

## Numerické kontroly vo vyrovnaní lokálnych polohových geodetických sietí (LGS)

Gabriel Weiss<sup>1</sup>, Slavomír Labant<sup>1</sup>, a Štefan Rákay ml.<sup>1</sup>

### Numerical controls in an adjustment of the local positional geodetic network (LGN)

In the process of the foundation, expansion, modification LGN (free or fixed), based on its convenient measuring it defines coordinate points and others parameters of networks. The check of measurings and calculations solves by using convenient matrix relations in the negation form. Their failure points out the incorrect measurement and calculations in the LGN.

**Key words:** Local Geodetic Network, Method of least squares, robust adjustment, weight iteration adjustment

### Úvod

Lokálna polohová geodetická sieť (2D LGS) v určitom priestore pozostáva z jestvujúcich bodov (evidovaných v príslušnej databáze) a z nových, v súčasnosti zakladaných bodov. Po konsolidácii týchto bodov sa LGS náležite zameria a s použitím vhodného vyrovnania sa určia odhady súradníc bodov LGS, ich polohová presnosť, ako aj ukazovatele všetkých vlastností siete, ktoré sú pre LGS a jej využitie dôležité. Vhodnými postupmi vyrovnania sú napr.:

- MNŠ vyrovnanie GMM sprostredkujúcich meraní v LGS s plnou hodnotou matice  $N$  s väzbami ("viazané vyrovnanie") alebo s neúplnou hodnotou matice  $N$  bez väzieb ("voľné vyrovnanie"),
- MNŠ robustné vyrovnanie GMM sprostredkujúcich meraní v LGS s plnou hodnotou matice  $N$  s väzbami ("viazané vyrovnanie") alebo s neúplnou hodnotou matice  $N$  bez väzieb ("voľné vyrovnanie") a s iteračným váhovaním.

V procese vyrovnania siete, aj po jeho realizácii sa uskutočňujú rôzne kontroly na overenie numerickej korektnosti rôznych priebežných výsledkov tak v riešení, ako aj v konečných výsledkoch z vyrovnania, v ktorých sa využívajú matice odhadovacieho procesu:

$L_{(n,1)}$	vektor príslušnými meraniami určených veličín v LGS (dĺžky, horizontálne a vertikálne uhly, ETRS súradnicové rozdiely, atď.),
$A_{(n,2u)}$	konfiguračná matica kompletnej LGS,
$C_{UB}^0_{(u,2)}$	matica približných hodnôt súradníc určovaných bodov UB v sieti,
$C_{DB}_{(d,2)}$	súradnice jestvujúcich databázových bodov v LGS použitých ako dátumových bodov, (1)
$Q_L_{(n,n)}$	kofaktorová matica zameraných veličín $L$ ,
$L^0_{(n,1)}$	približné hodnoty observovaných veličín $L$ ,
$dL_{(n,1)}$	diferencie medzi zameranými $L$ a približnými hodnotami $L^0$ určovaných veličín v LGS, participujúce v odhadoch súradníc UB

$$\hat{C}_{UB} = C_{UB}^0 + d\hat{C}_{UB}, \quad (2)$$

$$\hat{C}_{UB} = C_{UB}^0 + (A^T Q_L^{-1} A)^{-1} A^T Q_L^{-1} (L - L^0) \quad (3)$$

a v hodnotení výsledkov vyrovnania. Vo vyrovnaní LGS je:  $n$  – počet meraných veličín,  $u$  – počet bodov UB s počtom  $2u$  určovaných súradníc  $\hat{C}_{UB} = [\hat{X} \ \hat{Y}]_{UB}$ ,  $d$  – počet databázových bodov s funkciou dátumových bodov DB v LGS.

<sup>1</sup> prof. Ing. Gabriel Weiss, PhD., Ing. Slavomír Labant, PhD., Ing. Štefan Rákay ml., Fakulta BERG Technickej univerzity v Košiciach, Ústav geodézie, kartografie a geografických informačných systémov, Park Komenského 19, 040 01 Košice, [gabriel.weiss@tuke.sk](mailto:gabriel.weiss@tuke.sk), [slavomir.labant@tuke.sk](mailto:slavomir.labant@tuke.sk), [stefan.rakay@tuke.sk](mailto:stefan.rakay@tuke.sk)  
(Recenzovaná a revidovaná verzia dodaná 14. 9. 2009)

### Hodnotenie výstupov z vyrovnania

Na overenie správnosti, a teda prijateľnosti výsledkov (priebežných aj finálnych) z vyrovnania LGS, je možné použiť dva systémy kontrolných postupov:

- systém vhodných údajov a poznatkov najmä numerických, prezentovaných priebežnými a finálnymi výstupmi rôznych parametrov z vyrovnania, ich vzájomnými vzťahmi a pod.,
- systém numerickej (“nulovej”) kontroly súčinov a súčtov vhodných veličín vzhľadom k ich známym teoretickým, spravidla nulovým hodnotám.

### Empirické posúdenie výsledkov vyrovnania

Empirický kontrolný systém zahŕňa vizuálne, individuálne, na základe skúsenosti a poznatkov posudzované výsledky vyrovnania, t.j. hodnotenie medziproduktov z výsledkovej finálnych výstupov z odhadovacieho procesu, s aplikáciou aj rôznych vhodných postupov a s uplatnením skúsenosti posudzovateľov. Je to spravidla nefinálne, informatívne posúdenie len niektorých výsledkov, najčastejšie polohovej presnosti určených bodov UB