_i}{l_{ik}} \hat{I}'_{22} = \hat{A}'_{ki} \quad (b)$$

(4.18)

$$\hat{B}'_{ik} = \frac{2E_u J_i}{l_{ik}} \hat{I}'_{22} \quad (c)$$

$$\hat{S}'_{ik} = \hat{S}'_{ki} = 0 \quad (d)$$

4.1.4. Matrica krutosti štapa tipa " k " izražena preko bazne matrice krutosti

Ako se u izraz (3.4a) unese izraz (4.3a) i (3.9a) sledi :

$$[R] = [C][S] = [C][\hat{K}'_o][\delta] = [C][\hat{K}'_o][C]^T[q]. \quad (4.19)$$

Uspostavlja se veza između sila na krajevima štapa $[R]$ i pomeranja $[q]$:

$$[R] = [\hat{K}'] [q] \quad , \quad (4.20)$$

gde je :

$$[\hat{K}'] = [C] [\hat{K}'_0] [C]^T \quad (4.21)$$

operatorska matrica krutosti štapa "k" , izražena preko bazne operatorske matrice krutosti , tj :

$$\left[\begin{array}{cccccc} \hat{N}'_{ik} & -\frac{1}{l}(\hat{S}'_{ik} + \hat{S}'_{ki}) & -\hat{S}'_{ik} & -\hat{N}'_{ik} & \frac{1}{l}(\hat{S}'_{ik} + \hat{S}'_{ki}) & -\hat{S}'_{ki} \\ & \frac{1}{l^2}(\hat{C}'_{ik} + \hat{C}'_{ki}) & \frac{1}{l}\hat{C}'_{ik} & \frac{1}{l}(\hat{S}'_{ik} + \hat{S}'_{ki}) & -\frac{1}{l^2}(\hat{C}'_{ik} + \hat{C}'_{ki}) & \frac{1}{l}\hat{C}'_{ki} \\ & & \hat{A}'_{ik} & \hat{S}'_{ik} & -\frac{1}{l}\hat{C}'_{ik} & \hat{B}'_{ik} \\ & & & \hat{N}'_{ik} & -\frac{1}{l}(\hat{S}'_{ik} + \hat{S}'_{ki}) & \hat{S}'_{ki} \\ & & & & \frac{1}{l^2}(\hat{C}'_{ik} + \hat{C}'_{ki}) & -\frac{1}{l}\hat{C}'_{ki} \\ & & & & & \hat{A}'_{ki} \end{array} \right] \quad (4.22)$$

simetrično

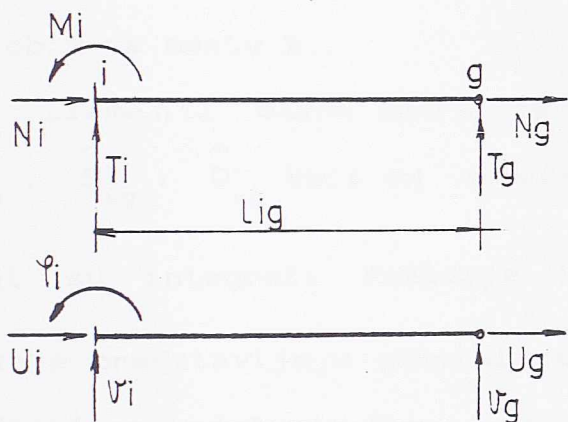
gde je :

$$\begin{aligned} \hat{A}'_{ik} + \hat{B}'_{ik} &= \hat{C}'_{ik} \\ \hat{A}'_{ki} + \hat{B}'_{ik} &= \hat{C}'_{ki} \end{aligned} \quad (4.23)$$

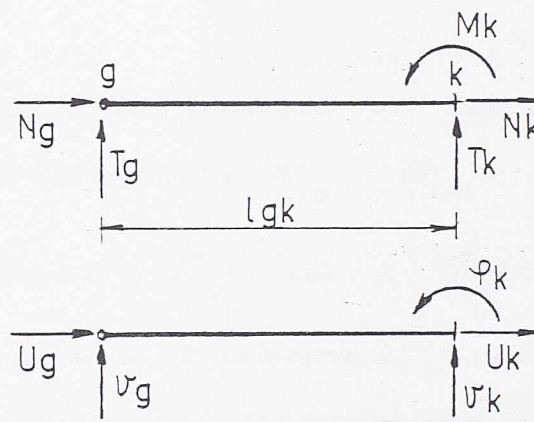
$$l = l_{ik}$$

4.2. Matrica krutosti štapa tipa "g"

Štap tipa "g" je štap koji je na jednom kraju kruto a na drugom zgلوبno vezan. Krajeve štapa obeležavamo sa i i g, odnosno g i k u zavisnosti od toga na kom kraju štapa je zgلوب. Indeks g nosi kraj štapa sa zgلوبom i u njemu je moment jednak nuli (sl.4.1) i (sl.4.2).



sl.4.1



sl.4.2

4.2.1. Bazna matrica krutosti štapa tipa "g"

Izvešće se prvo bazna matrica krutosti za štap tipa "g" sa zgلوبom na mestu k (sl.4.1). Bazna matrica krutosti štapa tipa "g" može se izvesti korišćenjem izraza (3.43), (3.44), (3.45) tj. (3.46) koji važe za štap tipa "k" pri čemu se indeks k smenjuje indeksom g :

$$\Delta_{ig} = \hat{\delta}'_{ig,s} S_{ig} - \hat{\alpha}'_{ig,s} M_{ig} + \hat{\alpha}'_{gi,s} M_{gi} \quad (a)$$

$$\tau_{ig} = -\hat{\alpha}'_{ig,s} S_{ig} + \hat{\alpha}'_{ig,s} M_{ig} - \hat{\beta}'_{ig} M_{gi} \quad (b) \quad (4.24)$$

$$\tau_{gi} = \hat{\alpha}'_{gi,s} S_{ig} - \hat{\beta}'_{ig} M_{ig} + \hat{\alpha}'_{gi} M_{gi} \quad (c)$$

Kako je $M_{gi} = 0$ to se iz prve dve jednačine (4.24a) i (4.24b) mogu

izraziti veličine S_{ig} i M_{ig} preko veličina Δl_{ig} i τ_{ig} :

$$\begin{bmatrix} S_{ig} \\ M_{ig} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{N}'_{ig} & \hat{S}'_{ig} \\ \hat{S}'_{ig} & \hat{D}'_{ig} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta l_{ig} \\ \tau_{ig} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Uvedena operatorska matrica :

$$\begin{bmatrix} \hat{K}'_{ig0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{N}'_{ig} & \hat{S}'_{ig} \\ \hat{S}'_{ig} & \hat{D}'_{ig} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

predstavlja baznu operatorsku matricu krutosti štapa tipa "g" sa zglobom na mestu k .

Elementi bazne operatorske matrice krutosti su operatori \hat{N}'_{ig} , \hat{S}'_{ig} i \hat{D}'_{ig} koji su asocirani funkcijama N'_{ig} , S'_{ig} i D'_{ig} čiji su integrali funkcije $N^*_{ig}(t, t_0)$, $S^*_{ig}(t, t_0)$ i $D^*_{ig}(t, t_0)$ a koje predstavljaju generalisane sile u čvorovima i i g usled jediničnog izduženja štapa odnosno jediničnog deformacionog ugla u čvoru i.

Analogno se dolazi do bazne operatorske matrice krutosti štapa tipa "g" sa zglobom na mestu i (sl.8). U izrazima (3.43), (3.44) i (3.45) tj. (3.46) koji važe za štap tipa "k" treba smeniti indeks i indeksom g :

$$\Delta l_{gk} = \hat{\delta}'_{gk,s} S_{gk} - \hat{\alpha}'_{gk,s} M_{gk} + \hat{\alpha}'_{kg,s} M_{kg} \quad (a)$$

$$\tau_{gk} = -\hat{\alpha}'_{gk,s} S_{gk} + \hat{\alpha}'_{gk,s} M_{gk} - \hat{\beta}'_{gk} M_{kg} \quad (b) \quad (4.27)$$

$$\tau_{kg} = \hat{\alpha}'_{kg,s} S_{gk} - \hat{\beta}'_{gk} M_{gk} + \hat{\alpha}'_{kg} M_{kg} \quad (c)$$

Kako je $M_{gk} \equiv 0$ to se iz jednačina (4.27a) i (4.27c) mogu izraziti veličine S_{gk} i M_{kg} preko veličina Δl_{gk} i τ_{kg} :

$$\begin{bmatrix} S_{gk} \\ M_{kg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{N}'_{gk} & \hat{S}'_{gk} \\ \hat{S}'_{gk} & \hat{D}'_{gk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta l_{gk} \\ \tau_{kg} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

Uvedena operatorska matrica :

$$\left[\hat{K}'_{gk} \right] = \begin{bmatrix} \hat{N}'_{gk} & \hat{S}'_{gk} \\ \hat{S}'_{gk} & \hat{D}'_{gk} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

predstavlja baznu operatorsku matricu krutosti štapa tipa "g" sa zglobom na mestu i .

Elementi bazne operatorske matrice krutosti su operatori \hat{N}'_{gk} , \hat{S}'_{gk} i \hat{D}'_{gk} koji su asocirani funkcijama N'_{gk} , S'_{gk} i D'_{gk}

čiji su integrali funkcije $N'_{gk}^*(t, t_0)$, $S'_{gk}^*(t, t_0)$ i $D'_{gk}^*(t, t_0)$ a koje predstavljaju generalisane sile u čvorovima g i k usled jediničnog izduženja štapa odnosno jediničnog deformacionog ugla u čvoru k.

4.2.2. Elementi bazne operatorske matrice krutosti štapa tipa "g" promenljivog poprečnog preseka

Determinanta sistema jednačina (4.24a) i (4.24b) je :

$$\hat{D}'_{Ig} = \hat{\delta}'_{ig,s} \hat{\alpha}'_{ig} - \hat{\alpha}'_{ig,s} \hat{\alpha}'_{ig,s} \quad (4.30)$$

Primenom Kramerovog pravila elementi bazne operatorske matrice krutosti štapa tipa "g" sa zglobom na mestu k su:

$$\begin{aligned} \hat{N}'_{ig} &= \hat{\alpha}'_{ig} (\hat{D}'_{Ig})^{-1} \\ \hat{S}'_{ig} &= \hat{\alpha}'_{ig,s} (\hat{D}'_{Ig})^{-1} \\ \hat{D}'_{ig} &= \hat{\delta}'_{ig,s} (\hat{D}'_{Ig})^{-1} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Determinanta sistema jednačina (4.27a) i (4.27c) je :

$$\hat{D}'_{gk} = \hat{\delta}'_{gk,s} \hat{\alpha}'_{kg} - \hat{\alpha}'_{kg,s} \hat{\alpha}'_{kg,s} \quad (4.32)$$

Primenom Kramerovog pravila elementi bazne operatorske matrice krutosti štapa tipa "g" sa zglobom na mestu i su:

$$\begin{aligned}\hat{N}'_{gk} &= \hat{\alpha}'_{kg} (\hat{D}'_{gk})^{-1} \\ \hat{S}'_{gk} &= - \hat{\alpha}'_{kg,s} (\hat{D}'_{gk})^{-1} \\ \hat{D}'_{gk} &= \hat{\delta}'_{gk,s} (\hat{D}'_{gk})^{-1}\end{aligned}\quad (4.33)$$

4.2.3. Elementi bazne operatorske matrice krutosti štapa tipa "g" konstantnog poprečnog preseka

Za štap tipa "g" sa zglobom na mestu k (sl.4.1) konstantnog poprečnog preseka, na osnovu izraza (3.48) je :

$$\begin{aligned}\hat{\delta}'_{ig,s}(t,t_0) &= \frac{1}{E_u F_i} \hat{F}'_{11}(t,t_0) \\ \hat{\alpha}'_{ig,s}(t,t_0) &= \frac{1}{2E_u S_i} \hat{F}'_{12}(t,t_0) \\ \hat{\alpha}'_{ig}(t,t_0) &= \frac{1}{3E_u J_i} \hat{F}'_{22}(t,t_0)\end{aligned}\quad (4.34)$$

Analogno važi i za štap tipa "g" sa zglobom na mestu i, konstantnog poprečnog preseka :

$$\begin{aligned}\hat{\delta}'_{gk,s}(t,t_0) &= \frac{1}{E_u F_i} \hat{F}'_{11}(t,t_0) \\ \hat{\alpha}'_{gk,s}(t,t_0) &= \frac{1}{2E_u S_i} \hat{F}'_{12}(t,t_0) \\ \hat{\alpha}'_{gk}(t,t_0) &= \frac{1}{3E_u J_i} \hat{F}'_{22}(t,t_0)\end{aligned}\quad (4.35)$$

Unošenjem izraza (4.34) i (4.35) u izraze za determinante (4.30) i (4.32) sledi :

$$\hat{D}'_{ig} = \hat{D}'_{gk} = \hat{D}'_g = \frac{1^2}{E_u^2 F_i J_i} \left(\frac{1}{3} \hat{F}'_{11} \hat{F}'_{22} - \frac{1}{4} \hat{F}'_{12} \hat{F}'_{12} \right) = \frac{1^2}{E_u^2 F_i J_i} \hat{D}'\quad (4.36)$$

Uveden je operator \hat{D}' :

$$\hat{D}' = \frac{1}{3} \hat{F}'_{11} \hat{F}'_{22} - \frac{1}{4} \hat{F}'_{12} \hat{F}'_{12}\quad (4.37)$$

Korišćenjem izraza (2.54), (2.53), (2.50), (2.56) i (2.57) operator

\hat{D}' može da se izrazi na sledeći način :

$$\hat{D}' = \hat{F}'_1 \hat{F}'_2 \hat{C}' \quad (4.38)$$

Uvedeni operator \hat{C}' je oblika :

$$\hat{C}' = e \hat{1}' + c \hat{F}'_1 + d \hat{F}'_2, \quad (4.39)$$

gde je :

$$e = \frac{4\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_{12}^2}{12\gamma_1 \gamma_2}$$

$$c = \frac{\gamma_{12}^2}{12\Delta\gamma \gamma_1} \quad (4.40)$$

$$d = \frac{-\gamma_{12}^2}{12\Delta\gamma \gamma_2}$$

Unošenjem izraza (4.38) u izraz (4.36) dobija se :

$$\hat{D}'_g = \frac{l_{ig}^2}{E_u^2 F_i J_i} \hat{F}'_1 \hat{F}'_2 \hat{C}' \quad (4.42)$$

Uvodi se inverzni operator $(\hat{D}'_g)^{-1}$ tako da je :

$$\hat{D}'_g (\hat{D}'_g)^{-1} = \hat{1}' \quad (4.43)$$

Tada je , korišćenem izraza (2.50) :

$$(\hat{D}'_g)^{-1} = \frac{E_u^2 F_i J_i}{l_{ig}^2} \hat{R}'_1 \hat{R}'_2 (\hat{C}')^{-1} \quad (4.44)$$

Korišćenjem izraza (4.31), (4.34), (4.44) i (2.55) elementi bazne operatorske matrice krutosti štapa tipa "g" sa zglibom na mestu k, konstantnog poprečnog preseka imaju sledeći oblik :

$$\hat{N}'_{ig} = \frac{E_u F_i}{3l_{ig}} \hat{R}'_{11} (\hat{C}')^{-1}$$

$$\hat{S}'_{ig} = -\frac{E_u S_i}{2l_{ig}} \hat{R}'_{12} (\hat{C}')^{-1} \quad (4.45)$$

$$\hat{D}'_{ig} = \frac{E_u J_i}{l_{ig}} \hat{R}'_{22} (\hat{C}')^{-1}$$

Korišćenjem izraza (4.33), (4.35), (4.44) i (2.55) elementi bazne operatorske matrice krutosti štapa tipa "g" sa zglibom na

mestu i , konstantnog poprečnog preseka imaju sledeći oblik :

$$\begin{aligned}\hat{N}'_{gk} &= \frac{E_u F_i}{3l_{gk}} \hat{R}'_{11} (\hat{C}')^{-1} \\ \hat{S}'_{gk} &= -\frac{E_u S_i}{2l_{gk}} \hat{R}'_{12} (\hat{C}')^{-1} \\ \hat{D}'_{gk} &= \frac{E_u J_i}{l_{gk}} \hat{R}'_{22} (\hat{C}')^{-1}\end{aligned}\quad (4.46)$$

Uvodi se operator \hat{S}' (prilog 3) tako da je :

$$\hat{S}' \hat{C}' = \hat{1}' \quad (4.47)$$

Operator \hat{S}' izražen je na sledeći način (C 1.23) :

$$\hat{S}' = s (\hat{1}' + t \hat{\mathcal{F}}'_1 + g \hat{\mathcal{F}}'_2) \quad (4.48)$$

pa je :

$$(\hat{D}'_g)^{-1} = \frac{E_u^2 F_i J_i}{l_{ig}^2} s \hat{R}'_1 \hat{R}'_2 (\hat{1}' + t \hat{\mathcal{F}}'_1 + g \hat{\mathcal{F}}'_2) \quad (4.49)$$

Korišćenjem izraza (4.47) elementi bazne operatorske matrice krutosti štapa tipa "g" konstantnog poprečnog preseka (4.45) i (4.46) imaju sledeći oblik :

$$\begin{aligned}\hat{N}'_{ig} &= \frac{E_u F_i}{3l_{ig}} \hat{R}'_{11} \hat{S}' = \hat{N}'_{gk} \\ \hat{S}'_{ig} &= -\frac{E_u S_i}{2l_{ig}} \hat{R}'_{12} \hat{S}' = -\hat{S}'_{gk} \\ \hat{D}'_{ig} &= \frac{E_u J_i}{l_{ig}} \hat{R}'_{22} \hat{S}' = \hat{D}'_{gk}\end{aligned}\quad (4.50)$$

$$l_{ig} = l_{gk}$$

Unošenjem izraza (4.48) u izraze (4.50) posle određenih transformacija (prilog 3) ovi operatori dobijaju sledeći oblik :

$$\begin{aligned} \hat{N}'_{ig} &= \frac{E_u F_i}{3l_{ig}} s (n_1 \hat{1}' + \gamma_{11} \hat{R}' + n_2 \hat{\mathcal{F}}'_1 + n_3 \hat{\mathcal{F}}'_2) = \hat{N}'_{gk} \\ \hat{S}'_{ig} &= - \frac{E_u S_i}{2l_{ig}} s (z_1 \hat{1}' + \gamma_{12} \hat{R}' + z_2 \hat{\mathcal{F}}'_1 + z_3 \hat{\mathcal{F}}'_2) = - \hat{S}'_{gk} \quad (4.51) \\ \hat{D}'_{ig} &= \frac{E_u J_i}{l_{ig}} s (d_1 \hat{1}' + \gamma_{22} \hat{R}' + d_2 \hat{\mathcal{F}}'_1 + d_3 \hat{\mathcal{F}}'_2) = \hat{D}'_{gk} . \end{aligned}$$

Kao specijalni slučaj posmatramo štاپ tipа "g" konstantnog poprečnog preseka koji ima dve ose simetrije :

Na osnovu izraza (2.65) izraz (4.36) je :

$$\hat{D}'_g = \frac{l_{ig}^2}{E_u^2 F_i J_i} \hat{F}'_{11} \hat{F}'_{22} , \quad (4.52)$$

pa je na osnovu izraza (4.31) i (4.33) :

$$\begin{aligned} \hat{N}'_{ig} &= \frac{E_u F_i}{l_{ig}} (\hat{F}'_{11})^{-1} = \frac{E_u F_i}{l_{ig}} \hat{I}'_{11} = \hat{N}'_{gk} \\ \hat{S}'_{ig} &= \hat{S}'_{gk} = 0 \quad (4.53) \\ \hat{D}'_{ig} &= \frac{3E_u J_i}{l_{ig}} (\hat{F}'_{22})^{-1} = \frac{3E_u J_i}{l_{ig}} \hat{I}'_{22} = \hat{D}'_{gk} . \end{aligned}$$

Uveden je operator \hat{I}'_{11} , tako da je :

$$\hat{F}'_{11} \hat{I}'_{11} = \hat{1}' . \quad (4.54)$$

Operator \hat{I}'_{11} može da se izrazi na sledeći način :

(analogno operatoru \hat{I}'_{22} (4.13))

$$\hat{I}'_{11} = \frac{\gamma'_1 \gamma'_2}{\gamma'_{22}} \hat{1}' + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_{22}} \hat{R}' + \left(1 - \frac{\gamma'_1 \gamma'_2}{\gamma'_{22}} - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_{22}} \right) \hat{\mathcal{B}}'_{22} . \quad (4.55)$$

4.2.4. Matrica krutosti štapa tipa "g" izražena preko bazne matrice krutosti

Analogno izrazu (4.21) operatorska matrica krutosti $\left[\hat{K}'_{ig} \right]$ štapa tipa "g" sa zglibom na mestu k, izražena je preko bazne matrice krutosti $\left[\hat{K}'_{ig^o} \right]$:

$$\left[\hat{K}'_{ig} \right] = \left[C_{ig} \right] \left[\hat{K}'_{ig^o} \right] \left[C_{ig} \right]^T \quad (4.56)$$

Matrica $\left[C_{ig} \right]$ se dobija iz matrice $\left[C \right]$ (3.4b) uklanjanjem kolone i vrste koja odgovara parametru obrtanja φ_k :

$$\left[C_{ig} \right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/l_{ig} \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1/l_{ig} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Korišćenjem izraza (4.26), (4.55) i (4.57) operatorska matrica krutosti štapa tipa "g" sa zglibom na mestu k je:

$$\left[\hat{K}'_{ig} \right] = \begin{bmatrix} \hat{N}'_{ig} & -\frac{1}{l} \hat{S}'_{ig} & -\hat{S}'_{ig} & -\hat{N}'_{ig} & \frac{1}{l} \hat{S}'_{ig} \\ & -\frac{1}{l^2} \hat{D}'_{ig} & \frac{1}{l} \hat{D}'_{ig} & \frac{1}{l} \hat{S}'_{ig} & -\frac{1}{l^2} \hat{D}'_{ig} \\ & & \hat{D}'_{ig} & \hat{S}'_{ig} & -\frac{1}{l} \hat{D}'_{ig} \\ & & & \hat{N}'_{ig} & -\frac{1}{l} \hat{S}'_{ig} \\ & & & & \frac{1}{l^2} \hat{D}'_{ig} \end{bmatrix}$$

simetrično

$$l = l_{ig} \quad (4.58)$$

Analogno se dolazi i do operatorske matrice krutosti $\left[\hat{K}'_{gk} \right]$ štapa tipa g sa zglibom na mestu i preko bazne matrice operatora $\left[\hat{K}'_{gk^o} \right]$:

$$\left[\hat{K}'_{gk} \right] = \left[C_{gk} \right] \left[\hat{K}'_{gk^o} \right] \left[C_{gk} \right]^T \quad (4.59)$$

Matrica $\left[C_{gk} \right]$ se dobija iz matrice $\left[C \right]$ (3.4b) brisanjem kolone i vrste koja odgovara parametru obrtanja φ_i :

$$\left[C_{gk} \right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/l_{gk} \\ 1 & 0 \\ 0 & -1/l_{gk} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

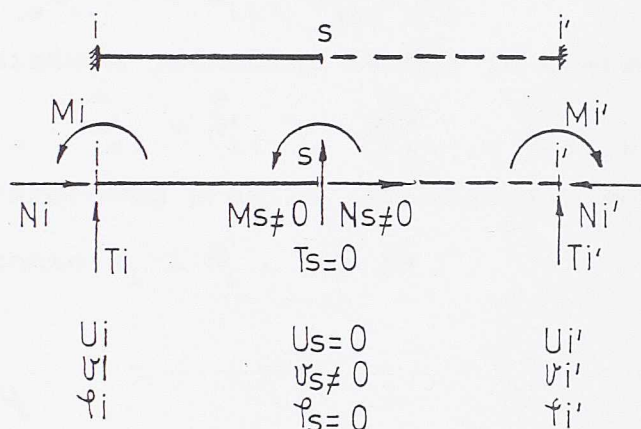
Korišćenjem izraza (4.29), (4.59) i (4.60) operatorska matrica krutosti štapa tipa "g" sa zglibom na mestu i je :

$$\left[\hat{K}'_{gk} \right] = \begin{bmatrix} \hat{N}'_{gk} & -\frac{1}{l} \hat{S}'_{gk} & -\hat{N}'_{gk} & \frac{1}{l} \hat{S}'_{gk} & -\hat{S}'_{gk} \\ & \frac{1}{l^2} \hat{D}'_{gk} & \frac{1}{l} \hat{S}'_{gk} & -\frac{1}{l^2} \hat{D}'_{gk} & \frac{1}{l} \hat{D}'_{gk} \\ & & \hat{N}'_{gk} & -\frac{1}{l} \hat{S}'_{gk} & \hat{S}'_{gk} \\ & \text{simetrično} & & \frac{1}{l^2} \hat{D}'_{gk} & -\frac{1}{l} \hat{D}'_{gk} \\ & & & & \hat{D}'_{gk} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$l = l_{gk}$

4.3. Matrica krutosti štapa tipa "s"

Poznato je da se pri korišćenju simetrije nosača kod kojih osa simetrije polovi jedan ili više štapova ii' nosača, pri simetričnoj deformaciji, javlja jedan ili više štapova tipa "s" (sl.4.3) [13], [22].



sl.4.3

Za pomeranja krajeva štapa ii' i za sile na krajevima tog štapa, koje potiču od tih pomeranja, pri simetričnoj deformaciji (sl.4.3) važe relacije :

$$u_{i'} = -u_i, \quad v_{i'} = v_i, \quad \varphi_{i'} = -\varphi_i \quad (a) \quad (4.62)$$

$$N_{i'} = -N_i, \quad T_{i'} = T_i = 0, \quad M_{i'} = -M_i \quad (b)$$

Saglasno tome, za proračun sila i deformacije štapa ii' pri simetričnoj deformaciji, odnosno za proračun sila i pomeranja štapa tipa "s", potrebno je i dovoljno da poznajemo samo pomeranja u_i i φ_i , na kraju i tog štapa.

Do matrice krutosti štapa tipa "s" može se doći korišćenjem izraza (4.62) i matrice krutosti štapa tipa "k" (4.22) gde se indeks k smenjuje indeksom i' , a zbog simetrije je :

$$\begin{aligned} \hat{A}'_{i'i} &= \hat{A}'_{ii'} \\ \hat{S}'_{i'i} &= -\hat{S}'_{ii'} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Matrica krutosti štapa tipa "s" može se izvesti i polazeći od izraza (3.43), (3.44), (3.45) tj. (3.46) koji važe za štap tipa "k" I izraza (4.62). Zbog simetrije, a na osnovu izraza (3.20) i (3.24) sledi :

$$-\hat{\alpha}'_{ik,s} = \hat{\alpha}'_{ki,s} = \hat{\alpha}'_{ii',s} \quad (4.64)$$

pa je :

$$\begin{aligned} \Delta l_{ii'} &= \delta'_{ii',s} S_{ii'} - 2\hat{\alpha}'_{ii',s} M_i \\ \tau_i &= -\hat{\alpha}'_{ii',s} S_{ii'} + (\hat{\alpha}'_{ii'} + \beta'_{ii'}) M_i \end{aligned} \quad (4.65)$$

Determinanta sistema jednačina (4.65) je operator :

$$D'_s = \delta'_{ii',s} (\hat{\alpha}'_{ii'} + \beta'_{ii'}) - 2\hat{\alpha}'_{ii',s} \hat{\alpha}'_{ii',s} \quad (4.66)$$

Korišćenjem Kramerovog pravila, iz sistema jednačina (4.65) možemo odrediti nepoznate M_i i N_i , jer je :

$$\begin{aligned} N_i &= -S_{ii'} \\ \Delta l_{ii'} &= -2u_i \\ \tau_i &= \varphi_i \end{aligned} \quad (4.67)$$

$$\begin{bmatrix} N_i \\ M_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{N}'_{is} & \hat{S}'_{is} \\ \hat{S}'_{is} & \hat{E}'_{is} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \varphi_i \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Uvedena operatorska matrica :

$$\left[\hat{K}'_s \right] = \begin{bmatrix} \hat{N}'_{is} & \hat{S}'_{is} \\ \hat{S}'_{is} & \hat{E}'_{is} \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

naziva se operatorska matrica krutosti štapa tipa "s".

4.3.1. Elementi operatorske matrice krutosti štapa tipa "s" promenljivog poprečnog preseka

Elementi operatorske matrice krutosti štapa tipa "s" promenljivog poprečnog preseka određuju se iz sistema jednačina (4.65) korišćenjem izraza (4.66) i predstavljaju operatore

oblika :

$$\begin{aligned}\hat{N}'_{is} &= 2 (\hat{\alpha}'_{ii'} + \hat{\beta}'_{ii'}) (\hat{D}'_s)^{-1} \\ \hat{S}'_{is} &= -2 \hat{\alpha}'_{ii',s} (\hat{D}'_s)^{-1} \\ \hat{E}'_{is} &= \hat{\delta}'_{ii',s} (\hat{D}'_s)^{-1}\end{aligned}\tag{4.70}$$

4.3.2. Elementi operatorske matrice krutosti štapa tipa "s" konstantnog poprečnog preseka

Elementi operatorske matrice krutosti štapa tipa "s" konstantnog poprečnog preseka izvode se iz izraza (3.48) kod kojih se indeks k zamenjuje indeksom i' i korišćenjem izraza (4.66), (4.70) i (2.55). Elementi operatorske matrice krutosti predstavljaju operatore oblika :

$$\begin{aligned}\hat{N}'_{is} &= \frac{2 E F_{ui}}{l_{ii'}} \hat{R}'_{11} \\ \hat{S}'_{is} &= \frac{2 E S_{ui}}{l_{ii'}} \hat{R}'_{12} \\ \hat{E}'_{is} &= \frac{2 E J_{ui}}{l_{ii'}} \hat{R}'_{22}\end{aligned}\tag{4.71}$$

Kao specijalni slučaj posmatramo štap tipa "s" konstantnog poprečnog preseka koji ima dve ose simetrije.

Na osnovu izraza (2.55) i (2.65) izrazi (4.71) postaju :

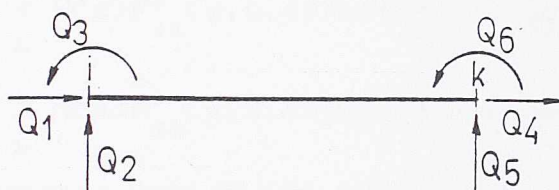
$$\begin{aligned}\hat{N}'_{is} &= \frac{2 E F_{ui}}{l_{ii'}} \hat{R}'_{11} \\ \hat{S}'_{is} &= 0 \\ \hat{E}'_{is} &= \frac{2 E J_{ui}}{l_{ii'}} \hat{R}'_{22}\end{aligned}\tag{4.72}$$

5. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja

Uticaje spoljašnjeg opterećenja na štap prevodimo u ekvivalentna koncentrisana opterećenja u čvorovima štapa.

5.1. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "k"

Ekvivalentna čvorna opterećenja za štap tipa "k" jednaka su negativnim vrednostima reakcija i momenata obostrano kruto uklještenog štapa (sl5.1).



sl. 5.1

$$Q_{ik} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} N_{ik,o}^* \\ T_{ik,o}^* \\ M_{ik,o}^* \\ N_{ki,o}^* \\ T_{ki,o}^* \\ M_{ki,o}^* \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Veličine $N_{ik,o}^*$, $T_{ik,o}^*$, $N_{ki,o}^*$, $T_{ki,o}^*$ i $M_{ik,o}^*$, $M_{ki,o}^*$ predstavljaju reakcije i momente obostrano kruto uklještenog štapa usled zadatog opterećenja.

5.1.1. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "k" promenljivog poprečnog preseka

Posmatramo štap tipa "k" opterećen proizvoljnim opterećenjem usled koga se u štapu javlja moment M_0 i normalna sila N_0 . Korišćenjem principa virtualnih sila (3.11) uz (sl.3.4) i principa superpozicije dopunićemo izraze (3.43), (3.44) i (3.45) :

$$\begin{aligned} \Delta l_{ik} &= \hat{\delta}'_{ik,s} S_{ik} - \hat{\alpha}'_{ik,s} M_{ik} + \hat{\alpha}'_{ki,s} M_{ki} + \delta_{ik,No}^* + \delta_{ik,Mo}^* \\ \tau_i &= -\hat{\alpha}'_{ik,s} S_{ik} + \hat{\alpha}'_{ik} M_{ik} - \hat{\beta}'_{ik} M_{ki} - \alpha_{ik,No}^* - \alpha_{ik,Mo}^* \\ \tau_k &= \hat{\alpha}'_{ki,s} S_{ik} - \hat{\beta}'_{ik} M_{ik} + \hat{\alpha}'_{ki} M_{ki} + \alpha_{ki,No}^* + \alpha_{ki,Mo}^* \end{aligned} \quad (5.2)$$

Veličine :

$$\delta_{ik,No}^*(t, t_0) = \int_L \bar{N}(s) \hat{F}'_{11}(s, t, \tau) N_0(s, \tau, t_0) \frac{1}{E_u F(s)} ds \quad (a) \quad (5.3)$$

$$\delta_{ik,Mo}^*(t, t_0) = \int_L \bar{N}(s) \hat{F}'_{12}(s, t, \tau) M_0(s, \tau, t_0) \frac{1}{E_u S(s)} ds \quad (b)$$

predstavljaju izduženje ose štapa usled spoljašnjeg opterećenja u slučaju kada su S_{ik} , M_{ik} i M_{ki} jednaki nuli .

Veličine :

$$\alpha_{ik,No}^*(t, t_0) = \int_L \bar{M}_i(s) \hat{F}'_{12}(s, t, \tau) N_0(s, \tau, t_0) \frac{1}{E_u S(s)} ds \quad (a) \quad (5.4)$$

$$\alpha_{ik,Mo}^*(t, t_0) = \int_L \bar{M}_i(s) \hat{F}'_{22}(s, t, \tau) M_0(s, \tau, t_0) \frac{1}{E_u J(s)} ds \quad (b)$$

predstavljaju deformacioni ugao τ_i usled spoljašnjeg opterećenja u slučaju kada su S_{ik} , M_{ik} i M_{ki} jednaki nuli .

Veličine :

$$\alpha_{ki,No}^*(t, t_0) = \int_L \bar{M}_k(s) \hat{F}'_{12}(s, t, \tau) N_0(s, \tau, t_0) \frac{1}{E_u S(s)} ds \quad (a) \quad (5.5)$$

$$\alpha_{ki,Mo}^*(t, t_0) = \int_L \bar{M}_k(s) \hat{F}'_{22}(s, t, \tau) M_0(s, \tau, t_0) \frac{1}{E_u J(s)} ds \quad (b)$$

predstavljaju deformacioni ugao τ_k usled spoljašnjeg opterećenja u slučaju kada su S_{ik} , M_{ik} i M_{ki} jednaki nuli .

Za štap promenljivog poprečnog preseka usvojen je model štapa kod koga su u konačnom broju intervala konstantni poprečni

preseci. Shodno tome uvode se oznake :

$$l_N^{(a)} = l_N^{(a)}(s, t, \tau) = \frac{1}{E_u F_i^{(a)} L^{(a)}} \int \bar{N}(s) N_0(s, t, \tau) ds \quad (a)$$

$$l_M^{(a)} = l_M^{(a)}(s, t, \tau) = \frac{1}{E_u S_i^{(a)} L^{(a)}} \int \bar{N}(s) M_0(s, t, \tau) ds \quad (b)$$

$$a_N^{(a)} = a_N^{(a)}(s, t, \tau) = \frac{1}{E_u S_i^{(a)} L^{(a)}} \int \bar{M}_i(s) N_0(s, t, \tau) ds \quad (c)$$

(5.6)

$$a_M^{(a)} = a_M^{(a)}(s, t, \tau) = \frac{1}{E_u J_i^{(a)} L^{(a)}} \int \bar{M}_i(s) M_0(s, t, \tau) ds \quad (d)$$

$$b_N^{(a)} = b_N^{(a)}(s, t, \tau) = \frac{1}{E_u S_i^{(a)} L^{(a)k}} \int \bar{M}_i(s) N_0(s, t, \tau) ds \quad (e)$$

$$b_M^{(a)} = b_M^{(a)}(s, t, \tau) = \frac{1}{E_u J_i^{(a)} L^{(a)k}} \int \bar{M}_i(s) M_0(s, t, \tau) ds \quad (f)$$

Tada izrazi (5.3), (5.4) i (5.5) imaju sledeći oblik :

$$\delta_{ik, No}^* = \sum_{(a)} \hat{F}'_{11}^{(a)} l_N^{(a)}(s, t, \tau) \quad (a)$$

$$\delta_{ik, Mo}^* = \sum_{(a)} \hat{F}'_{12}^{(a)} l_M^{(a)}(s, t, \tau) \quad (b)$$

$$\alpha_{ik, No}^* = \sum_{(a)} \hat{F}'_{12}^{(a)} a_N^{(a)}(s, t, \tau) \quad (c)$$

(5.7)

$$\alpha_{ik, Mo}^* = \sum_{(a)} \hat{F}'_{22}^{(a)} a_M^{(a)}(s, t, \tau) \quad (d)$$

$$\alpha_{ki, No}^* = \sum_{(a)} \hat{F}'_{12}^{(a)} b_N^{(a)}(s, t, \tau) \quad (e)$$

$$\alpha_{ki, Mo}^* = \sum_{(a)} \hat{F}'_{22}^{(a)} b_M^{(a)}(s, t, \tau) \quad (f)$$

Rešavanjem sistema jednačina (5.2) po statički nezavisnim veličinama S_{ik} , M_{ik} i M_{ki} analogno relaciji (4.3) dobija se :

$$\begin{aligned} S_{ik} &= \hat{N}'_{ik} \Delta l_{ik} + \hat{S}'_{ik} \tau_i + \hat{S}'_{ki} \tau_k + \mathcal{J}_{ik,0}^* \\ M_{ik} &= \hat{S}'_{ik} \Delta l_{ik} + \hat{A}'_{ik} \tau_i + \hat{B}'_{ik} \tau_k + \mathcal{M}_{ik,0}^* \\ M_{ki} &= \hat{S}'_{ik} \Delta l_{ik} + \hat{B}'_{ik} \tau_i + \hat{A}'_{ki} \tau_k + \mathcal{M}_{ki,0}^* \end{aligned} \quad (5.8)$$

gde je :

$$\mathcal{P}_{ik,o}^* = -\hat{N}'_{ik} (\delta_{ik,No}^* + \delta_{ik,Mo}^*) + \hat{S}'_{ik} (\alpha_{ik,No}^* + \alpha_{ik,Mo}^*) - \hat{S}'_{ki} (\alpha_{ki,No}^* + \alpha_{ki,Mo}^*) \quad (a)$$

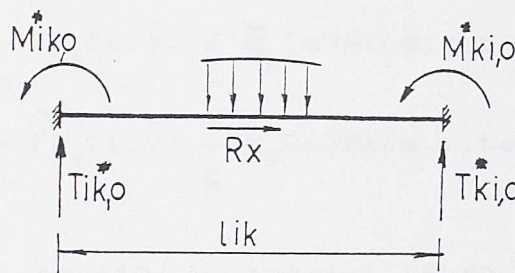
$$\mathcal{M}_{ik,o}^* = -\hat{S}'_{ik} (\delta_{ik,No}^* + \delta_{ik,Mo}^*) + \hat{A}'_{ik} (\alpha_{ik,No}^* + \alpha_{ik,Mo}^*) - \hat{B}'_{ik} (\alpha_{ki,No}^* + \alpha_{ki,Mo}^*) \quad (b)$$

$$\mathcal{M}_{ki,o}^* = -\hat{S}'_{ki} (\delta_{ik,No}^* + \delta_{ik,Mo}^*) + \hat{B}'_{ik} (\alpha_{ik,No}^* + \alpha_{ik,Mo}^*) - \hat{A}'_{ki} (\alpha_{ki,No}^* + \alpha_{ki,Mo}^*) \quad (c)$$

(5.9)

Veličine $\mathcal{P}_{ik,o}^*$, $\mathcal{M}_{ik,o}^*$ i $\mathcal{M}_{ki,o}^*$ su sila S_{ik} , odnosno momenti M_{ik} i M_{ki} od zadanog opterećenja u slučaju kada je $\Delta l_{ik} = \tau_i = \tau_k = 0$.

Prema tome veličine $\mathcal{M}_{ik,o}^*$ i $\mathcal{M}_{ki,o}^*$ predstavljaju momente obostrano kruto uklještenog štapa usled opterećenja.



sl. 5.2

Korišćenjem relacija (3.3) i (5.9) i na osnovu slike 5.2 dobijaju se i preostale reakcije štapa tipa "k" (5.1) usled zadanog opterećenja :

$$\mathcal{M}_{ik,o}^* = -\mathcal{P}_{ik,o}^* - \frac{R_x}{2}$$

$$\mathcal{M}_{ki,o}^* = \mathcal{P}_{ik,o}^* - \frac{R_x}{2}$$

$$\mathcal{P}_{ik,o}^* = \frac{\mathcal{M}_{ik,o}^* + \mathcal{M}_{ki,o}^*}{l_{ik}} + T_{ik,o}^* \quad (5.10)$$

$$\mathcal{P}_{ki,o}^* = -\frac{\mathcal{M}_{ik,o}^* + \mathcal{M}_{ki,o}^*}{l_{ik}} + T_{ki,o}^*$$

Reakcije se mogu odrediti i metodom sila.

5.1.2. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa
"k" konstantnog poprečnog preseka

Za štap tipa "k" konstantnog poprečnog preseka izrazi
(5.3), (5.4) i (5.5) imaju sledeći oblik :

$$\delta_{ik, N_0}^* (t, t_0) = -\frac{1}{E_u F_i} \hat{F}'_{11} (t, \tau) \int_L \bar{N}(s) N_0(s, \tau, t_0) ds \quad (a)$$

$$\delta_{ik, M_0}^* (t, t_0) = -\frac{1}{E_u S_i} \hat{F}'_{12} (t, \tau) \int_L \bar{N}(s) M_0(s, \tau, t_0) ds \quad (b)$$

$$\alpha_{ik, N_0}^* (t, t_0) = \frac{1}{E_u S_i} \hat{F}'_{12} (t, \tau) \int_L \bar{M}_i(s) N_0(s, \tau, t_0) ds \quad (c)$$

$$\alpha_{ik, M_0}^* (t, t_0) = \frac{1}{E_u J_i} \hat{F}'_{22} (t, \tau) \int_L \bar{M}_i(s) M_0(s, \tau, t_0) ds \quad (d)$$

$$\alpha_{ki, N_0}^* (t, t_0) = \frac{1}{E_u S_i} \hat{F}'_{12} (t, \tau) \int_L \bar{M}_k(s) N_0(s, \tau, t_0) ds \quad (e)$$

$$\alpha_{ki, M_0}^* (t, t_0) = \frac{1}{E_u J_i} \hat{F}'_{22} (t, \tau) \int_L \bar{M}_k(s) M_0(s, \tau, t_0) ds \quad (f) \quad (5.11)$$

Unošenjem izraza (5.11) u izraze (5.9) i (5.10) dobijamo
elemente vektora ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "k"
konstantnog poprečnog preseka.

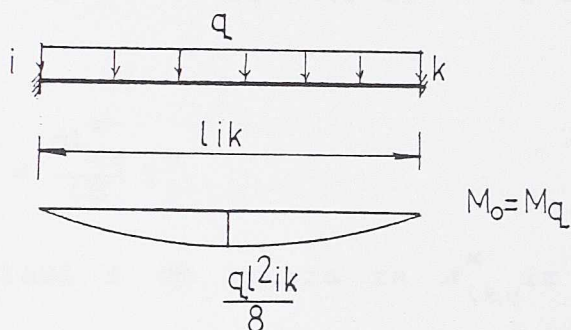
5.1.3. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa
"k" konstantnog poprečnog preseka usled opterećenja
nepromenljivog u toku vremena

Usled spoljašnjeg opterećenja L nepromenljivog u toku vremena
sile u preseku su funkcije koordinata tj :

$$M_L = M_L(s) \quad (5.12)$$

$$N_L = N_L(s)$$

Kao specijalni slučaj posmatraćemo stalno ravnomerno raspodeljeno opterećenje q (sl 5.3) .



sl.5.3

U izraze (5.11) uvodi se tada :

$$\begin{aligned} M_0 &= M_q 1^*(t, \tau) \\ N_0 &= N_q = 0 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Koristeći relaciju (A 1.5) i sl.12 iz izraza (5.11) sledi :

$$\begin{aligned} \delta_{ik, Nq}^* &= \alpha_{ik, Nq}^* = \alpha_{ki, Nq}^* = 0 \\ \delta_{ik, Mq}^* &= \frac{q l_{ik}^3}{12 E S_u} F_{12}^* \\ \alpha_{ik, Mq}^* &= \frac{q l_{ik}^3}{24 E J_u} F_{22}^* \\ \alpha_{ki, Mq}^* &= \frac{q l_{ik}^3}{24 E J_u} F_{22}^* \end{aligned} \tag{5.14}$$

Kako je na osnovu izraza (4.17) $\hat{S}'_{ik} = -\hat{S}'_{ki}$ iz izraza (5.9a) i (5.9b) sledi :

$$M_{ik, q}^* = -M_{ki, q}^* \tag{5.15}$$

Unošenjem izraza (5.14) i (4.17) u izraz (5.9a) dobija se :

$$M_{ik,q}^* = \frac{ql^2}{12} (\hat{R}'_{12} F_{12}^* + \hat{R}'_{22} F_{22}^*) \quad (5.16)$$

Korišćenjem relacija (2.55), (2.54) i (2.50) je :

$$\hat{R}'_{12} F_{12}^* + \hat{R}'_{22} F_{22}^* = \hat{R}'_1 \hat{R}'_2 (-\hat{F}'_{12} F_{12}^* + \hat{F}'_{11} F_{22}^*) = \hat{R}'_1 \hat{R}'_2 \hat{F}'_1 \hat{F}'_2 = 1^*$$

pa je :

$$M_{ik,q}^* = - M_{ki,q}^* = \frac{ql^2}{12} 1^* \quad (5.17)$$

Analogno se dolazi i do izraza za $N_{ik,q}^*$ iz izraza (5.10) i (5.9a) :

$$N_{ik,q}^* = \frac{ql^2 S_i}{12 J_i} (\hat{R}'_{11} F_{12}^* + \hat{R}'_{12} F_{22}^*) \quad (5.18)$$

Korišćenjem relacija (2.55), (2.54) i (A1.5) je:

$$\hat{R}'_{11} F_{12}^* + \hat{R}'_{12} F_{22}^* = \hat{R}'_1 \hat{R}'_2 (\hat{F}'_{22} F_{12}^* - \hat{F}'_{12} F_{22}^*) = 0$$

$$N_{ik,q}^* = N_{ki,q}^* = 0 \quad (5.19)$$

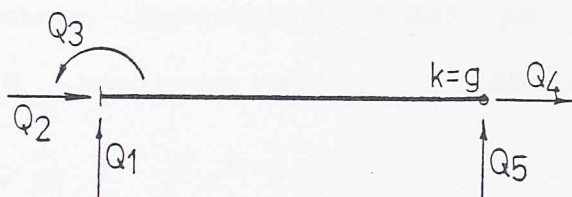
Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "k" konstantnog poprečnog preseka usled stalnog ravnomerno raspodeljenog opterećenja (sl.5.2) na osnovu (5.1) ima oblik :

$$Q_{ik} \text{ const} = - \begin{bmatrix} N_{ik,o}^* \\ \mathcal{J}_{ik,o}^* \\ M_{ik,o}^* \\ N_{ki,o}^* \\ \mathcal{J}_{ki,o}^* \\ M_{ki,o}^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ql}{2} 1^* \\ \frac{ql^2}{12} 1^* \\ 0 \\ \frac{ql}{2} 1^* \\ -\frac{ql^2}{12} 1^* \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

5.2. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g"

Ekvivalentna čvorna opterećenja za štap tipa "g" jednaka su negativnim vrednostima reakcija i momenta jednostrano kruto uklještenog štapa.

5.2.1. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g" sa zglobom na mestu k, promenljivog poprečnog preseka



sl.5.4

$$Q_{ig} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} N_{ig,0}^* \\ \mathcal{F}_{ig,0}^* \\ M_{ig,0}^* \\ N_{gi,0}^* \\ \mathcal{F}_{gi,0}^* \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Veličine $N_{ig,0}^*$, $\mathcal{F}_{ig,0}^*$, $N_{gi,0}^*$, $\mathcal{F}_{gi,0}^*$ i $M_{ig,0}^*$ predstavljaju reakcije i moment jednostrano kruto uklještenog štapa, tj. štapa tipa "g" sa zglobom na mestu k, usled zadatog opterećenja (sl.5.4).

Korišćenjem principa virtualnih sila (3.11) uz (sl.3.4) i principa superpozicije dopunićemo izraze (4.24a) i (4.24b):

$$\begin{aligned}\Delta l_{ig} &= \hat{\delta}'_{ig,s} S_{ig} - \hat{\alpha}'_{ig,s} M_{ig} + \delta_{ig,No}^* + \delta_{ig,Mo}^* \\ \tau_{ig} &= -\hat{\alpha}'_{ig,s} S_{ig} + \hat{\alpha}'_{ig} M_{ig} - \alpha_{ig,No}^* - \alpha_{ig,Mo}^* .\end{aligned}\quad (5.22)$$

Veličine $\delta_{ig,No}^*$ i $\delta_{ig,Mo}^*$ predstavljaju izduženje ose štapa a veličine $\alpha_{ig,No}^*$ i $\alpha_{ig,Mo}^*$ deformacioni ugao τ_{ig} usled spoljašnjeg opterećenja u slučaju kada su S_{ig} i M_{ig} jednaki nuli. Ove veličine za štap promenljivog poprečnog preseka se mogu odrediti korišćenjem izraza (5.3) i (5.4) tj. (5.7a-d) gde treba indeks k smeniti indeksom g.

Rešenjem sistema jednačina (5.22) po statički nezavisnim veličinama S_{ig} i M_{ig} analogno relaciji (4.25) dobija se :

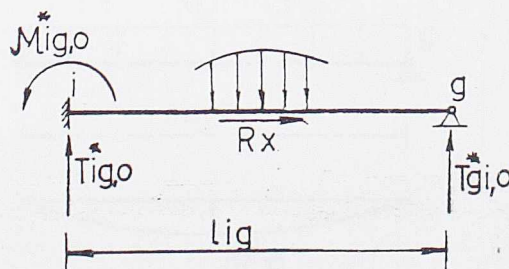
$$\begin{aligned}S_{ig} &= \hat{N}'_{ig} \Delta l_{ig} + \hat{S}'_{ig} \tau_{ig} + \mathcal{P}_{ig,o}^* \\ M_{ig} &= \hat{S}'_{ig} \Delta l_{ig} + \hat{D}'_{ig} \tau_{ig} + \mathcal{M}_{ig,o}^*\end{aligned}\quad (5.23)$$

gde je :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{ig,o}^* &= -\hat{N}'_{ig} (\delta_{ig,No}^* + \delta_{ig,Mo}^*) + \hat{S}'_{ig} (\alpha_{ig,No}^* + \alpha_{ig,Mo}^*) \quad (a) \\ \mathcal{M}_{ig,o}^* &= -\hat{S}'_{ig} (\delta_{ig,No}^* + \delta_{ig,Mo}^*) + \hat{D}'_{ig} (\alpha_{ig,No}^* + \alpha_{ig,Mo}^*) \quad (b)\end{aligned}\quad (5.24)$$

Veličine $\mathcal{P}_{ig,o}^*$ i $\mathcal{M}_{ig,o}^*$ jednake su sili S_{ig} , odnosno momentu M_{ig} od zadanog opterećenja u slučaju kada je $\Delta l_{ig} = \tau_{ig} = 0$.

Moment $\mathcal{M}_{ig,o}^*$ predstavlja moment punog uklještenja jednostrano uklještenog štapa usled opterećenja.



sl.5.5

Preostale reakcije štapa tipa "g" (sl.5.5) određuju se iz relacija :

$$M_{ig,o}^* = - \varphi_{ig,o}^* - \frac{R_x}{2}$$

$$M_{gi,o}^* = \varphi_{ig,o}^* - \frac{R_x}{2}$$

$$T_{ig,o}^* = \frac{M_{ig,o}^*}{l_{ig}} + T_{ig,o}^* \quad (5.25)$$

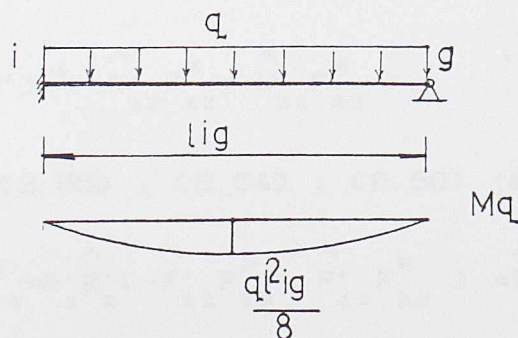
$$T_{gi,o}^* = - \frac{M_{ig,o}^*}{l_{ig}} + T_{gi,o}^*$$

5.2.2. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g" sa zglobom na mestu k , konstantnog poprečnog preseka

Za štap tipa "g" sa zglobom na mestu k , konstantnog poprečnog preseka veličine $\delta_{ig,No}^*$, $\delta_{ig,Mo}^*$, $\alpha_{ig,No}^*$ i $\alpha_{ig,Mo}^*$ određuju se na osnovu izraza (5.11a-d) u kojima treba smeniti indeks k indeksom g. Unošenjem tako dobijenih veličina u izraze (5.24) i (5.25) dobijaju se elementi vektora ekvivalentnih čvornih opterećenja (5.21) štapa tipa "g" sa zglobom na mestu k konstantnog poprečnog preseka.

5.2.3. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g" sa zglobom na mestu k , konstantnog poprečnog preseka usled opterećenja nepromenljivog u toku vremena

Kao specijalni slučaj određiće se elementi vektora ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g" konstantnog poprečnog preseka sa zglobom na mestu k usled stalnog ravnomerno raspodeljenog opterećenja q (sl. 5.6).



sl. 5.6

Uticaji usled spoljašnjeg opterećenja nepromenljivog u toku vremena dati su relacijom (5.13) tj. :

$$M_0 = M_q 1^*(t, \tau)$$

$$N_0 = N_q = 0$$

Koristeći relaciju (A 1.5) i na osnovu izraza (5.11a-d) gde treba smeniti indeks k indeksom g sledi :

$$\begin{aligned} \delta_{ig, Nq}^* &= \alpha_{ig, Nq}^* = 0 \\ \delta_{ig, Mq}^* &= \frac{q l_{ig}^3}{12 E_u S_i} F_{12}^* \\ \alpha_{ig, Mq}^* &= \frac{q l_{ig}^3}{24 E J} F_{22}^* \end{aligned} \quad (5.26)$$

Unošenjem izraza (5.26) i (4.45) u izraz (5.24a) i korišćenjem (2.55) dolazi se do relacije :

$$\varphi_{ig, q}^* = - \frac{q l_{ig}^2 F_i}{144 S_i} (\hat{C}')^{-1} \hat{R}'_{11} F_{12}^* \quad (5.27)$$

Koristeći relacije (4.45) i (5.25) sledi :

$$\mathcal{M}_{ig, q}^* = - \mathcal{M}_{gi, q}^* = \frac{q l_{ig}^3}{48 E_u S_i} \hat{N}'_{ig} F_{12}^* \quad (5.28)$$

Proizvod $\hat{N}'_{ig} F_{12}^*$ može da se prikaže na sledeći način (prilog 3) :

$$\hat{N}'_{ig} F_{12}^* = \frac{E_u F_i}{3 l_{ig}} s \left[a_1^* + b_1 F_{11}^* - b_2 F_{22}^* + c_1 n_2 \mathcal{F}_1^* + c_2 n_3 \mathcal{F}_2^* \right] \quad (C 1.30)$$

Izvešće se i izraz za $\mathcal{M}_{ig, q}^*$. Unošenjem izraza (5.26) i (4.45) u izraz (5.24b) dolazi se do relacije :

$$\mathcal{M}_{ig, q}^* = \frac{q l_{ig}^2}{24} (\hat{C}')^{-1} (\hat{R}'_{12} F_{12}^* + \hat{R}'_{22} F_{22}^*) \quad (5.29)$$

Korišćenjem izraza (2.55) , (2.54) , (2.50) je :

$$\hat{R}'_{12} F_{12}^* + \hat{R}'_{22} F_{22}^* = \hat{R}'_1 \hat{R}'_2 (-\hat{F}'_{12} F_{12}^* + \hat{F}'_{11} F_{22}^*) = \hat{R}'_1 \hat{R}'_2 \hat{F}'_1 F_{12}^* = 1^*$$

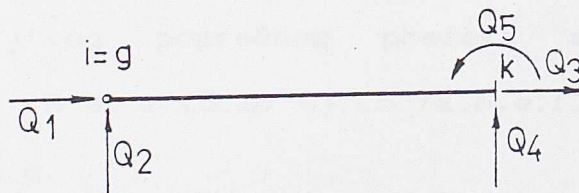
pa na osnovu izraza (4.47) i (A1.5) sledi :

$$M_{ig,q}^* = \frac{ql_{ig}^2}{24} (C^*)^{-1} = \frac{ql_{ig}^2}{24} S^* \quad (5.30)$$

Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g" sa zglobom na mestu k, konstantnog poprečnog preseka usled stalnog ravnomerno raspodeljenog opterećenja (sl.5.6) na osnovu (5.21) ima oblik :

$$Q_{ig}^* = - \begin{matrix} \text{const} \\ \mathcal{K}_{ig,q}^* \\ \mathcal{M}_{ig,q}^* \\ \mathcal{K}_{gi,q}^* \\ \mathcal{J}_{gi,q}^* \end{matrix} = - \begin{bmatrix} \frac{ql_{ig}^3}{48E_u S_i} \hat{N}'_{ig} F_{12}^* \\ \frac{ql_{ig}}{24} S^* + \frac{ql_{ig}}{2} 1^* \\ \frac{ql_{ig}^2}{24} S^* \\ - \frac{ql_{ig}^3}{48E_u S_i} \hat{N}'_{ig} F_{12}^* \\ - \frac{ql_{ig}}{24} S^* + \frac{ql_{ig}}{2} 1^* \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

5.2.4. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g" sa zglobom na mestu i, promenljivog poprečnog preseka



sl.5.7

$$Q_{gk} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} N_{gk,o}^* \\ \mathcal{T}_{gk,o}^* \\ N_{kg,o}^* \\ \mathcal{T}_{kg,o}^* \\ M_{kg,o}^* \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

Veličine $N_{gk,o}^*$, $\mathcal{T}_{gk,o}^*$, $N_{kg,o}^*$, $\mathcal{T}_{kg,o}^*$ i $M_{kg,o}^*$ predstavljaju reakcije i moment jednostrano kruto uklještenog štapa, tj. štapa tipa "g" sa zglobom na mestu i, usled zadanog opterećenja.

Korišćenjem principa virtualnih sila (3.11) uz (sl.3.4) i principa superpozicije dopunićemo izraze (4.27a) i (4.27c) :

$$\begin{aligned} \Delta l_{gk} &= \hat{\delta}'_{gk,s} S_{gk} + \hat{\alpha}'_{kg,s} M_{kg} + \delta_{gk,No}^* + \delta_{gk,Mo}^* \\ \tau_k &= \hat{\alpha}'_{kg,s} S_{gk} + \hat{\alpha}'_{kg} M_{kg} + \alpha_{kg,No}^* + \alpha_{kg,Mo}^* . \end{aligned} \quad (5.33)$$

Veličine $\delta_{gk,No}^*$ i $\delta_{gk,Mo}^*$ predstavljaju izduženje ose štapa a veličine $\alpha_{kg,No}^*$ i $\alpha_{kg,Mo}^*$ deformacioni ugao τ_k usled spoljašnjeg opterećenja u slučaju kada su S_{gk} i M_{kg} jednaki nuli. Ove veličine za štap promenljivog poprečnog preseka se mogu odrediti korišćenjem izraza (5.3) i (5.4) tj. (5.7a,b,e,f) gde treba indeks i smeniti indeksom g.

Rešenjem sistema jednačina (5.33) po statički nezavisnim veličinama S_{gk} i M_{kg} analogno relaciji (4.28) dobija se :

$$\begin{aligned} S_{gk} &= \hat{N}'_{gk} \Delta l_{gk} + \hat{S}'_{gk} \tau_k + \mathcal{J}_{gk,o}^* \\ M_{kg} &= \hat{S}'_{gk} \Delta l_{gk} + \hat{D}'_{gk} \tau_k + M_{kg,o}^* \end{aligned} \quad (5.34)$$

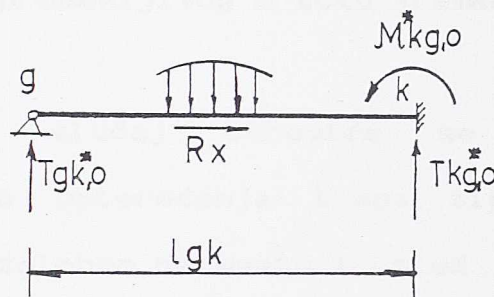
gde je :

$$\varphi_{gk,o}^* = - \hat{N}'_{gk} (\delta_{gk,No}^* + \delta_{gk,Mo}^*) - \hat{S}'_{gk} (\alpha_{kg,No}^* + \alpha_{kg,Mo}^*) \quad (a) \quad (5.35)$$

$$M_{kg,o}^* = - \hat{S}'_{gk} (\delta_{gk,No}^* + \delta_{gk,Mo}^*) - \hat{D}'_{gk} (\alpha_{kg,No}^* + \alpha_{kg,Mo}^*) \quad (b)$$

Veličine $\varphi_{gk,o}^*$ i $M_{kg,o}^*$ jednake su sili S_{gk} , odnosno momentu M_{kg} od zadanog opterećenja u slučaju kada je $\Delta l_{gk} = \tau_k = 0$.

Moment $M_{kg,o}^*$ predstavlja moment punog uklještenja jednostrano uklještenog štapa usled opterećenja.



sl. 5.8

Preostale reakcije štapa tipa "g" (sl.5.8) određuju se iz relacija :

$$N_{gk,o}^* = - \varphi_{gk,o}^* - \frac{R_x}{2}$$

$$N_{kg,o}^* = \varphi_{gk,o}^* - \frac{R_x}{2}$$

$$\varphi_{gk,o}^* = \frac{M_{kg,o}^*}{l_{gk}} + T_{gk,o}^* \quad (5.36)$$

$$\varphi_{kg,o}^* = - \frac{M_{kg,o}^*}{l_{gk}} + T_{kg,o}^*$$

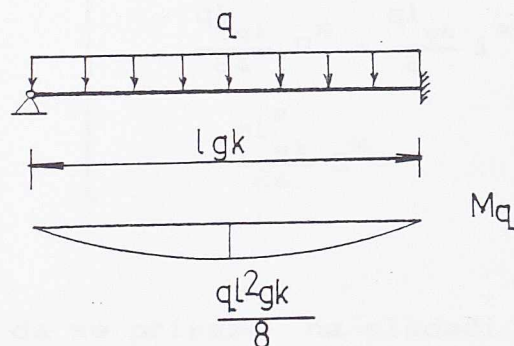
5.2.5. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g" sa zglobom na mestu i, konstantnog poprečnog preseka

Za štap tipa "g" sa zglobom na mestu i, konstantnog poprečnog preseka veličine $\delta_{gk,No}^*$, $\delta_{gk,Mo}^*$, $\alpha_{kg,No}^*$ i $\alpha_{kg,Mo}^*$

određuju se na osnovu izraza (5.11a,b,e,f) u kojima treba smeniti indeks i indeksom g . Unošenjem tako dobijenih veličina u izraze (5.35) i (5.36) dobijaju se elementi vektora ekvivalentnih čvornih opterećenja (5.32) štapa tipa "g" sa zglobom na mestu i konstantnog poprečnog preseka usled opterećenja.

5.2.6. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g" sa zglobom na mestu i , konstantnog poprečnog preseka usled opterećenja nepromenljivog u toku vremena

Kao specijalni slučaj odrediće se elementi vektora ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g" konstantnog poprečnog preseka sa zglobom na mestu i usled stalnog ravnomerno raspodeljenog opterećenja q (sl. 5.9).



sl. 5.9

Uticaji usled spoljašnjeg opterećenja nepromenljivog u toku vremena dati su relacijom (5.13) tj. :

$$M_o = M_q \cdot 1^*(t, \tau)$$

$$N_o = N_q = 0$$

Koristeći relaciju (A 1.5) i na osnovu izraza (5.11a,b,e,f) gde treba smeniti indeks i indeksom g sledi :

$$\delta_{gk,Nq}^* = \alpha_{gk,Nq}^* = 0$$

$$\delta_{gk,Mq}^* = \frac{q l_{gk}^3}{12 E_u S_i} F_{12}^* \quad (5.37)$$

$$\alpha_{kg,Mq}^* = \frac{q l_{gk}^3}{24 E J} F_{22}^*$$

Unošenjem izraza (5.37) i (4.46) u izraze (5.35) analogno izrazima za štap tipa "g" sa zglobom na mestu k dolazi se do vektora ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g" sa zglobom na mestu i usled stalnog ravnomerno raspodeljenog opterećenja (sl. 5.9).

$$Q_{gk} = - \begin{bmatrix} N_{gk,q}^* \\ \mathcal{J}_{gk,q}^* \\ N_{kg,q}^* \\ \mathcal{J}_{kg,q}^* \\ M_{kg,q}^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{q l_{gk}^3}{48 E_u S_i} \hat{N}'_{gk} F_{12}^* \\ - \frac{q l_{gk}}{24} S^* + \frac{q l_{gk}}{2} 1^* \\ - \frac{q l_{gk}^3}{48 E_u S_i} \hat{N}'_{gk} F_{12}^* \\ \frac{q l_{gk}}{24} S^* + \frac{q l_{gk}}{2} 1^* \\ - \frac{q l_{gk}^2}{24} S^* \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

Proizvod $\hat{N}'_{gk} F_{12}^*$ može da se prikaže na sledeći način (prilog 3) :

$$\hat{N}'_{gk} F_{12}^* = \frac{E_u F_i}{3 l_{gk}} s \left[a_1^* + b_1 F_{11}^* - b_2 F_{22}^* + c_{12} n_{21}^* \mathcal{F}_1^* + c_{23} n_{32}^* \mathcal{F}_2^* \right] \quad (C 1.30)$$

5.3. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "s"

$$Q_s = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} N_{is,o}^* \\ \mathcal{T}_{is,o}^* \\ M_{is,o}^* \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Veličine $N_{is,o}^*$, $\mathcal{T}_{is,o}^*$ i $M_{is,o}^*$ predstavljaju reakcije i moment u čvoru i štapa tipa "s" (sl4.3) usled zadanog opterećenja. Ove veličine se mogu odrediti kao reakcije u čvoru i obostrano uklještenog štapa ii' (poglavlje 5.2).

$$\begin{aligned} N_{is,o}^* &= N_{ii',o}^* \\ \mathcal{T}_{is,o}^* &= \mathcal{T}_{ii',o}^* \\ M_{is,o}^* &= M_{ii',o}^* \end{aligned} \quad (5.40)$$

Veličine (5.40) mogu se odrediti i na sledeći način .

Polazeći od jednačina (4.65) primenom superpozicije dobija se :

$$\begin{aligned} \Delta l_{ii'} &= \hat{\delta}'_{ii'} S_{ii'} - 2\hat{\alpha}'_{ii'} M_i + \delta_{ii',No}^* + \delta_{ii',Mo}^* \\ \tau_i &= -\hat{\alpha}'_{ii',s} S_{ii'} + (\hat{\alpha}'_{ii'} + \hat{\beta}'_{ii'}) M_i - \alpha_{ii',No}^* - \alpha_{ii',Mo}^* \end{aligned} \quad (5.41)$$

gde su $\delta_{ii',No}^*$, $\delta_{ii',Mo}^*$ i $\alpha_{ii',No}^*$, $\alpha_{ii',Mo}^*$ izduženje deformacioni ugao τ_i štapa tipa "s" usled spoljašnjeg opterećenja i određuju se iz analognih relacija (5.3) i (5.4).

Rešavanjem sistema jednačina (5.41) uz (4.67) i (4.68) dobija se :

$$\begin{aligned} N_i &= \hat{N}'_{is,i} u_i + \hat{S}'_{is,i} \varphi_i + N_{is,o}^* \\ M_i &= \hat{S}'_{is,i} u_i + \hat{E}'_{is,i} \varphi_i + M_{is,o}^* \end{aligned} \quad (5.42)$$

gde je :

$$\begin{aligned}
 N_{is,o}^* &= \hat{N}'_{is} \frac{1}{2} (\delta_{ii',No}^* + \delta_{ii',Mo}^*) + \hat{S}'_{is} (\alpha_{ii',No}^* + \alpha_{ii',Mo}^*) \\
 M_{is,o}^* &= \hat{S}'_{is} \frac{1}{2} (\delta_{ii',No}^* + \delta_{ii',Mo}^*) + \hat{E}'_{is} (\alpha_{ii',No}^* + \alpha_{ii',Mo}^*) .
 \end{aligned}
 \tag{5.43}$$

Veličine $N_{is,o}^*$ i $M_{is,o}^*$ predstavljaju silu N_i i moment M_i u čvoru i štapa tipa "s" od zadatog opterećenja u slučaju kada je $u_i = \tau_i = 0$.

Za štap tipa "s" konstantnog poprečnog preseka koriste se analogni izrazi štapa tipa "k".

Za štap bilo koga tipa ukupne sile na krajevima štapa, uz relaciju (4.20) su :

$$[R] + [Q] = [\hat{K}'] [q] , \tag{5.44}$$

ili :

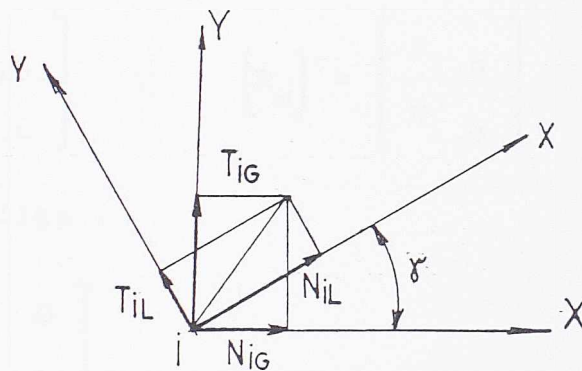
$$[R] = [\hat{K}'] [q] - [Q] . \tag{5.55}$$

6. Transformacija matrice krutosti sistema

Komponente sila i pomeranja u dosadašnjim izrazima odnosile su se na lokalni koordinatni sistem štapa. Osa x poklapala se sa osom štapa počev od čvora i ka čvoru k .

Prilikom ispisivanja uslova ravnoteže za ceo nosač potrebno je da se sve komponente sila i pomeranja čvorova odnose na jedan globalni koordinatni sistem , pa je neophodno izvršiti transformaciju sa lokalnih na globalni sistem koordinata .

Odrediće se veza između sila u čvoru i štapa u lokalnom (L) i globalnom (G) kordinatnom sistemu (sl.6.1.).



sl.6.1

$$N_{i,L} = N_{i,G} \cos \gamma + T_{i,G} \sin \gamma \quad (6.1)$$

$$T_{i,L} = -N_{i,G} \sin \gamma + T_{i,G} \cos \gamma .$$

Uvodimo smenu :

$$\cos \gamma = \lambda \quad (6.2)$$

$$\sin \gamma = \cos(90 - \gamma) = \mu .$$

Koristeći relacije (6.1) i (6.2) na osnovu sl.6.1 , sile u čvoru i štapa u lokalnom koordinatnom sistemu izražavaju se preko sila u globalnom koordinatnom sistemu :

$$\begin{bmatrix} N_{i,L} \\ T_{i,L} \\ M_{i,L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,G} \\ T_{i,G} \\ M_{i,G} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

tj. :

$$\begin{bmatrix} R_{i,L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{i,G} \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Uvedena matrica $\begin{bmatrix} t \end{bmatrix}$ je matrica transformacije generalisanih sila za čvor i .

Korišćenjem izraza (6.4) veza između generalisanih sila u lokalnom i globalnom koordinatnom sistemu za štap može da se prikaže u obliku :

$$\begin{bmatrix} R_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_G \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

gde je :

$$\begin{bmatrix} R_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{i,L} \\ R_{i,L} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} R_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{i,G} \\ R_{i,G} \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

a matrica $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}$ oblika :

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

je matrica transformacije za štap .

Na osnovu sl.6.1. sledi :

$$N_{i,G} = N_{i,L} \cos \gamma - T_{i,L} \sin \gamma \quad (6.8)$$

$$T_{i,G} = N_{i,L} \sin \gamma + T_{i,L} \cos \gamma,$$

tj. :

$$\begin{bmatrix} N_{i,G} \\ T_{i,G} \\ M_{i,G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -\mu & 0 \\ \mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,L} \\ T_{i,L} \\ M_{i,L} \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

odnosno :

$$\begin{bmatrix} R_{i,G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_{i,L} \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Na osnovu izraza (6.6) i (6.10) generalisane sile na

krajevima štapa u globalnom koordinatnom sistemu izražavaju se preko generalisanih sila u lokalnom koordinatnom sistemu sledećom relacijom :

$$\begin{bmatrix} R_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_L \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Iz izraza (6.4) je :

$$\begin{bmatrix} R_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} R_L \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Upoređujući (6.11) i (6.12) sledi :

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^{-T} \quad (a)$$

tj. : (6.13)

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^{-T} = \begin{bmatrix} I \end{bmatrix} \quad (b)$$

Gde je $\begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$ jedinična kvadratna matrica .

Matrica transformacije je ortogonalna matrica.

Matrica transformacije $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}$ generalisanih pomeranja dobija se transpozicijom matrice transformacije generalisanih sila , pa na osnovu (6.13) je :

$$\begin{bmatrix} q_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_G \end{bmatrix} \quad (a) \quad (6.14)$$

$$\begin{bmatrix} q_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} q_L \end{bmatrix} \quad (a)$$

Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja u globalnom koordinatnom sistemu $\begin{bmatrix} Q_G \end{bmatrix}$ izražen je preko vektora ekvivalentnih čvornih opterećenja u lokalnom koordinatnom sistemu $\begin{bmatrix} Q_L \end{bmatrix}$ na osnovu (6.11), sledećom relacijom :

$$\begin{bmatrix} Q_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_L \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

Ako se u izraz (4.20) tj. :

$$\begin{bmatrix} R_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_L \end{bmatrix}$$

unesu relacije (6.5) i (6.14) dobija se :

$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_g \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Množenjem izraza (6.16) matricom $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^T$ i korišćenjem relacije (6.13) sledi :

$$\begin{bmatrix} R_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{K}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_g \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

ili :

$$\begin{bmatrix} R_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}'_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_g \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Uvedena matrica :

$$\begin{bmatrix} \hat{K}'_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{K}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

predstavlja operatorsku matricu krutosti štapa u globalnom koordinatnom sistemu.

7. Uslovne jednačine

7.1. Uslovi kompatibilnosti pomeranja u čvorovima

Za svaki j -ti štap sistema štapova veza između sila i pomeranja na krajevima štapa ispisana u globalnom koordinatnom sistemu predstavljena je na osnovu relacije (5.55) u sledećem obliku :

$$\left[R_{\underline{g}} \right]_j = \left[\hat{K}'_{\underline{g}} \right]_j \left[q_{\underline{g}} \right]_j - \left[Q_{\underline{g}} \right]_j, \quad j=1,2,\dots,n \quad (7.1)$$

Ako za svaki štap sistema štapova, kojih ima ukupno n , ispišemo jednačinu (7.1) onda sve te jednačine čine matričnu jednačinu :

$$\left[R_{\underline{g}} \right] = \left[\hat{K}'_{\underline{g}} \right] \left[q_{\underline{g}} \right] - \left[Q_{\underline{g}} \right], \quad (7.2)$$

gde je :

$$\left[R_{\underline{g}} \right] = \begin{bmatrix} R_{\underline{g},1} \\ \vdots \\ R_{\underline{g},j} \\ \vdots \\ R_{\underline{g},n} \end{bmatrix}, \quad \left[\hat{K}'_{\underline{g}} \right] = \begin{bmatrix} \left[\hat{K}'_{\underline{g},1} \right] & & & \\ & \left[\hat{K}'_{\underline{g},j} \right] & & \\ & & \ddots & \\ & & & \left[\hat{K}'_{\underline{g},n} \right] \end{bmatrix},$$

$$\left[q_{\underline{g}} \right] = \begin{bmatrix} q_{\underline{g},1} \\ \vdots \\ q_{\underline{g},j} \\ \vdots \\ q_{\underline{g},n} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \left[Q_{\underline{g}} \right] = \begin{bmatrix} Q_{\underline{g},1} \\ \vdots \\ Q_{\underline{g},j} \\ \vdots \\ Q_{\underline{g},n} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Matrična jednačina (7.2) ispisana je za sistem nepovezanih štapova.

Za dalju analizu pogodno je uvesti matricu pomeranja čvorova povezanog sistema štapova :

$$[q] = \begin{bmatrix} q_{1,g} \\ \vdots \\ q_{i,g} \\ \vdots \\ q_{k,g} \end{bmatrix}, \quad (7.4)$$

gde je sa $q_{i,g}$ predstavljen vektor pomeranja čvora i sistema štapova sa komponentama u globalnom koordinatnom sistemu, a k je ukupan broj čvorova sistema štapova.

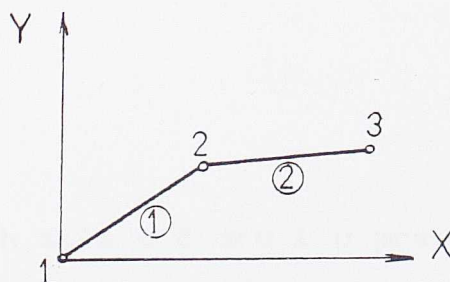
Vektor $[q_g]$ može biti izražen preko vektora q :

$$[q_g] = [J][q]. \quad (7.5)$$

Matrica $[J]$ je pravougaona matrica i naziva se matrica kompatibilnosti. Svaka vrsta matrice $[J]$ se sastoji od nula izuzev jednog elementa koji je jednak jedinici, a čiji položaj u redu određuje da element vektora $[q_g]$ odgovara posebnom elementu vektora $[q]$.

Jednačina (7.5) predstavlja uslove kompatibilnosti pomeranja u čvorovima nosača, a oni ustvari znače izjednačavanje pomeranja krajeva onih štapova koji su vezani u istom čvoru.

Tako bi na primer relacija (7.5) za sistem od dva štapa (1) i (2) koji imaju zajednički čvor 2 sl.7.1.



sl.7.1.

imala sledeći oblik :

$$\begin{bmatrix} q_{1,g}^{(1)} \\ q_{2,g}^{(1)} \\ \hline q_{2,g}^{(2)} \\ q_{3,g}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ \hline 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{1,g} \\ q_{2,g} \\ q_{3,g} \end{bmatrix}$$

Kako vektor pomeranja čvora $[q_{i,g}]$ odnosno $[q_{i,g}]$ ima tri elementa to je matrica $[I]$ oblika :

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.2. Uslovi ravnoteže sila u čvorovima

7.2.1. Čvorna operatorska matrica krutosti sistema štapova

Spoljašnje opterećenje koje deluje u čvorovima sistema definisaćemo vektorom P :

$$[P] = \begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_k \end{bmatrix}, \quad (7.6)$$

gde je :

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_{xi} \\ P_{yi} \\ M_i \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

vektor koncentrisanih sila u čvoru i u pravcu pomeranja $[q_{i,g}]$.

Da bi postavili uslove ravnoteže tačne metode deformacija zadaćemo sistemu štapova virtualno pomeranje $[\delta q]$. Virtualna pomeranja krajeva štapa su tada :

$$\begin{bmatrix} \delta q_{\underline{g}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta q \end{bmatrix} . \quad (7.8)$$

Virtualni rad sila $\begin{bmatrix} P \end{bmatrix}$ na pomeranjima $\begin{bmatrix} \delta q \end{bmatrix}$ je tada :

$$\delta \mathcal{R} = \begin{bmatrix} \delta q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P \end{bmatrix} , \quad (7.9)$$

dok je virtualna energija deformacije :

$$\delta \mathcal{W} = \sum_j \begin{bmatrix} \delta q_{\underline{g}, j} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_{\underline{g}, j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta q_{\underline{g}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_{\underline{g}} \end{bmatrix} . \quad (7.10)$$

Na osnovu principa virtualnih pomeranja biće :

$$\delta \mathcal{R} = \delta \mathcal{W} , \quad (7.11)$$

ili :

$$\begin{bmatrix} \delta q \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta q_{\underline{g}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_{\underline{g}} \end{bmatrix} . \quad (7.12)$$

Kako je na osnovu (7.5) :

$$\begin{bmatrix} \delta q_{\underline{g}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta q \end{bmatrix}^T , \quad (7.13)$$

to je :

$$\begin{bmatrix} \delta q \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_{\underline{g}} \end{bmatrix} \right\} = 0 . \quad (7.14)$$

Pošto $\begin{bmatrix} \delta q \end{bmatrix}$ predstavlja proizvoljna virtualna pomeranja , sledi da je :

$$\begin{bmatrix} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_{\underline{g}} \end{bmatrix} . \quad (7.15)$$

Ovom jednačinom je data veza između spoljašnjeg opterećenja u čvorovima sistema i sila na krajevima štapova , ili ova jednačina ustvari predstavlja uslove ravnoteže sila u čvorovima sistema štapova .

U izraz (7.15) unesemo izraze (7.2) i (7.5) :

$$\begin{bmatrix} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{K}'_{\underline{g}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{\underline{g}} \end{bmatrix} , \quad (7.16)$$

ili :

$$\begin{bmatrix} \hat{K}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S \end{bmatrix} , \quad (7.17)$$

gde su :

$$\left[\hat{K}' \right] = \left[J \right]^T \left[\hat{K}'_{\underline{g}} \right] \left[J \right] \quad (7.18)$$

čvorna operatorska matrica krutosti sistema štapova ,

$$\left[S \right] = \left[P \right] + \left[Q \right] \quad (7.19)$$

vektor kombinovanih čvornih opterećenja ,

$$\left[Q \right] = \left[J \right]^T \left[Q_{\underline{g}} \right] \quad (7.20)$$

i vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja sistema štapova.

Proračun čvorne operatorske matrice krutosti sistema (7.18) uključuje dva matrična množenja . Praktično se ova matrična množenja nikad ne sprovode , pošto su ove operacije ekvivalentne postavljanju elemenata matrice krutosti $\left[\hat{K}'_{\underline{g}} \right]$ u njihovo pravo mesto u većoj matrici $\left[\hat{K}' \right]$ i zatim sabiranju članova različitih matrica čije se pozicije poklapaju.

7.2.2. Preuređena čvorna operatorska matrica krutosti

Matrična jednačina (7.17) predstavlja uslove ravnoteže svih čvorova sistema. Sistem spoljašnjih sila koji deluje na nosač mora da zadovolji i uslove ravnoteže nosača kao krutog tela. Prema tome, svi uslovi ravnoteže dati izrazom (7.17) nisu međusobno nezavisni , pa je čvorna operatorska matrica krutosti singularna matrica. To znači da iz ove jednačine nemogu biti određena sva moguća pomeranja čvorova sistema.

Da bi sistem bio stabilan njemu moraju biti ukinuti svi stepeni slobode kretanja. Ako se on sastoji od z_p krutih ploča i z_z zglobova koji povezuju te ploče, njemu mora biti sprečeno najmanje $z_r = 3z_p + 2z_z$ pomeranja. Ova pomeranja moraju biti ili jednaka nuli ili jednaka zdatim veličinama , u svakom slučaju ona moraju biti poznata.

Red čvorne matrice krutosti jednak je broju mogućih pomeranja čvorova sistema. Ako sa n označimo broj nepoznatih, a sa $p \geq z_r$ broj poznatih pomeranja čvorova sistema, onda je red čvorne operatorske matrice krutosti sistema $(n + p)$.

Uslove ravnoteže ispisaćemo prvo u pravcu nepoznatih pa zatim poznatih pomeranja čime će se preurediti čvorna operatorska matrica krutosti jer će u gornjem levom uglu biti vrste i kolone koje odgovaraju nepoznatim pomeranjima.

Preuređena čvorna operatorska matrica krutosti $\begin{bmatrix} \hat{K}'_{pr} \end{bmatrix}$ podeljena je na submatrice :

$$\begin{bmatrix} \hat{K}'_{pr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}'_{nn} & \hat{K}'_{np} \\ \hat{K}'_{pn} & \hat{K}'_{pp} \end{bmatrix} . \quad (7.21)$$

Submatrica $\begin{bmatrix} \hat{K}'_{nn} \end{bmatrix}$ koja odgovara nepoznatim pomeranjima je singularna matrica .

Na isti način formiraćemo i preuređen vektor $\begin{bmatrix} q_{pr} \end{bmatrix}$ čvornih pomeranja koji se sastoji od vektora nepoznatih pomeranja $\begin{bmatrix} q_n \end{bmatrix}$ i vektora poznatih pomeranja $\begin{bmatrix} q_p \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} q_{pr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_n \\ \dots \\ q_p \end{bmatrix} . \quad (7.22)$$

Formiramo i preuređen vektor kombinovanih čvornih opterećenja $\begin{bmatrix} S_{pr} \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} S_{pr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_n \\ \dots \\ S_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_n \\ \dots \\ P_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_n \\ \dots \\ Q_p \end{bmatrix} , \quad (7.23)$$

gde je $\begin{bmatrix} S_n \end{bmatrix}$ vektor sa n komponentata, koje predstavljaju kombinovana opterećenja čvorova na mestu i u pravcu nepoznatih pomeranja $\begin{bmatrix} q_n \end{bmatrix}$, a vektor $\begin{bmatrix} S_p \end{bmatrix}$ vektor čije su komponente sva druga kombinovana čvorna opterećenja. Pri tome su $\begin{bmatrix} P_n \end{bmatrix}$ vektor spoljašnjeg čvornog opterećenja, a $\begin{bmatrix} Q_n \end{bmatrix}$ vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja na mestu i u pravcu nepoznatih pomeranja $\begin{bmatrix} q_n \end{bmatrix}$, dok su $\begin{bmatrix} P_p \end{bmatrix}$ vektor spoljašnjeg čvornog opterećenja, a $\begin{bmatrix} Q_p \end{bmatrix}$ vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja na mestu i u pravcu poznatih pomeranja $\begin{bmatrix} q_p \end{bmatrix}$.

7.2.3. Nepoznata pomeranja, reakcije oslonaca i sile na krajevima štapova

Uslove ravnoteže (7.17) možemo napisati preko preuređene matrice krutosti $\begin{bmatrix} \hat{K}'_{pr} \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} \hat{K}'_{pr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{pr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pr} \end{bmatrix}, \quad (7.24)$$

tj. :

$$\begin{bmatrix} \hat{K}'_{nn} & \hat{K}'_{np} \\ \hat{K}'_{pn} & \hat{K}'_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_n \\ S_p \end{bmatrix}, \quad (7.25)$$

ili :

$$\begin{bmatrix} \hat{K}'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{K}'_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_n \end{bmatrix} \quad (a) \quad (7.26)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{K}'_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{K}'_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_p \end{bmatrix} \quad (b)$$

Matrična jednačina (7.26a) predstavlja sistem integralnih jednačina u kojima su nepoznata pomeranja $\begin{bmatrix} q_n \end{bmatrix}$. Rešenja sistema jednačina (7.26a) mogu da se prikažu u obliku

$$\begin{bmatrix} q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}'_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{K}'_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{K}'_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_p \end{bmatrix} . \quad (7.27)$$

Iz jednačine (7.26b) određuje se vektor kombinovanih čvornih opterećenja $\begin{bmatrix} S_p \end{bmatrix}$ čije komponente odgovaraju poznatim komponentama vektora pomeranja .

Sa poznatim vektorom kombinovanih čvornih opterećenja $\begin{bmatrix} S_p \end{bmatrix}$ i određenim vektorom nepoznatih pomeranja $\begin{bmatrix} q_n \end{bmatrix}$ (7.27) mogu da se dobiju spoljašnje sile koje deluju u čvorovima nosača u kojima su pomeranja poznata , tj. reakcije oslonaca $\begin{bmatrix} R_p \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} P_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_p \end{bmatrix} , \quad (7.28)$$

tj. :

$$\begin{bmatrix} R_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}'_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{K}'_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_p \end{bmatrix} . \quad (7.29)$$

Kada su poznata pomeranja čvorova $\begin{bmatrix} q \end{bmatrix}$ odnosno preko izraza (7.5) $\begin{bmatrix} q_g \end{bmatrix}$, možemo na osnovu izraza (5.55) i (6.13a) odrediti sile na krajevima štapa j :

$$\begin{bmatrix} R_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}' \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} q_L \end{bmatrix}_j - \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} \hat{K}' \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_g \end{bmatrix}_j - \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix}_j . \quad (7.30)$$

Formiranje uslovnih jednačina tačne metode deformacija za spregnut nosač prikazano je pomoću integralnih operatora analogno formiranju uslovnih jednačina za elastičan nosač. Za razliku od elastičnog nosača gde su te jednačine algebarske jednačine kod spregnutog nosača one predstavljaju integralne jednačine . Da bi se odredile deformacijski neodređene veličina , tj. nepoznata pomeranja za spregnut nosač potrebno je rešiti sistem integralnih jednačina po tim pomeranjima. Za tako rešena pomeranja pri određivanju reakcija nosača i sila na krajevima štapova kod

spregnutog nosača neophodno je izvršiti i određene integracije kojih kod elastičnog nosača nema jer su svi izrazi dati u algebarskom obliku.

8. Proračun spregnutog nosača u vremenu $t=t_0$

Proračun spregnutog nosača u vremenu $t = t_0$ jednak je proračunu nosača od homogenog elastičnog materijala modula elastičnosti E_u , čije su geometrijske karakteristike F_i i J_i (prilog 2). Takav nosač se naziva korespondentni nosač. Proračun nosača od homogenog elastičnog materijala je poznat [11], [18], [36], [39].

U prethodnim poglavljima prikazan je proračun spregnutog nosača u vremenu t . Svi izvedeni izrazi za spregnut nosač u vremenu t važe i pri proračunu spregnutog nosača u vremenu $t=t_0$.

U vremenu $t=t_0$ veze između statičkih i deformacijskih veličina su algebarske jer je na osnovu izraza (2.25) i (2.32) :

$$\hat{F}' = \hat{1}' \quad \text{i} \quad \hat{R}' = \hat{1}' \quad . \quad (8.1)$$

Na osnovu izraza (2.43) i (2.45) tada sledi :

$$\begin{aligned} \hat{R}'_{11} = \hat{1}' \quad , \quad \hat{R}'_{22} = \hat{1}' \quad , \quad \hat{R}'_{12} = 0 \\ \hat{F}'_{11} = \hat{1}' \quad , \quad \hat{F}'_{22} = \hat{1}' \quad , \quad \hat{F}'_{12} = 0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

Iz relacija (4.15), (4.14) sledi da je $\hat{B}'_{11} = 1^*$ pa je iz (4.13) :

$$\hat{I}'_{22} = 1^* \quad . \quad (8.3)$$

U vremenu $t=t_0$ izraz (2.44) ima oblik :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{E_u F_i} N \\ \kappa &= \frac{1}{E_u J_i} M \end{aligned} \quad . \quad (8.4)$$

U matricama krutosti štapa tipa "k" (4.2), štapa tipa "g" (4.26) i (4.29) i štapa tipa "s" (4.69) u trenutku $t=t_0$ je :

$$\begin{aligned} \hat{S}'_{ik} = 0 \quad , \quad \hat{S}'_{ki} = 0 \quad , \\ \hat{S}'_{ig} = 0 \quad , \quad \hat{S}'_{gk} = 0 \quad , \\ \hat{S}'_{is} = 0 \quad , \end{aligned} \quad (8.5)$$

a i ostali elementi su znatno uprošćeni. Uz relaciju (A1.7) postaju konstantne veličine koje ne zavise od vremena, pa su

matrice u vremenu $t=t_0$ jednostavnije od odgovarajućih u vremenu t i nisu operatorske matrice.

Matrica krutosti štap tipa "k" u vremenu $t=t_0$:

$$\begin{bmatrix}
 N_{ik} & 0 & 0 & -N_{ik} & 0 & 0 \\
 & -\frac{1}{l^2}(C_{ik}+C_{ki}) & \frac{1}{l}C_{ik} & 0 & -\frac{1}{l^2}(C_{ik}+C_{ki}) & \frac{1}{l}C_{ki} \\
 & & A_{ik} & 0 & -\frac{1}{l}C_{ik} & B_{ik} \\
 & & & N_{ik} & 0 & 0 \\
 \text{simetrično} & & & & \frac{1}{l^2}(C_{ik}+C_{ki}) & -\frac{1}{l}C_{ki} \\
 & & & & & A_{ki}
 \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

gde je :

$$A_{ik} + B_{ik} = C_{ik}$$

$$A_{ki} + B_{ik} = C_{ki}$$

$$l = l_{ik}$$

Za štap tipa "k" promenljivog poprečnog preseka elementi matrice krutosti (8.6) mogu da se odrede preko bazne matrice krutosti (4.5) uz unošenje izraza (8.1)-(8.5).

Za štap tipa "k" konstantnog poprečnog preseka sa jednom ili dve ose simetrije elementi matrice krutosti (8.6) na osnovu izraza (4.17) i (4.18) a uz (8.1)-(8.5) imaju sledeći oblik :

$$N_{ik} = \frac{E_u F_i}{l_{ik}} \quad (a)$$

$$A_{ik} = \frac{4E_u J_i}{l_{ik}} = A_{ki} \quad (b)$$

$$B_{ik} = \frac{2E_u J_i}{l_{ik}} \quad (c)$$

$$C_{ik} = C_{ki} = \frac{6E_u J_i}{l_{ik}} \quad (d)$$

(8.7)

Matrica krutosti štapa tipa "g" sa zglobom na mestu k :

$$[K_{ig}] = \begin{bmatrix} N_{ig} & 0 & 0 & -N_{ig} & 0 \\ & -\frac{1}{l^2} D_{ig} & \frac{1}{l} D_{ig} & 0 & -\frac{1}{l^2} D_{ig} \\ & & D_{ig} & 0 & -\frac{1}{l} D_{ig} \\ & \text{simetrično} & & N_{ig} & 0 \\ & & & & \frac{1}{l^2} \hat{D}'_{ig} \end{bmatrix}$$

$l = l_{ig}$

(8.8)

Za štap tipa "g" sa zglobom na mestu k promenljivog poprečnog preseka elementi matrice krutosti (8.8) mogu se odrediti preko bazne matrice krutosti iz relacije (4.31) uz korišćenje izraza (8.1)-(8.5).

Za štap tipa "g" sa zglobom na mestu k konstantnog poprečnog preseka elementi matrice krutosti (8.8), na osnovu izraza (4.45) odnosno (4.50) a uz (8.1)-(8.5), imaju sledeći oblik :

$$N_{ig} = \frac{E_u F_i}{l_{ig}}$$

$$D_{ig} = \frac{3E_u J_i}{l_{ig}^3}$$
(8.9)

Matrica krutosti štapa tipa "g" sa zglobom na mestu i :

$$[K_{gk}] = \begin{bmatrix} N_{gk} & 0 & -N_{gk} & 0 & 0 \\ & \frac{1}{l_{gk}^2} D_{gk} & 0 & -\frac{1}{l_{gk}^2} D_{gk} & \frac{1}{l_{gk}} D_{gk} \\ & & N_{gk} & 0 & 0 \\ & \text{simetrično} & & \frac{1}{l_{gk}^2} D_{gk} & -\frac{1}{l_{gk}} D_{gk} \\ & & & & D_{gk} \end{bmatrix}$$

$l = l_{gk}$

(8.10)

Za štap tipa "g" sa zglobom na mestu i promenljivog poprečnog preseka elementi matrice krutosti (8.10) mogu se odrediti preko bazne matrice krutosti iz relacije (4.33) uz korišćenje izraza (8.1)-(8.5).

Za štap tipa "g" sa zglobom na mestu i konstantnog poprečnog preseka elementi matrice krutosti (8.10), na osnovu izraza (4.46) odnosno (4.50) a uz (8.1)-(8.5), imaju sledeći oblik :

$$N_{gk} = \frac{E_u F_i}{l_{gk}}$$

$$D_{gk} = \frac{3E_u J_i}{l_{gk}^3}$$
(8.11)

Matrica krutosti štapa tipa "s" :

$$K_s = \begin{bmatrix} N_{is} & 0 \\ 0 & E_{is} \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

Za štap tipa "s" promenljivog poprečnog preseka elementi matrice krutosti (8.12) određuju se iz relacije (4.70) uz (8.1)-(8.5).

Za štap tipa "s" konstantnog poprečnog preseka sa jednom ili dve ose simetrije elementi matrice krutosti (8.12) određuju se iz relacije (4.71) a uz (8.1)-(8.5) i imaju sledeći oblik :

$$N_{is} = \frac{2E_u F_i}{l_{ii'}} \quad (a)$$

$$E_{is} = \frac{2E_u J_i}{l_{ii'}} \quad (b)$$

Prilikom rešavanja spregnutog nosača tačnom metodom deformacija u vremenu $t=t_0$ postupak kojim se dolazi do deformacijski neodređenih veličina, reakcija sila veza i sila na krajevima štapova analogan je postupaku izloženom u poglavlju 7 za spregnut nosač u vremenu t , s tim što se umesto sistema integralnih jednačina u vremenu t rešava sistem algebarskih jednačina u vremenu $t=t_0$. Iz tog razloga biće bez posebnih objašnjenja prikazan redosled operacija pri proračunu spregnutog nosača tačnom metodom deformacija kao što je učinjeno u literaturi [11]. Ovaj redosled operacija potpuno je isti i za nosač u vremenu $t=t_0$ i nosač u vremenu t , ali kako je već navedeno, ove se operacije u vremenu $t=t_0$ i t kvalitativno i kvantitativno razlikuju.

1. Formiranje sheme nosača sa pozicijama svih čvorova i određivanje orijentacije štapova (usvajanje lokalne ose štapa); određivanje fizičkih osobina materijala i geometrijskih

karakteristika preseka ; formiranje vektora poznatih i nepoznatih parametara pomeranja $[q_{pr}]$ (7.22).

2. Proračun čvornih matrica krutosti štapova iz baznih matrica krutosti K_o , na osnovu (4.21) :

$$[K] = [C][K_o][C]^T$$

3. Formiranje matrice transformacija $[T]$ svakog štapa (glava 7).

4. Proračun čvorne matrice krutosti štapa u globalnom koordinatnom sistemu $[K_g]$, na osnovu (6.19) :

$$[K_g]_j = [T]^T [K]_j [T]$$

5. Formiranje matrice krutosti sistema $[K]$, na osnovu (7.18) :

$$[K] = [J]^T [K_g] [J]$$

6. Formiranje preuređene matrice krutosti sistema $[K_{pr}]$

7. Proračun ekvivalentnih čvornih opterećenja i formiranje vektora ekvivalentnih čvornih opterećenja $[Q_L]_j$ svakog štapa.

8. Proračun vektora ekvivalentnih čvornih opterećenja $[Q_g]_j$ svakog štapa u globalnom koordinatnom sistemu :

$$[Q_g] = [T]^T [Q_L] \quad (6.15)$$

9. Formiranje vektora ekvivalentnih čvornih opterećenja sistema :

$$[Q] = [J]^T [Q_g] \quad (7.20)$$

10. Formiranje kombinovanog vektora čvornih opterećenja $[S_n]$ u slobodnim čvorovima prema jednačini (7.23) :

$$[S_n] = [P_n] + [Q_n]$$

11. Proračun nepoznatih pomeranja , na osnovu (7.27) :

$$\begin{bmatrix} q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_p \end{bmatrix}$$

12. Proračun kombinovanog vektora čvornih opterećenja u oslonjenim čvorovima , na osnovu (7.26) :

$$\begin{bmatrix} S_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_p \end{bmatrix}$$

13. Proračun reakcija oslonaca (7.28)

$$\begin{bmatrix} P_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_p \end{bmatrix}$$

14. Proračun sila na krajevima štapova u pravcu osa lokalnog koordinatnog sistema , na osnovu (7.30) :

$$\begin{bmatrix} R_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_G \end{bmatrix}_j - \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix}_j$$

9. Određivanje napona

Pomoću izraza za deformacijske veličine η i κ (2.44) u proizvoljnom preseku nosača i izraza (2.31), (2.36) i (2.39) određuju se naponi kao funkcije vremena u proizvoljnoj tački preseka [23].

Definisaće se najpre uporedni napon :

$$\sigma_u = \sigma_u(s, y, t, t_0) = E_u \varepsilon = E_u (\eta + \kappa y) \quad (9.1)$$

gde se uvođenjem izraza za deformacijske veličine (2.44) i posle izvesnih sređivanja dobija :

$$\sigma_u = \hat{F}'_1 \left\{ \left[\frac{1}{\Delta\gamma} \left[C \frac{\delta\gamma_2}{F_i} N + \frac{\gamma_{12}}{S_i} MD + y \left(C \frac{\gamma_{12}}{S_i} N + \frac{\delta\gamma_1}{J_i} MD \right) \right] \right\} + \right. \quad (9.2)$$

$$\left. \hat{F}'_2 \left\{ \left[\frac{1}{\Delta\gamma} \left[C \frac{\delta\gamma_1}{F_i} N - \frac{\gamma_{12}}{S_i} MD + y \left(C \frac{\gamma_{12}}{S_i} N + \frac{\delta\gamma_2}{J_i} MD \right) \right] \right\} \right.$$

Ako uvedemo oznake :

$$n_1 = \frac{1}{\Delta\gamma} \left(C \frac{\delta\gamma_2}{F_i} + \frac{\gamma_{12}}{S_i} \right) ; \quad n_2 = \frac{1}{\Delta\gamma} \left(C \frac{\delta\gamma_2}{F_i} - \frac{\gamma_{12}}{S_i} \right) \quad (9.3)$$

$$m_1 = \frac{1}{\Delta\gamma} \left(C \frac{\gamma_{12}}{S_i} + \frac{\Delta\gamma_1 y}{J_i} \right) ; \quad m_2 = \frac{1}{\Delta\gamma} \left(C \frac{\gamma_{12}}{S_i} + \frac{\Delta\gamma_2 y}{J_i} \right)$$

tad uporedni napon ima sledeći oblik :

$$\sigma_u = \sum_{h=1}^2 n_h \hat{F}'_h N + \sum_{h=1}^2 m_h \hat{F}'_h M, \quad h=1,2 \quad (9.4)$$

Posmatraju se sada naponi u pojedinim delovima preseka $k = n, m, b, p$.

Napon u čeličnom nosaču (n) i mekoj armaturi (m) je :

$$\sigma_k = \nu_k \sigma_u, \quad k = n, m \quad (9.5)$$

tj. :

$$\sigma_k = \nu_k \left(\sum_{h=1}^2 n_h \hat{F}'_h N + \sum_{h=1}^2 m_h \hat{F}'_h M \right), \quad k = n, m \quad (9.6)$$

napon u betonu, na osnovu (2.31) je :

$$\sigma_b = \nu_b R' \sigma_u + \sigma_s \quad (9.7)$$

Unošenjem izraza (9.4) za uporedni napon u izraz (9.7) i korišćenjem relacije (2.56) tj. :

$$\hat{R}' \hat{F}'_h = \hat{B}'_h$$

napon u betonu je

$$\sigma_b = \nu_b \left(\sum_{h=1}^2 n_h \hat{B}'_h N + \sum_{h=1}^2 m_h \hat{B}'_h M \right) + \sigma_s \quad (9.8)$$

Na osnovu izraza (2.31) napon σ_s u betonu usled skupljanja je

$$\sigma_s = - E_{bo} \hat{R}' \varepsilon_s, \quad (9.9)$$

a smenom ε_s izrazom (2.29) i korišćenjem relacije (2.35) je :

$$\sigma_s = - E_{bo} r |1^* - R^*| \quad (9.10)$$

Napon u čeliku za prethodno naprezanje na osnovu (2.36) je :

$$\sigma_p = \nu_p \hat{R}'_p \sigma_u \quad (9.11)$$

Unošenjem izraza (9.4) za uporedni napon u izraz (9.11) , korišćenjem relacije (2.37) za operator \hat{R}'_p , i relacije (2.56)

izraz za napon u čeliku za prethodno naprezanje je :

$$\sigma_p = \nu_p \left\{ (1-\rho) \left[\sum_{h=1}^2 n_h \hat{F}'_h N + \sum_{h=1}^2 m_h \hat{F}'_h M \right] + \rho \left[\sum_{h=1}^2 n_h \hat{B}'_h N + \sum_{h=1}^2 m_h \hat{B}'_h M \right] \right\} \quad (9.12)$$

U vremenu $t=t_0$ izrazi za napone u pojedinim delovima preseka su :

$$\sigma_k = \nu_k \sigma_u = \nu_k \left(\frac{N}{F_i} + \frac{M}{J_i} y \right), \quad k = n, m, p, b \quad (9.13)$$

Koeficijenti ν_k ($k = n, m, p, b$) određeni su izrazima (B1.1) .

U primeru 1. biće prikazan proračun napona u pojedinim delovima preseka (n, m, p, b) usled različitih spoljašnjih uticaja ($H = P, Q, C, S$) u vremenu $t = t_0$ i vremenu t za funkciju puzanja teorije starenja.

U vremenu t biće sračunati i naponi pomoću asimptotske EM metode i upoređiće se dobijeni rezultati.

Metoda fiktivnog modula (Effective Modulus Method) [14], [16] ili kraće EM metoda u vremenu $t \Rightarrow \infty$ daje asimptotska rešenja

teorije nasleđa gde se integralna veza između napona i deformacije svodi na algebarsku vezu.

Funkcija puzanja teorije nasleđa je jedina koja u $t \Rightarrow \infty$ daje tačnu algebarsku vezu između napona i deformacije, tzv. asimptotsku vezu teorije nasleđa:

$$\sigma_{b\infty} = E_{b\infty}(\varepsilon_{\infty} - \varepsilon_{s\infty}), \quad E_{b\infty} = \frac{E_{b0}}{1 + \varphi_r^{\infty}} \quad (9.14)$$

Dimenziona veličina $E_{b\infty}$ se naziva asimptotski modul.

Funkcija puzanja teorije starenja i funkcija puzanja teorije nasleđa predstavljaju granične funkcije; za isti koeficijent puzanja teorija starenja predviđa najveće promene napona u toku vremena, a funkcija puzanja teorije nasleđa najmanja.

II. PRIMERI

Primena izložene teorije biće ilustrovana na primerima.

Prilikom određivanja deformacijski nepoznatih veličina, reakcija oslonaca i sila na krajevima štapova usvojen je konstantan moduo elastičnosti betona. Uzeta je u obzir relaksacija čelika za prethodno naprezanje i uvedena je pretpostavka (2.37) da relaksacija čelika za prethodno naprezanje linearno zavisi od funkcije relaksacije betona. Skupljanje betona uvodi se uz pretpostavku (2.29), tj. pojava skupljanja je vremenski slična puzanju.

Pri proračunu je korišćena funkcija puzanja teorije starenja, pa je bilo moguće uslovne integralne jednačine rešiti primenom Laplasove transformacije (prilog 4).

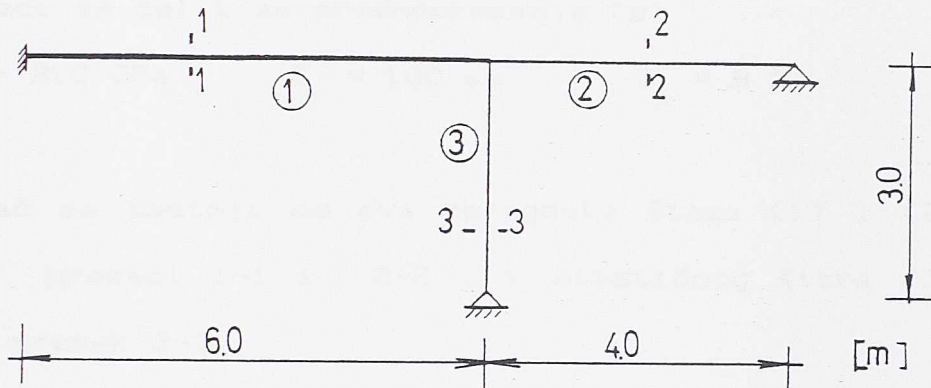
Svi proračuni izvršeni su na PC računaru. Napisan je program za sračunavanje geometrijskih karakteristika proizvoljnog spregnutog poprečnog preseka i program za sračunavanje uticaja u spregnutom preseku u vremenu t i $t=t_0$. Obuhvaćeni su: u primeru 1. ramovski nosač, u primeru 2. kontinualni simetrični nosač i u primeru 3. kontinualni nosač kod koga, kao specijalni slučaj, poprečni preseki imaju dve ose simetrije.

Sračunati su uticaji u spregnutim nosačima u trenutku $t=t_0$ kada se nosač ponaša kao elastičan i u trenutku t i upoređeni su rezultati.

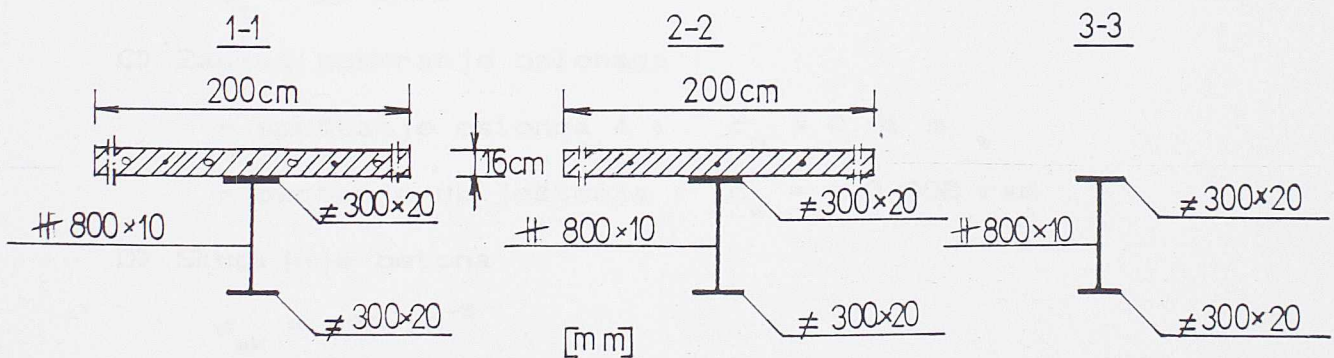
P1. Primer 1.

P1.1. Izgled nosača, spoljašnji uticaji i geometrijske karakteristike

Izgled nosača i oblici poprečnih preseka dati su na slikama (P1.1) i (P1.2).



sl. P1.1



sl. P1.2

Podaci za beton (b) :

$$E_b = 30 \text{ GPa} \quad \varphi_n = 3.5 \quad \varepsilon_{sk} = -30 \cdot 10^{-5}$$

Podaci za čelični nosač (n) :

$$E_n = 200 \text{ GPa}$$

Podaci za meku armaturu (m) :

$$E_m = 200 \text{ GPa}$$

$$F_m = 80 \text{ cm}^2$$

Podaci za čelik za prednaprezanje (p) :

$$E_p = 210 \text{ GPa} \quad E_p = 100 \text{ cm}^2 \quad \xi_p = 8 \% .$$

Nosač se sastoji od dva spregnuta štapa (1) i (2) čiji su poprečni preseki 1-1 i 2-2, i elastičnog štapa (3) čiji je poprečni presek 3-3.

Na nosač deluju sledeći stalni spoljni uticaji (sl. P1.3) :

A) Prethodno naprezanje (štapa 1) silom P

$$P = 2000 \text{ KN}$$

B) Stalno opterećenje

$$q_1 = 16 \text{ kN/m}$$

$$q_2 = 10 \text{ kN/m}$$

C) Zadato pomeranje oslonaca :

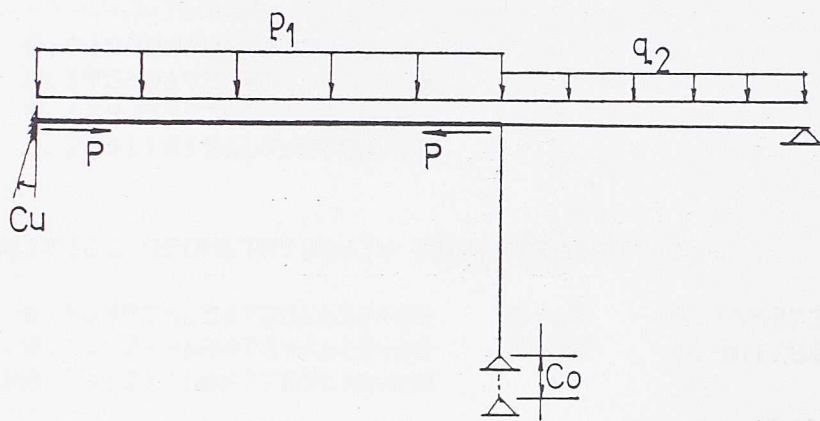
$$\text{- spuštanje oslonca 4 : } c_o = 0.01 \text{ m}$$

$$\text{- obrtanje uklještenja : } c_u = - 0.002 \text{ rad}$$

D) Skupljnje betona

$$\varepsilon_{sk} = -30 \cdot 10^{-5}$$

Svi uticaji započinju dejstvo istovremeno, neposredno posle prethodnog naprezanja.



sl. P.1.3

Geometrijske karakteristike poprečnih preseka , elementi matrice geometrijskih karakteristika i njihove glavne vrednosti (prilog 2) date su na sledećoj stranici. Za uporedni moduo elastičnosti usvojeno je :

$$E_u = E_m = E_n = 200 \text{ GPa} ,$$

a oznake imaju sledeće značenje :

$$G_{11} = \gamma_{11} \qquad G_{12P} = \gamma'_{11}$$

$$G_{22} = \gamma_{22} \qquad G_{22P} = \gamma'_{22}$$

$$G_{12} = \gamma_{12}$$

$$G_1 = \gamma_1 \qquad G_{1P} = \gamma'_1$$

$$G_2 = \gamma_2 \qquad G_{2P} = \gamma'_2$$

$$DG_1 = \delta\gamma_1$$

$$DG_2 = \delta\gamma_2$$

$$DDG = \Delta\gamma$$

GEOMETRIJSKE VREDNOSTI PRESEKA

1

POVRŠINA, TEZIŠTE, MOMENT INERCIJE, Si

Fi 0.8650000000000000D-01
 Ti 0.195606936416185D+00
 Ji 0.639059730250482D-02
 Si 0.235114156670045D-01

ELEMENTI MATRICE GEOMETRIJSKIH KARAKTERISTIKA

G11 0.564926654725665D+00 G11P 0.435073345274335D+00
 G22 0.118219684759461D+00 G22P 0.981790315240539D+00
 G12 -0.240277600773513D+00

GLAVNE VREDNOSTI

G1 0.669628202759239D+00 G1P 0.330371797240761D+00
 G2 0.135161367258863D-01 G2P 0.986481863274114D+00

DG1, DG2, DDG

DG1 0.104701548033574D+00
 DG2 0.551408517999778D+00
 DDG 0.656110066033353D+00

GEOMETRIJSKE VREDNOSTI PRESEKA

2

POVRŠINA, TEZIŠTE, MOMENT INERCIJE, Si

Fi 0.7600000000000000D-01
 Ti 0.211578947368421D+00
 Ji 0.623087719298246D-02
 Si 0.217611274217736D-01

ELEMENTI MATRICE GEOMETRIJSKIH KARAKTERISTIKA

G11 0.631578947368421D+00 G11P 0.368421052631579D+00
 G22 0.149806343767968D+00 G22P 0.850193656232032D+00
 G12 -0.290232640582988D+00

GLAVNE VREDNOSTI

G1 0.767867931151388D+00 G1P 0.232132068848612D+00
 G2 0.135173599850013D-01 G2P 0.986482640014999D+00

DG1, DG2, DDG

DG1 0.136288983782967D+00
 DG2 0.618061587383420D+00
 DDG 0.754350571166387D+00

CELICNI NOSAC - PRESEK 3

POVRSINA, TEZIŠTE, MOMENT INERCIJE

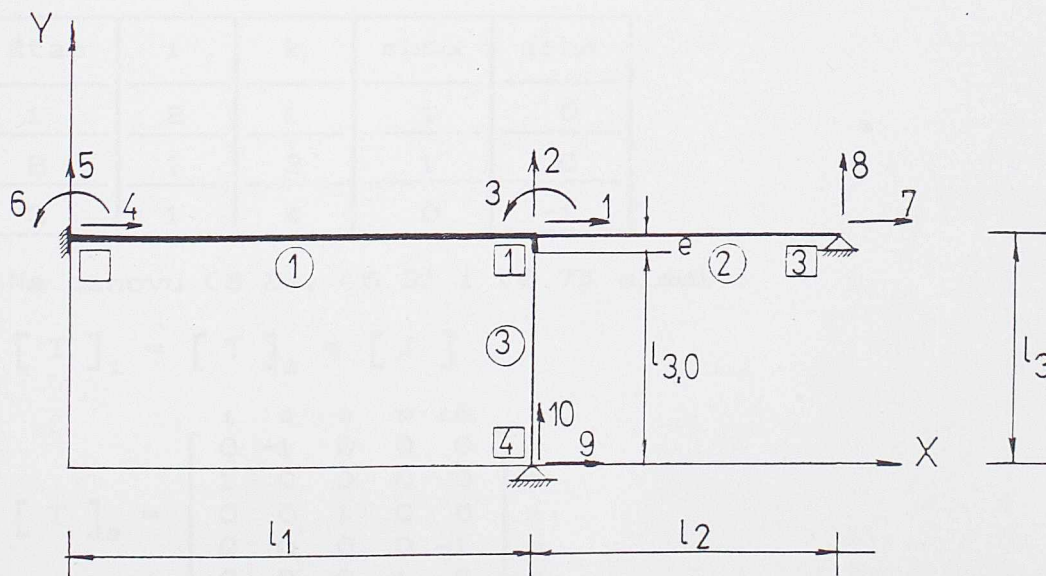
Fn Ø.2000000000000000D-01
Tn Ø.5800000000000000D+00
Jn Ø.244426666666667D-02



Prvo opterećenje koje prima nosač je prednaprezanje štapa (1). Prednaprezanje se izvodi utezanjem armature za prethodno naprezanje pri čemu se prese oslanjaju na konstrukciju. Pošto se izvrši ankerovanje, cevi se injektiraju, čime se armatura spreže sa nosačem i postaje deo konstrukcije. U trenutku pre injektiranja cevi armatura za prethodno naprezanje nije sastavni deo preseka pa štap (1) ima isti poprečni presek kao štap (2), tj ima presek 2-2. Kada se izvrši injektiranje cevi armatura postaje sastavni deo preseka pa je poprečni presek štapa (1) presek 1-1 (sl.P1.2). Prema tome došlo je do pomeranja težišta preseka zbog naknadnog dodavanja elemenata (armature za prethono naprezanje) :

$$e = T_{i,2} - T_{i,1} \quad (P1.1)$$

U primeru je uzeto da se osa štapa (1) i osa štapa (2) poklapaju tek posle injektiranja. Pomeranje težišta preseka štapa (1) uneto je u čvoru 1 kao beskonačno kruti element dužine e (sl.P1.4). Prednaprezanje i uticaji u nosaču biće kasnije detaljno obrađeni, ovde je uvedeno da bi se definisala shema nosača. Na (sl.P1.4) data je shema nosača.



sl. P1.4

Nepoznata pomeranja 1,2 i 3 su pomeranja čvora 1, poznata pomeranja su pomeranja čvorova 2,3 i 4 i jednaka su nuli.

Može se na osnovu (7.22) obrazovati vektor nepoznatih pomeranja q_n :

$$\begin{bmatrix} q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad (P1.2)$$

Odnosno preuređeni vektor pomeranja q_{pr} :

$$\begin{bmatrix} q_{pr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \quad (P1.3)$$

Lokalni koordinatni sistemi štapova (x,y) desne orijentacije usvojeni su tako da se osa x poklapa sa osom nosača i orijentisana je u smeru od čvora i ka čvoru k (tabela 1).

Usvojen je globalni koordinatni sistem (X,Y) (sl.P1.4).

Odrediće se matrice transformacije za štapove (poglavlje 6) korišćenjem tabele P1.1:

Tabela P1.1

| štap | i | k | cos α | sin α |
|------|---|---|--------------|--------------|
| 1 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 3 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 4 | 0 | -1 |

Na osnovu (6.2), (6.3) i (6.7) sledi :

$$[T]_1 = [T]_2 = [I] \quad (P1.4)$$

$$[T]_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \quad (P1.5)$$

P1.2. Proračun spregnutog nosača u vremenu $t=t_0$

Matrica krutosti štapa (1) u lokalnom koordinatnom sistemu $[K]_1$ data je izrazom (8.6). Na osnovu izraza (P1.4) i (8.19) matrica krutosti štapa (1) u globalnom koordinatnom sistemu $[K_g]_1$ je :

$$[K_g]_1 = [K]_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \\ N_{ik} & 0 & 0 & -N_{ik} & 0 & 0 \\ & \frac{-2}{l_1} C_{ik} & \frac{1}{l_1} C_{ik} & 0 & \frac{-2}{l_1} C_{ik} & \frac{1}{l_1} C_{ki} \\ & & A_{ik} & 0 & \frac{-1}{l_1} C_{ik} & B_{ik} \\ & & & N_{ik} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2}{l_1} C_{ik} & \frac{-1}{l_1} C_{ki} \\ & & & & & A_{ik} \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

simetrično

(P1.6)

Elementi matrice krutosti $[K]_1$ dati su izrazom (8.7).

Matrica krutosti štapa (2) u lokalnom koordinatnom sistemu $[K]_2$ data je izrazom (8.8). Na osnovu izraza (P1.4) i (8.19) matrica krutosti štapa (2) u globalnom koordinatnom sistemu $[K_g]_2$ je :

$$[K_g]_2 = [K]_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 \\ N_{ig2} & 0 & 0 & -N_{ig2} & 0 \\ & \frac{-1}{l_2} D_{ig2} & \frac{1}{l_2} D_{ig2} & 0 & \frac{-1}{l_2} D_{ig2} \\ & & D_{ig2} & 0 & \frac{-1}{l_2} D_{ig2} \\ & & & N_{ig2} & 0 \\ & & & & \frac{1}{l_2} D_{ig2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

simetrično

(P1.7)

Elementi matrice krutosti $[K]_2$ dati su izrazom (8.9).

Matrica krutosti štapa (3) u lokalnom koordinatnom sistemu $[K]_3$ data je izrazom (8.8). Posle transformacije u globalni koordinatni sistem na osnovu izraza (6.19) i (P1.5) je :

$$[K_g]_3 = [T]^T [K]_3 [T] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 & 10 \\ \frac{1}{l_3} D_{ig3} & 0 & \frac{1}{l_3} D_{ig3} & -\frac{1}{l_3} D_{ig3} & 0 \\ 0 & N_{ig3} & 0 & 0 & -N_{ig3} \\ \text{simetrično} & & D_{ig3} & -\frac{1}{l_3} D_{ig3} & 0 \\ \text{simetrično} & & & \frac{1}{l_3} D_{ig3} & 0 \\ \text{simetrično} & & & & N_{ig3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \quad (P1.8)$$

Štap (3) sadrži deo na dužini e beskonačne krutosti (sl.P1.4) pa su elementi matrice krutosti (P1.8) određeni preko bazne matrice krutosti tj. preko matrice fleksibilnosti :

$$N_{ig3} = \frac{E_u F_{ig3}}{l_{3,0}}$$

$$D_{ig3} = \frac{3E_u J_{ig3} l_3^2}{l_{3,0}^3} \quad (P1.9)$$

Formira se preuređena matrica krutosti sistema $[K_{PR}]$ na osnovu (7.21) :

$$[K_{pr}] = \begin{bmatrix} K_{nn} & K_{np} \\ K_{pn} & K_{pp} \end{bmatrix}_{10 \times 10}, \quad (P1.10)$$

gde je :

$$[K_{nn}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ N_{ik} + N_{ig2} + \frac{1}{l_3} D_{ig3} & 0 & \frac{1}{l_3} D_{ig3} \\ \frac{2}{l_1} C_{ik} + \frac{1}{l_2} D_{ig2} + N_{ig3} & \frac{-1}{l_1} C_{ik} + \frac{1}{l_2} D_{ig2} & A_{ik} + D_{ig2} + D_{ig3} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \quad (P1.11)$$

Armatura za prethodno naprezanje je provedena kroz cevi čime je obezbeđena njena nezavisna deformacija tokom utezanja. U vremenu $t=t^0-$ kad je armatura utegnuta i usidrena nosač je prethodno napregnut, a neposredno posle toga u vremenu $t=t_0$ kada se cevi injektiraju armatura postaje sastavni deo preseka. U ovom slučaju radi se o sprežanju naknadno dodatih, prethodno napregnutih, elemenata sa nosačem koji ima početnu deformaciju nastalu usled delovanja sila prethodnog naprezanja.

Pretpostavlja se da se celokupnoj armaturi za prethodno naprezanje u preseku istovremeno apliciraju sile prethodnog naprezanja i da su pre sprežanja naponi u njoj jednaki. Zanimaruje se ugao nagiba armature za prethodno naprezanje prema osi nosača. Težište T_p armature se poklapa sa težištem T_b betona.

Pri takvom načinu prednaprezanja u trenutku zatezanja armature, tj. u vremenu $t=t^0-$ sila prethodnog naprezanja P je spoljašnja sila koja deluje na presek bez armature za prethodno naprezanje. Armatura u tom momentu predstavlja samo jedan element preko koga se sila P saopštava preseku. Geometrijske karakteristike (prilog 2) poprečnog preseka štapa (1) su tada F_{i1}^C i J_{i1}^C sa težištem T_{i1}^C što ustvari odgovara preseku 2-2 tj. :

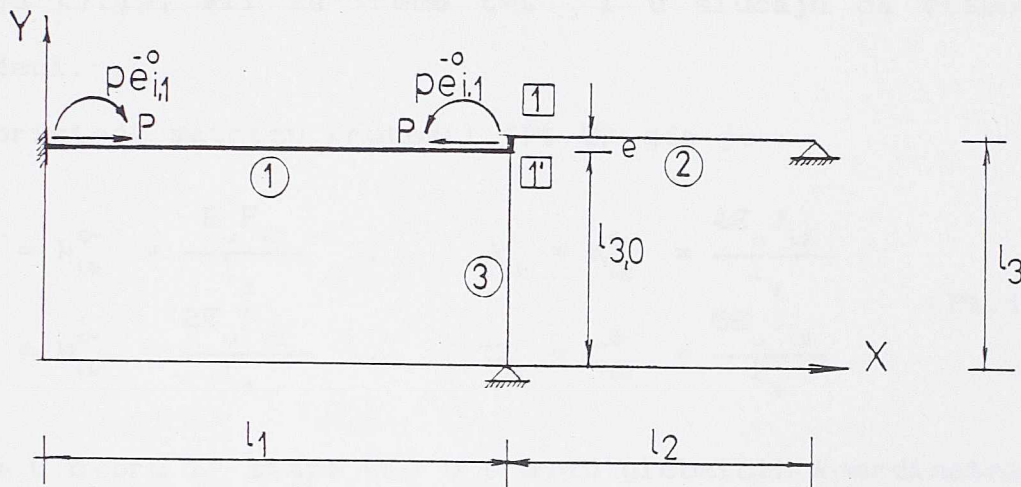
$$\begin{aligned} F_{i1}^C &= F_{i2} \\ J_{i1}^C &= J_{i2} \\ e_{i1}^C &= e_{i2} \end{aligned} \quad (P1.15)$$

Sila P je upravna na poprečni presek i deluje u težištu armature za prethodno naprezanje T_p . Posle redukcije ove sile na težište T_{i1}^C dobija se sila P i moment Pe_{i1}^C (sl.P1.5) :

$$\begin{aligned} n_p^{0-} &= -P \\ m_p^{0-} &= -Pe_{i1}^C \end{aligned} \quad (P1.16)$$

Što predstavlja raspodeljeno ravnotežno opterećenje parovima sila inteziteta n_p^{0-} i parovima spregova momenta m_p^{0-} .

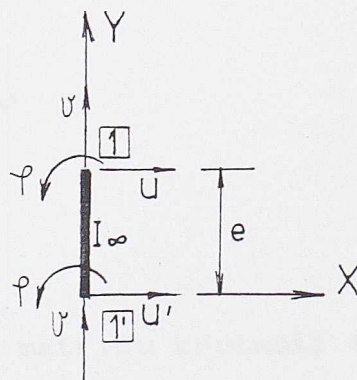
Shema nosača i opterećenja u vremenu $t=t^0$ data je na slici (P1.5)



sl. P1.5

U trenutku $t=t^0$ ose štapova (1) i (2) su pomerene jedna u odnosu na drugu za dužinu beskonačno krutog elementa e . Kada se izvrši injektiranje cevi u štapu (1) u trenutku $t=t_0$ armatura za prethodno naprezanje postaće satavni deo preseka, tj. ona će biti dodata preseku pa će se težište preseka odnosno osa štapu (1) pomeriti naviše za dužinu e (P1.1) i poklopiti sa osom štapu (2).

Shema beskonačno krutog elementa data je na slici P1.6.



sl. P1.6

Pomeranje u' čvora 1' beskonačno krutog elementa može se izraziti preko pomeranja u čvora 1 :

$$u' = u + e\varphi \quad (P1.17)$$

Sile na krajevima štapova u čvoru 1 odnosno 1' izraziće se u

funkciji parametara pomeranja čvora 1 odnosno 1'. Koristiće se relacija (7.1), ali za vreme $t=t^{0-}$ i u slučaju da štapovi nisu opterećeni.

Koristeći matricu krutosti (P1.6) gde je :

$$\begin{aligned} N_{ik} &= N_{ik}^c = \frac{E F_{i2}}{l_1} , & A_{ik} &= A_{ik}^c = \frac{4E J_{i2}}{l_1} , \\ B_{ik} &= B_{ik}^c = \frac{2E F_{i2}}{l_1} , & C_{ik} &= C_{ik}^c = \frac{6E J_{i2}}{l_1} , \end{aligned} \quad (P1.18)$$

sile u čvoru 1' štapa (1) u pravcu globalnih koordinatnih osa i moment su :

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= N_{ik}^c u' \\ Y^{(1)} &= 2 \frac{C_{ik}^{0-}}{l_1^2} v - \frac{C_{ik}^{0-}}{l_1} \varphi \\ M^{(1)} &= - \frac{C_{ik}^{0-}}{l_1^2} v + A_{ik}^{0-} \varphi \end{aligned} \quad (P1.19)$$

Na osnovu matrice krutosti (P1.7) sile u čvoru 1 štapa (2) u pravcu globalnih koordinatnih osa i moment su :

$$\begin{aligned} X^{(2)} &= N_{ig2} u \\ Y^{(2)} &= \frac{D_{ig2}}{l_2^2} v + \frac{D_{ig2}}{l_2} \varphi \\ M^{(2)} &= \frac{D_{ig2}}{l_2} v + D_{ig2} \varphi . \end{aligned} \quad (P1.20)$$

Za štap (3) koristimo matricu krutosti (P1.8) u kojoj je :

$$\begin{aligned} l_a &= l_{a,c} \\ N_{igs} &= N_{igs}^c = \frac{E F_a}{l_{a,o}} \\ D_{igs} &= D_{igs}^c = \frac{3E J_a}{l_{a,o}} , \end{aligned} \quad (P1.21)$$

pa su sile u čvoru 1' u pravcu glavnih koordinatnih osa i moment :

$$X^{(3)} = \frac{D_{ig3}^{0-}}{l_{3,0}^2} u' + \frac{D_{ig3}^{0-}}{l_{3,0}} \varphi$$

$$Y^{(3)} = N_{ig3}^{0-} v$$

(P1.22)

$$M^{(3)} = \frac{D_{ig3}^{0-}}{l_{3,0}} u' + D_{ig3}^{0-} \varphi$$

Izrazima (P1.19), (P1.20) i (P1.22) date su sile i moment na krajevima štapova u čvoru 1 i 1'. Sile u čvoru 1 odnosno 1' jednake su tim silama i imaju suprotni znak. Unoseći te sile u čvorove 1 i 1' beskonačno krutog elementa (sl.P1.6) u čijem čvoru 1 deluje koncentrisana sila P i moment Pe_{i1}^c (sl.P1.5) moguće je ispisati uslove ravnoteže za taj element :

$$\Sigma X = 0 :$$

$$-N_{ik}^{0-} u' - N_{ig2} u - \frac{D_{ig3}^{0-}}{l_{3,0}^2} u' - \frac{D_{ig3}^{0-}}{l_{3,0}} \varphi = P$$

$$\Sigma Y = 0$$

$$-2 \frac{C_{ik}^{0-}}{l_1^2} v + \frac{C_{ik}^{0-}}{l_1} \varphi - \frac{D_{ig2}}{l_2^2} v - \frac{D_{ig2}}{l_2} \varphi - N_{ig3}^{0-} v = 0 \quad (P1.23)$$

$$\Sigma M = 0$$

$$-\frac{C_{ik}^{0-}}{l_1} v + A_{ik}^{0-} \varphi + \frac{D_{ig2}}{l_2} v + D_{ig2} \varphi + \frac{D_{ig3}^{0-}}{l_{3,0}} u' + D_{ig3}^c \varphi + \left[-N_{ik}^{0-} u' + \frac{D_{ig3}^{0-}}{l_{3,0}^2} u' + \frac{D_{ig3}^{0-}}{l_{3,0}} \varphi \right] e = Pe_{i1}^c - Pe$$

Unošenjem relacije (P1.16) i (P1.23) dobija se sistem od tri jednačine sa tri nepoznate iz kojih se mogu odrediti parametri pomeranja u, v i φ u trenutku $t=t^{0-}$, tj vektor $[q_n]$ (P1.2).

Za tako određena pomeranja na osnovu relacije (7.29) reakcije

oslonaca su :

$$\begin{bmatrix} R_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_p \end{bmatrix} ,$$

gde je :

$$\begin{bmatrix} Q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ Pe_{i1}^c \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} , \quad (P1.25)$$

a matrica $\begin{bmatrix} K_{pn} \end{bmatrix}$ data izrazom (P1.12) gde treba uneti izraze (P1.18) i (P1.21).

Sile na krajevima štapova određuju se iz izraza (7.30) :

$$\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} K \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} q \end{bmatrix}_j \quad j = 1, 2, 3 ,$$

pri čemu u matrice krutosti štapova (1) i (3) date izrazima (P1.6) i (P1.8) treba uneti izraze (P1.18) i (P1.21), dok je matrica krutosti štapa (2) data izrazom (P1.7).

Sračunate vrednosti parametra pomeranja u , u' , v i φ , reakcije oslonaca i sile na krajevima štapova date su na sledećoj stani.

(Uvedena je oznaka $UP = u'$, a veličine u , u' , v i φ treba podeliti sa E_u .)

Dijagrami sila u preseku i reakcije oslonaca prikazani su na slici P1.7.

NEPOZNATA POMERANJA USLED P , T=T0-

U -0.634578807764864D+05
UP -0.630391006688172D+05
V -0.463664547884177D+03
0.262196230436559D+05

REAKCIJE OSOLONACA

H4 -0.120150472486165D+04
V5 0.273890439194747D+02
M6 0.318096483886539D+03
H7 0.120569973475324D+04
V8 -0.304966860032177D+02
H9 -0.419500989159241D+01
V10 0.310764208374305D+01

SILE NA KRAJEVIMA STAPOVA

STAP 1

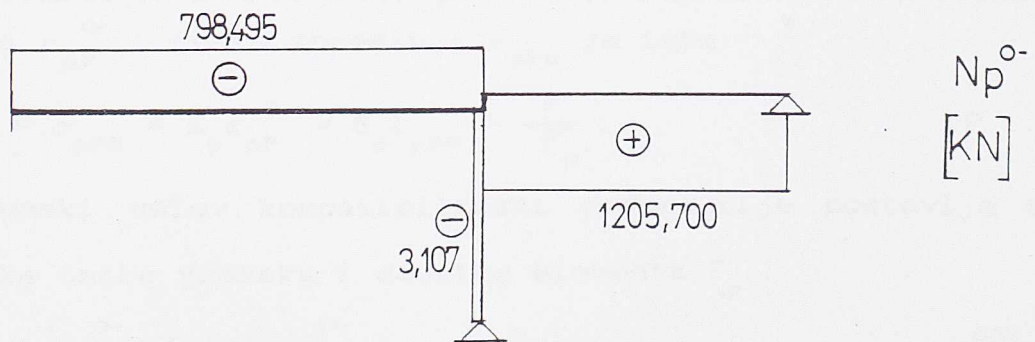
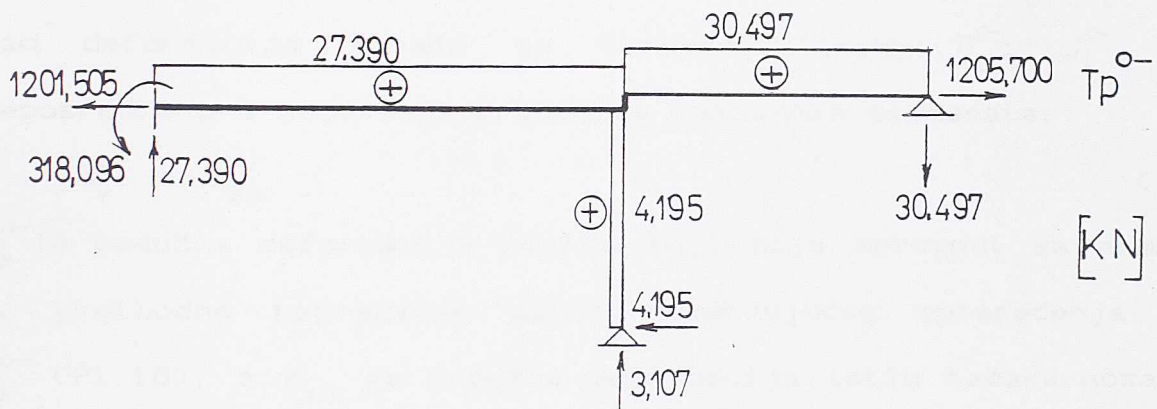
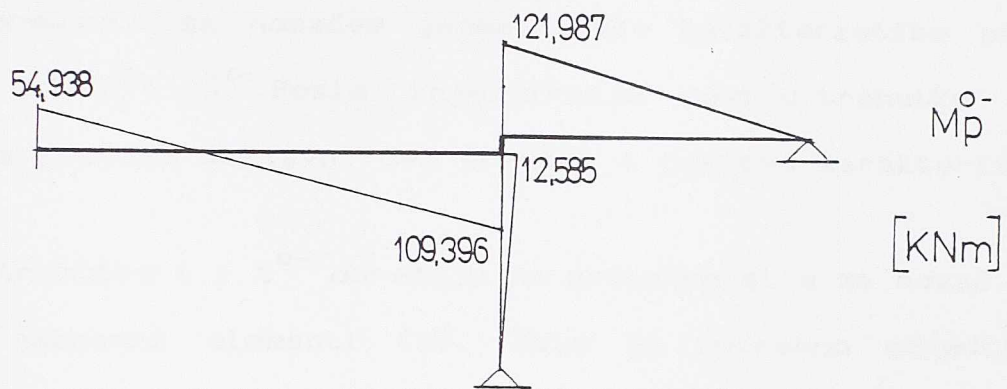
H4 0.798495275138352D+03
T5 0.273890439194747D+02
M6 0.549385898865386D+02
N1 -0.803799823168827D+03
T2 -0.273890439194747D+02
M3 0.109395673630309D+03

STAP 2

N1 -0.120569973475324D+04
T2 0.304966860032177D+02
M3 0.121986744012871D+03
N7 0.120569973475324D+04
T8 -0.304966860032177D+02

STAP 3

T1 0.419500989159241D+01
N2 -0.310764208374305D+01
M3 0.125180269306436D+02
T9 -0.419500989159241D+01
N10 0.310764208374305D+01



sl.P1.7 Dijagrami sila u preseku i reakcije oslonaca usled sile prednaprezanja u trenutku $t^{\circ-}$

Uticaji u nosaču usled prednaprezanja u trenutku $t > t^{0-}$

U trenutku $t = t^{0-}$ kada armatura za prethodno naprezanje još nije spregnuta sa nosačem geometrijske karakteristike poprečnog preseka su F_i^{0-} i J_i^{0-} . Posle injektiranja cevi u trenutku $t > t^{0-}$ armatura postaje sastavni deo preseka i njegove karakteristike su F_i i J_i .

U trenutku $t > t^{0-}$ određuju se presečne sile za nosač kome su dodati naknadni elementi (p). Zato je potrebno odrediti novo zamenjujuće opterećenje kojim se uvodi uticaj prethodnog naprezanja za nosač sa karakteristikama F_i i J_i [23], [24].

U trenutku neposredno posle dodavanja naknadnih elemenata preseccima, deformacija nosača sa karakteristikama F_i i J_i ista je kao deformacija nosača sa karakteristikama F_i^{0-} i J_i^{0-} u t^{0-} neposredno pre dodavanja preseccima naknadnih elemenata.

$$\varepsilon_P^{0-} = \varepsilon_{PO} \quad (P1.26)$$

ε_P^{0-} je podužna deformacija nosača koji nije spregnut sa armaturom za prethodno naprezanje usled zamenjujućeg opterećenja n_P^{0-} i m_P^{0-} (P1.16), a ε_{PO} je podužna deformacija istih tačaka nosača sa kojim je spregnuta armatura usled zamenjujućeg opterećenja n i m_{PO} koje treba odrediti.

Deformacija armature za prethodno naprezanje neposredno pre sprezanja ε_{pP}^{0-} i posle sprezanja ε_{pPO} je ista

$$\sigma_{pP}^{0-} = \sigma_{pPO} = E_p \varepsilon_{pP}^{0-} = E_p \varepsilon_{pPO} = \frac{P}{F_p} \quad (P 1.27)$$

Dopunski uslov kompatibilnosti deformacije postavlja se za zajedničke tačke preseka i dodatog elementa F_p :

$$\varepsilon_{pP} - \varepsilon_{pP}^{0-} = \varepsilon_p - \varepsilon_p^{0-} \quad (P1.28)$$

Kada se izraz (P1.28) pomnoži sa E_p i uvede smena (P1.27) dobija se napon u armaturi za prethodno naprezanje:

$$\sigma_{pP} = \frac{P}{F_p} + E_p (\varepsilon_p - \varepsilon_p^{0-}) \quad (P1.29)$$

Od trenutka kada je ostvareno sprezanje armature sa nosačem

sila prethodnog naprezanja postaje unutrašnja sila .Kako je to jedini uticaj koji prima nosač sile u preseku su $N \equiv 0$ i $M \equiv 0$, pa uslovi ravnoteže između spoljašnjih i unutrašnjih sila u proizvoljnom poprečnom preseku glase :

$$\sum_j \int_j \sigma_{jP} dF + \sum_j \int_p \sigma_{pP} dF = 0 \quad j = n, m, b \quad (P1.30)$$

$$\sum_j \int_j \sigma_{jP} y dF + \sum_j \int_p \sigma_{pP} y dF = 0$$

Uvođenjem odgovarajućih izraza za napone σ_{jP} (2.39) za $j=n,m$ σ_{bP} (2.31) gde je izostavljeno skupljanje i σ_{pP} (P1.29) u koji se uvodi relacija (P1.26) , dobija se traženo zamenjujuće opterećenje za nosač sa geometrijskim karakteristikama preseka F_i i J_i :

$$n_{PO} = -P + \int_p E_p \varepsilon_p^{0-} dF \quad (P1.31)$$

$$m_{PO} = -P y_p + \int_p E_p \varepsilon_p^{0-} y dF$$

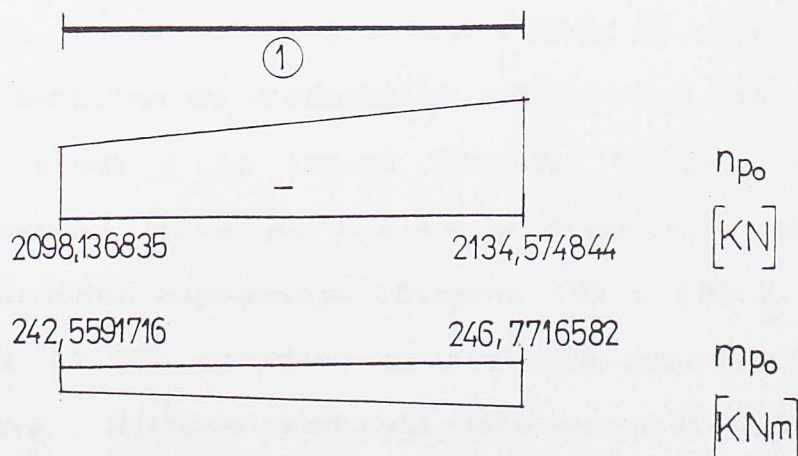
Odnosno, posle naznačenih integracija zamenjujuće opterećenje u trenutku $t=t_0$ je oblika :

$$n_{PO} = -P + \frac{F_{pr}}{F_i^{0-}} N_P^{0-} + \frac{F_{pr} y_p^{0-}}{J_i^{0-}} M_P^{0-} \quad (P1.32)$$

$$m_{PO} = n_{PO} y_p$$

i ono predstavlja ravnotežno opterećenje normalnom silom n_{PO} i momentom savijanja m_{PO} u odnosu na težište T_i .

Na osnovu izraza (P1.32) određeno je zamenjujuće opterećenje n_{PO} i m_{PO} za štap (1) i dijagrami su dati na slici P1.8.



sl. P1.8

Vektori spoljašnjeg čvornog opterećenja $[P]$ i ekvivalentnog čvornog opterećenja $[Q]$ štapa (1) su :

$$[P] = \begin{bmatrix} P_n \\ \dots \\ P_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2134.5748440 & 1 \\ 246.7716582 & 3 \\ 2098.1368350 & 4 \\ -242.5591716 & 5 \end{bmatrix} \quad (P1.33)$$

$$[Q]_1 = \begin{bmatrix} Q_n \\ \dots \\ Q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.2190045 & 1 \\ -0.7020811 & 2 \\ 0 & 3 \\ 18.2190045 & 4 \\ 0.7020811 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (P1.34)$$

Vektor kombinovanog čvornog opterećenja $[S]$ u pravcu nepoznatih parametara pomeranja je :

$$[S_n] = [P_n] + [Q_n] = \begin{bmatrix} -2116.35584 & 1 \\ -0.7020711 & 2 \\ 246.7716582 & 3 \end{bmatrix} \quad (P1.35)$$

Uslovne jednačine iz kojih se određuju nepoznata pomeranja na osnovu (7.26) su :

$$[K_{nn}][q_n] = [S_n]$$

Matrica $[K_{nn}]$ data je izrazom (P1.11) , vektor $[q_n]$ izrazom (P1.2) i vektor $[S_n]$ izrazom (P1.35).

Dobijene vrednosti za parametre pomeranja u trenutku $t = t_0$ prikazane su na narednoj strani (treba ih podeliti sa E_u). Ove veličine identične su vrednostima dobijenim u trenutku $t=t_0^-$ što neposredno sledi i iz izraza (P1.26). To isto važi i za reakcije oslonaca i sile na krajevima štapova u kojima nema armature za predodno naprezanje (štapovi (2) i (3)). Na osnovu izraza (7.29) i (7.30) određene su reakcije oslonaca i sile na krajevima štapova . Njihove vrednosti date su na sledećoj strani , a dijagrami sila u presecima dati su na slici P1. 9.

NEPOZNATA POMERANJA USLED P , T=T0

U -0.634578807962549D+05
V -0.463664549240067D+03
0.262196231105465D+05

REAKCIJE OSOLONACA

H4 -0.120150472518733D+04
V5 0.273890439881386D+02
M6 0.298906038077257D+03
H7 0.120569973512884D+04
V8 -0.304966860809693D+02
H9 -0.419500994151621D+01
V10 0.310764209283070D+01

SILE NA KRAJEVIMA STAPOVA

STAP 1

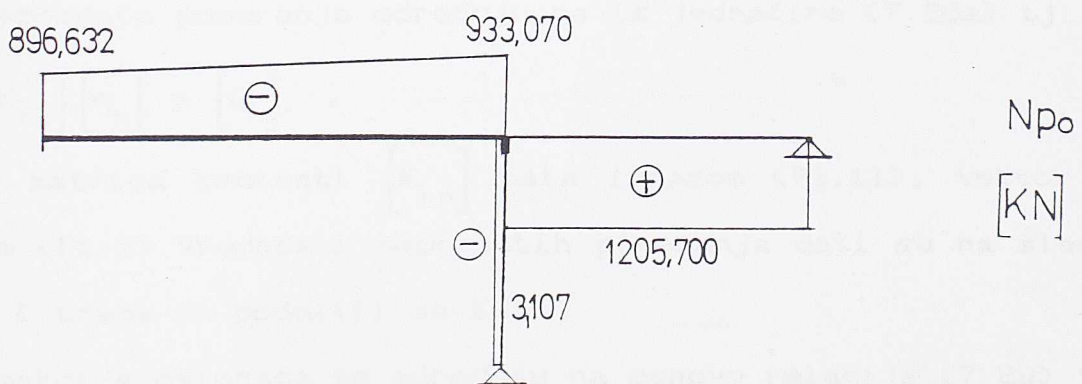
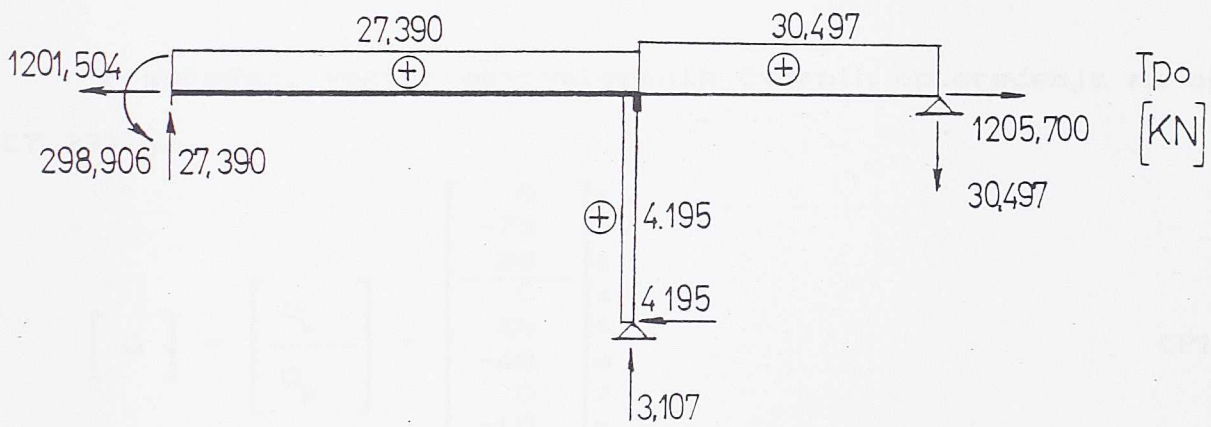
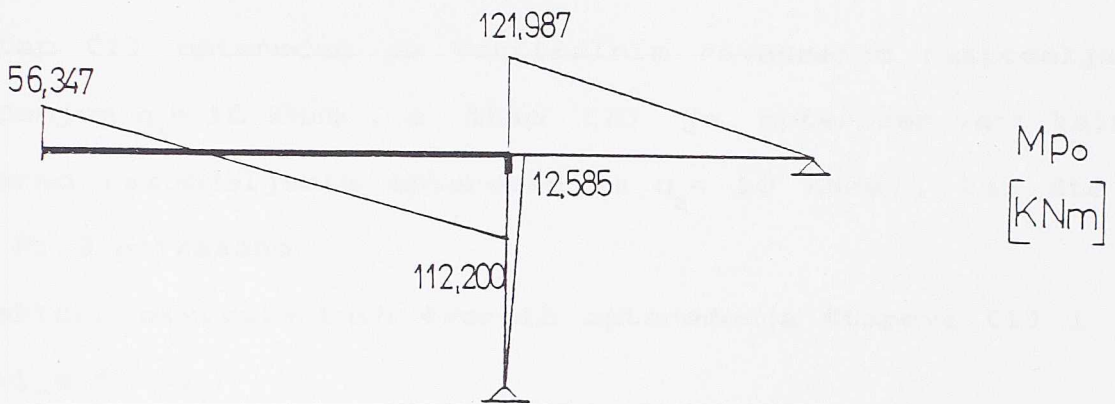
H4 0.896632110312674D+03
T5 0.273890439881386D+02
M6 0.563468664772572D+02
N1 -0.933070119312674D+03
T2 -0.273890439881386D+02
M3 0.112199884051574D+03

STAP 2

N1 -0.120569973512884D+04
T2 0.304966860809693D+02
M3 0.121986744323877D+03
N7 0.120569973512884D+04
T8 -0.304966860809693D+02

STAP 3

T1 0.419500994151621D+01
N2 -0.310764209283070D+01
M3 0.125850298245486D+02
T9 -0.419500994151621D+01
N10 0.310764209283070D+01



sl.P1.9 Dijagrami sila u preseku i reakcije oslonaca
usled sile prerdnaprezanja u trenutku t_0

Uticaj B: Stalno opterećenje

Štap (1) opterećen je vertikalnim ravnomerno raspodeljenim opterećenjem $q_1 = 16 \text{ KN/m}$, a štap (2) je opterećen vertikalnim ravnomerno raspodeljenim opterećenjem $q_2 = 10 \text{ KN/m}$, kao što je slikom P1.3 prikazano.

Vektori ekvivalentnih čvornih opterećenja štapova (1) i (2) (poglavlje 5) su :

$$[Q]_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -48 \\ -48 \\ 0 \\ -48 \\ 48 \end{bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}, \quad [Q]_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -25 \\ -20 \\ 0 \\ -15 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} \quad (\text{P1.36})$$

Preuređeni vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja na osnovu (7.23) je :

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_p \\ Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -73 \\ 28 \\ 0 \\ 48 \\ -48 \\ 0 \\ -15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \quad (\text{P1.37})$$

Nepoznata pomeranja određuju se iz jednačine (7.26a) tj :

$$[K_{nn}][q_n] = [Q_n],$$

gde je matrica krutosti $[K_{nn}]$ data izrazom (P1.11), vektor $[q_n]$ izrazom (P1.2). Vrednosti nepoznatih pomeranja dati su na sledećoj strani (treba ih podeliti sa Eu).

Reakcije oslonaca se određuju na osnovu relacije (7.29) tj :

$$[R_p] = [K_{pn}][q_n] - [Q_p],$$

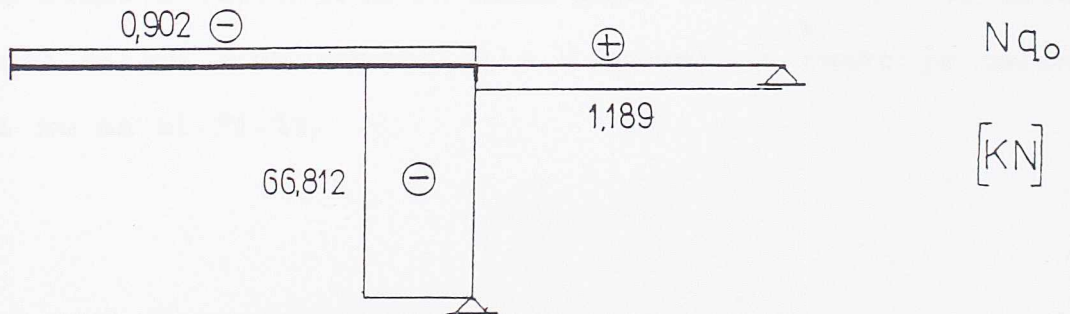
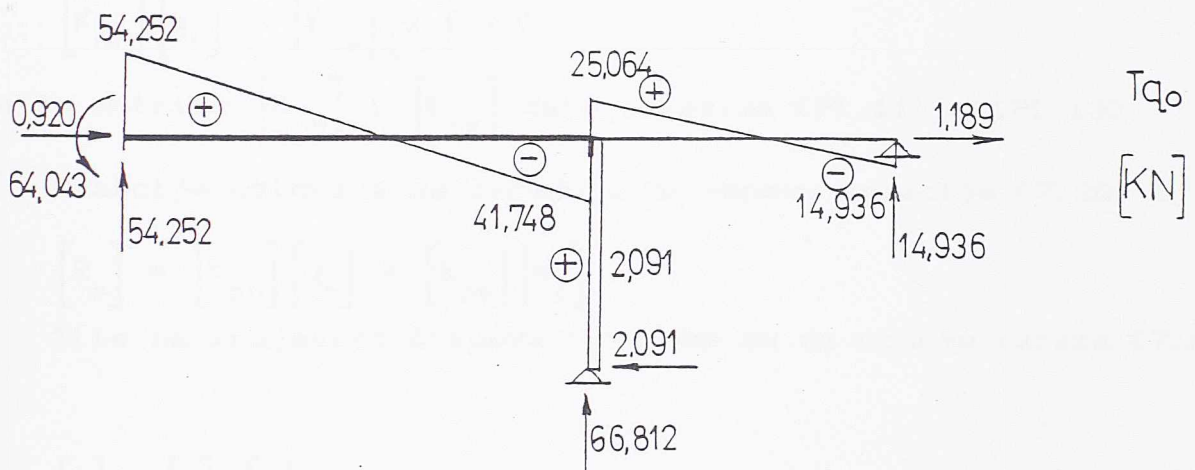
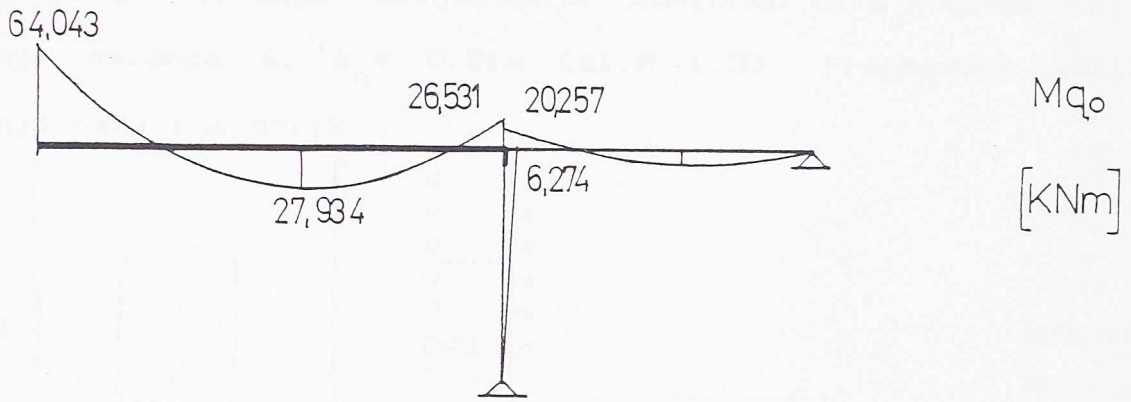
gde je matrica $[K_{pn}]$ data izrazom (P1.12).

Na osnovu relacije (7.30) tj. :

$$[R]_j = [K]_j [q]_j - [Q]_j, \quad j = 1, 2, 3$$

određene su sile na krajevima štapova .

Vrednosti reakcija oslonaca i sila na krajevima štapova usled stalnog opterećenja date su na sledećoj strani, a njihovi dijagrami dati su na slici P1.10.



sl. P1.10 Dijagrami sila u preseku i reakcije oslonaca
usled stalnog opterećenja u trenutku t_0

Uticaj C: Zadato pomerane oslonaca

Zadato je obrtanje uklještenja (oslonac 2) $c_u = 0.002$ rad i spuštanje oslonca 4, $c_o = 0.01$ m (sl.P 1.3). Preuređeni vektor pomeranja tada ima oblik :

$$\begin{bmatrix} q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_n \\ \dots \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & 1 \\ v & 2 \\ \phi & 3 \\ \dots & \dots \\ 0 & 4 \\ 0 & 5 \\ -0.002 & 6 \\ 0 & 7 \\ 0 & 8 \\ 0 & 9 \\ -0.01 & 10 \end{bmatrix} \quad (P1.38)$$

Nepoznata pomeranja određuju se iz jednačine (7.26a) tj :

$$\begin{bmatrix} K_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_p \end{bmatrix} = 0 \quad ,$$

gde su matrice $\begin{bmatrix} K_{nn} \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} K_{np} \end{bmatrix}$ date izrazima (P1.11) i (P1.13).

Reakcije oslonaca se određuju na osnovu relacije (7.29) tj. :

$$\begin{bmatrix} R_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_p \end{bmatrix} .$$

Sile na krajevima štapova određene su na osnovu izraza (7.30)

tj :

$$\begin{bmatrix} R \end{bmatrix}_j = \begin{bmatrix} K \end{bmatrix}_j \begin{bmatrix} q \end{bmatrix}_j \quad , \quad j=1,2,3 \quad .$$

Vrednosti nepoznatih pomeranja ,reakcija oslonaca i sila na krajevima štapova usled zadatih pomeranja oslonaca u $t=t_0$ date su na sledećoj strani, a dijagrami sila u preseku i reakcije oslonaca prikazani su na sl.P1.11.

NEPOZNATA POMERANJA USLED C , T=T0

U -0.112804959005862D-04
V -0.941580913227144D-02
0.459071960284556D-03

REAKCIJE OSOLONACA

H4 0.325254298466902D+02
V5 0.340336585774616D+03
M6 0.497178469455191D+03
H7 0.428658844222276D+02
V8 0.442753746999815D+03
H9 -0.753913142689178D+02
V10 -0.783090332774431D+03

SILE NA KRAJEVIMA STAPOVA

STAP 1

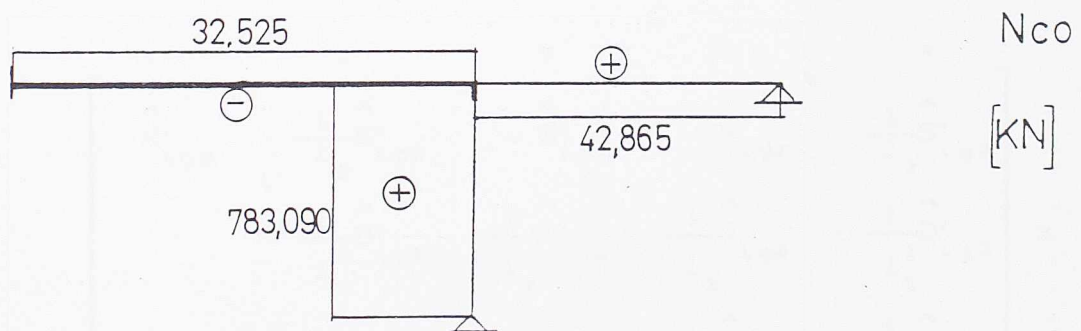
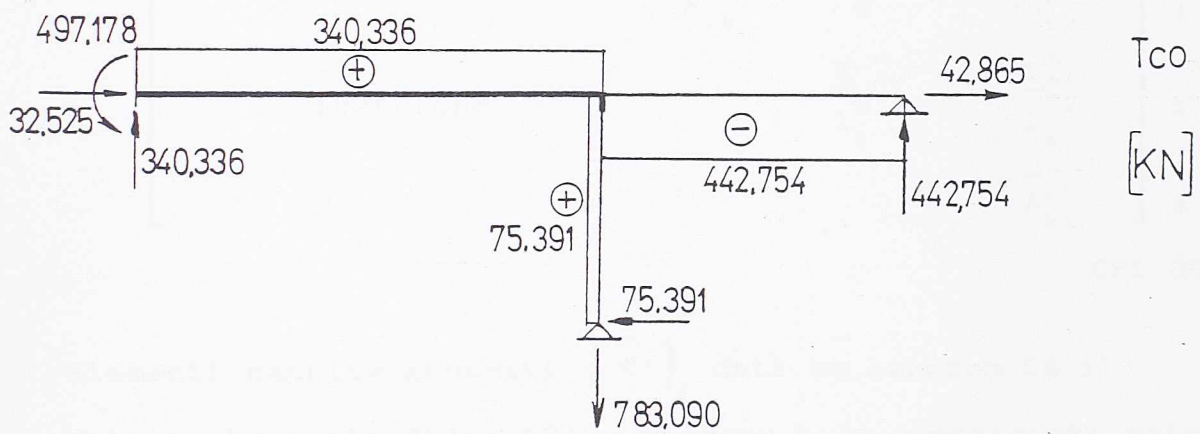
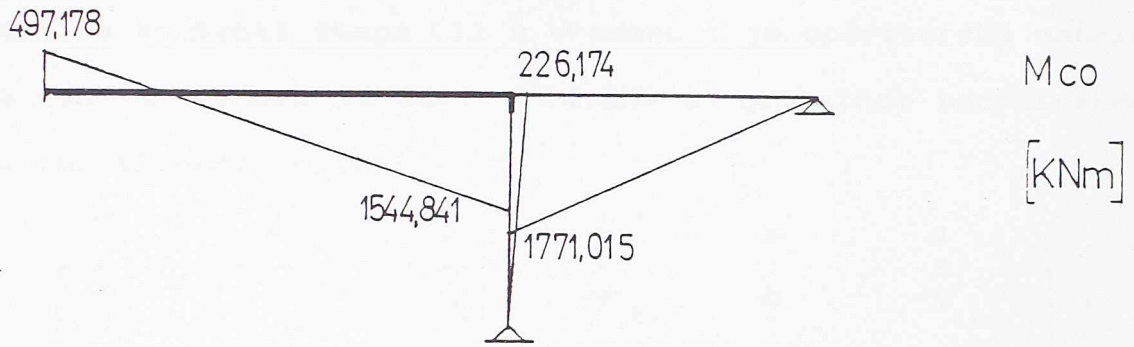
H4 0.325254298466902D+02
T5 0.340336585774616D+03
M6 0.497178469455191D+03
N1 -0.325254298466902D+02
T2 -0.340336585774616D+03
M3 0.154484104519251D+04

STAP 2

N1 -0.428658844222276D+02
T2 -0.442753746999815D+03
M3 -0.177101498799926D+04
N7 0.428658844222276D+02
T8 0.442753746999815D+03

STAP 3

T1 0.753913142689178D+02
N2 0.783090332774431D+03
M3 0.226173942806753D+03
T9 -0.753913142689178D+02
N10 -0.783090332774431D+03



sl. P1.11 Dijagrami sila u preseku i reakcije oslonaca
usled zadatih pomeranja oslonaca u trenutku t_0

Elementi matrice krutosti $[\hat{K}']_2$ dati su izrazima (4.45) i (4.51).

Matrica krutosti štapa (3) u vremenu t data je izrazom (P1.8) s tim što će njeni elementi, dati izrazom (P1.9), biti na osnovu izraza (A1.7) pomnoženi jediničnim operatorom $\hat{1}'$.

$$[\hat{K}']_3 = [K]_3 \hat{1}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 & 10 \\ \frac{1}{l_3^2} D_{iga} \hat{1}' & 0 & \frac{1}{l_3} D_{iga} \hat{1}' & -\frac{1}{l_3^2} D_{iga} \hat{1}' & 0 \\ & N_{iga} \hat{1}' & 0 & 0 & -N_{iga} \hat{1}' \\ & & D_{iga} \hat{1}' & -\frac{1}{l_3} D_{iga} \hat{1}' & 0 \\ & & & \frac{1}{l_3^2} D_{iga} \hat{1}' & 0 \\ & & & & N_{iga} \hat{1}' \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

simetrično

(P1.141)

Preuređena matrica krutosti sistema je operatorska matrica tj. na osnovu (7.21) je oblika :

$$[\hat{K}'_{pr}] = \begin{bmatrix} \hat{K}'_{nn} & \hat{K}'_{np} \\ \hat{K}'_{pn} & \hat{K}'_{pp} \end{bmatrix}, \quad (P1.42)$$

gde je :

$$[\hat{K}'_{nn}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \hat{N}'_{ik} + \hat{N}'_{igz} + \frac{1}{l_3^2} D_{iga} \hat{1}' & -\frac{1}{l_2} \hat{S}'_{igz} & -\hat{S}'_{ik} - \hat{S}'_{igz} + \frac{1}{l_3} D_{iga} \hat{1}' \\ \frac{2}{l_1} \hat{C}'_{ik} + \frac{1}{l_2} \hat{D}'_{igz} + N_{iga} \hat{1}' & \frac{-1}{l_1} \hat{C}'_{ik} + \frac{1}{l_2} \hat{D}'_{igz} & \hat{A}'_{ik} + \hat{D}'_{igz} + D_{iga} \hat{1}' \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

simetrično

(P1.43)

$$\left[\hat{K}'_{nn} \right] \left[q_n \right] = \left[S_n^* \right] \quad (P1.48)$$

po nepoznatim pmeranjima $\left[q_n \right]$ predstavlja sistem integralnih jednačina. Vektor $\left[S_n^* \right]$ je vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja i biće posebno prikazan za sve tipove opterećenja koji su razmatrani u vremenu $t=t_0$, a u vremenu t još i za slučaj skupljanja.

U ovom radu usvojiće se funkcija puzanja teorije starenja, a moduo elastičnosti betona $E_b = \text{const}$.

Vitni (Whitney) [44] je predložio idealizovane krive puzanja betona čija se matematička formulacija može dati u obliku :

$$F^*(t, \tau) = \frac{E_{bo}}{E_b(\tau)} + F(t) - F(\tau) \quad , \quad \text{za } t \geq \tau \quad (P1.49)$$

Umesto argumenta t i τ u teoriji starenja uvode se argumenti φ (efektivno vreme) i f definisani na način :

$$\varphi = F(t) \quad , \quad f = F(\tau) \quad , \quad f_0 = F(t_0) = 0 \quad (P1.50)$$

Tada je :

$$F^*(\varphi, f) = \frac{E_{bo}}{E_b(f)} + (\varphi - f) \quad (P1.51)$$

Za $E_b = \text{const}$:

$$F^*(\varphi, f) = 1^* + (\varphi - f) \quad (P1.52)$$

Uvođenjem funkcije puzanja (P1.52) u integralnu jednačinu (2.35), uz konstantan moduo elastičnosti dobija se kao njeno rešenje funkcija relaksacije betona teorije starenja :

$$R^*(\varphi, f) = e^{-(\varphi-f)} \quad (P1.53)$$

Na osnovu izraza (2.33) je :

$$\psi^*(\varphi, f) \equiv \psi^*(\varphi-f) = 1^* - e^{-(\varphi-f)} \quad (P1.54)$$

odnosno :

$$\psi'(\varphi, f) \equiv \psi'(\varphi - f) = e^{-(\varphi - f)}, \quad (\text{P1.55})$$

a osnovne funkcije ψ_h^* i njihovi izvodi ψ_h' [23] su :

$$\psi_h^*(\varphi, f) \equiv \psi_h^*(\varphi - f) = \frac{1}{\gamma_h'} \left[1^* - e^{-\gamma_h'(\varphi - f)} \right], \quad \text{a)}$$

$$\psi_h'(\varphi, f) \equiv \psi_h'(\varphi - f) = e^{-\gamma_h'(\varphi - f)}. \quad \text{b)}$$

(P1.56)

Pri konstantnom modulu elastičnosti betona funkcije puzanja i relaksacije teorije starenja, odgovarajuće osnovne funkcije i njihovi izvodi zavise od razlike argumenata $\varphi - f$. To omogućava da se uticaji u spregnutom nosaču po teoriji starenja, u odnosu na efektivno vreme φ , kao argument, određuju primenom Laplasovih transformacija [35]. Pri tome, kada $t \Rightarrow \infty$, odgovarajuće efektivno vreme ima konačnu vrednost, tj. ako je $\tau = \tau^0$ tada iz izraza (P1.52) sledi :

$$F^*(t, \tau^0) = 1^* + \varphi$$

$$F^{*\infty}(\tau^0) = 1^* + \varphi \quad (t \Rightarrow \infty, \tau^0) = 1^* + \varphi_n \quad (\text{P1.57})$$

jer važi (P1.50).

Veličina φ_n naziva se koeficijent puzanja teorije starenja.

Budući da u teoriji starenja φ predstavlja argument uticaji u nosaču u proizvoljnom vremenu t nezavisni su od analitičkog oblika funkcije $\varphi = F(t)$. Oni zavise samo od vrednosti funkcije $F(t)$ u posmatranom vremenu t .

Poznato je da funkcija puzanja teorije starenja određuje model kod koga je celokupna deformacija puzanja nepovratna i da predstavlja graničnu teoriju koja daje rezultate na strani sigurnosti. Otuda je ovde usvojena funkcija puzanja teorije starenja i za nju primenom Laplasovih transformacija, bez matematičkih zanemarenja, određene su tačne vrednosti uticaja u nosaču.

Na sistem uslovnih integralnih jednačina (P1.48) primeniće se Laplasova transformacija. Uslovne jednačine su integralne jednačine konvolucionog tipa . Slike ovih jednačina su :

$$\left[\bar{K}'_{nn}(p) \right] \left[\bar{q}_n(p) \right] = \left[\bar{S}_n^*(p) \right] \quad (P1.58)$$

čime je sistem preveden u sistem algebarskih jednačina , tj.

$$\begin{bmatrix} \bar{K}'_1(p) & \bar{K}'_2(p) & \bar{K}'_3(p) \\ & \bar{K}'_4(p) & \bar{K}'_5(p) \\ & & \bar{K}'_6(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}(p) \\ \bar{v}(p) \\ \bar{\varphi}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{H1}^*(p) \\ \bar{S}_{H2}^*(p) \\ \bar{S}_{H3}^*(p) \end{bmatrix} \quad (P1.59)$$

H=P,Q,C,S

i rešiće se primenom Kramerovog pravila , pri tome će slike nepoznatih pomeranja biti :

$$\bar{u}(p) = \frac{\bar{D}_{uH}(p)}{\bar{D}(p)}$$

$$\bar{v}(p) = \frac{\bar{D}_{vH}(p)}{\bar{D}(p)}$$

H=P,Q,C,S

(P1.60)

$$\bar{\varphi}(p) = \frac{\bar{D}_{\varphi H}(p)}{\bar{D}(p)}$$

Veličine $\bar{D}_{uH}(p)$, $\bar{D}_{vH}(p)$, $\bar{D}_{\varphi H}(p)$ i $\bar{D}(p)$ predstavljaju polinome pri čemu je polinom $\bar{D}(p)$ višeg stepena od ostalih polinoma i ima α_k ($k=1,2,\dots,7$) negativnih, različitih i realnih nula u intervalu od -1.0 do 0.0. Korišćenjem izraza (D1.12) originali nepoznatih pomeranja su :

$$L[\bar{u}(p)]^{-1} = \sum_{k=1}^7 \frac{D_{uH}(\alpha_k)}{D'(\alpha_k)} e^{\alpha_k \varphi_n}$$

$$L[\bar{v}(p)]^{-1} = \sum_{k=1}^7 \frac{D_{vH}(\alpha_k)}{D'(\alpha_k)} e^{\alpha_k \varphi_n}$$

(P1.62)

$$L[\bar{\varphi}(p)]^{-1} = \sum_{k=1}^7 \frac{D_{\varphi H}(\alpha_k)}{D'(\alpha_k)} e^{\alpha_k \varphi_n}$$

Navešće se slike funkcija koje će se koristiti u ovom radu .

Na osnovu relacije (D1.1) slike osnovnih funkcija i njihovih izvoda (P1.56) su :

$$\bar{\psi}_h^*(p) = \frac{1}{p(p+\gamma'_h)} , \quad \text{a)} \quad \text{(P1.63)}$$

$$\bar{\psi}'_h(p) = \frac{1}{p+\gamma'_h} , \quad \text{b)}$$

a slike funkcija ψ^* i ψ' (P1.54) i (P1.55) su :

$$\bar{\psi}^*(p) = \frac{1}{p(p+1)} , \quad \text{a)} \quad \text{(P1.64)}$$

$$\bar{\psi}'(p) = \frac{1}{p+1} . \quad \text{b)}$$

Kriste se i sledeće slike :

$$\bar{1}^*(p) = \frac{1}{p} \quad \text{i} \quad \bar{1}'(p) = 1 . \quad \text{(P1.65)}$$

Iz relacije (2.32) i (P1.64b) je :

$$\bar{R}'(p) = \frac{p}{p+1} , \quad \text{(P1.66)}$$

a na osnovu izraza (2.43) i (P1.66) je :

$$\bar{R}'_{11}(p) = \frac{p + \gamma'_{11}}{p + 1}$$

$$\bar{R}'_{22}(p) = \frac{p + \gamma'_{22}}{p + 1} \quad \text{(P1.67)}$$

$$\bar{R}'_{12}(p) = \frac{-\gamma_{12}}{p + 1} .$$

Iz relacije (2.49) i (P1.63) je :

$$\bar{F}'_h(p) = \frac{p + 1}{p + \gamma'_h} \quad \text{a)} \quad \text{(P1.68)}$$

$h=1,2$

$$\bar{F}^*_h(p) = \frac{p + 1}{p(p + \gamma'_h)} \quad \text{b)}$$

a unošenjem ovog izraza u (2.53) dobijaju se sledeće slike funkcija :

$$\bar{F}_{11}^*(p) = \frac{(p+1)(p+\gamma'_{22})}{p(p+\gamma'_1)(p+\gamma'_2)}$$

$$\bar{F}_{22}^*(p) = \frac{(p+1)(p+\gamma'_{11})}{p(p+\gamma'_1)(p+\gamma'_2)}$$

(P1.69)

$$\bar{F}_{12}^*(p) = \frac{\gamma_{12}(p+1)}{p(p+\gamma'_1)(p+\gamma'_2)}$$

Slično se dolazi i do sledeće slike :

$$\bar{I}'_{22}(p) = \frac{(p+\gamma'_1)(p+\gamma'_2)}{(p+1)(p+\gamma'_{11})}$$

(P1.70)

Slika funkcije C' može da se napiše neposredno iz izraza (4.39) korišćenjem (P1.68a) :

$$\bar{C}'(p) = \frac{K(p)}{12(p+\gamma'_1)(p+\gamma'_2)}$$

(P1.71)

gde je

$$K(p) = 4(p+\gamma'_1)(p+\gamma'_2) + \gamma_{12}^2$$

(P1.72)

Elementi matrice $[\bar{K}'_{nn}(p)]$ (P1.59) na osnovu (P1.43) su

oblika :

$$\bar{K}'_1(p) = \bar{N}'_{ik}(p) + \bar{N}'_{ig2}(p) + \frac{1}{l_3^2} D_{ig3}$$

$$\bar{K}'_2(p) = -\frac{1}{l_2} \bar{S}'_{ig2}(p)$$

$$\bar{K}'_3(p) = -\bar{S}'_{ik}(p) - \bar{S}'_{ig2}(p) + \frac{1}{l_3} D_{ig3}$$

(P1.73)

$$\bar{K}'_4(p) = \frac{2}{l_1^2} \bar{C}'_{ik}(p) + \frac{1}{l_2^2} \bar{D}'_{ig2}(p) + N_{ig3}$$

$$\bar{K}'_5(p) = -\frac{1}{l_1} \bar{C}'_{ik}(p) + \frac{1}{l_2} \bar{D}'_{ig2}(p)$$

$$\bar{K}'_6(p) = \bar{A}'_{ik}(p) + \bar{D}'_{ig2}(p) + D_{ig3}$$

gde je na osnovu prethodno uvedenih slika i izraza (4.17) ,(4.45):

$$\bar{N}'_{ik}(p) = \frac{E_u F_{i1}}{l_1} \frac{p + \gamma'_{11}{}^{(1)}}{p + 1}$$

$$\bar{A}'_{ik}(p) = \frac{E_u J_{i1}}{l_1} \frac{4(p + \gamma'_{11}{}^{(1)})(p + \gamma'_{22}{}^{(1)}) + \gamma_{12}{}^{2(1)}}{(p + 1)(p + \gamma'_{11}{}^{(1)})}$$

$$\bar{B}'_{ik}(p) = \frac{E_u J_{i1}}{l_1} \frac{2(p + \gamma'_{11}{}^{(1)})(p + \gamma'_{22}{}^{(1)}) - \gamma_{12}{}^{2(1)}}{(p + 1)(p + \gamma'_{11}{}^{(1)})}$$

$$\bar{S}'_{ik}(p) = \frac{E_u S_{i1}}{l_1} \frac{\gamma_{12}{}^{(1)}}{(p + 1)}$$

$$\bar{N}'_{ig2}(p) = \frac{4E_u F_{i2}}{l_2} \frac{(p + \gamma'_{11}{}^{(2)})(p + \gamma'_{22}{}^{(2)})(p + \gamma'_{11}{}^{(2)})}{(p + 1)K(p)^{(2)}}$$

$$\bar{D}'_{ig2}(p) = \frac{12E_u J_{i2}}{l_2} \frac{(p + \gamma'_{11}{}^{(2)})(p + \gamma'_{22}{}^{(2)})(p + \gamma'_{22}{}^{(2)})}{(p + 1)K(p)^{(2)}}$$

$$\bar{S}'_{ig2}(p) = \frac{6E_u S_{i2}}{l_2} \frac{\gamma_{12}{}^{(2)}(p + \gamma'_{11}{}^{(2)})(p + \gamma'_{22}{}^{(2)})}{(p + 1)K(p)^{(2)}}$$

(P1.74)

Veličine N_{ig3} i D_{ig3} date su izrazom (P1.9).

Determinanta matrice $\left[\bar{K}'_{nn}(p) \right]$ prikazuje se u sledećem obliku:

$$\bar{D}'_T(p) = \frac{DP(p)}{(p + 1)^3 (p + \gamma'_{11}{}^{(1)}) K(p)^{(2)}} \quad (P1.75)$$

Polinom $DP(p)$ je polinom šestog stepena. Koeficijenti polinoma određeni su u okviru napisanog programa. Grafik i koreni polinoma $DP(p)$ određeni su u programu MCD i priloženi su na narednoj strani.

1

resavanje korena polinoma sestog stepena
primer ramovskog nosaca za tacnu metodu deformacija

$$B1 := 0.334020315255880 \cdot 10^{-6}$$

$$B2 := 0.428751965699652 \cdot 10^{-5}$$

$$B3 := 0.214242961706025 \cdot 10^{-4}$$

$$B4 := 0.530322034187578 \cdot 10^{-4}$$

$$B5 := 0.685572565851211 \cdot 10^{-4}$$

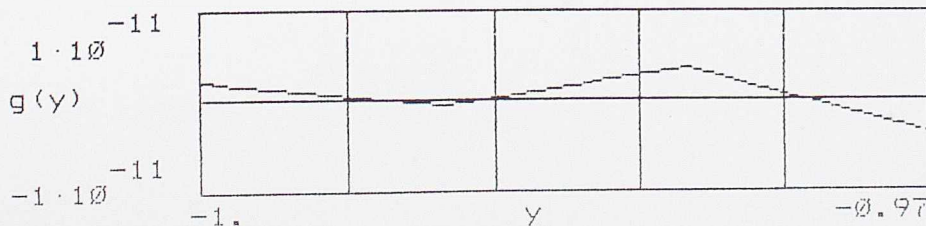
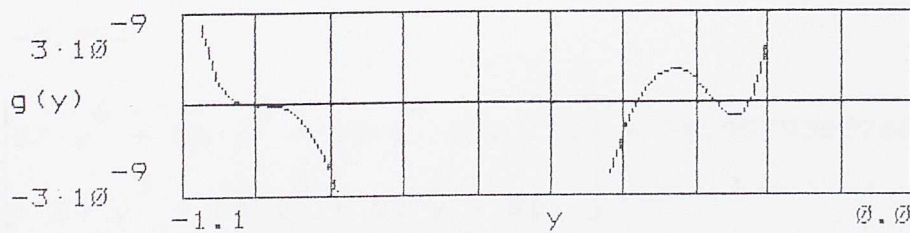
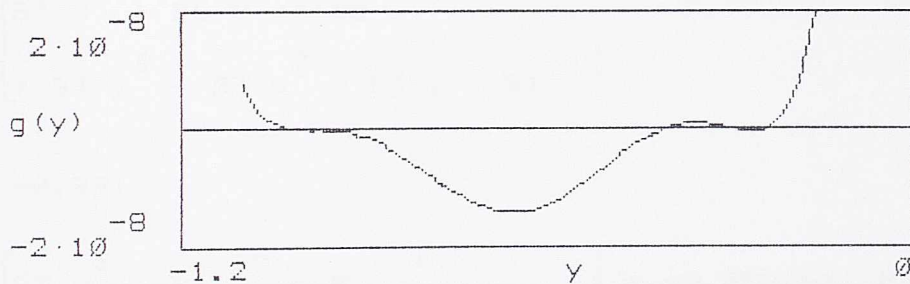
$$B6 := 0.442829676305590 \cdot 10^{-4}$$

$$B7 := 0.112871198709251 \cdot 10^{-4}$$

$$TOL := 10^{-16}$$

$$y := -1.1, -1.09 \dots 0$$

$$g(y) := B7 \cdot y^6 + B6 \cdot y^5 + B5 \cdot y^4 + B4 \cdot y^3 + B3 \cdot y^2 + B2 \cdot y + B1$$



y := -0.243

$$\text{root} \left[\begin{array}{l} B7 \cdot y^6 + B6 \cdot y^5 + B5 \cdot y^4 \dots , y \\ + B4 \cdot y^3 + B3 \cdot y^2 + B2 \cdot y + B1 \end{array} \right] = -0.245826039047535$$

y := -0.332

$$\text{root} \left[\begin{array}{l} B7 \cdot y^6 + B6 \cdot y^5 + B5 \cdot y^4 \dots , y \\ + B4 \cdot y^3 + B3 \cdot y^2 + B2 \cdot y + B1 \end{array} \right] = -0.299318434101839$$

y := -0.416

$$\text{root} \left[\begin{array}{l} B7 \cdot y^6 + B6 \cdot y^5 + B5 \cdot y^4 \dots , y \\ + B4 \cdot y^3 + B3 \cdot y^2 + B2 \cdot y + B1 \end{array} \right] = -0.419239030755668$$

y := -0.89

$$\text{root} \left[\begin{array}{l} B7 \cdot y^6 + B6 \cdot y^5 + B5 \cdot y^4 \dots , y \\ + B4 \cdot y^3 + B3 \cdot y^2 + B2 \cdot y + B1 \end{array} \right] = -0.972238367532269$$

y := -0.981

$$\text{root} \left[\begin{array}{l} B7 \cdot y^6 + B6 \cdot y^5 + B5 \cdot y^4 \dots , y \\ + B4 \cdot y^3 + B3 \cdot y^2 + B2 \cdot y + B1 \end{array} \right] = -0.988766168704974$$

y := -0.994

$$\text{root} \left[\begin{array}{l} B7 \cdot y^6 + B6 \cdot y^5 + B5 \cdot y^4 \dots , y \\ + B4 \cdot y^3 + B3 \cdot y^2 + B2 \cdot y + B1 \end{array} \right] = -0.997930570642831$$

Uticaj A : Prethodno naprezanje silom P = 2000 KN

Uvodi se osobina relaksacije čelika za prethodno naprezanje. Funkcija relaksacije čelika $R_p^* = R_p^*(t, t_0)$ linearno zavisi od funkcije relaksacije betona R^* kao što je dato izrazom (2.37) tj.:

$$R_p^* = \hat{R}'_p 1^* = (1 - \rho) 1^* + \rho R^*. \quad (P1.76)$$

Za određeni interval t, t_0 i početni napon u čeliku σ_{p0} , usvaja se konstantna vrednost ρ . Ona se određuje iz izraza (2.38) :

$$\rho = \frac{\zeta_p(t-t_0)}{1^* - R^*(t, t_0)}$$

gde je $\zeta_p = \zeta_p(t-t_0)$ relaksacija čelika za prethodno naprezanje i u ovom primeru je 8 % . Koristeći izraz (P1.53) :

$$\rho = \frac{\zeta_p}{1 - e^{-\rho n}} = 0.08249101274 . \quad (P1.77)$$

U trenutku t_0 određeno je zamenjujuće ravnotežno opterećenje n_{p0} i m_{p0} (sl.P1.8). U trenutku t sile u preseku linearno zavise od funkcije relaksacije čelika za prethodno naprezanje [26] R_p^* :

$$\begin{aligned} N_P &= R_p^* n_{p0} \\ M_P &= R_p^* m_{p0} \end{aligned} \quad (P1.78)$$

Vektor čvornih sila je :

$$[P^*] = \begin{bmatrix} P_n^* \\ \dots \\ P_p^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2134,5748440 R_p^* \\ 246,7716582 R_p^* \\ \dots \\ 2098,1368350 R_p^* \\ -242,5591716 R_p^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -cR_p^* \\ dR_p^* \\ \dots \\ eR_p^* \\ -fR_p^* \end{bmatrix} \quad (1.79)$$

Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja štapa (1) usled ravnotežnog opterećenja (P1.77) (sl.P1.8) je određen na osnovu izraza (5.9), (5.10) i (5.11) , pa je :

$$\begin{bmatrix} Q_1^* \\ \vdots \\ Q_p^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{l_1} R_p^* + \frac{b}{l_1 S_{i1}} \widehat{I}_{22}^{(1)} \widehat{F}_{12}^{(1)} R_p^* \\ \vdots \\ -\frac{a}{l_1} R_p^* - \frac{b}{l_1 S_{i1}} \widehat{I}_{22}^{(1)} \widehat{F}_{12}^{(1)} R_p^* \end{bmatrix} \quad (P1.80)$$

gde je :

$$\begin{aligned}
 b &= c - e \\
 a &= d - f
 \end{aligned} \quad (P1.81)$$

Vektor kombinovanih čvornih opterećenja u pravcu nepoznatih pomeranja $[S_n]$ je tada :

$$[S_n] = [P_n] + [Q_n] = \begin{bmatrix} (-c + \frac{b}{2}) R_p^* \\ -\frac{a}{l_1} + \frac{b}{l_1 S_{i1}} \widehat{I}_{22}^{(1)} \widehat{F}_{12}^{(1)} R_p^* \\ (d - \frac{b}{2 S_{i1}} \widehat{I}_{22}^{(1)} \widehat{F}_{12}^{(1)}) R_p^* \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} = \begin{bmatrix} S_{P1}^* \\ S_{P2}^* \\ S_{P3}^* \end{bmatrix} \quad (P1.82)$$

Slika vektora $\bar{S}_n^*(p)$ (P1.58) i (P1.59) određuje se korišćenjem izraza (P1.68), (P1.69) i slike funkcije $\bar{R}_p^*(p)$ koja se dobija iz (P1.76) i (P1.66)

$$\bar{R}_p^*(p) = \frac{(1-p)+p}{p(p+1)} \quad (P1.83)$$

pa je :

$$\bar{S}_{p1}^*(p) = -\frac{1}{2} (c+e) \frac{p+(1-p)}{p(p+1)}$$

$$\bar{S}_{p2}^*(p) = \left[-\frac{a}{l} (p - \gamma'_{11}{}^{(1)}) + \frac{bJ_{i1}}{l S_{i1}} \gamma'_{12}{}^{(1)} \right] \frac{p + (1 - \rho)}{p(p+1)(p + \gamma'_{11}{}^{(1)})}$$

$$\bar{S}_{p3}^*(p) = (dp + d\gamma'_{11}{}^{(1)} - \frac{bJ_{i1}}{2 S_{i1}} \gamma'_{12}{}^{(1)}) \frac{p + (1 - \rho)}{p(p+1)(p + \gamma'_{11}{}^{(1)})}$$

(P1.84)

Korišćenjem izraza (P1.84) i (P1.59) određene su slike nepoznatih pomeranja (P1.60) usled prednaprezanja ($H=P$), pri tome je :

$$\bar{D}_{uP}(p) = \frac{DU_P(p)}{p(p+1)^3(p + \gamma'_{11}{}^{(1)}) K^{(2)}(p)}$$

$$\bar{D}_{vP}(p) = \frac{DV_P(p)}{p(p+1)^3(p + \gamma'_{11}{}^{(1)}) K^{(2)}(p)}$$

(P1.85)

$$\bar{D}_{\varphi P}(p) = \frac{DF_P(p)}{p(p+1)^3(p + \gamma'_{11}{}^{(1)}) K^{(2)}(p)}$$

gde su $DU_P(p)$, $DV_P(p)$ i $DF_P(p)$ polinomi šestog stepena i njihovi koeficijenti dati su u prilogu koji sledi.

Unošenjem izraza (P1.85) i izraza za determinantu sistema (P1.75) u (P1.60) posle izvršenih skraćivanja u razlomcima dobijaju se slike :

$$\bar{u}_P(p) = \frac{DU_P(p)}{pDT(p)} = \frac{DU_P(p)}{Q(p)}$$

$$\bar{v}_P(p) = \frac{DV_P(p)}{pDT(p)} = \frac{DV_P(p)}{Q(p)}$$

(P1.86)

$$\bar{\varphi}_P(p) = \frac{DF_P(p)}{pDT(p)} = \frac{DF_P(p)}{Q(p)}$$

a korišćenjem (D1.12) odnosno (P1.62) i originali :

$$\begin{aligned}
u_P &= L \left[\bar{u}_P(p) \right]^{-1} = \sum_{k=1}^7 \frac{DU_P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k \varphi_n} \\
v_P &= L \left[\bar{v}_P(p) \right]^{-1} = \sum_{k=1}^7 \frac{DV_P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k \varphi_n} \\
\varphi_P &= L \left[\bar{\varphi}_P(p) \right]^{-1} = \sum_{k=1}^7 \frac{DF_P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k \varphi_n} .
\end{aligned} \tag{P1.87}$$

Vrednosti nepoznatih pomeranja u , v i φ usled prednaprezanja date su u narednom prilogu. Unoseći vrednost za koeficijent puzanja $\varphi_n=0$ korišćenjem istog programa dobijaju se pomeranja u trenutku $t=0$ i njihove su vrednosti date u prilogu a nose indeks 0.

Reakcije oslonaca se određuju na osnovu izraza (7.29), (P1.44), (P1.80) i (P1.82)

$$[R_p] = [\hat{K}'_{pn}] [q_n] - [Q_p],$$

tj. :

$$H_4 = -\hat{N}'_{ik} u + \hat{S}'_{ik} \varphi - (e + \frac{b}{2}) R_p^*$$

$$V_5 = -\frac{2}{l_1^2} \hat{C}'_{ik} v + \frac{1}{l_1} \hat{C}'_{ik} \varphi + (-\frac{a}{l_1} + \frac{b}{l_1} \frac{J_{i1}}{S_{i1}} \hat{I}'_{22} \hat{F}'_{12} \hat{F}'_{12} \hat{F}'_{12}) R_p^*$$

$$M_6 = \hat{S}'_{ik} u - \frac{1}{l_1} \hat{C}'_{ik} v + \hat{B}'_{ik} \varphi + (f + \frac{b}{2} \frac{J_{i1}}{S_{i1}} \hat{I}'_{22} \hat{F}'_{12} \hat{F}'_{12} \hat{F}'_{12}) R_p^*$$

$$H_7 = -\hat{N}'_{ig2} u + \frac{1}{l_2} \hat{S}'_{ig2} v + \hat{S}'_{ig2} \varphi \tag{P1.88}$$

$$V_8 = \frac{1}{l_2} \hat{S}'_{ig2} u - \frac{1}{l_2} \hat{D}'_{ig2} v - \frac{1}{l_2} \hat{D}'_{ig2} \varphi$$

$$H_9 = -\frac{1}{l_3} \hat{D}_{ig3} \hat{1}' u - \frac{1}{l_3} \hat{D}_{ig3} \hat{1}' \varphi$$

$$V_{10} = -\hat{N}_{ig3} \hat{1}' v$$

U izrazima (P1.88) javljaju se vrednosti funkcija $S_n(\varphi)$ za $\varphi = \varphi_n$

gde su :

$$\begin{aligned}
S_1(\varphi) &= \hat{N}'_{ik} u & , & & S_7(\varphi) &= \hat{N}'_{ig2} u & , \\
S_2(\varphi) &= \hat{S}'_{ik} \varphi & , & & S_8(\varphi) &= \hat{S}'_{ig2} v & , \\
S_3(\varphi) &= \hat{C}'_{ik} v & , & & S_9(\varphi) &= \hat{S}'_{ig2} \varphi & , \\
S_4(\varphi) &= \hat{C}'_{ik} \varphi & , & & S_{10}(\varphi) &= \hat{S}'_{ig2} u & , \\
S_5(\varphi) &= \hat{S}'_{ik} u & , & & S_{11}(\varphi) &= \hat{D}'_{ig2} v & , \\
S_6(\varphi) &= \hat{B}'_{ik} \varphi & , & & S_{12}(\varphi) &= \hat{D}'_{ig2} \varphi & ,
\end{aligned}$$

$$Sz1(\varphi) = \sum_p^b R_p^* ,$$

(P1.89)

$$Sz = (e + \frac{b}{2}) R_p^* = e + sz1 ,$$

$$Cz = (-\frac{a}{l_1} + \frac{b}{l_1} \frac{J_{i1}}{S_{i1}} \hat{I}'_{22}^{(1)} \hat{F}'_{12}^{(1)}) R_p^* ,$$

$$Az1 = \frac{b}{2} \frac{J_{i1}}{S_{i1}} \hat{I}'_{22}^{(1)} \hat{F}'_{12}^{(1)} R_p^* ,$$

$$Az = f R_p^* + Az1 .$$

Vrednosti ovih funkcija određuju se primenom Laplasovih transformacija. Koriste se slike date izrazima (P1.74) i (P1.86) i dobija se količnik polinoma na koji se može primeniti stav (D1.12) inverzne Laplasove transformacije. Vrednosti ovih funkcija u vremenu t i vremenu $t=t_0$ (za $\varphi_n=0$) date su u narednom prilogu.

Sile na krajevima štapova se određuju na osnovu (7.30) tj. :

$$[R]_j = [\hat{K}']_j [q]_j - [Q]_j ,$$

gde su matrice krutosti štapova date izrazima (P1.39), (P1.40) i (P1.41) a $[Q]_1$ izrazom (P1.80). Pri tome su korišćene veličine date relacijom (P1.89).

Vrednosti reakcija oslonaca i sila na krajevima štapova usled sile prednaprezanja ($H=P$) u trenutku $t=t_0$ ($\varphi_n=0$) i u vremenu t date su u narednom prilogu. Dijagrami sila u preseku i reakcije u vremenu t usled sile prednaprezanja dati su na slici P1.12.

POLINOM DU

-0.602926959485153D-01
 -0.645344477133347D+00
 -0.264284517670746D+01
 -0.537329141056272D+01
 -0.581419328121421D+01
 -0.321495193026600D+01
 -0.716256707134407D+00

POLINOM DV

0.395967511844394D-02
 0.398989291594223D-01
 0.143618716578864D+00
 0.228860647195412D+00
 0.161490320881021D+00
 0.350760420220093D-01
 -0.523343734700024D-02

POLINOM DF

0.331551959304209D-01
 0.344413942014497D+00
 0.135405707204980D+01
 0.262538996275234D+01
 0.269646455859827D+01
 0.140981698778550D+01
 0.295944029007048D+00

NEPOZNATA POMERANJA

| | | | |
|-----|------------------------|----|------------------------|
| U1o | -0.634578803788846D+05 | U1 | -0.140286324303206D+06 |
| V2o | -0.463664987299495D+03 | V2 | 0.858772440231737D+04 |
| F1o | 0.262196236021282D+05 | F1 | 0.737093645445148D+05 |

PRORACUN REAKCIJA OSOLONACA

funkcije:

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| S1o | -0.914852572380284D+03 | S1 | -0.102645515272240D+04 |
| S2o | -0.868821401457009D-04 | S2 | -0.592407007109448D+02 |
| S3o | -0.296331220943957D+01 | S3 | 0.469839167927011D+02 |
| S4o | 0.167559048352891D+03 | S4 | 0.394629622224364D+03 |
| S5o | -0.168900369637881D-03 | S5 | 0.115145204939590D+03 |
| S6o | 0.558530254631304D+02 | S6 | 0.126729447528445D+03 |
| SZo | 0.211635583950000D+04 | SZ | 0.194704737234128D+04 |
| CZo | -0.702081099999996D+00 | CZ | -0.131079043706145D+01 |
| AZo | 0.242559171600000D+03 | AZ | 0.221159810396964D+03 |
| SZ1o | 0.182190045000002D+02 | SZ1 | 0.167614841400112D+02 |
| AZ1o | -0.444089209850063D-15 | AZ1 | -0.199462747518308D+01 |
| S7o | -0.120570265385309D+04 | S7 | -0.115210424326535D+04 |
| S8o | -0.109247850132450D-02 | S8 | -0.160230128980582D+02 |
| S9o | -0.172804211828503D-02 | S9 | -0.145955614062285D+03 |
| S10o | -0.219028600871465D-04 | S10 | 0.283326380134998D+03 |
| S11o | -0.216700870436191D+01 | S11 | 0.345358530317660D+02 |
| S12o | 0.122528367576268D+03 | S12 | 0.291862978546035D+03 |
| S13o | 0.111706021240848D+03 | S13 | 0.267900174645549D+03 |

REAKCIJE OSOLONACA

| | | | |
|-----|------------------------|----|------------------------|
| H4o | -0.120150335400186D+04 | H4 | -0.979832920329827D+03 |
|-----|------------------------|----|------------------------|

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| V5o | ∅.273890554148951D+02 | V5 | ∅.618505956674047D+02 |
| M6o | ∅.298905913531001D+03 | M6 | ∅.455203810066215D+03 |
| H7o | ∅.120570065269135D+04 | H7 | ∅.100214287597855D+04 |
| V8o | -∅.304966593257595D+02 | V8 | -∅.429264041724460D+01 |
| H9o | -∅.419501046368245D+01 | H9 | -∅.223098665748683D+02 |
| V10o | ∅.310764502885831D+01 | V10 | -∅.575579346706816D+02 |

SILE NA KRAJEVIMA STAPOVA

STAP 1

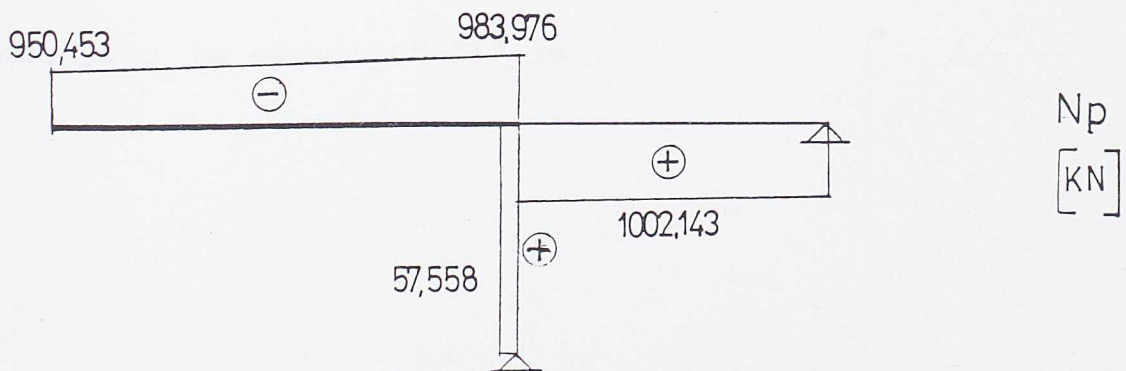
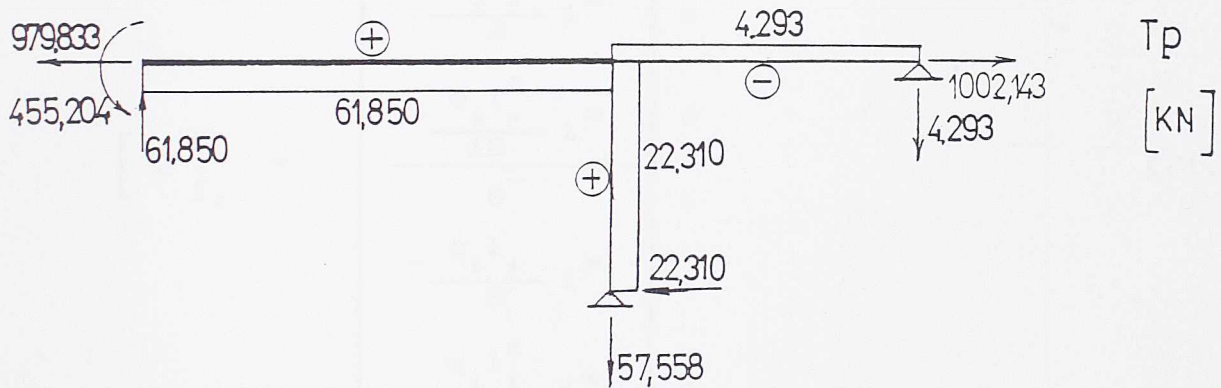
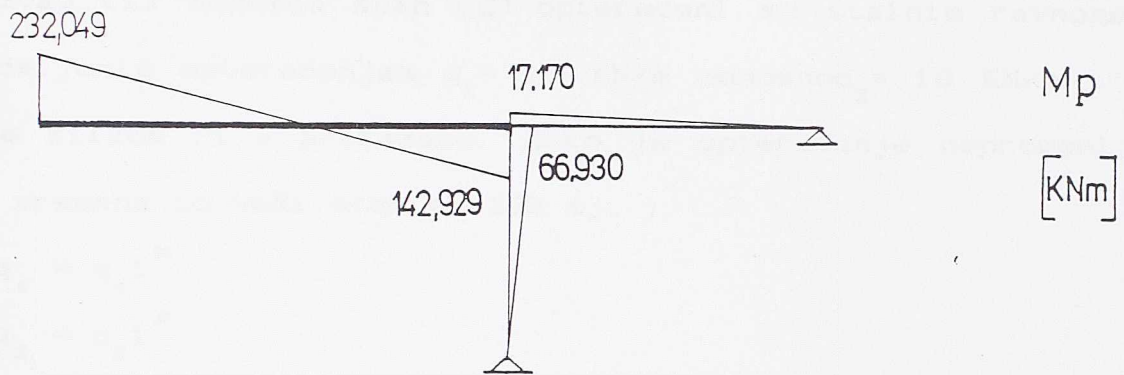
| | | | |
|-----|------------------------|----|------------------------|
| N4o | ∅.896633480998144D+03 | N4 | ∅.950452967871443D+03 |
| T5o | ∅.273890554148951D+02 | T5 | ∅.618505956674047D+02 |
| M6o | ∅.563467419310007D+02 | M6 | ∅.232049372194068D+03 |
| N1o | -∅.933071489998144D+03 | N1 | -∅.983975936151465D+03 |
| T2o | -∅.273890554148951D+02 | T2 | -∅.618505956674047D+02 |
| M3o | ∅.112200075509457D+03 | M3 | ∅.142929689431992D+03 |

STAP 2

| | | | |
|-----|------------------------|----|------------------------|
| N1o | -∅.120570065269135D+04 | N1 | -∅.100214287597855D+04 |
| T2o | ∅.304966593257595D+02 | T2 | ∅.429264041724460D+01 |
| M3o | ∅.121986637303038D+03 | M3 | ∅.171705616689784D+02 |
| N7o | ∅.120570065269135D+04 | N7 | ∅.100214287597855D+04 |
| T8o | -∅.304966593257595D+02 | T8 | -∅.429264041724460D+01 |

STAP 3

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| T1o | ∅.419501046368245D+01 | T1 | ∅.223098665748683D+02 |
| N2o | -∅.310764502885831D+01 | N2 | ∅.575579346706816D+02 |
| M3o | ∅.125850313910474D+02 | M3 | ∅.669295997246048D+02 |
| T9o | -∅.419501046368245D+01 | T9 | -∅.223098665748683D+02 |
| N10o | ∅.310764502885831D+01 | N10 | -∅.575579346706816D+02 |



sl. P1.12 Dijagrami sila u preseku i reakcije oslonaca
usled sile prednaprezanja u vremenu t

Uticaj B : Stalno opterećenje

Štap (1) odnosno štap (2) opterećeni su stalnim ravnomerno raspedeljenim opterećenjem $q_1 = 16 \text{ KN/m}$ odnosno $q_2 = 10 \text{ KN/m}$, kao što je slikom P1.3 prikazano. Kako je opterećenje nepromenljivo tokom vremena to važi stav (5.13) tj. :

$$q_1 = q_1 1^*$$

$$q_2 = q_2 1^*$$

Vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja štapa (1) usled opterećenja q_1 na osnovu izraza (5.20) je :

$$\left[Q \right]_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -\frac{q_1 l_1}{2} 1^* & 5 \\ -\frac{q_1 l_1^2}{12} 1^* & 6 \\ \dots & \\ 0 & 1 \\ -\frac{q_1 l_1}{2} 1^* & 2 \\ \frac{q_1 l_1^2}{12} 1^* & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(P1.90)}$$

Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa (2) usled opterećenja q_2 na osnovu (5.31) je :

$$\left[Q \right]_2 = \begin{bmatrix} -\frac{q_2 l_2^3}{48 E_u S_{i2}} \hat{N}'_{ig2} F_{12}^{(2)*} & 1 \\ -\frac{q_2 l_2^1}{24} S^{(2)*} - \frac{q_2 l_2^1}{2} 1^* & 2 \\ -\frac{q_2 l_2^2}{24} S^{(2)*} & 3 \\ \dots & \dots \\ \frac{q_2 l_2^3}{48 E_u S_{i2}} \hat{N}'_{ig2} F_{12}^{(2)*} & 7 \\ \frac{q_2 l_2^1}{24} S^{(2)*} - \frac{q_2 l_2^1}{2} 1^* & 8 \end{bmatrix} \quad (P1.91)$$

Preuređeni vektor čvornih opterećenja sistema jednak je preuređenom kombinovanom vektoru čvornih opterećenja :

$$\left[S^* \right] = \left[Q^* \right] = \begin{bmatrix} S^* \\ \vdots \\ S^* \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{q_2 l_2^3}{48 E_u S_{i2}} \hat{N}'_{ig2} F_{12}^{(2)*} & 1 \\ -\frac{q_1 l_1^1}{2} 1^* - \frac{q_2 l_2^1}{24} S^{(2)*} - \frac{q_2 l_2^1}{2} 1^* & 2 \\ \frac{q_1 l_1^2}{12} 1^* - \frac{q_2 l_2^2}{24} S^{(2)*} & 3 \\ \dots & \dots \\ 0 & 4 \\ -\frac{q_1 l_1^1}{2} 1^* & 5 \\ -\frac{q_1 l_1^2}{12} 1^* & 6 \\ -\frac{q_2 l_2^3}{48 E_u S_{i2}} \hat{N}'_{ig2} F_{12}^{(2)*} & 7 \\ \frac{q_2 l_2^1}{24} S^{(2)*} - \frac{q_2 l_2^1}{2} 1^* & 8 \\ 0 & 9 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (P1.92)$$

Slike vektora $\bar{S}_n^*(p)$ (P1.58) i (P1.59) određuju se korišćenjem izraza (P1.65) , (P1.69) , (P1.74), (4.47) i (P1.71), pa je :

$$\bar{S}_{a1}^*(p) = - \frac{q_2 l_2^2 S_{i2} \gamma_{12}^{(2)}}{12J_{i2}} \frac{(p + \gamma_{11}^{(2)})}{pK(p)^{(2)}}$$

$$\bar{S}_{a2}^*(p) = \frac{-\frac{q_2 l_2^2}{2} (p + \gamma_{11}^{(2)}) (p + \gamma_{22}^{(2)}) - (\frac{q_1 l_1}{2} + \frac{q_2 l_2}{2}) K(p)^{(2)}}{p K(p)^{(2)}}$$

$$\bar{S}_{a3}^*(p) = \frac{-\frac{q_2 l_2^2}{2} (p + \gamma_{11}^{(2)}) (p + \gamma_{22}^{(2)}) + \frac{q_1 l_1^2}{12} K(p)^{(2)}}{p K(p)^{(2)}}$$

(P1.93)

Korišćenjem izraza (P1.93) i (P1.59) određuju se slike nepoznatih pomeranja (P1.60) usled stalnog opterećenja ($H=Q$), pri tome je :

$$\bar{D}_{u_a}^*(p) = \frac{\bar{D}U_a(p)}{p(p+1)^2(p+\gamma_{11}^{(1)})K(p)^{(2)}}$$

$$\bar{D}_{v_a}^*(p) = \frac{\bar{D}V_a(p)}{p(p+1)^2(p+\gamma_{11}^{(1)})K(p)^{(2)}}$$

(P1.94)

$$\bar{D}_{\varphi_a}^*(p) = \frac{\bar{D}\varphi_a(p)}{p(p+1)^2(p+\gamma_{11}^{(1)})K(p)^{(2)}}$$

gde su $\bar{D}U_a(p)$, $\bar{D}V_a(p)$ i $\bar{D}\varphi_a(p)$ polinomi petog stepena. Unošenjem izraza (P1.94) i izraza za determinantu sistema (P1.75) u (P1.60) posle sređivanja razlomka dobijaju se slike :

$$\bar{u}_a(p) = \frac{(p+1)DU_a(p)}{pDP(p)} = \frac{PU(p)}{Q(p)}$$

$$\bar{v}_a(p) = \frac{(p+1)DV_a(p)}{pDP(p)} = \frac{PV(p)}{Q(p)}$$

(P1.95)

$$\bar{\varphi}_a(p) = \frac{(p+1)D\varphi_a(p)}{pDP(p)} = \frac{PF(p)}{Q(p)}$$

Koeficijenti polinoma $PU(p)$, $PV(p)$ i $PF(p)$ dati su u narednom prilogu.

Korišćenjem (D1.12) odnosno (P1.62) određuju se i originali :

$$\begin{aligned}
 u_a &= L \left[\bar{u}_a(p) \right]^{-1} = \sum_{k=1}^7 \frac{PU_a(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k \varphi_n} \\
 v_a &= L \left[\bar{v}_a(p) \right]^{-1} = \sum_{k=1}^7 \frac{PV_a(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k \varphi_n} \\
 \varphi_a &= L \left[\bar{\varphi}_a(p) \right]^{-1} = \sum_{k=1}^7 \frac{PF_a(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k \varphi_n}
 \end{aligned}
 \tag{P1.96}$$

Vrednosti nepoznatih pomeranja u , v i φ usled stalnog opterećenja date su u narednom prilogu. Unoseći vrednost za koeficijent puzanja $\varphi_n=0$ korišćenjem istog programa dobijaju se pomeranja u trenutku $t=0$ i njihove su vrednosti date u prilogu, a nose indeks 0.

Reakcije oslonaca se određuju na osnovu izraza (7.29), (P1.44) i (P1.92)

$$[R_p^*] = [\hat{K}'_{pn}] [q_n] - [Q_p^*],$$

tj. :

$$\begin{aligned}
 H_4 &= -\hat{N}'_{ik} u + \hat{S}'_{ik} \varphi \\
 V_5 &= -\frac{2}{l_1} \hat{C}'_{ik} v + \frac{1}{l_1} \hat{C}'_{ik} \varphi + \frac{q_1 l_1}{2} 1^* \\
 M_6 &= \hat{S}'_{ik} u - \frac{1}{l_1} \hat{C}'_{ik} v + \hat{B}'_{ik} \varphi + \frac{q_1 l_1^2}{12} 1^* \\
 H_7 &= -\hat{N}'_{ig2} u + \frac{1}{l_2} \hat{S}'_{ig2} v + \hat{S}'_{ig2} \varphi - \frac{q_2 l_2^3}{48 E_u S_{i2}} \hat{N}'_{ig2} F_{12}^{(2)*} \\
 V_8 &= \frac{1}{l_2} \hat{S}'_{ig2} u - \frac{1}{l_2} \hat{D}'_{ig2} v - \frac{1}{l_2} \hat{D}'_{ig2} \varphi - \frac{q_2 l_2}{24} S^{(2)*} + \frac{q_2 l_2}{2} 1^* \\
 H_9 &= -\frac{1}{l_3} \hat{D}_{ig3} \hat{1}' u - \frac{1}{l_3} \hat{D}_{ig3} \hat{1}' \varphi \\
 V_{10} &= -\hat{N}_{ig3} \hat{1}' v
 \end{aligned}
 \tag{P1.97}$$

U izrazima (P1.97) javljaju se vrednosti funkcija $T_k(\varphi)$ za $\varphi = \varphi_n$ gde su :

$$\begin{aligned}
T_1(\varphi) &= \hat{N}'_{ik} u & , & & T_7(\varphi) &= \hat{N}'_{ig2} u & , \\
T_2(\varphi) &= \hat{S}'_{ik} \varphi & , & & T_8(\varphi) &= \hat{S}'_{ig2} v & , \\
T_3(\varphi) &= \hat{C}'_{ik} v & , & & T_9(\varphi) &= \hat{S}'_{ig2} \varphi & , \\
T_4(\varphi) &= \hat{C}'_{ik} \varphi & , & & T_{11}(\varphi) &= \hat{S}'_{ig2} u & , \\
T_5(\varphi) &= \hat{S}'_{ik} u & , & & T_{12}(\varphi) &= \hat{D}'_{ig2} v & , \\
T_6(\varphi) &= \hat{B}'_{ik} \varphi & , & & T_{13}(\varphi) &= \hat{D}'_{ig2} \varphi & ,
\end{aligned}$$

(P1.98)

$$T_{10}(\varphi) = \frac{q_2 l_2^3}{48 E_u S_{i2}} \hat{N}'_{ig2} F_{12}^{(2)*}$$

$$T_{14}(\varphi) = -\frac{q_2 l_2}{24} S^{(2)*} + \frac{q_2 l_2}{2} 1^*$$

$$T_{15}(\varphi) = \hat{A}'_{ik} \varphi$$

Vrednosti ovih funkcija određuju se primenom Laplasovih transformacija. Koriste se slike date izrazima (P1.74) i (P1.95) i dobija se količnik polinoma na koji se može primeniti stav (D1.12) inverzne Laplasove transformacije. Vrednosti ovih funkcija u vremenu t i vremenu $t=t_0$ (za $\varphi_n=0$) date su u narednom prilogu.

Sile na krajevima štapova se određuju na osnovu (7.30) tj. :

$$[R]_j = [\hat{K}']_j [q]_j - [Q]_j ,$$

gde su matrice krutosti štapova date izrazima (P1.39), (P1.40) i (P1.41) a vektori ekvivalentnih čvornih opterećenja izrazima (P1.90) i (P1.91). Pri tome su korišćene veličine date relacijom (P1.97).

Vrednosti reakcija oslonaca i sila na krajevima štapova usled sile stalnog opterećenja ($H=Q$) u trenutku $t=t_0$ ($\varphi_n=0$) i u vremenu t date su u narednom prilogu. Dijagrami sila u preseku i reakcije u vremenu t usled stalnog opterećenja dati su na slici P1.13.

POLINOM PU

-0.699167710484514D-04
 -0.679537077330936D-03
 -0.246522387750657D-02
 -0.473888098580253D-02
 -0.515308413897372D-02
 -0.297723673126476D-02
 -0.706430006869495D-03

POLINOM PV

-0.338116417941536D-02
 -0.433384498085592D-01
 -0.216025504503473D+00
 -0.533075807058978D+00
 -0.687028137488086D+00
 -0.442535870270153D+00
 -0.112515320966715D+00

POLINOM PF

0.111777162376495D-02
 0.134480049853048D-01
 0.632512513144836D-01
 0.148700989334128D+00
 0.184599070995251D+00
 0.115568031479781D+00
 0.287489318657134D-01

NEPOZNATA POMERANJA

| | | | |
|-----|------------------------|----|------------------------|
| U10 | -0.625872663718506D+02 | U1 | -0.133530201822145D+03 |
| V20 | -0.996847025353763D+04 | V2 | -0.101095201679766D+05 |
| F10 | 0.254705647775617D+04 | F1 | 0.306677726732200D+04 |

PRORACUN REAKCIJA OSLOMACA

funkcije:

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| T10 | -0.902302786755130D+00 | T1 | -0.100826102330459D+01 |
| T20 | -0.123015092371370D-05 | T2 | -0.271304143767052D+01 |
| T30 | -0.637044813852112D+02 | T3 | -0.517760904286400D+02 |
| T40 | 0.162772121191561D+02 | T4 | 0.158833619723528D+02 |
| T50 | -0.350275047524590D-06 | T5 | 0.105988368358202D+00 |
| T60 | 0.542573751300034D+01 | T6 | 0.503808156527052D+01 |
| T70 | -0.118902138556580D+01 | T7 | -0.114495398201072D+01 |
| T80 | 0.346236181890403D-03 | T8 | 0.225312811242699D+02 |
| T90 | -0.424629989775464D-04 | T9 | -0.664547994838934D+01 |
| T100 | -0.342746362507618D-06 | T10 | 0.407464189846791D+01 |
| T110 | 0.272491825628071D-04 | T11 | 0.260953286367076D+00 |
| T120 | -0.465841560266214D+02 | T12 | -0.387552964714612D+02 |
| T130 | 0.119027938784477D+02 | T13 | 0.118526441472121D+02 |
| T140 | 0.150000002545052D+02 | T14 | 0.151944980936538D+02 |
| T150 | 0.108514746060774D+02 | T15 | 0.108452804070798D+02 |

REAKCIJE OSLOMACA

| | | | |
|-----|-----------------------|----|------------------------|
| H40 | 0.902301556604206D+00 | H4 | -0.170478041436592D+01 |
| V50 | 0.542520065412600D+02 | V5 | 0.535236764636499D+02 |
| M60 | 0.640431507269272D+02 | M6 | 0.617734183384021D+02 |
| H70 | 0.118906513886593D+01 | H7 | 0.420693621315677D+01 |
| V80 | 0.149358183488527D+02 | V8 | 0.147187814079089D+02 |

$$H = Q$$

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| H9o | -0.209145789819680D+01 | H9 | -0.250216114312702D+01 |
| V10o | 0.668121766302751D+02 | V10 | 0.677575425246897D+02 |

SILE NA KRAJEVIMA STAPOVA

STAP 1

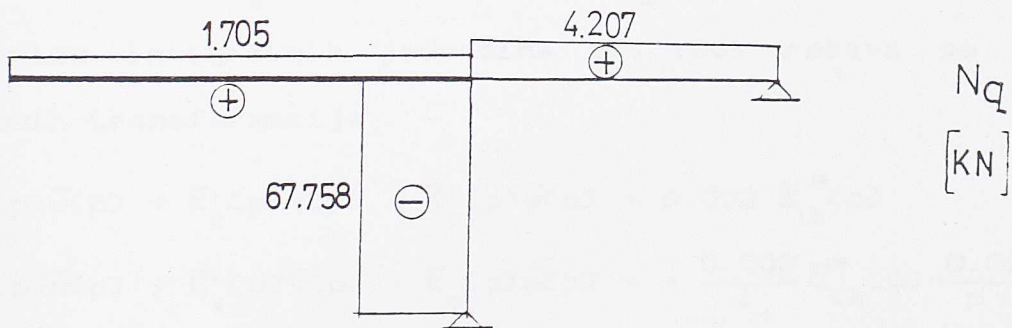
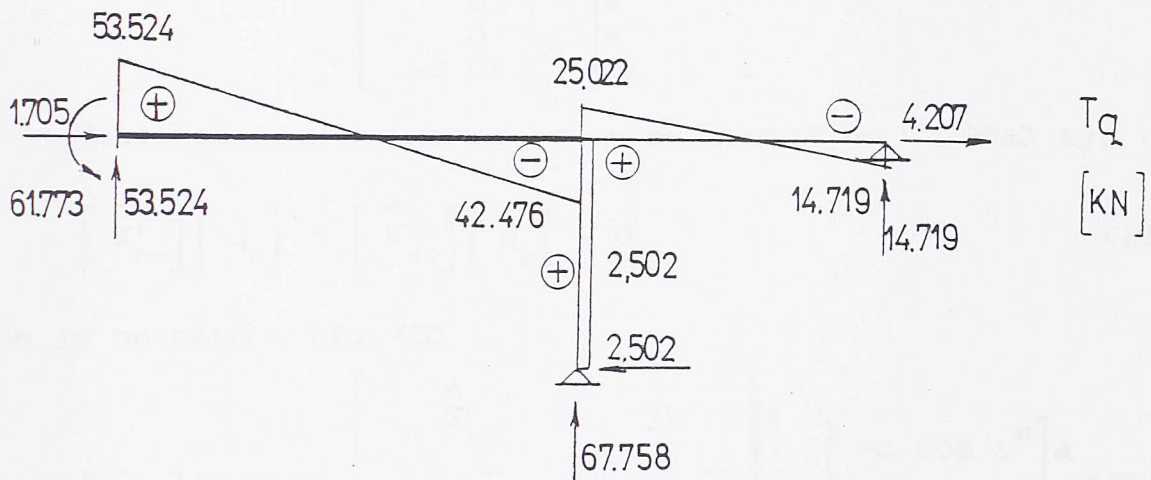
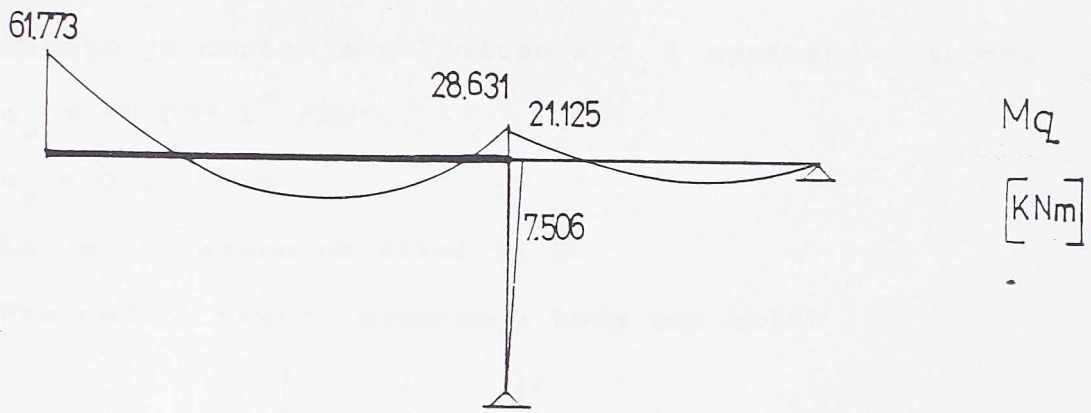
| | | | |
|-----|------------------------|----|------------------------|
| N4o | 0.902301556604206D+00 | N4 | -0.170478041436592D+01 |
| T5o | 0.542520065412600D+02 | T5 | 0.535236764636499D+02 |
| M6o | 0.640431507269272D+02 | M6 | 0.617734183384021D+02 |
| N1o | -0.902301556604206D+00 | N1 | 0.170478041436592D+01 |
| T2o | 0.417479934587400D+02 | T2 | 0.424763235363501D+02 |
| M3o | -0.265311114794457D+02 | M3 | -0.286313595565051D+02 |

STAP 2

| | | | |
|-----|------------------------|----|------------------------|
| N1o | -0.118906513886593D+01 | N1 | -0.420693621315677D+01 |
| T2o | 0.250641816511473D+02 | T2 | 0.252812185920911D+02 |
| M3o | 0.202567266045892D+02 | M3 | 0.211248743683644D+02 |
| N7o | 0.118906513886593D+01 | N7 | 0.420693621315677D+01 |
| T8o | 0.149358183489527D+02 | T8 | 0.147187814079089D+02 |

STAP 3

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| T1o | 0.209145789819680D+01 | T1 | 0.250216114312702D+01 |
| N2o | -0.668121766302751D+02 | N2 | -0.677575425246897D+02 |
| M3o | 0.627437369459039D+01 | M3 | 0.750648342938107D+01 |
| T9o | -0.209145789819680D+01 | T9 | -0.250216114312702D+01 |
| N10o | 0.668121766302751D+02 | N10 | 0.677575425246897D+02 |



Sl.P1.13 Dijagrami sila u preseku i reakcije oslonaca usled stalnog opterećenja u vremenu t

Uticaj C : Zadato pomeranje oslonaca

Zadato je obrtanje uklještenja c_u i spuštanje oslonca c_o :

$$c_u = -0.002 \text{ 1}^* \text{ rad}$$

$$c_o = 0.01 \text{ 1}^* \text{ m} ,$$

kao što je prikazano na slici P1.3.

Preuređeni vektor pomeranja tada ima oblik :

$$[q] = \begin{bmatrix} q_n \\ q_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \\ \hline 0 \\ 0 \\ -0.002 \text{ 1}^* \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.01 \text{ 1}^* \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \quad (\text{P1.99})$$

Nepoznata pomeranja određuju se jednačine (7.26a) tj. :

$$[\hat{K}'_{nn}] [q_n] + [\hat{K}'_{np}] [q_p] = 0 \quad (\text{P1.100})$$

gde je na osnovu (P1.45) :

$$[\hat{K}'_{np}] [q_p] = \begin{bmatrix} \hat{S}'_{ik} & 0 \\ -\frac{1}{l_1} \hat{C}'_{ik} & -N_{ig3} \hat{1}' \\ \hat{B}'_{ik} & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} -0.002 \text{ 1}^* \\ -0.01 \text{ 1}^* \end{bmatrix} \begin{matrix} 6 \\ 10 \end{matrix} \quad (\text{P1.101})$$

Sistem integralnih jednačina (P1.100) rešava se primenom Laplasovih transformacija .

$$\bar{K}'_1(p) \bar{u}(p) + \bar{K}'_2(p) \bar{v}(p) + \bar{K}'_3(p) \bar{\varphi}(p) = 0.002 \bar{S}_{ik}^*(p)$$

$$\bar{K}'_2(p) \bar{u}(p) + \bar{K}'_4(p) \bar{v}(p) + \bar{K}'_5(p) \bar{\varphi}(p) = -\frac{0.002}{l_1} \bar{C}_{ik}^*(p) - \frac{0.01}{p} N_{ig3}$$

$$\bar{K}'_3(p) \bar{u}(p) + \bar{K}'_5(p) \bar{v}(p) + \bar{K}'_6(p) \bar{\varphi}(p) = 0.002 \bar{B}_{ik}^*(p) \quad (\text{P1.102})$$

Determinata sistema data je izrazom (P1.75) a slike funkcija $\bar{S}_{ik}^*(p)$, $\bar{C}_{ik}^*(p)$ i $\bar{B}_{ik}^*(p)$ određuju se na osnovu (A1.5), (P1.65) i (P1.74).

Slike nepoznatih pomeranja date su izrazom (P1.60), gde je :

$$\begin{aligned}\bar{D}_{uc}(p) &= \frac{DU_c(p)}{p(p+1)^3(p+\gamma'_{11}) K^{(2)}(p)} \\ \bar{D}_{vc}(p) &= \frac{DV_c(p)}{p(p+1)^3(p+\gamma'_{11}) K^{(2)}(p)} \\ \bar{D}_{\varphi c}(p) &= \frac{DF_c(p)}{p(p+1)^3(p+\gamma'_{11}) K^{(2)}(p)}\end{aligned}\tag{P1.103}$$

polinomi $\bar{D}_{uc}(p)$, $\bar{D}_{vc}(p)$ i $\bar{D}_{\varphi c}(p)$ su polinomi šestog stepena. Unošenjem izraza (P1.103) i izraza za determinantu sistema (P1.75) u (P1.60) posle sređivanja razlomaka dobijaju se slike :

$$\begin{aligned}\bar{u}_c(p) &= \frac{DU_c(p)}{pDP(p)} = \frac{DU(p)}{Q(p)} \\ \bar{v}_c(p) &= \frac{DV_c(p)}{pDP(p)} = \frac{DV(p)}{Q(p)} \\ \bar{\varphi}_c(p) &= \frac{DF_c(p)}{pDP(p)} = \frac{DF(p)}{Q(p)}\end{aligned}\tag{P1.104}$$

Koeficijenti polinoma $DU(p)$, $DV(p)$ i $DF(p)$ dati su u narednom prilogu.

Korišćenjem (D1.12) odnosno (P1.62) određuju se i originali :

$$\begin{aligned}u_c &= L[\bar{u}_c(p)]^{-1} = \sum_{k=1}^7 \frac{PU(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k \varphi_n} \\ v_c &= L[\bar{v}_c(p)]^{-1} = \sum_{k=1}^7 \frac{PV(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k \varphi_n} \\ \varphi_c &= L[\bar{\varphi}_c(p)]^{-1} = \sum_{k=1}^7 \frac{PF_c(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k \varphi_n}.\end{aligned}\tag{P1.105}$$

Vrednosti nepoznatih pomeranja u , v i φ usled zadatih pomeranja oslonaca date su u narednom prilogu. Unoseći vrednost za koeficijent puzanja $\varphi_n=0$ korišćenjem istog programa dobijaju se pomeranja u trenutku $t=0$ i njihove su vrednosti date u prilogu, a nose indeks 0.

Reakcije oslonaca se određuju na osnovu izraza (7.29) :

$$[R_p^*] = [\hat{K}'_{pn}] [q_n] + [\hat{K}'_{pp}] [q_p],$$

tj. :

$$H_4 = -\hat{N}'_{ik} u + \hat{S}'_{ik} \varphi + 0.002 S_{ik}^*$$

$$V_5 = -\frac{2}{l_1} \hat{C}'_{ik} v + \frac{1}{l_1} \hat{C}'_{ik} \varphi - 0.002 \frac{1}{l_1} C_{ik}^*$$

$$M_6 = \hat{S}'_{ik} u - \frac{1}{l_1} \hat{C}'_{ik} v + \hat{B}'_{ik} \varphi - 0.002 A_{ik}^*$$

$$H_7 = -\hat{N}'_{ig2} u + \frac{1}{l_2} \hat{S}'_{ig2} v + \hat{S}'_{ig2} \varphi \quad (P1.106)$$

$$V_8 = \frac{1}{l_2} \hat{S}'_{ig2} u - \frac{1}{l_2} \hat{D}'_{ig2} v - \frac{1}{l_2} \hat{D}'_{ig2} \varphi$$

$$H_9 = -\frac{1}{l_3} \hat{D}'_{iga} u - \frac{1}{l_3} \hat{D}'_{iga} \varphi$$

$$V_{10} = -\hat{N}'_{iga} v$$

U izrazima (P1.106) javljaju se vrednosti funkcija $S_k(\varphi)$ za $\varphi = \varphi_n$

gde su :

$$\begin{aligned} S_1(\varphi) &= \hat{N}'_{ik} u, & S_7(\varphi) &= \hat{N}'_{ig2} u, \\ S_2(\varphi) &= \hat{S}'_{ik} \varphi, & S_8(\varphi) &= \hat{S}'_{ig2} v, \\ S_3(\varphi) &= \hat{C}'_{ik} v, & S_9(\varphi) &= \hat{S}'_{ig2} \varphi, \\ S_4(\varphi) &= \hat{C}'_{ik} \varphi, & S_{10}(\varphi) &= \hat{S}'_{ig2} u, \\ S_5(\varphi) &= \hat{S}'_{ik} u, & S_{11}(\varphi) &= \hat{D}'_{ig2} v, \\ S_6(\varphi) &= \hat{B}'_{ik} \varphi, & S_{12}(\varphi) &= \hat{D}'_{ig2} \varphi, & S_{13}(\varphi) &= \hat{A}'_{ik} \varphi, \\ Sz(\varphi) &= S_{ik}^*, & Cz(\varphi) &= C_{ik}^*, \\ Az(\varphi) &= A_{ik}^*, & Bz(\varphi) &= B_{ik}^*. \end{aligned}$$

(P1.106)

Vrednosti ovih funkcija određuju se primenom Laplasovih

transformacija. Koriste se slike date izrazima (P1.74) i (P1.104) i dobija se količnik polinoma na koji se može primeniti stav (D1.12) inverzne Laplasove transformacije. Vrednosti ovih funkcija u vremenu t i vremenu $t=t_0$ (za $\varphi_n=0$) date su u narednom prilogu.

Sile na krajevima štapova se određuju na osnovu (7.30) tj. :

$$[R]_j = [\hat{K}']_j [q]_j .$$

Pri tome su korišćene veličine date relacijom (P1.107).

Vrednosti reakcija oslonaca i sila na krajevima štapova usled zadatih pomeranja oslonaca ($H=Q$) u trenutku $t=t_0$ ($\varphi_n=0$) i u vremenu t date su u narednom prilogu. Dijagrami sila u preseku i reakcije u vremenu t usled zadatih pomeranja oslonaca dati su na slici P1.14.

POLINOM DU

$\emptyset.484099030906985D-10$
 $\emptyset.493520351305673D-09$
 $\emptyset.174911180251116D-08$
 $\emptyset.262852763439344D-08$
 $\emptyset.161413766519346D-08$
 $\emptyset.162286505566439D-09$
 $-\emptyset.127324308921457D-09$

POLINOM DV

$-\emptyset.319077891022189D-08$
 $-\emptyset.408514468171942D-07$
 $-\emptyset.203581246537746D-06$
 $-\emptyset.502588578009735D-06$
 $-\emptyset.648152824965322D-06$
 $-\emptyset.417762187906118D-06$
 $-\emptyset.106277364056673D-06$

POLINOM DF

$\emptyset.120313805819802D-09$
 $\emptyset.166266555764309D-08$
 $\emptyset.877913544921499D-08$
 $\emptyset.226066028511591D-07$
 $\emptyset.301047808982645D-07$
 $\emptyset.199165601949400D-07$
 $\emptyset.518160022427847D-08$

NEPOZNATA POMERANJA

| | | | |
|-----|----------------------------------|----|----------------------------------|
| U1o | $-\emptyset.112804998208660D-04$ | U1 | $\emptyset.106390173194537D-03$ |
| V2o | $-\emptyset.941580874419503D-02$ | V2 | $-\emptyset.952343496596646D-02$ |
| FIo | $\emptyset.459071928961008D-03$ | FI | $\emptyset.396378251101362D-03$ |

PRORACUN REAKCIJA OSLONACA

funkcije:

| | | | |
|------|----------------------------------|-----|----------------------------------|
| S1o | $-\emptyset.162605393612697D-06$ | S1 | $\emptyset.852825212869753D-06$ |
| S2o | $\emptyset.310671352611777D-11$ | S2 | $-\emptyset.371634305223262D-06$ |
| S3o | $-\emptyset.601726388850761D-04$ | S3 | $-\emptyset.487693162195183D-04$ |
| S4o | $\emptyset.293374425447362D-05$ | S4 | $\emptyset.200729513344651D-05$ |
| S5o | $\emptyset.252246806199772D-11$ | S5 | $-\emptyset.787244451381749D-07$ |
| S6o | $\emptyset.977914388836998D-06$ | S6 | $\emptyset.631165107797872D-06$ |
| S7o | $\emptyset.000000000000000D+00$ | S7 | $-\emptyset.913112246545707D-03$ |
| C7o | $\emptyset.639059730250482D-02$ | CZ | $\emptyset.511758370049565D-02$ |
| A7o | $\emptyset.426039820166988D-02$ | AZ | $\emptyset.350177799324845D-02$ |
| B7o | $\emptyset.213019910083494D-02$ | BZ | $\emptyset.161580570724720D-02$ |
| S7o | $-\emptyset.214136162619845D-06$ | S7 | $\emptyset.991819778830204D-06$ |
| S8o | $\emptyset.411001243963592D-09$ | S8 | $\emptyset.212290710215900D-04$ |
| S9o | $\emptyset.607987929720464D-10$ | S9 | $-\emptyset.907239437327766D-06$ |
| S10o | $\emptyset.410907841703468D-10$ | S10 | $-\emptyset.195192689789648D-06$ |
| S11o | $-\emptyset.440014654774343D-04$ | S11 | $-\emptyset.365059609591079D-04$ |
| S12o | $\emptyset.214532796723025D-05$ | S12 | $\emptyset.150725790134697D-05$ |
| S13o | $\emptyset.195582987143743D-05$ | S13 | $\emptyset.137613002583310D-05$ |

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| H4o | 0.325217000652446D+02 | H4 | -0.610136802236886D+03 |
| V5o | 0.340336511247173D+03 | V5 | 0.267618866205010D+03 |
| M6o | 0.497178731095598D+03 | M6 | 0.335420809216502D+03 |
| H7o | 0.429599423447616D+02 | H7 | 0.681641707847907D+03 |
| V8o | 0.442753974645625D+03 | V8 | 0.371201982432018D+03 |
| H9o | -0.753913088659349D+02 | H9 | -0.715050857842950D+02 |
| V10o | -0.783090553360833D+03 | V10 | -0.638820831805712D+03 |

SILE NA KRAJEVIMA STAPOVA

STAP 1

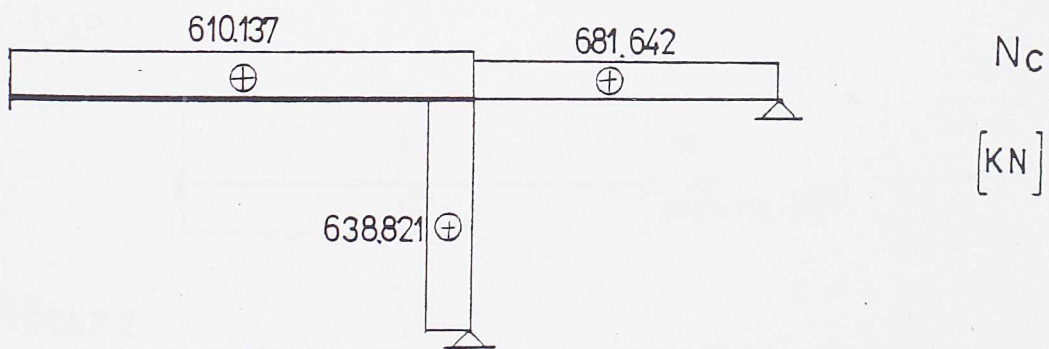
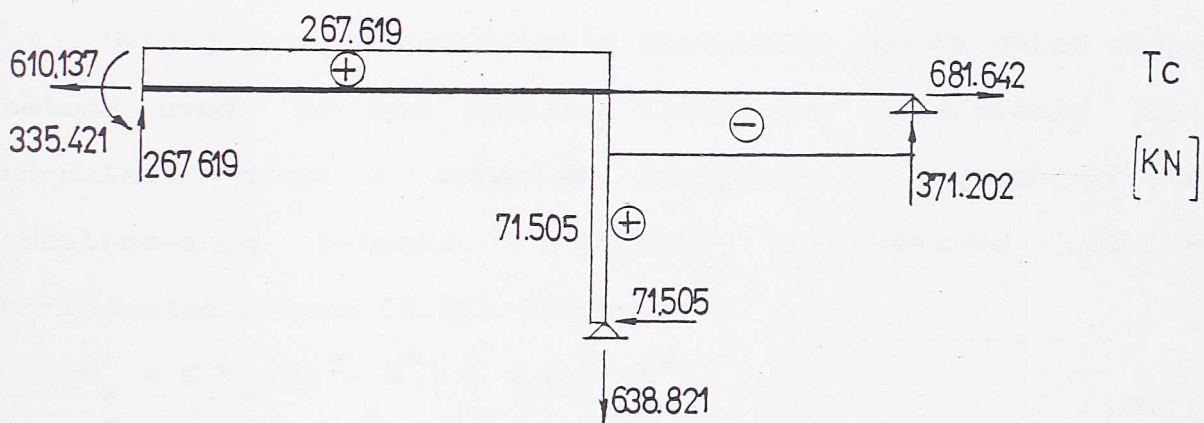
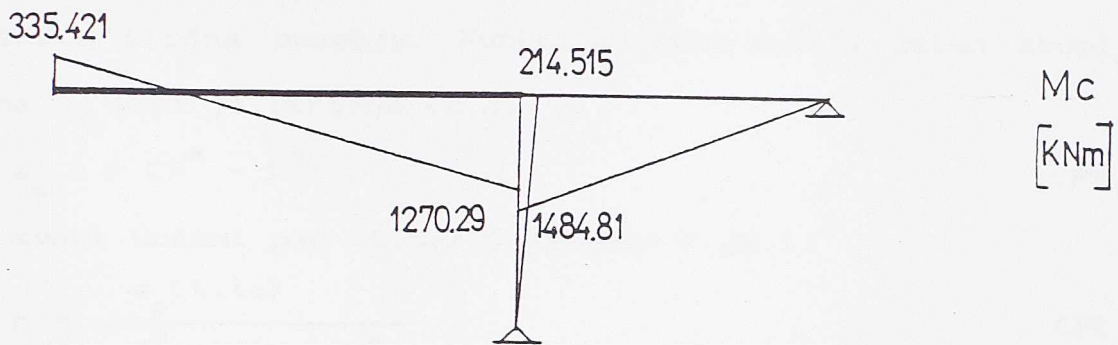
| | | | |
|-----|------------------------|----|------------------------|
| N4o | 0.325217000652446D+02 | N4 | -0.610136802236886D+03 |
| T5o | 0.340336511247173D+03 | T5 | 0.267618866205010D+03 |
| M6o | 0.497178731095598D+03 | M6 | 0.335420809216502D+03 |
| N1o | -0.325217000652446D+02 | N1 | 0.610136802236886D+03 |
| T2o | -0.340336511247173D+03 | T2 | -0.267618866205010D+03 |
| M3o | 0.154484041849082D+04 | M3 | 0.127029245458066D+04 |

STAP 2

| | | | |
|-----|------------------------|----|------------------------|
| N1o | -0.429599423447616D+02 | N1 | -0.681641707847907D+03 |
| T2o | -0.442753974645625D+03 | T2 | -0.371201982432018D+03 |
| M3o | -0.177101589858250D+04 | M3 | -0.148480792972807D+04 |
| N7o | 0.429599423447616D+02 | N7 | 0.681641707847907D+03 |
| T8o | 0.442753974645625D+03 | T8 | 0.371201982432018D+03 |

STAP 3

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| T1o | 0.753913088659349D+02 | T1 | 0.715050857842950D+02 |
| N2o | 0.783090553360833D+03 | N2 | 0.638820831805712D+03 |
| M3o | 0.226173926597805D+03 | M3 | 0.214515257352885D+03 |
| T9o | -0.753913088659349D+02 | T9 | -0.715050857842950D+02 |
| N10o | -0.783090553360833D+03 | N10 | -0.638820831805712D+03 |



Sl.P1.14 Dijagrami sila u preseku i reakcije oslonaca
usled zadatih pomeranja oslonaca u vremenu t

Utica j D : Skupljanje betona

Uvodi se pretpostavka da je pojava skupljanja betona vremenski slična puzanju. Funkcija deformacije usled skupljanja betona ε_s data je izrazom (2.29) :

$$\varepsilon_s = r (F^* - 1^*) , \quad (P1.108)$$

a za svaki uočeni par (t, t_0) parametar r je :

$$r = \frac{\varepsilon_s(t, t_0)}{F^*(t, t_0) - 1^*} . \quad (P1.109)$$

Na osnovu izraza (P1.57) i za usvojenu vrednost $\varepsilon_{sk} = -30 \cdot 10^{-5}$ u trenutku t^∞ je :

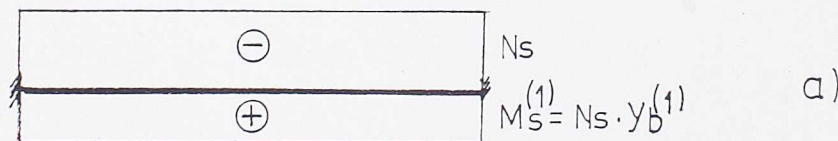
$$r = \frac{\varepsilon_{sk}}{\varphi_n} = 8.571428571E-5 . \quad (P1.110)$$

Utica j poznate deformacije spregnutog nosača usled skupljanja betona uvodi se kao spoljno ravnotežno opterećenje [23], [24] normalnom silom i momentom savijanja u odnosu na težište idealizovanog preseka. Uvođenjem pretpostavke (P1.108) i korišćenjem izraza (2.31) dobija se :

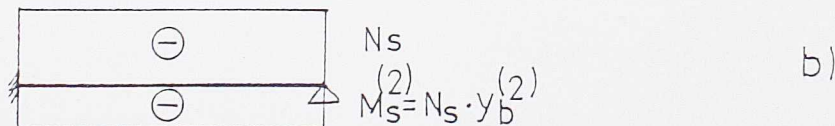
$$\begin{aligned} N_s^* &= E_u F_{br} r |1^* - R^*| = n_s |1^* - R^*| \\ M_s^* &= E_u F_{br} y_b r |1^* - R^*| = m_s |1^* - R^*| \end{aligned} \quad (P1.111)$$

Ravnotežno opterećenje štapa (1) i (2) prikazano je na slici P1.15.

ŠTAP 1



ŠTAP 2



sl. P1.15

Vektor čvornih sila štapa (1) je :

$$[P]_1 = \begin{bmatrix} N_s^* & 4 \\ 0 & 5 \\ -M_s^{*(1)} & 6 \\ -N_s^* & 1 \\ 0 & 2 \\ M_s^{*(1)} & 3 \end{bmatrix} \quad (P1.112)$$

Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja (poglavljje 5) štapa (2) usled ravnotežnog opterećenja N_s^* i $M_s^{*(2)}$ (sl. P1.15b) je :

$$[Q]_2 = \begin{bmatrix} N_s^* - \frac{M_s^{*(2)} F_{i2}}{12S_{i2}} \hat{F}'_{12} \hat{R}'_{11} (\hat{C}')^{-1} & 1 \\ -\frac{M_s^{*(2)}}{2l_2} (\hat{C}')^{-1} & 2 \\ -\frac{M_s^{*(2)}}{2} (\hat{C}')^{-1} & 3 \\ -N_s^* + \frac{M_s^{*(2)} F_{i2}}{12S_{i2}} \hat{F}'_{12} \hat{R}'_{11} (\hat{C}')^{-1} & 7 \\ +\frac{M_s^{*(2)}}{2l_2} (\hat{C}')^{-1} & 8 \end{bmatrix} \quad (P1.113)$$

pa je vektor kombinovanih čvornih opterećenja :

$$\begin{aligned}
 [S^*] &= \begin{bmatrix} S_{11}^* \\ \dots \\ S_{12}^* \\ \dots \\ S_{33}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{M_s^{*(2)} F_{i2}}{12S_{i2}} \hat{F}'_{12} \hat{R}'_{11} (\hat{C}')^{-1} & 1 \\ -\frac{M_s^{*(2)}}{2l_2} (\hat{C}')^{-1} & 2 \\ -\frac{M_s^{*(2)}}{2} (\hat{C}')^{-1} & 3 \\ \dots & \dots \\ N_s^* & 4 \\ 0 & 5 \\ -M_s^{*(1)} & 6 \\ -N_s^* + \frac{M_s^{*(2)} F_{i2}}{12S_{i2}} \hat{F}'_{12} \hat{R}'_{11} (\hat{C}')^{-1} & 7 \\ +\frac{M_s^{*(2)}}{2l_2} (\hat{C}')^{-1} & 8 \\ 0 & 9 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (P1.114)
 \end{aligned}$$

Nepoznata pomeranja određuju se iz izraza (7.26) odnosno primenom Laplasovih transformacija iz izraza (P1.58) i (P1.59) gde su slike elemenata vektora $\bar{S}_n^*(p)$:

$$\bar{S}_{s1}^*(p) = \frac{-m_s^{(2)} F_{i2} \gamma_{12}^{(2)}}{S_{i2}} \frac{p + \gamma_{11}^{(2)}}{p(p+1)K(p)^{(2)}}$$

$$\bar{S}_{s2}^*(p) = \frac{-\delta m_s^{(2)}}{l_2} \frac{(p + \gamma_1^{(2)})(p + \gamma_2^{(2)})}{p(p+1)K(p)^{(2)}} \quad (P1.115)$$

$$\bar{S}_{s3}^*(p) = \frac{m_s^{(1)} K(p)^{(2)} - \delta m_s^{(2)} (p + \gamma_1^{(2)})(p + \gamma_2^{(2)})}{p(p+1)K(p)^{(2)}}$$

Korišćenjem izraza (P1.115) i (P1.59) određuju se slike nepoznatih pomeranja (P1.60) usled skupljanja (H=S) pri tome je :

$$\begin{aligned} \bar{D}_{us}(p) &= \frac{DU_s(p)}{p(p+1)^3(p+\gamma_{11}^{(1)}) K^{(2)}(p)} \\ \bar{D}_{vs}(p) &= \frac{DV_s(p)}{p(p+1)^3(p+\gamma_{11}^{(1)}) K^{(2)}(p)} \\ \bar{D}_{\varphi s}(p) &= \frac{DF_s(p)}{p(p+1)^3(p+\gamma_{11}^{(1)}) K^{(2)}(p)} \end{aligned} \quad (P1.116)$$

polinomi $\bar{DU}_s(p)$, $\bar{DV}_s(p)$ i $\bar{DF}_s(p)$ su polinomi petog stepena. Unošenjem izraza (P1.116) i izraza za determinantu sistema (P1.75) u (P1.60) posle sređivanja razlomaka dobijaju se slike :

$$\begin{aligned} \bar{u}_s(p) &= \frac{DU(p)}{pDP(p)} = \frac{DU(p)}{Q(p)} \\ \bar{v}_s(p) &= \frac{DV(p)}{pDP(p)} = \frac{DV(p)}{Q(p)} \\ \bar{\varphi}_s(p) &= \frac{DF(p)}{pDP(p)} = \frac{DF(p)}{Q(p)} \end{aligned} \quad (P1.117)$$

Vrednosti nepoznatih pomeranja u , v i φ usled skupljanja date su u narednom prilogu. Unoseći vrednost za koeficijent puzanja $\varphi_n=0$ korišćenjem istog programa dobijaju se pomeranja u trenutku $t=0$ i njihove su vrednosti date u prilogu, a nose indeks 0.

Reakcije oslonaca se određuju na osnovu izraza (7.29), (P1.44) i (P1.114) :

$$[R_p^*] = [\hat{K}'_{pn}] [q_n] - [Q_p^*],$$

tj. :

$$H_4 = -\hat{N}'_{ik} u + \hat{S}'_{ik} \varphi - n_s |1^* - R^*|$$

$$V_5 = -\frac{2}{l_1^2} \hat{C}'_{ik} v + \frac{1}{l_1} \hat{C}'_{ik} \varphi$$

$$M_6 = \hat{S}'_{ik} u - \frac{1}{l_1} \hat{C}'_{ik} v + m_s^{(1)} |1^* - R^*|$$

$$H_7 = -\hat{N}'_{ig2} u + \frac{1}{l_2} \hat{S}'_{ig2} v + \hat{S}'_{ig2} \varphi + n_s |1^* - R^*| - \frac{m_s^{(2)} F_{i2}}{12S_{i2}} \hat{F}'_{12} \hat{R}'_{11} (\hat{C}')^{-1} |1^* - R^*|$$

$$V_8 = \frac{1}{l_2} \hat{S}'_{ig2} u - \frac{1}{l_2^2} \hat{D}'_{ig2} v - \frac{1}{l_2} \hat{D}'_{ig2} \varphi - \frac{m_s^{(2)}}{2l_2} (\hat{C}')^{-1} |1^* - R^*|$$

$$H_9 = -\frac{1}{l_3} \hat{D}_{ig3} \hat{1}' u - \frac{1}{l_3} \hat{D}_{ig3} \hat{1}' \varphi$$

$$V_{10} = -N_{ig3} \hat{1}' v \quad (P1.119)$$

U izrazima (P1.119) javljaju se vrednosti funkcija $S_k(\varphi)$ i $T_k(\varphi)$

za $\varphi = \varphi_n$ gde su :

$$\begin{aligned} S_1(\varphi) &= \hat{N}'_{ik} u, & S_7(\varphi) &= \hat{N}'_{ig2} u, \\ S_2(\varphi) &= \hat{S}'_{ik} \varphi, & S_8(\varphi) &= \hat{S}'_{ig2} v, \\ S_3(\varphi) &= \hat{C}'_{ik} v, & S_9(\varphi) &= \hat{S}'_{ig2} \varphi, \\ S_4(\varphi) &= \hat{C}'_{ik} \varphi, & S_{10}(\varphi) &= \hat{S}'_{ig2} u, \\ S_5(\varphi) &= \hat{S}'_{ik} u, & S_{11}(\varphi) &= \hat{D}'_{ig2} v, \\ S_6(\varphi) &= \hat{B}'_{ik} \varphi, & S_{12}(\varphi) &= \hat{D}'_{ig2} \varphi, & S_{13}(\varphi) &= \hat{A}'_{ik} \varphi, \end{aligned}$$

$$T_1(\varphi) = n_s |1^* - R^*|, \quad T_2(\varphi) = m_s^{(1)} |1^* - R^*|,$$

$$T_3(\varphi) = -\frac{m_s^{(2)} F_{i2}}{12S_{i2}} \hat{F}'_{12} \hat{R}'_{11} (\hat{C}')^{-1} |1^* - R^*|$$

$$T_4(\varphi) = -\frac{m_s^{(2)}}{2l_2} (\hat{C}')^{-1} |1^* - R^*| \quad (P1.120)$$

Vrednosti ovih funkcija određuju se primenom Laplasovih transformacija. Koriste se slike date izrazima (P1.74) i (P1.117) i

dobija se količnik polinoma na koji se može primeniti stav (D1.12) inverzne Laplasove transformacije . Vrednosti ovih funkcija u vremenu t i vremenu $t=t_0$ (za $\varphi_n=0$) date su u narednom prilogu.

Sile na krajevima štapova se određuju na osnovu (7.30) tj. :

$$[R]_j = [\hat{K}']_j [q]_j - [Q]_j$$

Pri tome su korišćene veličine date relacijom (P1.120).

Vrednosti reakcija oslonaca i sila na krajevima štapova usled skupljanja ($H=S$) u trenutku $t=t_0$ ($\varphi_n=0$) i u vremenu t date su u narednom prilogu. Dijagrami sila u preseku i reakcije u vremenu t usled skupljanja dati su na slici P1.16.

D skopljanje

H = S

POLINOM DU

0.193204340920819D-02
0.162456013083242D-01
0.460444986821277D-01
0.528069948056259D-01
0.226998269841500D-01
0.162358569494053D-02

POLINOM DV

-0.182998591863576D-02
-0.218081185201870D-01
-0.964637040483438D-01
-0.195794701612573D+00
-0.180733538478166D+00
-0.614271233737899D-01

POLINOM DFI

-0.267673286480754D-02
-0.296626689437606D-01
-0.121550265126083D+00
-0.230637573632892D+00
-0.202146524943788D+00
-0.660735728495394D-01

NEPOZNATA POMERANJA

U1 0.293766247261289D+04
V2 -0.536137690269970D+04
FI -0.690346220344197D+04

PRORACUN REAKCIJA OSLONACA

funkcije:

S1 0.252976229977289D+02
S2 0.559065250912728D+01
S3 -0.284993321750150D+02
S4 -0.370415578930235D+02
S5 -0.197152342386588D+01
S6 -0.119155602809458D+02
T3 0.283218335674957D+02
T4 -0.382722243811282D+02
T1 0.798009010157075D+03
T2 0.922553768897084D+02
S7 0.300958334563685D+02
S8 0.110785702609937D+02
S9 0.138058578578898D+02
S10 -0.490071402464695D+01
S11 -0.210809330720002D+02
S12 -0.273453389356700D+02
S13 -0.251259976132254D+02

REAKCIJE OSLONACA

H4 -0.817715980645676D+03
V5 -0.459029675022530D+01
M6 0.831181818807325D+02

H7 $\emptyset.812810510691340D+03$
 V8 $-\emptyset.313435098363724D+02$
 H9 $\emptyset.490473065432420D+01$
 V10 $\emptyset.359338244980496D+02$

SILE NA KRAJEVIMA STAPOVA

STAP 1

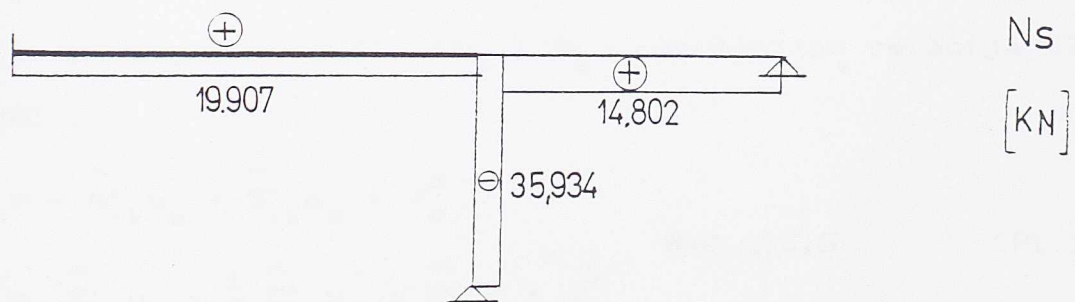
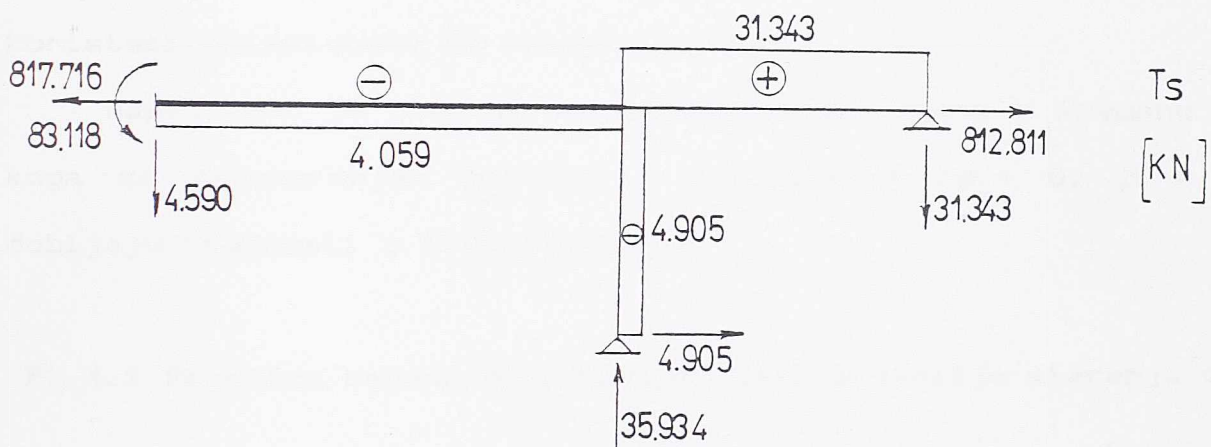
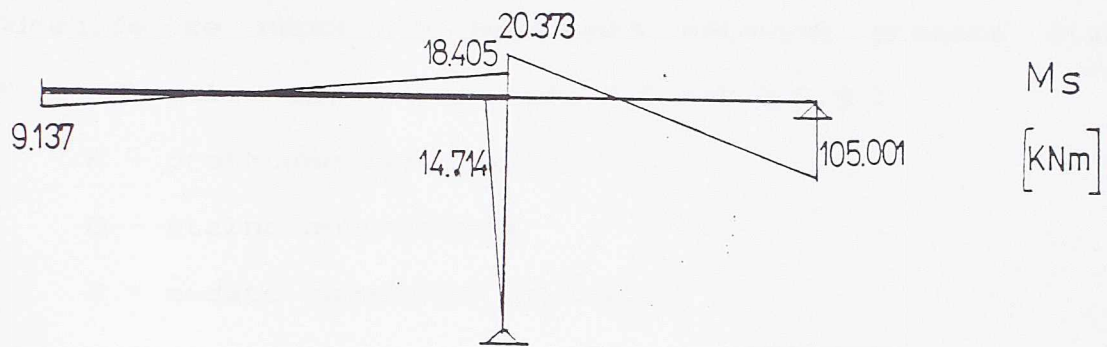
N4 $-\emptyset.197069704886016D+02$
 T5 $-\emptyset.459029675022530D+01$
 M6 $-\emptyset.913719500897583D+01$
 N1 $\emptyset.197069704886016D+02$
 T2 $\emptyset.459029675022530D+01$
 M3 $-\emptyset.184045854935237D+02$

STAP 2

N1 $-\emptyset.148015005342655D+02$
 T2 $\emptyset.313435098363724D+02$
 M3 $\emptyset.203728537637974D+02$
 N7 $\emptyset.148015005342655D+02$
 T8 $-\emptyset.313435098363724D+02$
 M0 $\emptyset.105001185581692D+03$

STAP 3

T1 $-\emptyset.490473065432420D+01$
 N2 $-\emptyset.359338244980496D+02$
 M3 $-\emptyset.147141919629726D+02$
 T9 $\emptyset.490473065432420D+01$
 N10 $\emptyset.359338244980496D+02$



Sl.P1.16 Dijagrami sila u preseku i reakcije oslonaca
usled skupljanja u vremenu t

P1.4. Proračun npona

Odrediće se naponi u pojedinim delovima preseka štapova (1), (2) i (3) usled zadatih uticaja H ($H=P, Q, C, S$) :

P - prethodno naprezanje

Q - stalno opterećenje

C - zadato pomeranje oslonaca

S - skupljanje

u trenutku $t = t_0$ (9.13) i vremenu t . U vremenu t ovi naponi će se odrediti za funkciju puzanja teorije starenja (TS) korišćenjem izraza (9.1) - (9.12) i za funkciju puzanja teorije nasleđa koristeći asimptotsku EM metodu (9.14).

Napravljen je program za sračunavanje napona u vremenu t iz koga se zanemarenjem puzanja i relaksacije ($\varphi_r = 0, \rho = 0$) dobijaju vrednosti u trenutku t_0 .

P1.4.1 Proračun napona za funkciju puzanja teorije starenja (TS)

Štap (1) - presek kod uklještenja

Normalna sila N_H i moment M_H u preseku su veličine promenljive u toku vremena i određene tačnom metodom deformacija kao sile na kraju štapa (1) (N_4 i M_6) korišćenjem relacija (7.30) i (P1.39) :

$$\begin{aligned} N_H &= -\hat{N}'_{ik} u_H + \hat{S}'_{ik} \varphi_H + \mathcal{N}_H^* \\ M_H &= \hat{S}'_{ik} u_H - \frac{1}{l} \hat{C}'_{ik} v_H + \hat{B}'_{ik} \varphi_H + \mathcal{M}_H^* \end{aligned} \quad \begin{array}{l} H=P, Q, C, S \\ (P1.121) \end{array}$$

gde je :

za $H=P$ na osnovu (P1.80)

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_P^* &= -\frac{b}{2} R_P^* \\ \mathcal{M}_P^* &= \frac{b}{2} \frac{J_{i1}}{S_{i1}} \hat{I}'_{22} \hat{F}'_{12} \hat{R}_P^* \end{aligned} \quad (P1.122)$$

za $H=Q$ na osnovu (P1.90)

$$\mathcal{N}_a^* = 0$$

$$\mathcal{M}_a^* = \frac{q_1 l^2}{2} 1^* \quad \text{(P1.123)}$$

za $H=C$ na osnovu (7.29), (P1.39) i (P1.99)

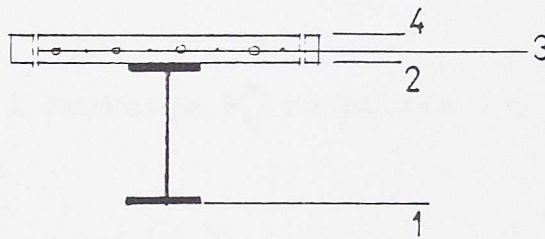
$$\mathcal{N}_c^* = -0.002 A_{ik}^* \quad \text{(P1.124)}$$

$$\mathcal{M}_c^* = 0.002 S_{ik}^*$$

za $H=S$

$$\mathcal{N}_s^* = \mathcal{M}_s^* = 0 \quad \text{(P1.125)}$$

Odrediće se naponi u pojedinim delovima preseka (n, m, p, b) usled pojedinačnih uticaja H ($H=P, Q, C, S$).



sl P1.17

Napon u nosaču (n) i mekoj armaturi (m) određuje se iz izraza (9.6) u koji treba uneti izraz (P1.121).

$$\sigma_{vH} = \nu_v \left(\sum_{h=1}^2 n_h \hat{F}'_h N + \sum_{h=1}^2 m_h \hat{F}'_h M \right), \quad \begin{matrix} v = n, m \\ H = P, Q, C, S \end{matrix} \quad \text{(P1.126)}$$

Unošenjem izraza (9.6) za normalnu silu N_H i moment M_H pri proračunu napona potrebno je odrediti vrednosti sledećih integrala :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \hat{F}'_1 \hat{N}'_{ik} u_H \\
S_2 &= \hat{F}'_1 \hat{S}'_{ik} \varphi_H \\
S_3 &= \hat{F}'_1 \hat{S}'_{ik} u_H \\
S_4 &= \hat{F}'_1 \hat{C}'_{ik} v_H \\
S_5 &= \hat{F}'_1 \hat{B}'_{ik} \varphi_H \\
S_6 &= \hat{F}'_2 \hat{N}'_{ik} u_H \\
S_7 &= \hat{F}'_2 \hat{S}'_{ik} \varphi_H \\
S_8 &= \hat{F}'_2 \hat{S}'_{ik} u_H \\
S_9 &= \hat{F}'_2 \hat{C}'_{ik} u_H \\
S_{10} &= \hat{F}'_2 \hat{B}'_{ik} u_H
\end{aligned}
\quad H = P, Q, S, C \quad (P1.127)$$

Vrednosti ovih funkcija određene su primenom Laplasovih transformacija pri čemu su korišćene odgovarajuće slike date izrazima (P1.67), (P1.73), (P1.86), (P1.94), (P1.104) i (P1.117).

Sračunate su i funkcije :

$$\hat{F}'_h(\mathcal{M}_H^*) \quad \text{i} \quad \hat{F}'_h(\mathcal{M}_H) \quad \text{za } H=P, Q, C, S, \quad h=1, 2$$

gde su za različite uticaje H korišćeni izrazi (P1.121-P1.125).

Za usvojenu funkciju puzanja teorije starenja pri $E_0 = \text{const}$ osnovne funkcije B_h^* (2.58) su oblika :

$$B_h^* = e^{-\gamma'_h \varphi_r} \quad (P1.128)$$

Na osnovu izraza (2.59) i funkcije F_h^* su oblika :

$$F_h^* = \frac{1}{\gamma'_h} 1^* - \frac{\gamma_h}{\gamma'_h} B_h^* \quad (P1.129)$$

Tako se direktno, bez integracija mogu odrediti vrednosti B_h^* i F_h^* a time i funkcije :

$$\hat{F}'_h(\mathcal{M}_P^*) = -\frac{b}{2} \hat{F}'_h \hat{R}'_P = -\frac{b}{2} [(1-\rho)F_h^* + \rho B_h^*] \quad h=1, 2 \quad (P1.130)$$

(gde su korišćene relacije (2.37) i (2.58)),

$$\hat{F}'_h(\mathcal{M}_Q^*) = \frac{q_1 l_1^2}{12} F_h^* \quad (P1.131)$$

$$\hat{F}'_h(\mathcal{M}_C^*) = 0.002 \hat{F}'_h \hat{S}'_{ik} = 0.002 \frac{E S_{i1} \gamma_{12}^{(1)}}{l_1} (F_h^* - B_h^*) \quad (P1.132)$$

(gde su korišćene relacije (4.17d), (2.43) i (2.58)).

Funkcije $\hat{F}'_h(\mathcal{M}_P^*)$ i $\hat{F}'_h(\mathcal{M}_C^*)$ su određene primenom Laplasovih transformacija .

Napon u betonu se određuje na osnovu izraza (9.8).

$$\sigma_{bH} = \nu_b \left(\sum_{h=1}^2 n_h \widehat{B}'_h N + \sum_{h=1}^2 m_h \widehat{B}'_h M \right) + \sigma_s \quad (P1.133)$$

H=P,Q,C,

Unošenjem izraza (9.6) za normalnu silu N_H i M_H pri proračunu napona potrebno je odrediti vrednosti sledećih integrala :

$$\begin{aligned} T_1 &= \widehat{B}'_1 \widehat{N}'_{ik} u_H & T_6 &= \widehat{B}'_2 \widehat{N}'_{ik} u_H \\ T_2 &= \widehat{B}'_1 \widehat{S}'_{ik} \varphi_H & T_7 &= \widehat{B}'_2 \widehat{S}'_{ik} \varphi_H \\ T_3 &= \widehat{B}'_1 \widehat{S}'_{ik} u_H & T_8 &= \widehat{B}'_2 \widehat{S}'_{ik} u_H \\ T_4 &= \widehat{B}'_1 \widehat{C}'_{ik} v_H & T_9 &= \widehat{B}'_2 \widehat{C}'_{ik} u_H \\ T_5 &= \widehat{B}'_1 \widehat{B}'_{ik} \varphi_H & T_{10} &= \widehat{B}'_2 \widehat{B}'_{ik} u_H \end{aligned} \quad (P1.134)$$

H = P, Q, S, C

Vrednosti ovih funkcija određene su primenom Laplasovih transformacija pri čemu su korišćene odgovarajuće slike funkcija kao pri sračunavanju funkcija (P1.127) .

Sračunate su i funkcije :

$$\widehat{B}'_h(\mathcal{M}_H^*) \quad \text{i} \quad \widehat{B}'_h(\mathcal{M}_H) \quad \text{za } H=P, Q, C, S, \quad h=1, 2$$

Koristeći već sračunate vrednosti funkcija \widehat{F}'_h i \widehat{B}'_h određene su sledeće funkcije :

$$\widehat{B}'_h(\mathcal{M}_P^*) = -\frac{b}{2} \widehat{B}'_h \widehat{R}'_p = -\frac{b}{2} [(1-\rho)B_h^* + \rho B_h^* R^*] \quad h=1, 2 \quad (P1.135)$$

$$\widehat{B}'_h(\mathcal{M}_Q^*) = \frac{q_1 l_1^2}{12} B_h^* \quad (P1.136)$$

$$\widehat{B}'_h(\mathcal{M}_C^*) = 0.002 \widehat{B}'_h S_{ik}^* = 0.002 \frac{E_u S_{i1} \gamma_{12}^{(1)}}{l_1} (B_h^* - B_h^* R^*) \quad (P1.137)$$

Funkcije $\widehat{B}'_h R^*$, $\widehat{B}'_h(\mathcal{M}_P^*)$ i $\widehat{B}'_h(\mathcal{M}_C^*)$ su određene primenom Laplasovih transformacija .

Napon σ_s u betonu usled skupljanja dat je izrazom (9.10) tj:

$$\sigma_s = -\nu_b E_u r |1^* - R^*| \quad (P1.138)$$

Funkcija R^* data je izrazom (P1.53) tj :

$$R^* = e^{-\varphi_r} \quad (P1.139)$$

a koeficijent r izrazom (P1.110).

Napon u čeliku za prethodno naprezanje određuje se na osnovu izraza (9.12) :

$$\sigma_{pH} = \nu \left\{ (1-\rho) \left[\sum_{h=1}^2 n_h \hat{F}'_{hH} N_h + \sum_{h=1}^2 m_h \hat{F}'_{hH} M_h \right] + \rho \left[\sum_{h=1}^2 n_h \hat{B}'_{hH} N_h + \sum_{h=1}^2 m_h \hat{B}'_{hH} M_h \right] \right\} \quad (P1.140)$$

Funkcije \hat{F}'_{hH} , \hat{F}'_{hH} , \hat{B}'_{hH} i \hat{B}'_{hH} već su sračunate.

Napon u čeliku za prethodno naprezanje usled uticaja prethodnog naprezanja (H=P) određuje se polazeći od izraza (P1.29)

$$\sigma_{pP} = \frac{P}{F_p} + E_p (\varepsilon_p - \varepsilon_p^o)$$

Na osnovu već uvedene pretpostavke (P1.78) da sile u preseku u vremenu t linearно zavise od funkcije relaksacije R_p^* čelika za prethodno naprezanje množenjem gornjeg izraza operatorom \hat{R}'_p dobijamo:

$$\sigma_{pP} = \hat{R}'_p \frac{P}{F_p} + E_p \hat{R}'_p (\varepsilon_p - \varepsilon_p^o) \quad (P1.141)$$

$$\sigma_{pP} = \hat{R}'_p \frac{P}{F_p} + \nu \hat{R}'_p \sigma_{up} - \nu \hat{R}'_p \sigma_{up}^o \quad (P1.142)$$

pa je :

$$\sigma_{pH} = \nu \left\{ \hat{R}'_p \frac{P}{F_p} + (1-\rho) \left[\sum_{h=1}^2 n_h \hat{F}'_{hH} N_h + \sum_{h=1}^2 m_h \hat{F}'_{hH} M_h \right] + \rho \left[\sum_{h=1}^2 n_h \hat{B}'_{hH} N_h + \sum_{h=1}^2 m_h \hat{B}'_{hH} M_h \right] - \hat{R}'_p \sigma_{up}^o \right\} \quad (P1.143)$$

gde je $\sigma_{up}^o = \frac{N^o}{F_i} + \frac{M^o}{J_i} y_p$ napon u trenutku $t=t_o$.

Sve potrebne funkcije i naponi u pojedinim delovima (n,m,b,p) preseka (sl P1.17) za pojedine uticaje H (H=P,Q,C,S) određeni su pomoću napravljenog programa a vrednosti su date u narednom prilogu.

Presek na stapu 1 kod ukljestejenja

potrebne funkcije

| | | | |
|-------|------------------------|------|------------------------|
| S10 | -0.914851108076922D+03 | S1 | -0.238445207994459D+04 |
| S20 | 0.153741016352373D-05 | S2 | -0.114019200567758D+03 |
| S30 | -0.484644994435069D-06 | S3 | 0.225798220291794D+03 |
| S40 | -0.296309390225543D+01 | S4 | 0.936919634118271D+02 |
| S50 | 0.558530171905111D+02 | S5 | 0.274670659695995D+03 |
| S60 | -0.914850994701562D+03 | S6 | -0.103967183641861D+04 |
| S70 | 0.168759962527326D-03 | S7 | -0.598724017767899D+02 |
| S80 | 0.135582903122451D-04 | S8 | 0.116402665403052D+03 |
| S90 | -0.296310018078457D+01 | S9 | 0.475111964401979D+02 |
| S100 | 0.558529984318876D+02 | S10 | 0.128262055231374D+03 |
| F1NPO | -0.182190045000000D+02 | F1NP | -0.404099120617407D+02 |
| F2NPO | -0.182190045000000D+02 | F2NP | -0.169854977319408D+02 |
| F1MPO | 0.126818340209854D-13 | F1MP | -0.398893198648418D+01 |
| F2MPO | -0.158522925262317D-14 | F2MP | -0.201699463912016D+01 |

Napon u nosacu i mekoj armaturi

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| SN10 | -0.174581450541982D+05 | SN1 | -0.382214335138505D+05 |
| SN20 | -0.100517373471637D+05 | SN2 | -0.187850928482865D+05 |
| SM30 | -0.934636518492493D+04 | SM3 | -0.169340127857810D+05 |

potrebne funkcije

| | | | |
|-------|------------------------|------|------------------------|
| T10 | -0.914853299452151D+03 | T1 | -0.356465621894082D+03 |
| T20 | -0.131030355000618D-03 | T2 | -0.322148506021741D+02 |
| T30 | -0.252402074040959D-03 | T3 | 0.605527678103319D+02 |
| T40 | -0.296342160907474D+01 | T4 | 0.239397539768091D+02 |
| T50 | 0.558530296791554D+02 | T5 | 0.537402813839275D+02 |
| T60 | -0.914921879741467D+03 | T6 | -0.619703070144129D+02 |
| T70 | -0.771506792518454D-01 | T7 | -0.131443442591992D+02 |
| T80 | -0.810139124581433D-02 | T8 | 0.233825823905818D+02 |
| T90 | -0.297085277798733D+01 | T9 | 0.850608677687087D+01 |
| T100 | 0.558640600071084D+02 | T10 | 0.148881575885771D+02 |
| B1NPO | -0.182190045000000D+02 | B1NP | -0.509415351948536D+01 |
| B2NPO | -0.182190045000000D+02 | B2NP | -0.414161276909593D+00 |
| B1MPO | 0.000000000000000D+00 | B1MP | -0.101070540778949D+01 |
| B2MPO | 0.159024914525648D-11 | B2MP | -0.362390577136660D+00 |

Napon u betonu

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| SB40 | -0.129614816985317D+04 | SB4 | -0.211290105050185D+03 |
| SB20 | -0.150776991111644D+04 | SB2 | -0.290750363822074D+03 |

Napon u celiku za prethodno naprezanje

| | | | |
|------|-----------------------|-----|-----------------------|
| SF30 | 0.200000000000000D+06 | SF3 | 0.176859571558229D+06 |
|------|-----------------------|-----|-----------------------|

N A P O N I H = 0

Presek na stapu 1 kod ukljestenja

potrebne funkcije

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| S10 | -0.902299747845646D+00 | S1 | -0.225450112089899D+01 |
| S20 | -0.337127912254426D-08 | S2 | -0.566510423794939D+01 |
| S30 | -0.472578199643441D-08 | S3 | 0.205494462613441D+00 |
| S40 | -0.637044803384054D+02 | S4 | -0.128423199741839D+03 |
| S50 | 0.542573743059537D+01 | S5 | 0.122259015958621D+02 |
| S60 | -0.902258723676977D+00 | S6 | -0.102061802808584D+01 |
| S70 | 0.352150446221183D-04 | S7 | -0.274509603363404D+01 |
| S80 | 0.485151542868607D-05 | S8 | 0.107123164110866D+00 |
| S90 | -0.637044787930378D+02 | S9 | -0.524882267649986D+02 |
| S100 | 0.542573309347856D+01 | S10 | 0.510599876293590D+01 |

Napon u nosacu i mekoj armaturi

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| SN10 | -0.807162855191442D+04 | SN1 | -0.825162702366318D+04 |
| SN20 | 0.346402480779270D+03 | SN2 | 0.180065470264717D+04 |
| SM30 | 0.114811972160642D+04 | SM3 | 0.275801486660180D+04 |

potrebne funkcije

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| T10 | -0.902300353275182D+00 | T1 | -0.393408392967570D+00 |
| T20 | -0.116613181726868D-04 | T2 | -0.125659427872422D+01 |
| T30 | -0.612313029754753D-07 | T3 | 0.568954574081343D-01 |
| T40 | -0.637044697992217D+02 | T4 | -0.139610112560753D+02 |
| T50 | 0.542573834877611D+01 | T5 | 0.149185547176257D+01 |
| T60 | -0.922809929672843D+00 | T6 | -0.107057504614829D+00 |
| T70 | -0.185983394095603D-01 | T7 | -0.374369274498775D+00 |
| T80 | -0.242338393603539D-02 | T8 | 0.231125799052275D-01 |
| T90 | -0.637042684425317D+02 | T9 | 0.191851566204882D+00 |
| T100 | 0.542854503654013D+01 | T10 | 0.819232334625214D-01 |

Napon u betonu

| | | | |
|------|-----------------------|-----|-----------------------|
| SB40 | 0.292476439226455D+03 | SB4 | 0.622759464204381D+02 |
| SB20 | 0.519594461038706D+02 | SB2 | 0.456521174765606D+02 |

Napon u celiku za prethodno naprezanje

| | | | |
|------|-----------------------|-----|-----------------------|
| SP30 | 0.120552570768674D+04 | SP3 | 0.262586776493027D+04 |
|------|-----------------------|-----|-----------------------|

Presek na stapu 1 kod ukljestejenja

potrebne funkcije

| | | | |
|-------|------------------------|------|------------------------|
| S10 | -0.162627200884477D-06 | S1 | 0.175444950011466D-05 |
| S20 | -0.402219679540763D-13 | S2 | -0.810802690537502D-06 |
| S30 | -0.313327153964336D-14 | S3 | -0.137639222947226D-06 |
| S40 | -0.601726430799496D-04 | S4 | -0.121004633536130D-03 |
| S50 | 0.977914675785385D-06 | S5 | 0.164806963028335D-05 |
| S60 | -0.162630999657526D-06 | S6 | 0.862835954571712D-06 |
| S70 | -0.631986230727542D-11 | S7 | -0.376269202718967D-06 |
| S80 | -0.447484563834547D-12 | S8 | -0.794687424209186D-07 |
| S90 | -0.601726414217899D-04 | S9 | -0.494402471499936D-04 |
| S100 | 0.977915349081203D-06 | S10 | 0.640290307297857D-06 |
| F1NCO | 0.000000000000000D+00 | F1NC | -0.781288871793373D+03 |
| F2NCO | 0.000000000000000D+00 | F2NC | -0.369691415002533D+03 |
| F1MCO | -0.170415928066795D+04 | F1MC | -0.345806914985326D+04 |
| F2MCO | -0.170415928066795D+04 | F2MC | -0.141987662280134D+04 |

Napon u nosacu i mekoj armaturi

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| SN10 | -0.629565240307846D+05 | SN1 | -0.400218599075442D+05 |
| SN20 | 0.239414785971648D+04 | SN2 | 0.248315012005628D+05 |
| SM30 | 0.861802137013379D+04 | SM3 | 0.310080117793461D+05 |

potrebne funkcije

| | | | |
|-------|------------------------|------|------------------------|
| T10 | -0.162594626629776D-06 | T1 | 0.407994432393237D-06 |
| T20 | 0.469234542797481D-11 | T2 | -0.154963548496363D-06 |
| T30 | 0.376922372423761D-11 | T3 | -0.496578960281255D-07 |
| T40 | -0.601726346507891D-04 | T4 | -0.131308655808488D-04 |
| T50 | 0.977914227725831D-06 | T5 | 0.129458976384293D-06 |
| T60 | -0.160250144618449D-06 | T6 | 0.122309892980164D-06 |
| T70 | 0.267752365171142D-08 | T7 | -0.333418620176710D-07 |
| T80 | 0.277008845687590D-09 | T8 | -0.244077457505031D-07 |
| T90 | -0.601724704767298D-04 | T9 | 0.191661239890316D-06 |
| T100 | 0.977542225583878D-06 | T10 | -0.347530080733939D-07 |
| B1NCO | 0.000000000000000D+00 | B1NC | -0.159982941934447D+03 |
| B2NCO | 0.000000000000000D+00 | B2NC | -0.407617352386458D+02 |
| B1MCO | -0.170415928066795D+04 | B1MC | -0.385680704927518D+03 |
| B2MCO | -0.170415928066850D+04 | B2MC | -0.212017525363066D+01 |

Napon u betonu

| | | | |
|------|-----------------------|-----|-----------------------|
| SB40 | 0.222626919683031D+04 | SB4 | 0.686511783866936D+03 |
| SB20 | 0.359160552956221D+03 | SB2 | 0.634954602737631D+03 |

Napon u celiku za prethodno naprezanje

| | | | |
|------|-----------------------|-----|-----------------------|
| SP30 | 0.904892243864048D+04 | SP3 | 0.294911041069796D+05 |
|------|-----------------------|-----|-----------------------|

N A P O N I

H = S

Presek na stapu 1 kod ukljestenja

potrebne funkcije

| | |
|-----|------------------------|
| S1 | 0.475932382574066D+02 |
| S2 | 0.104641305764727D+02 |
| S3 | -0.326975116497699D+01 |
| S4 | -0.627218048346116D+02 |
| S5 | -0.256269932856242D+02 |
| S6 | 0.255618831617425D+02 |
| S7 | 0.564881317021924D+01 |
| S8 | -0.198855731785573D+01 |
| S9 | -0.288585231849678D+02 |
| S10 | -0.120616896180486D+02 |

Napon u nosacu i mekoj armaturi

| | |
|-----|-----------------------|
| SN1 | 0.138639336058834D+04 |
| SN2 | 0.204016692476245D+03 |
| SM3 | 0.914093908049066D+02 |

potrebne funkcije

| | |
|-----|------------------------|
| T1 | 0.142977243022789D+02 |
| T2 | 0.318624419802650D+01 |
| T3 | -0.133102196296690D+01 |
| T4 | -0.116151268116217D+02 |
| T5 | -0.515080522105890D+01 |
| T6 | 0.600754175320291D+01 |
| T7 | 0.135797716993555D+01 |
| T8 | -0.729160332382109D+00 |
| T9 | -0.228938998776920D+01 |
| T10 | -0.125361829177729D+01 |

Napon u betonu

| | |
|-----|-----------------------|
| SB4 | 0.249782230822017D+04 |
| SB2 | 0.250318486641744D+04 |

Napon u celiku za prethodno naprezanje

| | |
|-----|-----------------------|
| SP3 | 0.841788714342251D+02 |
|-----|-----------------------|

Štap (2) - presek kod čvora 1 i iznad oslonca

Proračun napona u pojedinim delovima preseka štapa (2), (slP1.17) (n,m,b) analogan je prikazanom proračunu za presek štapa (1) pri tome su sile N_H i M_H u preseku kod čvora 1 na osnovu relacija (7.30) i (P1.40):

$$M_H = -\hat{S}'_{ig,2} u + \frac{1}{l_2} \hat{D}'_{ig,2} v + \hat{D}'_{ig,2} \varphi + \mathcal{M}_H^* \quad (a)$$

$$N_H = \hat{N}'_{ig,2} u - \frac{1}{l_2} \hat{S}'_{ig,2} v - \hat{S}'_{ig,2} \varphi + \mathcal{N}_H^* \quad (b) \quad (P1.144)$$

gde je:

$$\mathcal{N}_H^* = 0 \text{ i } \mathcal{M}_H^* = 0 \quad \text{za } H = P, C \quad (P1.145)$$

a na osnovu (P1.91), (P1.114) i (P1.111):

$$\mathcal{N}_Q^* = \frac{q_2 l_2^3}{48 E S_{u12}} \hat{N}'_{ig2} F_{12}^{(2)*}$$

$$\mathcal{M}_Q^* = \frac{q_2 l_2^2}{24} S_{12}^{(2)*}$$

(P1.146)

$$\mathcal{N}_S^* = \frac{m_s^{*(2)} F_{12}}{12 S_{12}} \hat{F}'_{12} \hat{R}'_{11} (\hat{C}')^{-1} |1^* - R^*|$$

$$\mathcal{M}_S^* = \frac{m_s^{*(2)}}{2l_2} (\hat{C}')^{-1} |1^* - R^*| - m_s^{(2)} |1^* - R^*|$$

Za određivanje napona u pojedinim delovima preseka (n,m,b) korišćeni su izrazi (P1.126) i (P1.133) i pri tome su određene vrednosti sledećih integrala:

$$S_1 = \hat{F}'_1 \hat{N}'_{ig,2} u_H$$

$$S_7 = \hat{F}'_2 \hat{N}'_{ig,2} u_H$$

$$S_2 = \hat{F}'_1 \hat{S}'_{ig,2} v_H$$

$$S_8 = \hat{F}'_2 \hat{S}'_{ig,2} v_H$$

$$S_3 = \hat{F}'_1 \hat{S}'_{ig,2} \varphi_H$$

$$S_9 = \hat{F}'_2 \hat{S}'_{ig,2} \varphi_H$$

(P1.147)

$$S_4 = \hat{F}'_1 \hat{S}'_{ig,2} u_H$$

$$S_{10} = \hat{F}'_2 \hat{S}'_{ig,2} u_H$$

$$S_5 = \hat{F}'_1 \hat{D}'_{ig,2} v_H$$

$$S_{11} = \hat{F}'_2 \hat{D}'_{ig,2} v_H$$

$$S_6 = \hat{F}'_1 \hat{N}'_{ig,2} \varphi_H$$

$$S_{12} = \hat{F}'_2 \hat{N}'_{ig,2} \varphi_H$$

i integrala T_1 do T_{12} koji se dobijaju iz izraza (P1.147) smenom \hat{F}'_1 sa \hat{B}'_1 i \hat{F}'_2 sa \hat{B}'_2 .

Sve ove funkcije, kao i funkcije $\hat{F}'_h(\mathcal{M}_H^*)$, $\hat{F}'_h(\mathcal{M}_H^*)$, $\hat{B}'_h(\mathcal{M}_H^*)$ i $\hat{B}'_h(\mathcal{M}_H^*)$ ($h=1,2$; $H=P,Q,C,S$) određene su primenom Laplasovih transformacija u okviru napravljenog programa i njihove vrednosti kao i vrednosti odgovarajućih napona u pojedinim delovima preseka date su u prilogu.

Pomoću istog programa određeni su i naponi u preseku iznad oslonca štapa (2) gde je normalna sila N_H data izrazom (P1.144a) samo sa suprotnim znakom, a moment postoji samo pri skupljanju :

$$\mathcal{M}_S^* = m_s^{(2)} |1^* - R^*|. \quad (\text{P1.148})$$

Presek na stepu 2

potrebne funkcije

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| S10 | -0.120570379637239D+04 | S1 | -0.328070449761854D+04 |
| S20 | -0.114552862264239D-02 | S2 | -0.317886257145136D+02 |
| S30 | -0.500236372676482D-02 | S3 | -0.319092191575973D+03 |
| S40 | 0.153178442659046D-02 | S4 | 0.633910454945329D+03 |
| S50 | -0.216530576584226D+01 | S5 | 0.790383687483030D+02 |
| S60 | 0.122534929128597D+03 | S6 | 0.724139457722337D+03 |
| S70 | -0.120570285611100D+04 | S7 | -0.116739474474588D+04 |
| S80 | -0.154791937677051D-02 | S8 | -0.161789767917762D+02 |
| S90 | -0.211896965672790D-02 | S9 | -0.147520617432247D+03 |
| S100 | -0.148049806553469D-03 | S10 | 0.286439014421985D+03 |
| S110 | -0.216711899429892D+01 | S11 | 0.349212644681628D+02 |
| S120 | 0.122528259113912D+03 | S12 | 0.295334937303075D+03 |

Napon u nosacu i mekoj armaturi

| | | | |
|------|-----------------------|-----|-----------------------|
| SN10 | 0.428936658478222D+03 | SN1 | 0.453714509243412D+04 |
| SN20 | 0.168743614528236D+05 | SN2 | 0.379367386383403D+05 |
| SM30 | 0.184405924499457D+05 | SM3 | 0.411176524400237D+05 |

potrebne funkcije

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| T10 | -0.120570297083822D+04 | T1 | -0.508613102081293D+03 |
| T20 | -0.176180976459555D-02 | T2 | -0.112569980970684D+02 |
| T30 | -0.128758842399724D-02 | T3 | -0.936153769579935D+02 |
| T40 | 0.837600829311813D-04 | T4 | 0.177342511506116D+03 |
| T50 | -0.216763396571285D+01 | T5 | 0.213847503328546D+02 |
| T60 | 0.122526951602057D+03 | T6 | 0.161182893808139D+03 |
| T70 | -0.120565260165909D+04 | T7 | -0.362179546568519D+02 |
| T80 | 0.116959331434612D-01 | T8 | -0.464142112128207D+01 |
| T90 | 0.450977169818209D-01 | T9 | -0.317422298176640D+02 |
| T100 | 0.100734615349824D-01 | T10 | 0.561691431453718D+02 |
| T110 | -0.216663824040187D+01 | T11 | 0.640865410100873D+01 |
| T120 | 0.122537508250658D+03 | T12 | 0.384826417202969D+02 |

Napon u betonu

| | | | |
|------|-----------------------|-----|-----------------------|
| SB40 | 0.300100270043691D+04 | SB4 | 0.834050953212544D+03 |
| SB20 | 0.253114001259160D+04 | SB2 | 0.718841657865702D+03 |

Napon u preseku izand oslonca

Napon u nosacu i mekoj armaturi

| | | | |
|------|-----------------------|-----|-----------------------|
| SN10 | 0.158644841120476D+05 | SN1 | 0.724467815014149D+04 |
| SN20 | 0.158644567476012D+05 | SN2 | 0.360244859696790D+05 |
| SM30 | 0.158644541414634D+05 | SM3 | 0.387654201603043D+05 |

Napon u betonu

| | | | |
|------|------------------------|-----|-----------------------|
| SB20 | 0.237967336937084D+04 | SB2 | 0.723652269665698D+03 |
| SB40 | 0.2379673363221645D+04 | SB4 | 0.897146930356363D+03 |

Presek na stapu 2

potrebne funkcije

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| S10 | -0.118931091559635D+01 | S1 | -0.309707828099925D+01 |
| S20 | 0.176834466349536D-03 | S2 | 0.559977112216289D+02 |
| S30 | 0.710701839558158D-04 | S3 | -0.160668525796964D+02 |
| S40 | 0.138534119942434D-03 | S4 | 0.576180039917167D+00 |
| S50 | -0.465844740105046D+02 | S5 | -0.113704638528764D+03 |
| S60 | 0.119027197477558D+02 | S6 | 0.334105393900312D+02 |
| S70 | -0.118894321258876D+01 | S7 | -0.115932153945435D+01 |
| S80 | 0.593010944769624D-03 | S8 | 0.228074275775307D+02 |
| S90 | -0.666862366415445D-04 | S9 | -0.672462025506435D+01 |
| S100 | 0.436121956478007D-04 | S10 | 0.263762763304037D+00 |
| S110 | -0.465840988935064D+02 | S11 | -0.392819745183056D+02 |
| S120 | 0.119027884850866D+02 | S12 | 0.120086055432529D+02 |

Napon u nosacu i mekoj armaturi

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| SN10 | -0.254752806184230D+04 | SN1 | -0.287104816753759D+04 |
| SN20 | 0.183327326035762D+03 | SN2 | 0.104272098623980D+04 |
| SM30 | 0.443408802229876D+03 | SM3 | 0.141546092095613D+04 |

potrebne funkcije

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| T10 | -0.118891025614672D+01 | T1 | -0.554813602546733D+00 |
| T20 | 0.524341701147933D-03 | T2 | 0.124141431410857D+02 |
| T30 | -0.973560921890664D-04 | T3 | -0.379733219954017D+01 |
| T40 | 0.557210455978844D-05 | T4 | 0.165660501572807D+00 |
| T50 | -0.465840549901257D+02 | T5 | -0.160975679337211D+02 |
| T60 | 0.119028196657612D+02 | T6 | 0.533553677393590D+01 |
| T70 | -0.119566235278458D+01 | T7 | -0.964568295047513D-01 |
| T80 | -0.199282701213164D-01 | T8 | 0.237832311798338D+01 |
| T90 | 0.181371897018069D-02 | T9 | -0.869899709134305D+00 |
| T100 | -0.136309873359527D-02 | T10 | 0.559138178812283D-01 |
| T110 | -0.465887630058895D+02 | T11 | -0.318905328887553D+00 |
| T120 | 0.119031841139387D+02 | T12 | 0.470746516927999D+00 |

Napon u betonu

| | | | |
|------|-----------------------|-----|-----------------------|
| SB40 | 0.105524760740662D+03 | SB4 | 0.397296142972335D+02 |
| SB20 | 0.274990001595473D+02 | SB2 | 0.300611436400261D+02 |

Napon u preseku izand oslonca

Napon u nosacu i mekoj armaturi

| | | | |
|------|-----------------------|-----|-----------------------|
| SN10 | 0.156449175680345D+02 | SN1 | 0.356515669969475D+02 |
| SN20 | 0.156475574331799D+02 | SN2 | 0.131493760341034D+03 |
| SM30 | 0.156478088489183D+02 | SM3 | 0.140621588653459D+03 |

Napon u betonu

| | | | |
|------|-----------------------|-----|-----------------------|
| SB20 | 0.234718119157417D+01 | SB2 | 0.402150970091777D+01 |
| SB40 | 0.234633556718165D+01 | SB4 | 0.479418604682708D+01 |

Presek na stapu 2

potrebne funkcije

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| S10 | -0.214295705522612D-06 | S1 | 0.239454059295848D-05 |
| S20 | 0.116225682621018D-09 | S2 | 0.527802738524098D-04 |
| S30 | -0.417414742445982D-10 | S3 | -0.231502195297254D-05 |
| S40 | -0.429845599660282D-10 | S4 | -0.378422408915945D-06 |
| S50 | -0.440017265390612D-04 | S5 | -0.107146711259802D-03 |
| S60 | 0.214536134853525D-05 | S6 | 0.459860284017254D-05 |
| S70 | -0.214076857157769D-06 | S7 | 0.100380211811194D-05 |
| S80 | 0.566494343046851D-09 | S8 | 0.214893407822168D-04 |
| S90 | 0.755289225842531D-10 | S9 | -0.918661022591417D-06 |
| S100 | 0.536171254139120D-10 | S10 | -0.197045001085944D-06 |
| S110 | -0.440014324318660D-04 | S11 | -0.370021766670667D-04 |
| S120 | 0.214533075475409D-05 | S12 | 0.152838370445004D-05 |

Napon u nosacu i mekoj armaturi

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| SN10 | 0.224658565605338D+06 | SN1 | 0.211135281782519D+06 |
| SN20 | -0.140962880091451D+05 | SN2 | -0.463879522214711D+05 |
| SM30 | -0.368348464301437D+05 | SM3 | -0.709139755148842D+05 |

potrebne funkcije

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| T10 | -0.214083922192781D-06 | T1 | 0.567767616119081D-06 |
| T20 | 0.516786346865477D-09 | T2 | 0.116909157400960D-04 |
| T30 | 0.922901030084210D-10 | T3 | -0.481656737007314D-06 |
| T40 | 0.657090732121264D-10 | T4 | -0.139801546049962D-06 |
| T50 | -0.440013976474786D-04 | T5 | -0.151507509801759D-04 |
| T60 | 0.214531870058085D-05 | T6 | 0.572722089678773D-06 |
| T70 | -0.221313557217471D-06 | T7 | 0.117259860832300D-06 |
| T80 | -0.190976857430823D-07 | T8 | 0.223456585894327D-05 |
| T90 | -0.166861082096252D-08 | T9 | -0.737270821554856D-07 |
| T100 | -0.147258206813527D-08 | T10 | -0.600329582722583D-07 |
| T110 | -0.440059161831039D-04 | T11 | -0.292726206231854D-06 |
| T120 | 0.214498317648684D-05 | T12 | -0.344864912323436D-07 |

Napon u betonu

| | | | |
|------|------------------------|-----|------------------------|
| SB40 | -0.893605613500121D+04 | SB4 | -0.141052031672151D+04 |
| SB20 | -0.211446862627827D+04 | SB2 | -0.108022838902379D+04 |

Napon u preseku izand oslonca

Napon u nosacu i mekoj armaturi

| | | | |
|------|-----------------------|-----|-----------------------|
| SN10 | 0.563938547217187D+03 | SN1 | 0.589716228733844D+04 |
| SN20 | 0.563905905959775D+03 | SN2 | 0.208545263026623D+05 |
| SM30 | 0.563902797268465D+03 | SM3 | 0.222790372197712D+05 |

Napon u betonu

| | | | |
|------|-----------------------|-----|-----------------------|
| SB20 | 0.846190824470877D+02 | SB2 | 0.673275034884791D+03 |
| SB40 | 0.845711234007374D+02 | SB4 | 0.801053280458620D+03 |

Presek na stapu 2

potrebne funkcije

| | |
|-----|------------------------|
| S1 | 0.646731054833154D+02 |
| S2 | 0.238878052494000D+02 |
| S3 | 0.291070917587562D+02 |
| S4 | -0.891485700250603D+01 |
| S5 | -0.534868592401718D+02 |
| S6 | -0.669223492909298D+02 |
| S7 | 0.304174669598202D+02 |
| S8 | 0.111980578300282D+02 |
| S9 | 0.139505698754205D+02 |
| S10 | -0.494302947420913D+01 |
| S11 | -0.213442739812459D+02 |
| S12 | -0.276746351687405D+02 |

Napon u nosacu i mekoj armaturi

| | |
|-----|------------------------|
| SN1 | -0.261386101938569D+04 |
| SN2 | 0.111201807441658D+04 |
| SM3 | 0.146686371697177D+04 |

potrebne funkcije

| | |
|-----|------------------------|
| T1 | 0.196429077914102D+02 |
| T2 | 0.720639967237982D+01 |
| T3 | 0.918021021230725D+01 |
| T4 | -0.368720879508212D+01 |
| T5 | -0.112843481170639D+02 |
| T6 | -0.153809427332663D+02 |
| T7 | 0.660366713898780D+01 |
| T8 | 0.235912524284744D+01 |
| T9 | 0.323594473233642D+01 |
| T10 | -0.181675127377133D+01 |
| T11 | -0.186171329058791D+01 |
| T12 | -0.331544943356790D+01 |

Napon u betonu

| | |
|-----|-----------------------|
| SB4 | 0.263665692962444D+04 |
| SB2 | 0.261923184122937D+04 |

Napon u preseku izand oslonca

Napon u nosacu i mekoj armaturi

| | |
|-----|------------------------|
| SN1 | 0.143915424910417D+05 |
| SN2 | -0.344746109790714D+04 |
| SM3 | -0.514641389044259D+04 |

Napon u betonu

| | |
|-----|-----------------------|
| SB2 | 0.244749099060141D+04 |
| SB4 | 0.237393805922645D+04 |

Štap (3) - presek kod čvora 1

Naponi u štapu (3) određeni su na osnovu izraza koji važe za elastičan nosač :

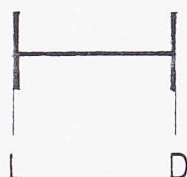
$$\sigma_{nH} = \frac{N_H}{F_a} + \frac{M_H}{J_a} y, \quad H=P, Q, C, S \quad (P1.149)$$

Naponi su sračunati za presek u čvoru 1 neposredno ispod beskonačno krutog elementa na dužini $l_{3,0}$, pri tome su sile N_H i M_H u trnutku t date u tabeli P1.2.

Tabela P1.2

| H | P | Q | C | S |
|-------------|--------|---------|---------|---------|
| N_H (KN) | 57,558 | -67,758 | 638,821 | -35,934 |
| M_H (KMm) | 66,574 | 7,466 | 213,373 | -14,637 |

Vrednosti napona σ_{nH} (sl P1.18) u vremenu t date su u tabeli P1.6 kao i vrednosti odgovarajućih napona u vremenu $t=t_0$ i vremenu t gde su sile u štapu sračunate EM metodom.



sl P1.18

P1.4.2 Proračun napona za funkciju puzanja teorije nasleđa
asimptotskom EM metodom

Naponi su sračunati i asimptotskom EM metodom koja uvodi algebarsku vezu između napona i deformacije u betonu (9.14)

$$\sigma_{b\infty} = E_{b\infty} (\varepsilon_{\infty} - \varepsilon_{s\infty}) \quad , \quad E_{b\infty} = \frac{E_{bo}}{1 + \varphi_r^{\infty}} \quad (P1.150)$$

Uvodi se bezdimenzioni koeficijent ζ_b koji zavisi od redukovano koeficijenta puzanja φ_r :

$$\zeta_b = \frac{1}{1 + \varphi_r} \quad (P1.151)$$

Ova metoda predstavlja i specijalan slučaj AAEM metode čiju je opštu formulaciju postavio Bažant [4]. Ako se uvede bezdimenzioni koeficijent starenja $\chi = 1$ iz AAEM metode prelazimo u EM metodu [24].

Površina idealizovanog preseka u vremenu t je :

$$\bar{F}_i = \sum_k \nu_k \int_{F_k} s dF + \sum_j \zeta_j \nu_j \int_{F_j} s dF = F_{i0} - \sum_j \zeta'_j F_{jr} \quad (P1.152)$$

gde je :

$$\zeta'_b = 1 - \zeta_b \quad (P1.153)$$

$$\zeta'_p = 1 - \zeta_p$$

ζ_p je koeficijent relaksacije čelika za prethodno naprezanje

ν_k ($k = n, m, p, b$) koeficijent redukcije dat izrazom (B1.1)

F_{i0} površina idealizovanog preseka u trenutku $t=t_0$ (B1.3)

F_{jr} redukovana površina (B1.2)

U trenutku t dolazi do spuštanja težišta preseka (prilog 2 sl.1.) za veličinu :

$$y_{i0} = - \frac{1}{\bar{F}} \sum_j y_{j0} \zeta'_j F_{jr} \quad j=p,b \quad (P1.154)$$

Položaj novog težišta \bar{e}_i u odnosu na gornju ivicu preseka je :

$$\bar{e}_i = e_{i0} + y_{i0} \quad (P1.155)$$

gde je e_{i0} položaj težišta u odnosu na gornju ivicu preseka u trenutku $t = t_0$.

Moment inercije idealizovanog preseka u trenutku t je :

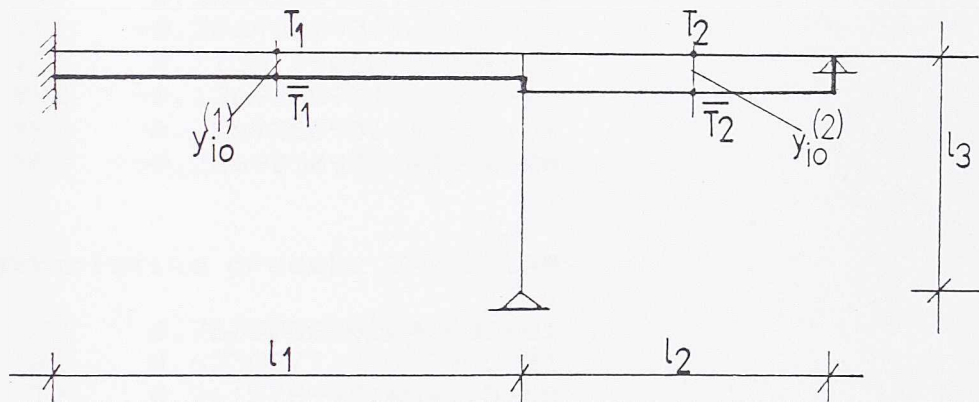
$$\bar{J}_i = J_i - \sum_j \zeta_j J_{j,r} - y_{io}^2 \bar{F}_i, \quad j=b,p \quad (P1.156)$$

gde je :

J_i moment inercije idealizovanog preseka u vremenu $t=t_0$ (B1.7)

Vrednosti geometrijskih karakteristika u $t=t_0$ vremenu t data su u narednom prilogu.

Zbog pomeranja težišta sistemna linija nosača u primeru 1 (sl.P1.1) u vremenu t određena po asimptotskoj EM metodi ima oblik prikazan na sl.P1.18.



sl.P1.19

GEOMETRIJSKE VREDNOSTI PRESEKA- EM metoda

karakteristike preseka 1-1 u t=0

| | |
|------|------------------------|
| F1 | 0.8650000000000000D-01 |
| J1 | 0.639059730250482D-02 |
| T1 | 0.195606936416185D+00 |
| YB1 | -0.115606936416185D+00 |
| YOP1 | 0.804393063583815D+00 |
| YOP2 | -0.356069364161850D-01 |
| YOP3 | -0.115606936416185D+00 |
| YOP4 | -0.195606936416185D+00 |

karakteristike preseka 1-1 u t

| | |
|-----|------------------------|
| FP | 0.4832666666666667D-01 |
| JP | 0.539777129105930D-02 |
| TP | 0.286925093116292D+00 |
| YBP | -0.206925093116292D+00 |
| YP1 | 0.713074906883708D+00 |
| YP2 | -0.126925093116292D+00 |
| YP3 | -0.206925093116292D+00 |
| YP4 | -0.286925093116292D+00 |

karakteristike preseka 2-2 u t=0

| | |
|------|------------------------|
| F2 | 0.7600000000000000D-01 |
| J2 | 0.623087719298246D-02 |
| T2 | 0.211578947368421D+00 |
| YB2 | -0.131578947368421D+00 |
| YOD1 | 0.788421052631579D+00 |
| YOD2 | -0.515789473684211D-01 |
| YOD3 | -0.131578947368421D+00 |
| YOD4 | -0.211578947368421D+00 |

karakteristike preseka 2-2 u t

| | |
|-----|------------------------|
| FD | 0.3866666666666667D-01 |
| JD | 0.488081532567050D-02 |
| TD | 0.338620689655172D+00 |
| YBD | -0.258620689655172D+00 |
| YD1 | 0.661379310344828D+00 |
| YD2 | -0.178620689655172D+00 |
| YD3 | -0.258620689655172D+00 |
| YD4 | -0.338620689655172D+00 |

karakteristike preseka 3-3 u t

| | |
|----|------------------------|
| F3 | 0.2000000000000000D-01 |
| Y3 | 0.2444266666666667D-02 |

Napravljen je program za određivanje uticaja N_{φ} i M_{φ} u nosaču i sračunavanje napona u označenim presecima za pojedine zadate uticaje H (H=P,Q,C,S).

Pri tome se uticaj prednaprezanja (P) i uticaj skupljanja (S) uvode preko fiktivnog ravnotežnog zamenjujućeg opterećenja parovima ravnotežnih sila n_{ZH} i parovima ravnotežnih momenata m_{ZH} tj. :

za H=P

$$\begin{aligned} n_{ZP} &= \zeta_p n_p \\ m_{ZP} &= \zeta_p n_p \bar{y}_p = \bar{y}_p n_{ZP} \end{aligned} \quad (P1.157)$$

gde su n_p i m_p dati izrazima (P1.32),

za H=S

$$\begin{aligned} n_{ZS} &= \zeta_b E_u F_{br} \varepsilon_s \\ m_{ZS} &= \zeta_b n_s \bar{y}_b = \bar{y}_b n_{ZS} \end{aligned} \quad (P1.158)$$

Vrednosti sila $N_{\varphi H}$ i $M_{\varphi H}$ na krajevima štapova usled pojedinih uticaja H=P,Q,C,S date su u narednom prilogu i na slici P1.20.

Naponi u nosaču (n) i mekoj armaturi (m) sračunati su na osnovu izraza :

$$\sigma_{kH} = \frac{N_{\varphi H}}{\bar{F}_i} + \frac{M_{\varphi H}}{\bar{J}_i} \bar{y} \quad \begin{array}{l} k = n, m \\ H = P, Q, C, S \end{array} \quad (P1.159)$$

Napon u betonu (b) :

$$\sigma_{bH} = \zeta_b \nu_b \left(\frac{N_{\varphi H}}{\bar{F}_i} + \frac{M_{\varphi H}}{\bar{J}_i} \bar{y} \right) \quad H = P, Q, C, \quad (a)$$

za H=S :

(P1.160)

$$\sigma_{bS} = \zeta_b \nu_b \left(\frac{N_{\varphi S}}{\bar{F}_i} + \frac{M_{\varphi S}}{\bar{J}_i} \bar{y} - E_u \varepsilon_s \right) \quad (b)$$

Napon u čeliku za prethodno naprezanje (p) sračunat je na osnovu izraza :

$$\sigma_{pH} = \zeta_p \nu_p \left(\frac{N_{\phi H}}{F_i} + \frac{M_{\phi H}}{J_i} \bar{y}_p \right) \quad H = Q, C, S \quad (a)$$

za $H = P$

$$\sigma_{pP} = \zeta_p \left[\frac{P}{F_p} + \nu_p \left(\frac{N_{\phi H}}{F_i} + \frac{M_{\phi H}}{J_i} \bar{y}_p \right) - \sigma_{pf}^o \right] \quad (b) \quad (P1.161)$$

gde je

$$\sigma_{pf}^o = \nu_p \left(\frac{N_P^o}{F_i} + \frac{M_P^o}{J_i} y_p \right) \quad (c)$$

Vrednosti sračunatih napona u pojedinim delovima preseka n,m,b,p usled pojedinačnih uticaja H (H=P,Q,C,S) date su u narednom prilogu i u tabelama P1.3-6 u kojima su dati i naponi u vremenu $t=t^o$ i vremenu t sračunati po teoriji starenja.

sile na krajevima stapova usled prednaprezanja

stap 1

| | | | |
|-----|------------------------|-----|------------------------|
| PNA | -0.920560220098342D+03 | PNG | -0.954083393926467D+03 |
| PMA | -0.106071228166976D+03 | PMG | 0.217779151535222D+03 |

stap 2

| | | | |
|-----|------------------------|-----|------------------------|
| PNC | 0.102958245724665D+04 | PND | 0.102958245724665D+04 |
| PMC | -0.167605183251078D+03 | PMD | -0.130799949196490D+03 |

stap 3

| | | | |
|-----|-----------------------|-----|------------------------|
| PN3 | 0.436176237923963D+02 | PM3 | -0.570480336086736D+02 |
|-----|-----------------------|-----|------------------------|

proracun napona usled prednaprezanja

STAP 1 presek kod ukljestenja

napon u nosacu

| | |
|-----|------------------------|
| SN1 | -0.330612863193661D+05 |
| SN2 | -0.165545047504911D+05 |

napon u betonu

| | |
|-----|------------------------|
| SB2 | -0.551816825016371D+03 |
| SB4 | -0.447011862674308D+03 |

napon u celiku za prednaprezanje

| | |
|-----|-----------------------|
| SP3 | 0.178555557547362D+06 |
|-----|-----------------------|

napon u mekoj armaturi

| | |
|-----|------------------------|
| SM3 | -0.149824303153602D+05 |
|-----|------------------------|

STAP 2

napon u nosacu

| | |
|-----|-----------------------|
| SN1 | 0.391564004655883D+04 |
| SN2 | 0.327608932546516D+05 |

napon u betonu

| | |
|-----|-----------------------|
| SB2 | 0.109202977515505D+04 |
| SB4 | 0.127517423996834D+04 |

napon u mekoj armaturi

| | |
|-----|-----------------------|
| SM3 | 0.355080602268509D+05 |
|-----|-----------------------|

stap 2-iznad oslonca

| | |
|-----|-----------------------|
| SN1 | 0.890296669013746D+04 |
| SN2 | 0.314139510224442D+05 |
| SB2 | 0.104713170074814D+04 |
| SB4 | 0.119005858539771D+04 |

SM3 0.335578542921877D+05

STAP 3

SNL -0.762172113785792D+04

SND 0.119834835170975D+05

sile na krajevima stapova usled stalnog opterecenja

stap 1

| | | | |
|-----|----------------------------------|-----|----------------------------------|
| PNA | $\emptyset.105955416939671D+01$ | PNG | $\emptyset.105955416939671D+01$ |
| PMA | $-\emptyset.619263255936877D+02$ | PMG | $-\emptyset.288995380065961D+02$ |

stap 2

| | | | |
|-----|----------------------------------|-----|----------------------------------|
| PNC | $\emptyset.368679430708960D+01$ | PND | $\emptyset.368679430708960D+01$ |
| PMC | $-\emptyset.213894378320698D+02$ | PMD | $-\emptyset.468376772225539D+00$ |

stap 3

| | | | |
|-----|----------------------------------|-----|----------------------------------|
| PN3 | $-\emptyset.677258006671125D+02$ | PM3 | $-\emptyset.754795124858048D+01$ |
|-----|----------------------------------|-----|----------------------------------|

proracun napona usled stalnog opterecenja

STAP 1 presjek kod ukljestenja

napon u nosacu

| | |
|-----|----------------------------------|
| SN1 | $-\emptyset.815887914462052D+04$ |
| SN2 | $\emptyset.147808224069398D+04$ |

napon u betonu

| | |
|-----|---------------------------------|
| SB2 | $\emptyset.492694080231326D+02$ |
| SB4 | $\emptyset.110456464437828D+03$ |

napon u celiku za prednaprezanje

| | |
|-----|---------------------------------|
| SP3 | $\emptyset.231442789195932D+04$ |
|-----|---------------------------------|

napon u mekoj armaturi

| | |
|-----|---------------------------------|
| SM3 | $\emptyset.239588808691441D+04$ |
|-----|---------------------------------|

STAP 2

napon u nosacu

| | |
|-----|----------------------------------|
| SN1 | $-\emptyset.280304705703226D+04$ |
| SN2 | $\emptyset.878126390453261D+03$ |

napon u betonu

| | |
|-----|---------------------------------|
| SB2 | $\emptyset.292708796817754D+02$ |
| SB4 | $\emptyset.526434095070803D+02$ |

napon u mekoj armaturi

| | |
|-----|---------------------------------|
| SM3 | $\emptyset.122871433783283D+04$ |
|-----|---------------------------------|

stap 2-iznad oslonca

| | |
|-----|---------------------------------|
| SN1 | $\emptyset.318803090305022D+02$ |
| SN2 | $\emptyset.112489072611494D+03$ |
| SB2 | $\emptyset.374963575371646D+01$ |
| SB4 | $\emptyset.426143742724656D+01$ |

SM3 0.120166097714445D+03

STAP 3

SNL -0.468325961839973D+04

SND -0.208932044831152D+04

sile na krajevima stapova usled zadatih pomeranja

stap 1

| | | | |
|-----|------------------------|-----|-----------------------|
| PNA | 0.322691368810713D+03 | PNG | 0.322691368810713D+03 |
| PMA | -0.411159002188137D+03 | PMG | 0.126811021360601D+04 |

stap 2

| | | | |
|-----|-----------------------|-----|------------------------|
| PNC | 0.403691032622641D+03 | PND | 0.403691032622641D+03 |
| PMC | 0.148929117389470D+04 | PMD | -0.512856121299181D+02 |

stap 3

| | | | |
|-----|-----------------------|-----|------------------------|
| PN3 | 0.665022399138513D+03 | PM3 | -0.232708653020475D+03 |
|-----|-----------------------|-----|------------------------|

proračun napona usled stalnog opterećenja

STAP 1 presek kod uklještenja

napon u nosacu

| | |
|-----|------------------------|
| SN1 | -0.476390433473462D+05 |
| SN2 | 0.163454315803153D+05 |

napon u betonu

| | |
|-----|-----------------------|
| SB2 | 0.544847719343843D+03 |
| SB4 | 0.951098353805186D+03 |

napon u celiku za prednaprezanje

| | |
|-----|-----------------------|
| SP3 | 0.216762585999294D+05 |
|-----|-----------------------|

napon u mekoj armaturi

| | |
|-----|-----------------------|
| SM3 | 0.224391910972354D+05 |
|-----|-----------------------|

STAP 2

napon u nosacu

| | |
|-----|------------------------|
| SN1 | 0.212248037468310D+06 |
| SN2 | -0.440625382447124D+05 |

napon u betonu

| | |
|-----|------------------------|
| SB2 | -0.146875127482375D+04 |
| SB4 | -0.309612000950960D+04 |

napon u mekoj armaturi

| | |
|-----|------------------------|
| SM3 | -0.684730692650003D+05 |
|-----|------------------------|

stap 2-iznad oslonca

| | |
|-----|-----------------------|
| SN1 | 0.349078190993842D+04 |
| SN2 | 0.123171585119282D+05 |
| SB2 | 0.410571950397607D+03 |

SB4 0.466612436759447D+03
SM3 0.131577658073558D+05

STAF 3

SNL -0.673536580646608D+04
SND 0.732376057203173D+05

sile na krajevima stapova usled skupljanja

stap 1

| | | | |
|-----|-----------------------|-----|------------------------|
| PNA | 0.146140393891360D+02 | PNG | 0.146140393891360D+02 |
| PMA | 0.590854399039713D+01 | PMG | -0.155407269113262D+02 |

stap 2

| | | | |
|-----|------------------------|-----|-----------------------|
| PNC | 0.103599611259948D+02 | PND | 0.103599611259948D+02 |
| PMC | -0.180624950638295D+02 | PMD | 0.828943788043200D+02 |

stap 3

| | | | |
|-----|------------------------|-----|-----------------------|
| PN3 | -0.288140969506579D+02 | PM3 | 0.122217892750499D+02 |
|-----|------------------------|-----|-----------------------|

proracun napona usled skupljanja

STAP 1 presek kod ukljestenja

napon u nosacu

| | |
|-----|-----------------------|
| SN1 | 0.108295190099516D+04 |
| SN2 | 0.163465564077845D+03 |

napon u betonu

| | |
|-----|-----------------------|
| SB2 | 0.200544885213593D+04 |
| SB4 | 0.199961084364756D+04 |

napon u celiku za prednaprezanje

| | |
|-----|-----------------------|
| SP3 | 0.733149919028045D+02 |
|-----|-----------------------|

napon u mekoj armaturi

| | |
|-----|-----------------------|
| SM3 | 0.758954367523855D+02 |
|-----|-----------------------|

STAP 2

napon u nosacu

| | |
|-----|------------------------|
| SN1 | -0.217964475732792D+04 |
| SN2 | 0.928953876555544D+03 |

napon u betonu

| | |
|-----|-----------------------|
| SB2 | 0.203096512921852D+04 |
| SB4 | 0.205070226340190D+04 |

napon u mekoj armaturi

| | |
|-----|-----------------------|
| SM3 | 0.122501088930635D+04 |
|-----|-----------------------|

stap 2-iznad oslonca

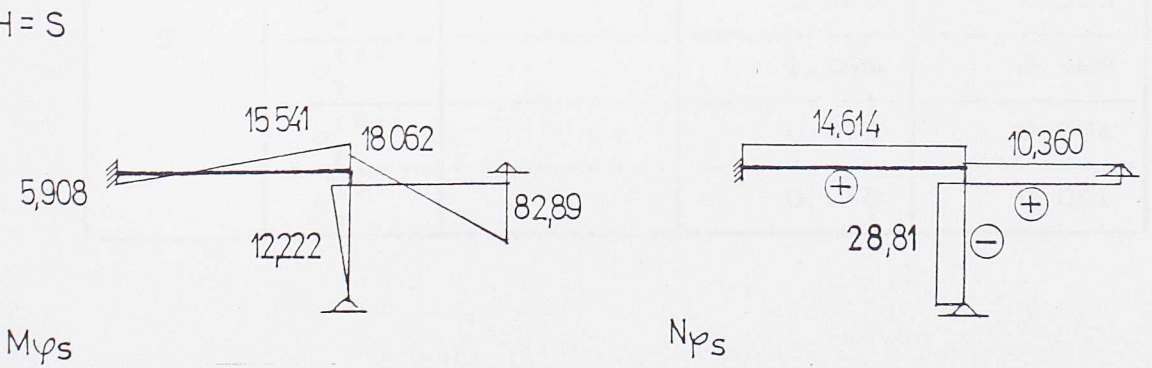
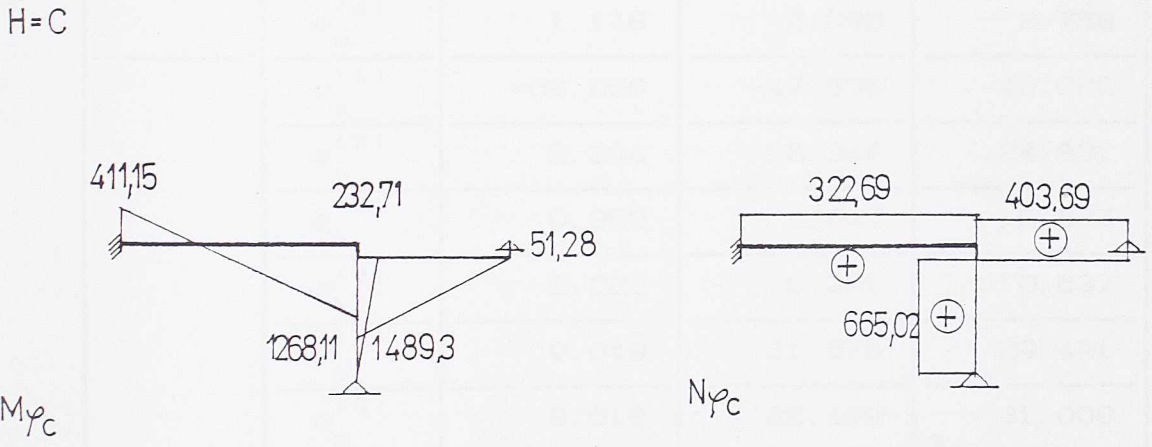
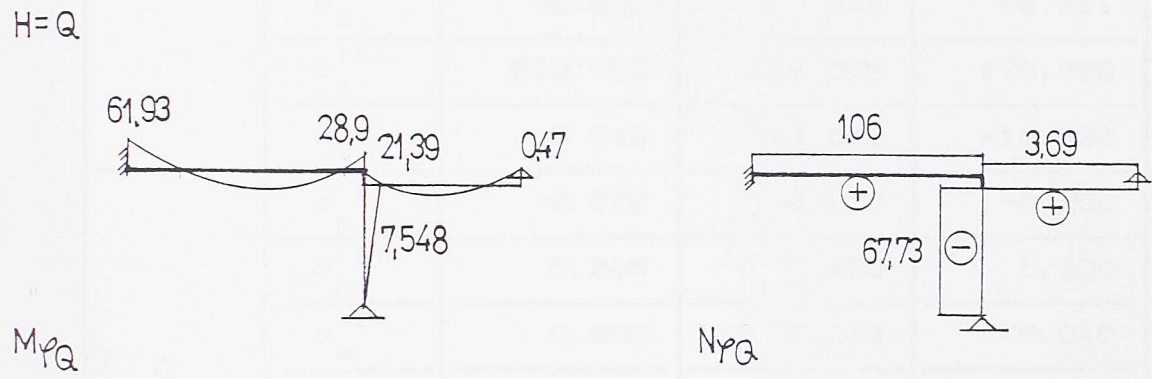
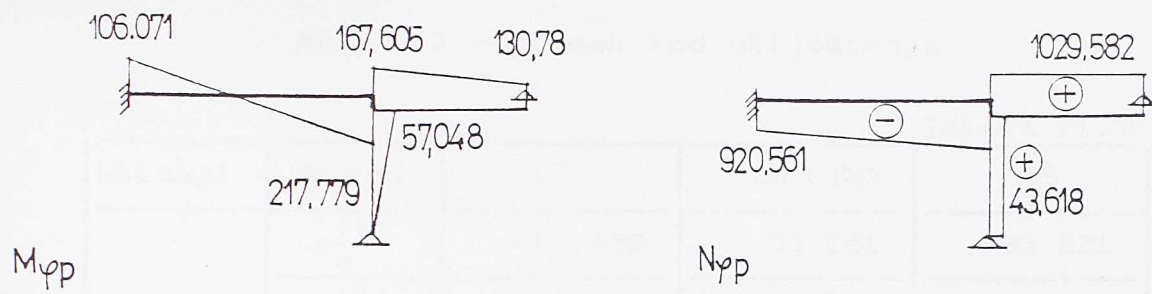
| | |
|-----|------------------------|
| SN1 | 0.115006080607428D+05 |
| SN2 | -0.276571294292340D+04 |
| SB2 | 0.190780956856922D+04 |
| SB4 | 0.181722975267293D+04 |

SM3 -0.412441018136780D+04

STAP 3

SNL 0.659373497241664D+03

SND -0.354078319230746D+04



sl P1.20 Uticaji u nosaču sračunati asimptotskom EM metodom

Tabela P1.3

| Uticaji | Naponi | t° | EM (TN) | TS |
|---------|------------------|-----------|---------|---------|
| P | $\sigma_n^{(1)}$ | -17.458 | -33.061 | -38.221 |
| | $\sigma_n^{(2)}$ | -10.052 | -16.554 | -18.785 |
| | $\sigma_b^{(2)}$ | -1.508 | -0.552 | -0.291 |
| | $\sigma_b^{(4)}$ | -1.296 | -0.447 | -0.211 |
| | $\sigma_p^{(3)}$ | 200.000 | 178.555 | 176.860 |
| | $\sigma_m^{(3)}$ | -9.346 | -14.982 | -16.934 |
| Q | $\sigma_n^{(1)}$ | -8.072 | -8.159 | -8.252 |
| | $\sigma_n^{(2)}$ | 0.346 | 1.478 | 1.800 |
| | $\sigma_b^{(2)}$ | 0.052 | 0.049 | 0.046 |
| | $\sigma_b^{(4)}$ | 0.292 | 0.110 | 0.062 |
| | $\sigma_p^{(3)}$ | 1.205 | 2.314 | 2.626 |
| | $\sigma_m^{(3)}$ | 1.148 | 2.396 | 2.758 |
| C | $\sigma_n^{(1)}$ | -62.956 | -47.639 | -40.022 |
| | $\sigma_n^{(2)}$ | 2.394 | 16.345 | 24.831 |
| | $\sigma_b^{(2)}$ | 0.359 | 0.545 | 0.635 |
| | $\sigma_b^{(4)}$ | 2.226 | 0.951 | 0.687 |
| | $\sigma_p^{(3)}$ | 9.049 | 21.676 | 29.491 |
| | $\sigma_m^{(3)}$ | 8.618 | 22.439 | 31.008 |
| S | $\sigma_n^{(1)}$ | | 1.083 | 1.386 |
| | $\sigma_n^{(2)}$ | | 0.163 | 0.204 |
| | $\sigma_b^{(2)}$ | | 2.005 | 2.503 |
| | $\sigma_b^{(4)}$ | | 1.999 | 2.498 |
| | $\sigma_p^{(3)}$ | | 0.073 | 0.084 |
| | $\sigma_m^{(3)}$ | | 0.076 | 0.091 |

štap (2) - presek kod čvora 1

Tabela P1.4

| Uticaji | Naponi | t° | EM (TN) | TS |
|---------|------------------|-----------|---------|---------|
| P | $\sigma_n^{(1)}$ | 0.429 | 3.915 | 4.537 |
| | $\sigma_n^{(2)}$ | 16.874 | 32.761 | 37.937 |
| | $\sigma_b^{(2)}$ | 2.531 | 1.092 | 0.719 |
| | $\sigma_b^{(4)}$ | 3.001 | 1.275 | 0.834 |
| | $\sigma_m^{(3)}$ | 18.440 | 35.508 | 41.118 |
| Q | $\sigma_n^{(1)}$ | -2.547 | -2.803 | -2.871 |
| | $\sigma_n^{(2)}$ | 0.183 | 0.878 | 1.043 |
| | $\sigma_b^{(2)}$ | 0.027 | 0.029 | 0.030 |
| | $\sigma_b^{(4)}$ | 0.105 | 0.053 | 0.040 |
| | $\sigma_m^{(3)}$ | 0.443 | 1.229 | 1.415 |
| C | $\sigma_n^{(1)}$ | 224.658 | 212.248 | 211.135 |
| | $\sigma_n^{(2)}$ | -14.096 | -44.063 | -46.387 |
| | $\sigma_b^{(2)}$ | -2.114 | -1.469 | -1.080 |
| | $\sigma_b^{(4)}$ | -8.936 | -3.096 | -1.411 |
| | $\sigma_m^{(3)}$ | -36.835 | -68.473 | 70.914 |
| S | $\sigma_n^{(1)}$ | | -2.180 | -2.614 |
| | $\sigma_n^{(2)}$ | | 0.929 | 1.112 |
| | $\sigma_b^{(2)}$ | | 2.031 | 2.619 |
| | $\sigma_b^{(4)}$ | | 2.051 | 2.637 |
| | $\sigma_m^{(3)}$ | | 1.225 | 1.467 |

štap (2) - presek iznad oslonca

Tabela P1.5

| Uticaji | Naponi | t° | EM (TN) | TS |
|---------|------------------|-----------|---------|--------|
| P | $\sigma_n^{(1)}$ | 15.864 | 8.903 | 7.245 |
| | $\sigma_n^{(2)}$ | 15.864 | 31.414 | 36.024 |
| | $\sigma_b^{(2)}$ | 2.380 | 1.047 | 0.724 |
| | $\sigma_b^{(4)}$ | 2.380 | 1.190 | 0.897 |
| | $\sigma_m^{(3)}$ | 15.864 | 33.558 | 38.765 |
| Q | $\sigma_n^{(1)}$ | 0.016 | 0.031 | 0.036 |
| | $\sigma_n^{(2)}$ | 0.016 | 0.112 | 0.132 |
| | $\sigma_b^{(2)}$ | 0.002 | 0.004 | 0.004 |
| | $\sigma_b^{(4)}$ | 0.002 | 0.004 | 0.005 |
| | $\sigma_m^{(3)}$ | 0.016 | 0.120 | 0.141 |
| C | $\sigma_n^{(1)}$ | 0.564 | 3.491 | 5.897 |
| | $\sigma_n^{(2)}$ | 0.564 | 12.317 | 20.854 |
| | $\sigma_b^{(2)}$ | 0.085 | 0.411 | 0.673 |
| | $\sigma_b^{(4)}$ | 0.085 | 0.467 | 0.801 |
| | $\sigma_m^{(3)}$ | 0.564 | 13.158 | 22.279 |
| S | $\sigma_n^{(1)}$ | | 11.500 | 14.392 |
| | $\sigma_n^{(2)}$ | | -2.766 | -3.447 |
| | $\sigma_b^{(2)}$ | | 1.908 | 2.447 |
| | $\sigma_b^{(4)}$ | | 1.817 | 2.374 |
| | $\sigma_m^{(3)}$ | | -4.124 | -5.146 |

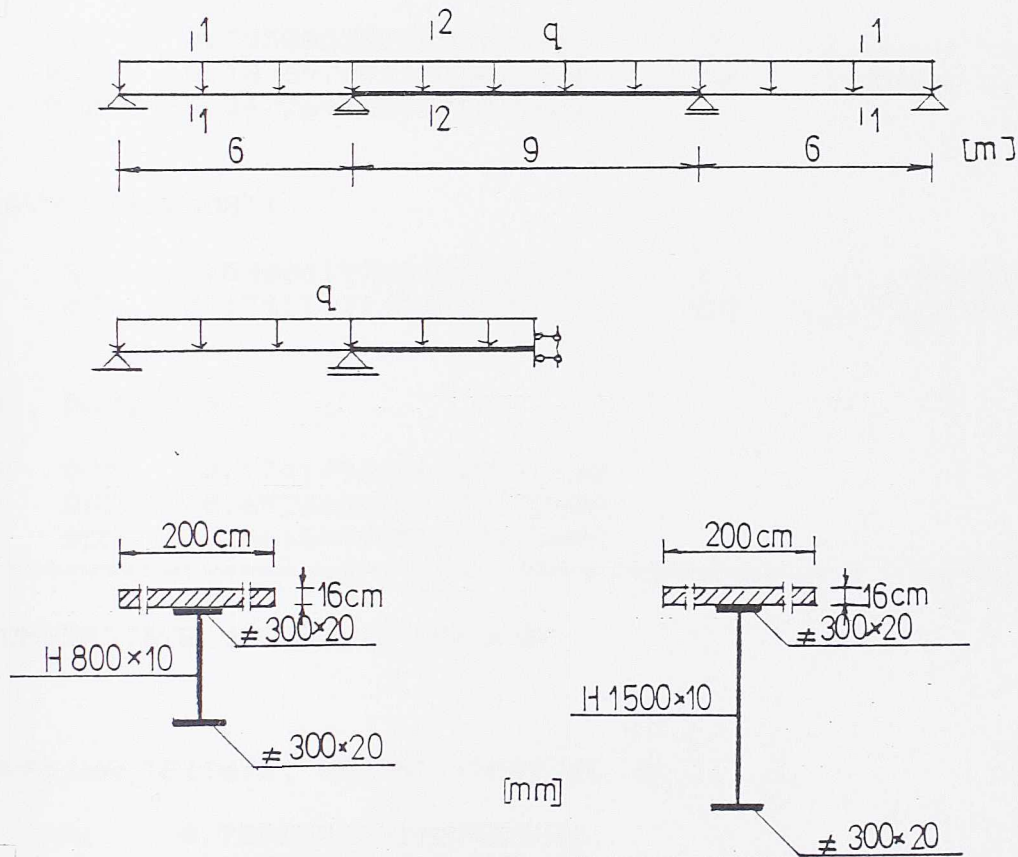
štap (3) - presek kod čvora 1

Tabela P1.6

| Uticaji | Naponi | t° | EM (TN) | TS |
|---------|------------------|-------------|---------|--------|
| P | $\sigma_n^{(L)}$ | -2.305 | -7.621 | -8.561 |
| | $\sigma_n^{(D)}$ | 1.995 | 11.983 | 14.317 |
| Q | $\sigma_n^{(L)}$ | -4.413 | -4.683 | -4.671 |
| | $\sigma_n^{(D)}$ | -2.268 | -2.089 | -2.105 |
| C | $\sigma_n^{(L)}$ | 0.498 | -6.735 | -4.723 |
| | $\sigma_n^{(D)}$ | 77.811 | 73.238 | 68.605 |
| S | $\sigma_n^{(L)}$ | | 0.659 | 0.718 |
| | $\sigma_n^{(D)}$ | | -3.541 | -4.312 |

P2. Primer 2.

U primeru 2. prikazan je spregnut kontinualni simetričan nosač. Određena su nepoznata pomeranja, reakcije oslonaca i sile na krajevima štapova usled zadatog stalnog opterećenja u vremenu t a korišćenjem istih izraza za $\varphi_n=0$ dobijaju se uticaji u trenutku $t=t_0$. Nosač, opterećenje i izgled poprečnih preseka dati su na slici P2.1.



sl. P2.1

Podaci za beton (b) :

$$E_b = 30 \text{ GPa} \quad \varphi_n = 3.5$$

Podaci za čelični nosač (n) :

$$E_n = 200 \text{ GPa}$$

Usvojen je uporedni modul elastičnosti

$$E_u = E_n = 200 \text{ GPa}$$

Geometrijske karakteristike poprečnih preseka, elementi matrice geometrijskih karakteristika i njihove glavne vrednosti (prilog 2) date su na sledećoj strani.

GEOMETRIJSKE VREDNOSTI PRESEKA

1

POVRŠINA, TEZIŠTE, MOMENT INERCIJE, Si

F1 0.6800000000000000D-01
 Ti 0.227058823529412D+00
 Ji 0.607607843137255D-02
 Si 0.203266655734120D-01

ELEMENTI MATRICE GEOMETRIJSKIH KARAKTERISTIKA

G11 0.705882352941176D+00 G11P 0.294117647058824D+00
 G22 0.187697097168543D+00 G22P 0.812302902831457D+00
 G12 -0.347269132948443D+00

GLAVNE VREDNOSTI

G1 0.880061972635756D+00 G1P 0.119938027364244D+00
 G2 0.135174774739643D-01 G2P 0.986482522526036D+00

DG1, DG2, DDG

DG1 0.174179619694579D+00
 DG2 0.692364875467212D+00
 DDG 0.866544495161791D+00

=====

GEOMETRIJSKE VREDNOSTI PRESEKA

2

POVRŠINA, TEZIŠTE, MOMENT INERCIJE, Si

F1 0.7500000000000000D-01
 Ti 0.3860000000000000D+00
 Ji 0.2233130000000000D-01
 Si 0.409249007329279D-01

ELEMENTI MATRICE GEOMETRIJSKIH KARAKTERISTIKA

G11 0.6400000000000000D+00 G11P 0.3600000000000000D+00
 G22 0.205851338703972D+00 G22P 0.794148661296028D+00
 G12 -0.358901298157142D+00

GLAVNE VREDNOSTI

G1 0.842367449394420D+00 G1P 0.157632550605580D+00
 G2 0.348388930955201D-02 G2P 0.996516110690448D+00

DG1, DG2, DDG

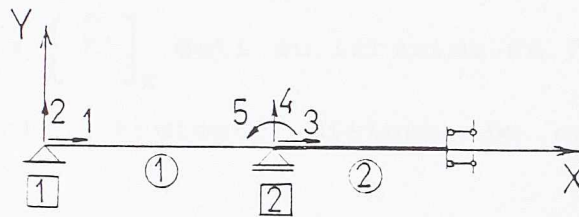
DG1 0.202367449394420D+00
 DG2 0.636516110690448D+00
 DDG 0.838883560084868D+00

=====
CELICNI NOSAC - PRESEK 3

POVRšina, TEZIŠTE, MOMENT INERCIJE

| | |
|----|------------------------|
| Fn | Ø.2700000000000000D-01 |
| Tn | Ø.9300000000000000D+00 |
| Jn | Ø.9744100000000000D-02 |

Kontinualni nosač (sl.P2.1) je simetričan pa je usvojena shema nosača data na slici P2.2.



sl.P2.2

Nepoznata pomeranja su pomeranja 3 i 5.

$$\begin{bmatrix} q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \quad (P2.1)$$

Matrica krutosti štapa (1), tipa "g" sa zglobom u čvoru i, data je izrazom (4.61) tj. :

$$\begin{bmatrix} \hat{K}' \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hat{N}'_{gk} & -\frac{1}{l_1} \hat{S}'_{gk} & -\hat{N}'_{gk} & \frac{1}{l_1} \hat{S}'_{gk} & -\hat{S}'_{gk} \\ & \frac{1}{l_1^2} \hat{D}'_{gk} & \frac{1}{l_1} \hat{S}'_{gk} & -\frac{1}{l_1^2} \hat{D}'_{gk} & \frac{1}{l_1} \hat{D}'_{gk} \\ & & \hat{N}'_{gk} & -\frac{1}{l_1} \hat{S}'_{gk} & \hat{S}'_{gk} \\ & & & \frac{1}{l_1^2} \hat{D}'_{gk} & -\frac{1}{l_1} \hat{D}'_{gk} \\ & & & & \hat{D}'_{gk} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

simetrično

(P2.2)

Elementi matrice $\begin{bmatrix} \hat{K}' \end{bmatrix}_1$ dati su izrazima (4.46) odnosno (4.51).

Matrica krutosti štapa (2), tipa "s", na osnovu izraza

(4.69) je :

$$\left[\hat{K}' \right]_2 = \begin{bmatrix} \hat{N}'_{is} & \hat{S}'_{is} \\ \hat{S}'_{is} & \hat{E}'_{is} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \quad (P2.3)$$

Elementi matrice $\left[\hat{K}' \right]_2$ dati su izrazima (4.71).

Preuređena matrica krutosti sistema je na osnovu izraza (7.21) :

$$\left[\hat{K}'_{pr} \right] = \begin{bmatrix} \hat{K}'_{nn} & \hat{K}'_{np} \\ \hat{K}'_{pn} & \hat{K}'_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \\ \hat{N}'_{gk} + \hat{N}'_{is} & \hat{S}'_{gk} + \hat{S}'_{is} & -\hat{N}'_{gk} & \frac{1}{l_1} \hat{S}'_{gk} & -\frac{1}{l_1} \hat{S}'_{gk} \\ & \hat{D}'_{gk} + \hat{E}'_{is} & -\hat{S}'_{gk} & \frac{1}{l_1} \hat{D}'_{gk} & -\frac{1}{l_1} \hat{S}'_{gk} \\ \text{simetrično} & & \hat{N}'_{gk} & -\frac{1}{l_1} \hat{S}'_{gk} & \frac{1}{l_1} \hat{S}'_{gk} \\ & & & \frac{1}{l_1^2} \hat{D}'_{gk} & -\frac{1}{l_1^2} \hat{D}'_{gk} \\ & & & & \frac{1}{l_1^2} \hat{D}'_{gk} \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \quad (P2.4)$$

Usled zadatog raspodeljenog opterećenja vektori ekvivalentnih izvornih opterećenja štapova (1) i (2) na osnovu izraza (5.38) i (5.20) su :

$$\left[Q^* \right]_1 = \begin{bmatrix} -\frac{ql_{gk}^3}{48E_u S_{i1}} \hat{N}'_{gk} F_{12}^* \\ \frac{ql_{gk}}{24} S^* - \frac{ql_{gk}}{2} 1^* \\ \frac{ql_{gk}^3}{48E_u S_{i1}} \hat{N}'_{gk} F_{12}^* \\ -\frac{ql_{gk}}{24} S^* - \frac{ql_{gk}}{2} 1^* \\ \frac{ql_{gk}^2}{24} S^* \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \quad (P2.4)$$

$$\bar{N}'_{i_s}(p) = \frac{2EF_{i2}}{l_2} \frac{p + \gamma'_{11}{}^{(2)}}{p + 1}$$

$$\bar{S}'_{i_s}(p) = -\frac{2ES_{i2}}{l_2} \frac{\gamma_{12}}{p + 1}$$

(P2.10)

$$\bar{E}'_{i_s}(p) = \frac{2EJ_{i2}}{l_2} \frac{p + \gamma'_{22}{}^{(2)}}{p + 1}$$

Sistem jednačina (P2.9) se rešava primenom Kramerovog pravila. Determinanta sistema jednačina (P2.9) prikazuje se u sledećem obliku :

$$\bar{D}'(p) = \frac{DP(p)}{(p+1)^2 K(p)^{(2)}} \quad (P2.11)$$

polinom $K(p)^{(2)}$ dat izrazom (P1.71b), a polinom $DP(p)$ je polinom četvrtog stepena i njegov grafik i koreni određeni korišćenjem programa MCD priloženi su na narednoj strani.

1 resavanje korena funkcije cetvrtog stepena
 iz primera kontinualnog nosaca za tacnu metodu deformacija

$$A1 := 1.741619516 \cdot 10^{-5}$$

$$A2 := 2.799904755 \cdot 10^{-4}$$

$$A3 := 1.37459463 \cdot 10^{-3}$$

povecana tacnost

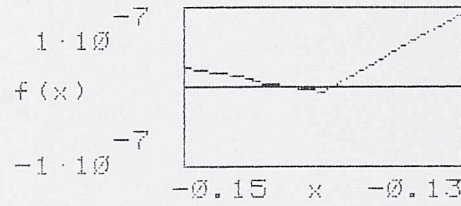
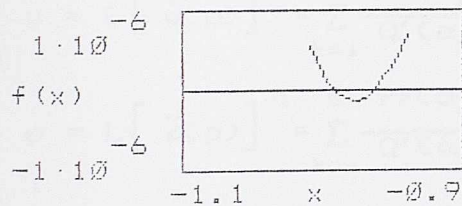
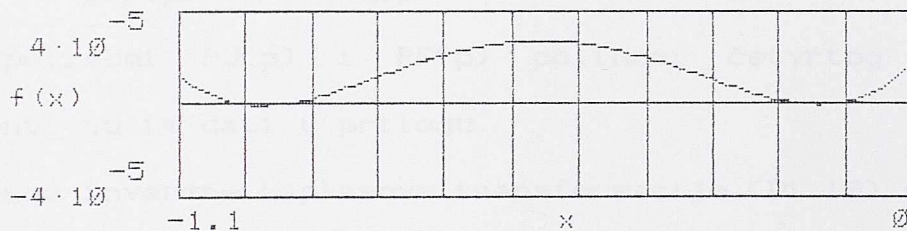
$$A4 := 2.007891539 \cdot 10^{-3}$$

$$TOL := 10^{-16}$$

$$A5 := 8.960616367 \cdot 10^{-4}$$

$$x := -1.1, -1.09 \dots 0$$

$$f(x) := A5 \cdot x^4 + A4 \cdot x^3 + A3 \cdot x^2 + A2 \cdot x + A1$$



$$x := -0.99$$

$$\text{root} [A5 \cdot x^4 + A4 \cdot x^3 + A3 \cdot x^2 + A2 \cdot x + A1, x] = -0.99210672$$

$$x := -0.97$$

$$\text{root} [A5 \cdot x^4 + A4 \cdot x^3 + A3 \cdot x^2 + A2 \cdot x + A1, x] = -0.963365956$$

$$x := -0.12$$

$$\text{root} [A5 \cdot x^4 + A4 \cdot x^3 + A3 \cdot x^2 + A2 \cdot x + A1, x] = -0.138615239$$

$$x := -0.15$$

$$\text{root} [A5 \cdot x^4 + A4 \cdot x^3 + A3 \cdot x^2 + A2 \cdot x + A1, x] = -0.146708317$$

Determinante $\bar{D}_u^*(p)$ i $\bar{D}_\varphi^*(p)$ su oblika :

$$\bar{D}_u^*(p) = \frac{D_u(p)}{p(p+1) K(p)^{(2)}} \quad (P2.12)$$

$$\bar{D}_\varphi^*(p) = \frac{D_\varphi(p)}{p(p+1) K(p)^{(2)}}$$

Korišćenjem Kramerovog pravila i izraza (P2.11) i (P2.12) slike nepoznatih pomeranja su :

$$\bar{u}(p) = \frac{(p+1)D_u(p)}{pDP(p)} = \frac{PU(p)}{Q(p)} \quad (P2.13)$$

$$\bar{\varphi}(p) = \frac{(p+1)D_\varphi(p)}{pDP(p)} = \frac{PF(p)}{Q(p)}$$

gde su polinomi $PU(p)$ i $PF(p)$ polinomi četvrtog stepena i koeficijenti su im dati u prilogu.

Prmenom inverzne Laplasove transformacije (D1.12) dobijaju se originali nepoznatih pomeranja :

$$u = L \left[\bar{u}(p) \right]^{-1} = \sum_{k=1}^5 \frac{PU(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k \varphi_n} \quad (P2.14)$$

$$\varphi = L \left[\bar{\varphi}(p) \right]^{-1} = \sum_{k=1}^5 \frac{PF(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k \varphi_n}$$

Vrednosti nepoznatih pomeranja u vremenu t i vremenu $t=t_0$ (za $\varphi=0$) date su u narednom prilogu.

Reakcije oslonaca se određuju na osnovu izraza (7.20), (P2.1), (P2.4) i (P2.6)

$$[R_p^*] = [\hat{K}'_{pn}] [q_n] - [Q_p^*],$$

tj. :

$$H_1 = -\hat{N}'_{gk} u + \hat{S}'_{gk} \varphi + \frac{q l_1^3}{48 E_u S_{i1}} \hat{N}'_{gk} F_{12}^{*(2)}$$

$$V_2 = \frac{1}{l_1} \hat{S}'_{gk} u + \frac{1}{l_1} \hat{D}'_{gk} \varphi - \frac{q l_1}{24} S^{*(2)} + \frac{q l_1}{2} 1^* \quad (P2.15)$$

$$V_4 = \frac{1}{l_1} \hat{S}'_{gk} u - \frac{1}{l_1} \hat{D}'_{gk} \varphi + \frac{q l_1}{24} S^{*(2)} + \frac{q l_1}{2} 1^* + \frac{q l_2}{2} 1^*$$

U izrazima (P2.15) javljaju se vrednosti funkcija $S_k(\varphi)$ za $\varphi = \varphi_n$

gde su :

$$\begin{aligned}
S_1(\varphi) &= \hat{N}'_{gk} u & , & & S_2(\varphi) &= \hat{S}'_{gk} u & , \\
S_3(\varphi) &= \hat{D}'_{gk} \varphi & , & & S_4(\varphi) &= \hat{S}'_{gk} \varphi & , \\
S_5(\varphi) &= \hat{N}'_{gk} F_{12}^* & , & & S_6(\varphi) &= S^* & .
\end{aligned}
\tag{P2.16}$$

Vrednosti ovih funkcija određuju se primenom Laplasovih transformacija. Koriste se slike date izrazima (P1.74), (P2.10) i (P2.13). Dobija se količnik polinoma na koji se može primeniti stav (D1.12) inverzne Laplasove transformacije. Vrednosti ovih funkcija u vremenu t i vremenu $t=t_0$ (za $\varphi_n=0$) date su u narednom prilogu.

Sile na krajevima štapova se određuju na osnovu (7.30) tj. :

$$[R]_j = [K']_j [q]_j - [Q]_j ,$$

gde su matrice krutosti štapova date izrazima (P2.2) i (P2.3) a vektori ekvivalentnih čvornih opterećenja štapova izrazima (P2.4) i (P2.5).

Sile na krajevima štapa (1) su :

$$\begin{aligned}
N_1 &= H_1 \\
T_1 &= V_2 \\
N_2 &= -H_1 \\
T_2 &= V_4 - \frac{ql^2}{2} \\
M_2 &= \hat{S}'_{gk} u + \hat{D}'_{gk} \varphi - \frac{ql^2}{24} S^*
\end{aligned}
\tag{P2.17}$$

i pri njihovom proračunu korišćeni su izrazi (P2.16)

Sile na krajevima štapa (2) su :

$$\begin{aligned}
N_2 &= \hat{N}'_{is} u + \hat{S}'_{is} \varphi \\
M_2 &= \hat{S}'_{is} u + \hat{E}'_{is} \varphi + \frac{ql^2}{12} \\
T_2 &= \frac{ql}{2}
\end{aligned}
\tag{P2.18}$$

Pri proračunu sila na krajevima štapa (2) javljaju se vrednosti funkcija $T_k(\varphi)$ za $\varphi=\varphi_n$, gde je :

$$\begin{aligned}
T_1(\varphi) &= \hat{N}'_{is} u & , & & T_2(\varphi) &= \hat{S}'_{is} \varphi & , \\
T_3(\varphi) &= \hat{S}'_{is} u & , & & T_4(\varphi) &= \hat{E}'_{is} \varphi & .
\end{aligned}
\tag{P2.19}$$

Ove funkcije određene su primenom Laplasovih transformacija i njihove vrednosti date su u narednom prilogu.

Vrednosti reakcija oslonaca i sila na krajevima štapova u trenutku $t=t_0$ ($\varphi_n=0$) i u vremenu t date su u narednom prilogu.

Dijagrami sila u preseku i reakcije u vremenu t dati su na slici P2.3.

POLINOM Q

Ø.174161951600922D-04
 Ø.279990475397122D-03
 Ø.137459462986311D-02
 Ø.200799153939425D-02
 Ø.896061636601307D-03

POLINOM PF

-Ø.918154333209906D-01
 -Ø.109138684545820D+01
 -Ø.390211524071602D+01
 -Ø.491854382957890D+01
 -Ø.201600000000000D+01

POLINOM PU

Ø.217541847515925D-01
 Ø.178055643106174D+00
 Ø.295298852351499D+00
 Ø.138997393996917D+00

NEPOZNATA POMERANJA

| | | | |
|----------------|------------------------|---|------------------------|
| U ₀ | -Ø.428621595075729D-03 | U | Ø.443240462539787D+03 |
| F ₀ | -Ø.224984478150587D+04 | F | -Ø.341461795377131D+04 |

PRORACUN REAKCIJA OSLOMACA

funkcije:

| | | | |
|-----------------|------------------------|----|------------------------|
| S1 ₀ | -Ø.163385109256827D-05 | S1 | Ø.226868306107846D+01 |
| S2 ₀ | -Ø.145499241911546D-05 | S2 | Ø.574526133029093D+00 |
| S3 ₀ | -Ø.683511868238175D+01 | S3 | -Ø.814726318108047D+01 |
| S4 ₀ | Ø.340284459418719D-05 | S4 | -Ø.520309914490163D+01 |
| S5 ₀ | Ø.387235907563819D-12 | S5 | -Ø.514232264383962D-02 |
| S6 ₀ | Ø.299999999986585D+01 | S6 | Ø.280845260149974D+01 |
| W1 ₀ | -Ø.193150242727332D-05 | W1 | Ø.383594731292754D+01 |
| W2 ₀ | Ø.162225583400141D-05 | W2 | -Ø.100089585451020D+02 |
| W3 ₀ | -Ø.159493039608424D-05 | W3 | Ø.108672648119708D+01 |
| W4 ₀ | -Ø.111648802342184D+02 | W4 | -Ø.138125589893014D+02 |

REAKCIJE OSLOMACA

| | | | |
|-----------------|------------------------|----|------------------------|
| H1 ₀ | -Ø.176830767872181D-05 | H1 | -Ø.617301053810023D+01 |
| V2 ₀ | Ø.168608133107059D+02 | V2 | Ø.171209719556586D+02 |
| V4 ₀ | Ø.671391866892940D+02 | V4 | Ø.668790280443414D+02 |

SILE NA KRAJEVIMA STAPOVA

STAP 1

| | | | |
|-----------------|------------------------|----|------------------------|
| N1 ₀ | -Ø.176830767872181D-05 | N1 | -Ø.617301053810023D+01 |
| T1 ₀ | Ø.168608133107059D+02 | T1 | Ø.171209719556586D+02 |
| N2 ₀ | Ø.176830767872181D-05 | N2 | Ø.617301053810023D+01 |
| T2 ₀ | Ø.311391866892940D+02 | T2 | Ø.308790280443414D+02 |
| M2 ₀ | -Ø.428351201357643D+02 | M2 | -Ø.412741682660483D+02 |

STAP 2

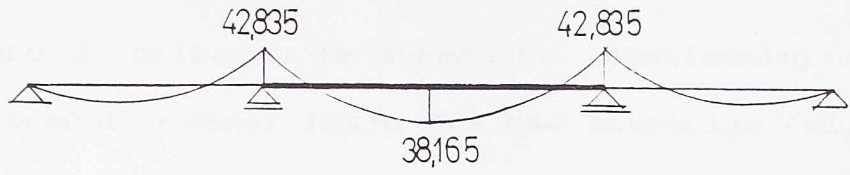
N2o -0.309246593271913D-06
 T2o 0.3600000000000000D+02
 M2o 0.428351181708513D+02

N2 -0.617301123217441D+01
 T2 0.3600000000000000D+02
 M2 0.412741674918957D+02



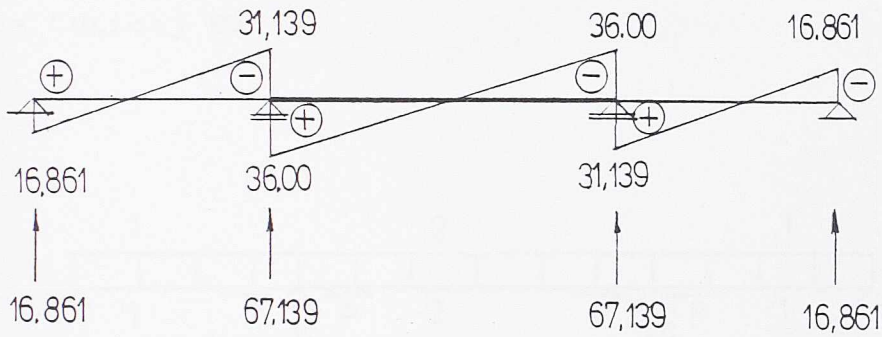
Fig. 2. Diagrams of internal forces and reactions in the cross-section of the beam under the action of a trapezoidal load.

t = t₀



M₀

[KNm]



T₀

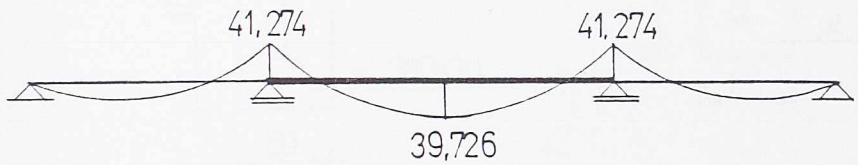
[KN]



N₀

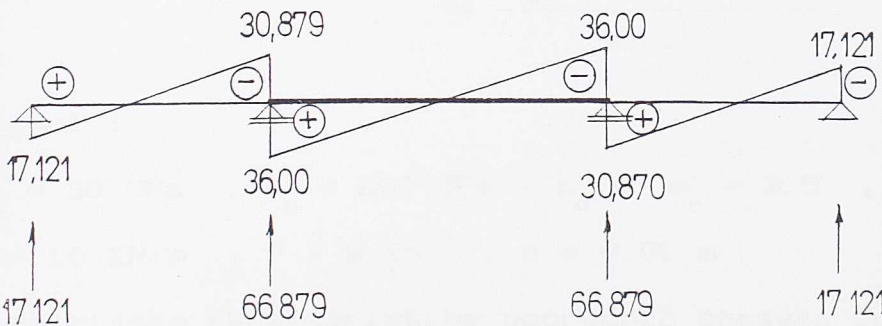
[KN]

t



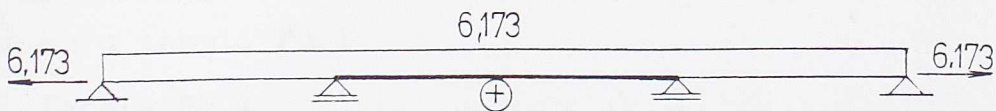
M

[KNm]



T

[KN]



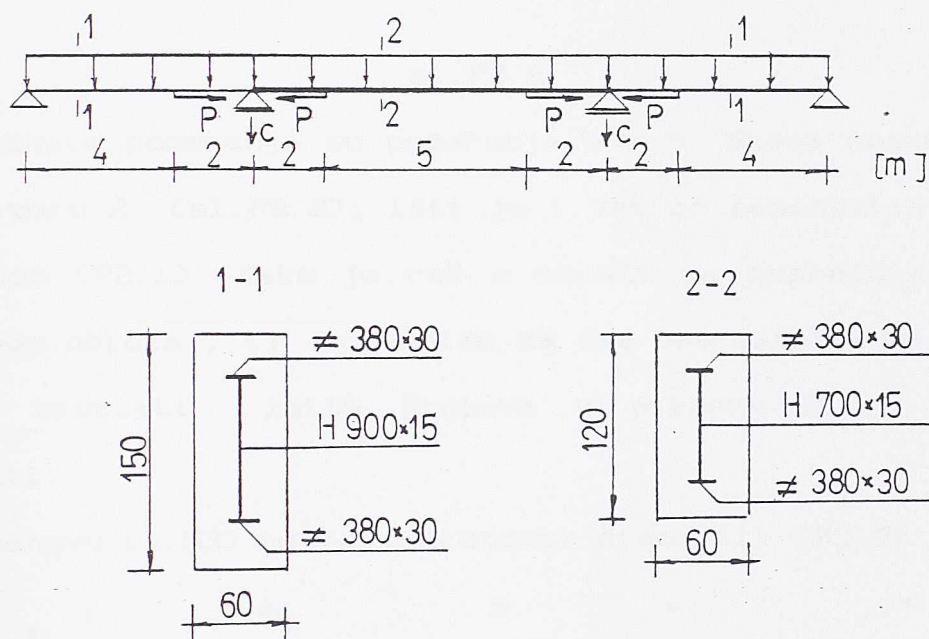
N

[KN]

sl. P2.3 Dijagrami sila u preseku i reakcije oslonaca usled zadanog opterećenja u vremenu t

P3. Primer 3.

U primeru 3. prikazan je spregnuti kontinualni simetrični nosač čiji poprečni preseki imaju dve ose simetrije (sl.P3.1). Određena su nepoznata pomeranja, reakcije oslonaca i sile na krajevima štapova usled zadatog opterećenja (uticaj A) i zadatog spuštanja oslonaca (uticaj B).



sl .P3.1

Podaci :

$$E_b = 30 \text{ GPa} , E_n = 200 \text{ GPa} = E_u , \varphi_n = 3.5 ,$$

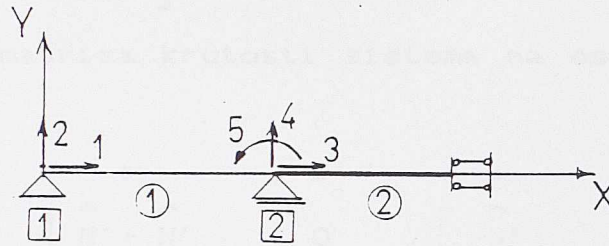
$$q = 10 \text{ KN/m} , P = 9 \text{ KN} , c = 0.01 \text{ m}$$

Geometrijske karakteristike poprečnih preseka (prilog 2-B1.16) date su u tabeli P3.1.

Tabela P3.1

| presek | $F_i \text{ (m}^2\text{)}$ | $J_i \text{ (m}^4\text{)}$ | γ_1 | γ_2 |
|--------|----------------------------|----------------------------|----------------|----------------|
| 1-1 | 0.136305 | 1.59077915E-2 | 7.556949488E-1 | 7.819942511E-1 |
| 2-2 | 0.165855 | 3.02789565E-2 | 7.811341232E-1 | 8.070313288E-1 |

Nosač je simetričan pa je usvojena shema nosača data na sl.P3.2.



sl.P3.2

Nepoznata pomeranja su pomeranja 3 i 5. Shema nosača je ista kao i primeru 2. (sl.P2.2); isti je i vektor nepoznatih pomeranja dat izrazom (P2.1). Kako je reč o nosaču sa poprečnim preseccima specijalnog obloka, tj. preseccima sa dve ose simetrije, to će se matrice krutosti istih štapova u primeru 2. i primeru 1. razlikovati.

Na osnovu (4.53) matrica krutosti štapa (1) (P2.2) je oblika:

$$\left[\hat{K}' \right]_1 = \begin{bmatrix}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 \hat{N}'_{gk} & 0 & -\hat{N}'_{gk} & 0 & 0 & 1 \\
 & \frac{1}{l_1^2} \hat{D}'_{gk} & 0 & -\frac{1}{l_1^2} \hat{D}'_{gk} & \frac{1}{l_1} \hat{D}'_{gk} & 2 \\
 & & \hat{N}'_{gk} & 0 & 0 & 3 \\
 & & & \frac{1}{l_1^2} \hat{D}'_{gk} & -\frac{1}{l_1} \hat{D}'_{gk} & 4 \\
 & & & & \hat{D}'_{gk} & 5
 \end{bmatrix}$$

simetrično

(P3.1)

Na osnovu izraza (4.72) matrica krutosti štapa (2) (P2.3) je oblika :

$$\left[\hat{K}' \right]_2 = \begin{bmatrix} \hat{N}'_{ls} & 0 \\ 0 & \hat{E}'_{ls} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 5 \end{matrix} \quad (P3.2)$$

Preuređena matrica krutosti sistema na osnovu izraza (7.21)

je oblika :

$$\left[\hat{K}'_{pr} \right] = \begin{bmatrix} \hat{K}'_{nn} & \hat{K}'_{np} \\ \hat{K}'_{pn} & \hat{K}'_{pp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{N}'_{gk} + \hat{N}'_{ls} & 0 & -\hat{N}'_{gk} & 0 & 0 \\ & \hat{D}'_{gk} + \hat{E}'_{ls} & 0 & \frac{1}{l_1} \hat{D}'_{gk} & 0 \\ & & \hat{N}'_{gk} & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{l_1^2} \hat{D}'_{gk} & -\frac{1}{l_1} \hat{D}'_{gk} \\ & & & & \frac{1}{l_1^2} \hat{D}'_{gk} \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{matrix}$$

simetrično

(P3.3)

Vektori ekvivalentnih čvornih opterećenja štapova (1) i (2)

su oblika :

$$\left[Q^* \right]_1 = \begin{bmatrix} \frac{P}{3} 1^* \\ -\frac{ql_1}{2} 1^* + \frac{ql_1}{8} 1^* \\ \frac{2P}{3} 1^* \\ -\frac{ql_1}{2} 1^* - \frac{ql_1}{8} 1^* \\ \frac{ql_1^2}{8} 1^* \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \quad (P3.4)$$

(P3.1)-(P3.8).

U tabeli P3.2 date su vrednosti nepoznatih pomeranja i sila na krajevima štapova usled uticaja A i B u trenutku $t=t_0$ i vremenu t .

Tabela P3.2

| H | | u | φ | N_1 (KND) | T_2 (KND) | N_3 (KND) | T_4 (KND) | M_5 (KNm) |
|---|-------|--------------|----------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| A | t_0 | $16.786/E_u$ | $-1532.43/E_u$ | -3.381 | 20.468 | -5.6187 | 39.531 | 57.1888 |
| q | | | | | | | | |
| P | t | $47.983/E_u$ | $-4562.31/E_u$ | -3.396 | 20.410 | -5.6043 | 39.589 | 57.5373 |
| B | | | | | | | | |
| c | t_0 | - | $-9.0287E-04$ | - | 20.250 | - | -20.250 | 1215.03 |
| | t | - | $-9.2869E-04$ | - | 46.205 | - | -46.205 | 277.230 |

Upoređujući dobijene rezultate u vremenu $t=t_0$ i vremenu t uočava se da su razlike između tih vrednosti usled stalnog opterećenja neznatne, ali da su vrlo značajne usled uticaja B što je kod spregnutih nosača uobičajeno na šta je ukazao i Dišinger [9].

III PRILOZI

Prilog 1. Definicija linearnih integralnih operatora i operacije

Linearni integralni operator \hat{G} asociran je funkciji dveju promenljivih u odnosu na vreme $G(t, \tau)$, koja ima osobinu [23] :

$$G(t, \tau) \equiv 0 \quad , \quad \text{za } t < \tau \quad . \quad (\text{A 1.1})$$

Ovaj operator definisan je za svaku funkciju $U(t, \tau)$

$$\hat{G}U = \int_{\tau}^t G(t, \theta) U(\theta, \tau) d\theta \quad . \quad (\text{A 1.2})$$

Drugi argument τ u funkciji $U(t, \tau)$ može biti parametar i tada je $\tau = t_0$.

Za linearne integralne operatore važe zakoni algebre običnih brojeva. Za operatore koji se ovde koriste važi i zakon komutativnosti , koji u opštem slučaju ne važi.

1. Proizvod dva operatora određuje operator :

$$\hat{K} = \hat{L} \hat{G} \quad . \quad (\text{A 1.3})$$

2. Uvodi se sledeća oznaka za izvod funkcije $G(t, \tau)$ po drugom argumentu τ :

$$G' = \frac{\partial}{\partial \tau} G(t, \tau) \quad . \quad (\text{A 1.4})$$

3. Hevisajdovu (Heaviside) funkciju označićemo sa :

$$1^* = 1^*(t, t_0) = H(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{za } t > t_0 \\ 0 & \text{za } t < t_0 \end{cases}$$

Ako u izraz (A 1.2) uvedemo :

$$G \equiv L' \quad U \equiv 1^*$$

dobijamo funkciju :

$$L^* = L^*(t, t_0) = \hat{L}' 1^* \quad , \quad (\text{A 1.5})$$

koju nazivamo integral funkcije L' . Važi relacija :

$$(L^*)' = -L' \quad . \quad (\text{A 1.6})$$

4. Jedinični operator $\hat{1}'$ asociran je Dirakovoj funkciji :

$$\hat{1}' = \delta(t - \tau) = \delta(\tau - t).$$

Proizvod jediničnog operatora sa operatorom , odnosno funkcijom jedne promenljive, određuje isti operator , odnosno istu funkciju :

$$\hat{1}'\hat{G} = \hat{G}\hat{1}' = \hat{G} \quad , \quad \hat{1}'U = U \quad . \quad (A 1.7)$$

5. Uvode se međusobno inverzni operatori \hat{G}' i \hat{L}' koji ispunjavaju uslov :

$$\hat{G}'\hat{L}' = \hat{1}' \quad , \quad \hat{G}'\hat{L}' = \hat{L}'\hat{G}' \quad . \quad (A 1.8)$$

Posle integracije ovih izraza (što odgovara množenju sa desne strane funkcijom 1^*) dobijaju se izrazi :

$$\hat{G}'L^* = 1^* \quad , \quad \hat{G}'L^* = \hat{L}'G^* \quad . \quad (A 1.9)$$

Kada se razvije prva relacija izraza (A1.9) dobija se nehomogena integralna jednačina koja se transformacijama svodi na Volteraovu integralnu jednačinu II vrste :

$$G^*(t,t) L^*(t,t_0) - \int_{t_0}^t \frac{\partial G^*(t,\tau)}{\partial \tau} L^*(\tau,t_0) d\tau = 1. \quad (A 1.10)$$

idealizovanog preseka.

Geometrijske karakteristike preseka redukovaćemo sledećim faktorima :

$$\nu_k = \frac{E_k}{E_u}, \quad k = n, m \quad \nu_p = \frac{E_p}{E_u}, \quad \nu_b = \frac{E_b}{E_u}, \quad (\text{B 1.1})$$

gde se vrednost uporednog modula elastičnosti E_u bira proizvoljno.

Redukovane površine su :

$$F_{kr} = \nu_k F_k \quad k = b, p, n, m \quad (\text{B 1.2})$$

Površina idealizovanog preseka je :

$$F_i = \sum_k F_{kr} \quad k = b, p, n, m, \quad (\text{B 1.3})$$

a težište je T_i .

Statički moment redukovanih površina, u odnosu na osu z kroz

T_i su :

$$S_{kr} = y_k F_{kr} \quad k = b, p, n, m \quad (\text{B 1.4})$$

y_k su ordinate težišta T_k u odnosu na T_i (sl.1). Iz uslova da je :

$$\sum_k S_{kr} = 0 \quad k = b, p, n, m \quad (\text{B 1.5})$$

Određuje se položaj težišta idealizovanog preseka T_i .

Momenti inercije J_{kr} redukovanih površina F_{kr} u odnosu na osu z kroz težište T_i jednak je zbiru sopstvenog momenta inercije I_{kr} , redukovane površine F_{kr} , za paralelnu težišnu osu kroz T_k i položajnog momenta inercije :

$$J_{kr} = I_{kr} + y_k^2 F_{kr}, \quad k = b, p, n, m. \quad (\text{B 1.6})$$

Momenti inercije J_i idealizovane površine F_i , u odnosu na osu z , kroz T_i je :

$$J_i = \sum_k J_{kr} \quad k = b, p, n, m. \quad (\text{B 1.7})$$

Koristiće se veličina :

$$S_i = \sqrt{F_i J_i}. \quad (\text{B 1.8})$$

Definisaće se elementi γ_{hl} simetrične matrice $[\gamma_{hl}]_{2,2}$:

$$\gamma_{11} = \frac{F_{br}}{F_i} + \rho \frac{A_{pr}}{F_i}, \quad \gamma_{22} = \frac{J_{br}}{J_i} + \rho \frac{J_{pr}}{J_i}$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{S_{br}}{S_i} + \rho \frac{S_{pr}}{S_i}, \quad (B 1.9)$$

čije su glavne vrednosti γ_1 i γ_2 . U opštem slučaju geometrijskih karakteristika preseka važe nejednakosti :

$$0 < \gamma_2 < \gamma_1 < 1. \quad (B 1.10)$$

Definisaće se elementi γ'_{hl} simetrične matrice $[\gamma'_{hl}]_{2,2}$:

$$\gamma'_{11} = 1 - \gamma_{11}, \quad \gamma'_{22} = 1 - \gamma_{22},$$

$$\gamma'_{12} = \gamma'_{21} = -\gamma_{12}, \quad (B 1.11)$$

čije su glavne vrednosti γ'_1 i γ'_2 . U opštem slučaju geometrijskih karakteristika preseka važe nejednakosti :

$$0 < \gamma'_1 < \gamma'_2 < 1. \quad (B 1.12)$$

Očigledno je :

$$\gamma'_h = 1 - \gamma_h, \quad h = 1, 2 \quad (B 1.13)$$

Koristiće se sledeće oznake :

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_{11} + \gamma_{22}, \quad \gamma'_1 + \gamma'_2 = \gamma'_{11} + \gamma'_{22}$$

$$\gamma_1 \gamma_2 = \gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12}^2, \quad \gamma'_1 \gamma'_2 = \gamma'_{11} \gamma'_{22} - (\gamma'_{12})^2$$

$$\delta \gamma_1 = \gamma_1 - \gamma_{11} = \gamma_{22} - \gamma_2$$

$$\delta \gamma_2 = \gamma_{11} - \gamma_2 = \gamma_1 - \gamma_{22} \quad (B 1.14)$$

$$\Delta \gamma = \gamma_1 - \gamma_2.$$

Za transformacije se koristi još :

$$\Delta \gamma_1 \Delta \gamma_2 = \gamma_{12}^2$$

$$\delta \gamma_1 + \delta \gamma_2 = \Delta \gamma.$$

Uvedene redukovane geometrijske karakteristike preseka su u opštem slučaju funkcije koordinate ose štapa.

Kao specijalni slučaj posmatramo poprečni presek sa dve ose simetrije. Za takav presek je :

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = 0$$

$$\gamma_1 = \gamma_{11}$$

$$\gamma_2 = \gamma_{22}$$

$$\delta\gamma_1 = 0$$

$$\delta\gamma_2 = \Delta\gamma$$

(B 1.16)

Prilog 3. Određivanje inverznog operatora \hat{S}'

Operator \hat{S}' je inverzni operator operatora \hat{C}' (4.47) tj. :

$$\hat{S}'\hat{C}' = \hat{1}' \quad , \quad (C 1.1)$$

gde je operator \hat{C}' dat izrazom (4.39) i (4.40) tj. :

$$\hat{C}' = \frac{4\gamma_1\gamma_2 + \gamma_{12}^2}{12\gamma_1\gamma_2} \hat{1}' + \frac{\gamma_{12}^2}{12\Delta\gamma\gamma_1} \hat{F}'_1 - \frac{\gamma_{12}^2}{12\Delta\gamma\gamma_2} \hat{F}'_2 \quad , \quad (C 1.2)$$

ili :

$$\hat{C}' = e \hat{1}' + h (\gamma_2 \hat{F}'_1 - \gamma_1 \hat{F}'_2) \quad (C 1.3)$$

gde je :

$$e = \frac{4\gamma_1\gamma_2 + \gamma_{12}^2}{12\gamma_1\gamma_2} \quad , \quad h = \frac{\gamma_{12}^2}{12\Delta\gamma\gamma_1\gamma_2} \quad . \quad (C 1.4)$$

Korišćenjem izraza (2.50) izraz (C1.3) je :

$$\hat{C}' = \hat{F}'_1 \hat{F}'_2 \left[e \hat{R}'_1 \hat{R}'_2 + h (\gamma_2 \hat{R}'_2 - \gamma_1 \hat{R}'_1) \right] \quad . \quad (C 1.5)$$

Smenom (2.48) sledi :

$$\hat{C}' = \hat{F}'_1 \hat{F}'_2 p \left[\hat{1}' + \frac{q}{p} \hat{R}' + \frac{r}{p} \hat{R}' \hat{R}' \right] \quad , \quad (C 1.6)$$

gde je :

$$p = \frac{4\gamma_1'\gamma_2' + \gamma_{12}^2}{12}$$

$$q = \frac{4(\gamma_1'\gamma_2' + \gamma_1\gamma_2') - 2\gamma_{12}^2}{12} \quad (C 1.7)$$

$$r = \frac{4\gamma_1\gamma_2 + \gamma_{12}^2}{12}$$

Uvode se operatori :

$$\hat{\mathcal{R}}'_h = \hat{1}' + \theta_h \hat{R}' \quad , \quad h = 1, 2 \quad (C 1.8)$$

pri čemu je :

$$\theta_1 + \theta_2 = \frac{q}{p} \quad , \quad \theta_1\theta_2 = \frac{r}{p} \quad . \quad (C 1.9)$$

Unošenjem izraza (C 1.9) i (C 1.8) u (C 1.6) sledi :

$$\hat{C}' = p \hat{F}'_1 \hat{F}'_2 \hat{\mathcal{R}}'_1 \hat{\mathcal{R}}'_2 \quad . \quad (C 1.10)$$

Korišćenjem izraza (2.50) i analogno uvođenjem operatora $\hat{\mathcal{F}}'_h$ tako da je :

$$\hat{\mathcal{F}}'_h \hat{\mathcal{R}}'_h = \hat{1}' , \quad (\text{C 1.11})$$

inverzni operator \hat{S}' operatora \hat{C}' je oblika :

$$\hat{S}' = (\hat{C}')^{-1} = \frac{1}{p} \hat{R}'_1 \hat{R}'_2 \hat{\mathcal{F}}'_1 \hat{\mathcal{F}}'_2 . \quad (\text{C1.12})$$

Analogno izrazu (2.56) uvodi se operator $\hat{\mathcal{B}}'_h$ tako da je :

$$\hat{\mathcal{B}}'_h = \hat{R}'_h \hat{\mathcal{F}}'_h \quad h = 1, 2 . \quad (\text{C 1.13})$$

Smenom izraza (C 1.8) u izrazu (C 1.11) i korišćenjem izraza

(C 1.13) dobijaju se sledeće relacije :

$$\hat{\mathcal{B}}'_h = \frac{1}{\theta_h} (\hat{1}' - \hat{\mathcal{F}}'_h) \quad (\text{a}) \quad (\text{C 1.14})$$

$$\hat{\mathcal{F}}'_h = \hat{1}' - \theta_h \hat{\mathcal{B}}'_h \quad (\text{b})$$

Uvodi se operator $\hat{\mathcal{K}}'_h$ analogno izrazu (2.60) i (2.61)

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{K}}'_h \hat{\mathcal{B}}'_h &= \hat{1}' , \\ \hat{\mathcal{K}}'_h &= \hat{F}'_h \hat{\mathcal{R}}'_h = \theta_h \hat{1}' + \hat{F}'_h . \end{aligned} \quad (\text{C1.15})$$

Funkcija \mathcal{K}_h^* linearno zavisi od funkcije puzanja F^* i od redukovanih geometrijskih karakteristika preseka :

$$\mathcal{K}_h^* = \theta_h 1^* + F^* \quad (\text{C 1.16})$$

Određivanje funkcije \mathcal{B}_h^* ($h = 1, 2$) svodi se na rešavanje nehomogenih integralnih jednačina :

$$\hat{\mathcal{K}}'_h \hat{\mathcal{B}}^*_h = \hat{1}^* \quad h = 1, 2 . \quad (\text{C 1.17})$$

Koristiće se proizvod operatora $\hat{\mathcal{F}}'_h \hat{\mathcal{R}}'_k$ koji uz relacije (2.48)

(C 1.13) i (C 1.14a) dobija oblik :

$$\hat{\mathcal{F}}'_h \hat{\mathcal{R}}'_k = \frac{1}{\theta_h} \left[\gamma_k \hat{1}' + (\theta_h \gamma'_k - \gamma_k) \hat{\mathcal{F}}'_h \right] . \quad (\text{C 1.18})$$

Odrediće se proizvod operatora $\hat{F}'_h \hat{F}'_k$ čiji su inverzni operatori

oblika :

$$\hat{R}'_h = a_h \hat{1}' + b_h \hat{R}'_h \quad (\text{a})$$

$$\hat{R}'_k = a_k \hat{1}' + b_k \hat{R}'_k . \quad (\text{b})$$

Množenjem izraza (C 1.19a) operatorom \hat{F}'_h i izraza (C 1.19b)

operatorom \hat{F}'_k uspostavlja se veza između operatora \hat{F}'_h i \hat{R}' odnosno \hat{F}'_k i \hat{R}' :

$$b_h \hat{R}' \hat{F}'_h = 1' - a_h \hat{F}'_h \quad (a)$$

$$b_k \hat{R}' \hat{F}'_k = 1' - a_k \hat{F}'_k \quad (b) \quad (C 1.20)$$

a množenjem ovih izraza operatorom \hat{F}' uspostavlja se veza između operatora \hat{F}'_h i \hat{F}' odnosno \hat{F}'_k i \hat{F}' :

$$a_h \hat{F}'_h \hat{F}' = \hat{F}' - b_h \hat{F}'_h \quad (a)$$

$$a_k \hat{F}'_k \hat{F}' = \hat{F}' - b_k \hat{F}'_k \quad (b) \quad (C 1.21)$$

Međusobnim množenjem izraza (C 1.20b) i (C 1.21a) i eliminacijom operatora \hat{F}' sменom iz jednačine (C 1.21b) dobija se proizvod operatora $\hat{F}'_h \hat{F}'_k$ izražen kao linearna kombinacija operatora \hat{F}'_h i \hat{F}'_k :

$$(a_h b_k - a_k b_h) \hat{F}'_h \hat{F}'_k = b_k \hat{F}'_k - b_h \hat{F}'_h \quad (C 1.22)$$

Korišćenem izraza (C 1.22) odrediće se proizvod operatora $\hat{\mathcal{F}}'_1 \hat{\mathcal{F}}'_2$.

Na osnovu izraza (C 1.8) za \hat{R}'_h i izraza (C 1.19) je :

$$a_h = 1 \quad , \quad b_h = \theta_1$$

$$a_k = 1 \quad , \quad b_k = \theta_1 \quad ,$$

pa je :

$$\hat{\mathcal{F}}'_1 \hat{\mathcal{F}}'_2 = \frac{1}{\Delta\theta} (\theta_1 \hat{\mathcal{F}}'_1 - \theta_2 \hat{\mathcal{F}}'_2) \quad (C 1.23)$$

gde je :

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2 \quad .$$

Korišćenjem izraza (C 1.18) i (C 1.23) operator \hat{S}' (C 1.12) može da se izrazi na sledeći način :

$$\hat{S}' = s (1' + t \hat{\mathcal{F}}'_1 + g \hat{\mathcal{F}}'_2) \quad (C 1.23)$$

gde je :

$$\begin{aligned}
s &= \frac{\gamma_1 \gamma_2}{p \theta_1 \theta_2} \\
t &= \frac{\theta_2 (\gamma_1 - \theta_1 \gamma'_1) (\gamma_2 - \theta_1 \gamma'_2)}{\Delta \theta \gamma_1 \gamma_2} \\
g &= \frac{-\theta_1 (\gamma_1 - \theta_1 \gamma'_1) (\gamma_2 - \theta_2 \gamma'_2)}{\Delta \theta \gamma_1 \gamma_2}
\end{aligned} \tag{C 1.24}$$

Operator \hat{S}' u izrazu (C 1.12) prikazan je kao četvotostruki proizvod operatora. Posle niza transformacija između komutativnih operatora ovaj operator je prikazan u obliku zbira operatora (C 1.23) što predstavlja znatno jednostavniji izraz u kome je smanjen broj integracija.

Pri određivanju elemenata operatorske bazne matrice krutosti štapa tipa "g" u izrazima (4.50) javljaju se proizvodi operatora $\hat{R}'_{11} \hat{S}'$, $\hat{R}'_{22} \hat{S}'$ i $\hat{R}'_{12} \hat{S}'$. Smenom operatora \hat{S}' izrazom (C 1.23) koristeći relacije (C1.13) i (C 1.14a) ovi se proizvodi mogu napisati preko zbira operatora čime se smanjuje broj neophodnih integracija.

$$\begin{aligned}
\hat{N}'_{ig} &= \frac{E F_i}{3l_{gk}} (n_1 \hat{1}' + \gamma_{11} \hat{R}' + n_2 \hat{\mathcal{F}}'_1 + n_3 \hat{\mathcal{F}}'_1) = \hat{N}'_{gk} \\
\hat{D}'_{ig} &= \frac{E J_i}{3l_{gk}} (d_1 \hat{1}' + \gamma_{22} \hat{R}' + d_2 \hat{\mathcal{F}}'_1 + d_3 \hat{\mathcal{F}}'_1) = \hat{D}'_{gk} \\
\hat{S}'_{ig} &= \frac{E S_i}{2l_{gk}} (z_1 \hat{1}' + \gamma_{12} \hat{R}' + z_2 \hat{\mathcal{F}}'_1 + z_3 \hat{\mathcal{F}}'_1) = -\hat{S}'_{gk}
\end{aligned} \tag{C 1.25}$$

gde je :

$$n_1 = \gamma'_{11} + \gamma_{11} \left(\frac{t}{\theta_1} + \frac{g}{\theta_2} \right)$$

$$n_2 = t \left(\gamma'_{11} - \frac{\gamma_{11}}{\theta_1} \right)$$

$$n_3 = g \left(\gamma'_{11} - \frac{\gamma_{11}}{\theta_2} \right)$$

$$d_1 = \gamma'_{22} + \gamma_{22} \left(\frac{t}{\theta_1} + \frac{g}{\theta_2} \right)$$

$$d_2 = t \left(\gamma'_{22} - \frac{\gamma_{22}}{\theta_1} \right) \quad (C 1.26)$$

$$d_3 = g \left(\gamma'_{22} - \frac{\gamma_{22}}{\theta_2} \right)$$

$$z_1 = \gamma_{12} \left(-1 + \frac{t}{\theta_1} + \frac{g}{\theta_2} \right)$$

$$z_2 = -\gamma_{12} t \left(1 + \frac{1}{\theta_1} \right)$$

$$z_3 = -\gamma_{12} g \left(1 + \frac{1}{\theta_2} \right)$$

U relacijama (5.28) , (5.31) odnosno (5.38) pojavljuje se izraz $\hat{N}'_{ig} F^*_{12}$ odnosno $\hat{N}'_{gk} F^*_{12}$. Pokazaće se da se ovaj izraz može prikazati kao linearna kombinacija operatora 1^* , F_1^* , F_2^* , \mathcal{F}_1^* , i \mathcal{F}_2^* .

Korišćenjem relacije (4.51) izraz $\hat{N}'_{ig} F^*_{12}$ ima oblik :

$$\hat{N}'_{ig} F^*_{12} = \frac{E_u F_i}{3 l_{ig}} = \left[n_1 F^*_{12} + \gamma_{11} \hat{R}' F^*_{12} + n_2 \hat{\mathcal{F}}'_1 F^*_{12} + n_3 \hat{\mathcal{F}}'_2 F^*_{12} \right] \quad (C 1.27)$$

Na osnovu izraza (2.53) funkcija F^*_{12} je :

$$F^*_{12} = \frac{\gamma_{12}}{\Delta\gamma} (F_1^* - F_2^*)$$

Unošenjem ovog izraza u izraz (C 1.27) pojaviće se proizvodi $\hat{R}' F^*_h$, $\hat{\mathcal{F}}'_1 F^*_h$ i $\hat{\mathcal{F}}'_2 F^*_h$ ($h = 1, 2$) .

Kada se relacije (2.48) za \hat{R}'_h pomnoži funkcijom F^*_h , akako je

$$\hat{R}'_h F^*_h = 1^* ,$$

to se neposredno dolazi do proizvoda $\hat{R}F^*_h$:

$$\hat{R}F^*_h = \frac{1}{\gamma_h} 1^* - \frac{\gamma'_h}{\gamma_h} F^*_h \quad (C 1.28)$$

Proizvodi $\hat{F}'_{1h} F_{1h}^*$ $\hat{F}'_{2h} F_{2h}^*$ ($h = 1, 2$) se određuju korišćenjem

relacije (C 1.22) i (A 1.5) :

$$\hat{F}'_{kh} F_{kh}^* = \frac{1}{\gamma_h - \gamma'_h \theta_k} (\gamma_h F_{kh}^* - \theta_k \hat{F}'_{kh}^*) \quad k=1,2, h=1,2 \quad (C 1.29)$$

Proizvod $\hat{N}'_{ig} F_{12}^*$ (C 1.27) korišćenjem relacija (C1.28) i (C 1.29)

prikazuje se kao linearna kombinacija operatora :

$$\hat{N}'_{ig} F_{12}^* = \frac{E_{ui}}{3 l_{ig}} s \left[a 1^* + b_1 F_{11}^* - b_2 F_{22}^* + c_1 n_2 \hat{F}'_{11}^* + c_2 n_3 \hat{F}'_{22}^* \right] = \hat{N}'_{gk} F_{12}^*$$

(C1.30)

gde su a, b_1, b_2, c_1 i c_2 konstante :

$$a = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_1 \gamma_2}$$

$$b_h = \frac{\gamma_{12}}{\Delta\gamma} \left[n_1 - \frac{\gamma'_h \gamma_{11}}{\gamma_h} + \frac{n_2 \gamma_h}{\gamma_h - \gamma'_h \theta_1} + \frac{n_3 \gamma_h}{\gamma_h - \gamma'_h \theta_2} \right] \quad , h=1,2$$

(C 1.31)

$$c_k = \frac{\gamma_{12} \theta_k}{\Delta\gamma} \left[- \frac{1}{\gamma_1 - \gamma'_1 \theta_k} + \frac{1}{\gamma_2 - \gamma'_2 \theta_k} \right] \quad , k=1,2$$

Prilog 4. Laplasova transformacija

Posmatramo funkciju $f(t)$ definisanu za $t > 0$. Laplasova (Laplace) transformacija funkcije $f(t)$ obeležava se sa $L[f(t)]$ definisana je na sledeći način [35] :

$$L[f(t)] \equiv \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (D 1.1)$$

Parametar p je broj čiji je realni deo pozitivan i odabran je tako da je prethodni integral konvergentan. Funkcija $f(t)$ naziva se original, a funkcija $\bar{f}(p)$ naziva se slika originala.

Neke osobine Laplasove transformacije :

Osobina linearnosti :

$$L[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 L[f_1(t)] + c_2 L[f_2(t)] = c_1 \bar{f}_1(p) + c_2 \bar{f}_2(p) \quad (D 1.2)$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante .

Osobina pomeranja :

$$a) \quad L[e^{at} f(t)] = \bar{f}(p-a) \quad (D 1.3)$$

$$b) \quad L[f(t-a)] = e^{-ap} \bar{f}(p) \quad , \quad \text{za } t > a \quad (D 1.4)$$

Osobina sličnosti :

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} \bar{f}\left(\frac{p}{a}\right) \quad (D 1.5)$$

Integracija :

$$L\left[\int_0^{\infty} f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{p} \bar{f}(p) \quad (D 1.6)$$

Konvolucija :

Konvolucija neprekidnih funkcija f g u oznaci $f * g$ je integral :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau \quad (D 1.7)$$

Za konvoluciju važe zakoni algebre :

$$f * g = g * f \quad (a)$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad (b) \quad (D 1.8)$$

$$f * (g + h) = f * g + f * h \quad (c)$$

Teorema o konvoluciji :

Ako je $L[f(t)] = \bar{f}(p)$ i $L[g(t)] = \bar{g}(p)$ tada je :

$$L[f(t) * g(t)] = \bar{f}(p) \bar{g}(p) \quad (D 1.9)$$

Inverzna Laplasova transformacija :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \bar{f}(p) e^{pt} dp, \quad \text{Re } p = s \quad (D 1.10)$$

Ukoliko je poznata Laplasova slika $\bar{f}(p)$ originala $f(t)$ moguće je korišćenjem formule (D 1.10) odrediti original. Ta formula definiše tzv. inverznu Laplasovu transformaciju koja se beleži :

$$L[\bar{f}(p)]^{-1} = f(t) \quad (D 1.11)$$

Neka je slika definisana količnikom polinoma $P(p)$ i $Q(p)$ gde je polinom $P(p)$ stepena manjeg od polinoma $Q(p)$. Polinom $Q(p)$ ima n negativnih i međusobno različitih nula α_k , $k = 1, 2, \dots, n$. Tada je original tog količnika :

$$L\left[\frac{P(p)}{Q(p)}\right]^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t} \quad (D 1.12)$$

LITERATURA

- (1) Aleksandrovskij S. *Rasčet betonnih i železobetonnih konstrukcij na izmenenija temperaturi i vlažnosti c učetom polzučesti*, strojizdat, Moskva, 1973.
- (2) Argyris J., Pister K., Willam K. *Thermomechanical Creep of Aging Concrete -- A Unified Approach*, IABSE Publications, Vol. 36-I, 1976.
- (3) Arutjunjan N. *Nekatorije voprosi teoriji polzučesti*, Gostehteorizdat, Moskva, 1952.
- (4) Bažant Z.P. *Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method*, J. ACI, Vol 69, 1972.
- (5) Boltzmann L. *Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung*, Sitzber. Akad. Wiss., Wiener Bericht 70, Wiss. Abh. Vol. 1, 1874.
- (6) CEB-Comit Euro-International du beton, CEB-FIP *Model Code 1990, Final draft, Bulletin No 203, 204, 205, July 1991*.
- (7) Chiorino M.A., Napoli P., Mpla F., Koprna M. *CEB Desineg Manuel. Structural Effects of Time-dependent Behavior of Concrete*, Georgi Publishing Company, Saint-Saphorn, Switzerland.
- (8) Davis, R.E. - *Flow of Concrete under sustained Compressiv Stress*. J. Amer. Concrete Institute, 1928.
-and H.E. Davis - *Flow of Concrete under sustained Loads*. J. Amer. Concrete Institute, 1931.
- (9) Dischinger F. *Elastisch und Plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrucken* Bauingenier, h. 33/34, 1937.
- (10) Deretić-Stojanović B. *Contribution to the Time Dependent Deformacions on the Stres(Moment) Redistribution*, Teorijska i primenjena mehanika br. 15 Beograd 1989.

- (11) Dimitrijević D., Kolundžija B., Dunica Š, *Savremene metode proračuna u statici linijskih nosača*, Jugoslovenski građevinski centar, Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd 1981.
- (12) Đurić M. *Teorija spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija*, Naučno delo, Beograd, 1963.
- (13) Đurić M., Jovanović P. *Teorija okvirnih konstrukcija*, Građevinska knjiga Beograd 1972.
- (14) Faber O. *Plastic Yield, Shrinkage and other Problems of Concrete, and their Effects on Design*, Minutes of Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Vol. 225, London, Nov. 1925.
- (15) Freyssinet - *Une revolution dans les techniques de Beton*. Paris, 1936.
- (16) Fritz, B. *Vereinfachtes Berechnungsverfahren für Stahlträger mit einer Beton-Druckplatte bei Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens*, Bautechnik 27, 1950.
- *Verbundträger*, Springer-Verlag 1961.
- (17) Frohlich H. *Einfluss des Kriechens auf Verbundträger*, Bauing. 24. 1949.
- (18) Ghali A., Neville A.M. *Structural Analysis. A Unified classical and Matrix Approach*, London, Chapman and Hall 1977.
- (19) Glanville, W.H. - *Studies in Reinforced Concrete. The Creep or Flow of Concrete under Load* Technikal Paper 12. London, 1930.
- (20) Huet C. *Sur l'evolution des contraintes et deformations dans les systems multicouches constitues des materiaux viscoelastiques presentant du vieillissement*, Comptes rendus Acad. Sc Paris, t. 270, janvier 1970.
- (21) Huet C. *Operateurs integrodifferentiels matriciels pour l'etude des systemes a reponse differee presentant du*

- vieillissement, Comptes rendus Acad. Sc. Paris, t. 278, avril 1974.
- (22) Jovanović P. *Statika konstrukcija u matričnom obliku*, Arhitektonski fakultet, Beograd 1981.
- (23) Lazić J. Lazić V. *Opšta teorija spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija*, Srpska akademija nauka i umetnosti, Posebna izdanja, knjiga DXLII, Odeljenje tehničkih nauka, knjiga 22, Beograd 1982.
- (24) Lazić J. *Približna teorija spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija.*, Naučna knjiga, Beograd, 1982.
- (25) Lazić V. Lazić J. *Les contraintes et les pertes de precontrainte dans les structures precontraintes*, Annales de l'ITBTP, serie TMC N° 211, novembre 1977.
- (26) Lazić J., Lazić V. *Uvođenje korigovanog koeficijenta starenja u proračun spregnutih konstrukcija*, Izgradnja br. 9 i 10, sep. i okt. 1981.
- (27) Lazić J., Lazić V. *Stresses and Displacements of Composite and Prestressed Structures*, Fundamental Research on Creep and Shrinkage of Concrete, Edited by F.H. Wittmann, Martinus Nijhoff Publ. The Hague, 1982. str 413-425.
- (28) Lazić J., Lazić V. *Značaj komutativnosti linearnih integralnih poeratora u teoriji spregnutih i prethodno napregnutih konstrukcija*, Jugoslovensko društvo za mehaniku, 14. jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike, Portorož, 1978.
- (29) Lazić J. *Primena linearne viskoelastičnosti u teoriji konstrukcija*, doktorska disertacija, Građevinski fakultet u Beogradu 1972.
- (30) Lazić J., Lazić V. *Osurt na funkciju tečenja datu modelom propisa CEB-FIP*, Izgradnja br. 7, juli 1980.

- (31) Mandel J. *Sur les corps viscoelastiques lineaires dont les proprietes dependent de l'age*, Comptes rendus Acad. Sc. Paris, t. 247, 1958.
- (32) Mandel J. *Un principe de correspondance pour les corps viscoelastiques lineaires vieillissants*, *Mechanich of Visco-Elastic Media and Bodies*, Editor J. Hult, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.
- (33) Maslov G. *Termičeskoe naprjažennoe sostojanje betonnih massivov pri učete polzučesti betona*, *Izvestija NIIG*, t. 28, Gosenergoizdat, 1941.
- (34) McHenry D.A. *New aspect of Creep in Concrete and its Application to Desing*, *Proc. of the American Society for Testing Materials*, Vol. 43, 1943.
- (35) Murry R. S. *Laplace transforms*, New York, 1965.
- (36) Ronald L. Sack *Structural Analysys*. McGraw-Hill Book Company 1984.
- (37) Ržanjicin T. *Teorija polzučesti*, Strojizdat, Moskva, 1968.
- (38) Sattler K. *Theorie der Verbundkonstruktionen*, Band 1 und 2, Verlag Wilhelm Ernst und Sohn; Berlin, 1959.
- (39) Sekulović M. *Metod konačnih elemenata*, Građevinska knjiga, Beograd 1984.
- (40) *Spregnute konstrukcije*, Časopis "Izgradnja" posebno izdanje, Beograd 1972.
- (41) Trost H. *Auswirkungen des superpositionsprinzips auf Kriech und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton*, *Beton-und Stahlbetonbau* 10/1967 i 11/1967.
- (42) Ulickij I. *Teorija i rasčot železobetonnih steržnjevih konstrukcij s učotom ,dlitelnih procesov*, Budiveljniki, Kiev, 1967.

- (43) Volterra V. *Theory of Functionals and of Integro Differential Equations*, Dover Publ., Inc., New York, 1959.
- (44) Whitney C. *Plain and Reinforced Concrete Arches*, J. ACI, Vol. 28, March 1932.



SADRŽAJ

UVOD

I. JEDNAČINE PROBLEMA I NJIHOVO REŠENJE

1. Osnovne pretpostavke

2. Integralna veza između napona i deformacije i osnovni operatori

2.1. Integralna veza 7

2.2. Integralna veza u operatorskom obliku..... 9

2.3. Osnovni izrazi spregnutog preseka 12

3. Osnovne statičke i deformacijske veličine štapa

3.1. Osnovne statičke veličine štapa 19

3.2. Osnovne deformacijske veličine štapa..... 20

3.3. Veza između osnovnih statičkih i deformacijskih
veličina štapa

3.3.1. Štap promenljivog poprečnog preseka..... 22

3.3.2. Štap konstantnog poprečnog preseka 30

4. Matrica krutosti

4.1. Matrica krutosti štapa tipa "k"

4.1.1. Bazna matrica krutosti štapa tipa "k" 31

4.1.2. Elementi bazne operatorske matrice krutosti štapa
tipa "k" promenljivog poprečnog preseka 32

4.1.3. Elementi bazne operatorske matrice krutosti štapa
tipa "k" konstantnog poprečnog preseka 33

4.1.4. Matrica krutosti štapa tipa "k" izražena preko
bazne matrice krutosti 35

4.2. Matrica krutosti štapa tipa "g"

4.2.1. Bazna matrica krutosti štapa tipa "g" 37

4.2.2. Elementi bazne operatorske matrice krutosti štapa
tipa "g" promenljivog poprečnog preseka 39

| | |
|---|----|
| 4.2.3. Elementi bazne operatorske matrice krutosti štapa tipa "g" konstantnog poprečnog preseka | 40 |
| 4.2.4. Matrica krutosti štapa tipa "g" izražena preko bazne matrice krutosti | 44 |
| 4.3. Matrica krutosti štapa tipa "s" | |
| 4.3.1. Elementi operatorske matrice krutosti štapa tipa "s" promenljivog poprečnog preseka..... | 47 |
| 4.3.2. Elementi operatorske matrice krutosti štapa tipa "s" konstantnog poprečnog preseka..... | 48 |
| 5. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja | |
| 5.1. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "k" | |
| 5.1.1. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "k" promenljivog poprečnog preseka..... | 50 |
| 5.1.2. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "k" konstantnog poprečnog preseka..... | 53 |
| 5.1.3. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "k" konstantnog poprečnog preseka usled opterećenja nepromenljivog u toku vremena..... | 53 |
| 5.2. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g" | |
| 5.2.1. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g" sa zglobom na mestu k promenljivog poprečnog preseka..... | 56 |
| 5.2.2. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g" sa zglobom na mestu k konstantnog poprečnog preseka..... | 58 |
| 5.2.3. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g" sa zglobom na mestu k konstantnog poprečnog preseka usled opterećenja nepromenljivog u toku vremena..... | 58 |
| 5.2.4. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa | |

| | |
|--|-----|
| tipa "g" sa zglobom na mestu i promenljivog poprečnog preseka..... | 60 |
| 5.2.5. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g" sa zglobom na mestu i konstantnog poprečnog preseka..... | 62 |
| 5.2.6. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "g" sa zglobom na mestu i konstantnog poprečnog preseka usled opterećenja nepromenljivog u toku vremena..... | 63 |
| 5.3. Vektor ekvivalentnih čvornih opterećenja štapa tipa "s" | 65 |
| 6. Transformacija matrice krutosti sistema | 67 |
| 7. Uslovne jednačine | |
| 7.1. Uslovi kompatibilnosti pomeranja čvorova | 71 |
| 7.2. Uslovi ravnoteže sila u čvorovima | |
| 7.2.1. Čvorna operatorska matrica krutosti sistema | 73 |
| 7.2.2. Preuređena čvorna operatorska matrica krutosti..... | 75 |
| 7.2.3. Nepoznata pomeranja, reakcije i sile na krajevima štapova..... | 77 |
| 8. Proračun spregnutog nosača u vremenu $t=t_0$ | 80 |
| 9. Određivanje napona | 87 |
| II. PRIMERI | |
| P1. Primer 1 | |
| P1.1. Izgled nosača , spoljašnji uticaji i geometrijske karakteristike | 91 |
| P1.2. Proračun nosača u vremenu $t=t_0$ | 98 |
| P1.3. Proračun nosača u vremenu t | 120 |
| P1.4. Proračun napona | |
| P1.4.1. Proračun napona za funkciju puzanja teotije starenja | 163 |
| P1.4.2. Proračun napona za funkciju puzanja teotije | |

| | |
|--|-----|
| nasleđa asimptotskom EM metodom | 179 |
| P2. Primer 2 | 197 |
| P3. Primer 3 | 211 |
| III. PRILOZI | |
| Prilog 1 : Definicija linearnih integralnih operatora i operacije | 216 |
| Prilog 2 : Redukovane geometrijske karakteristike nehomogenog preseka | 218 |
| Prilog 3 : Određivanje inverznog operatora \hat{S}' | 222 |
| Prilog 4 : Laplasova transformacija | 228 |
| LITERATURA | 230 |

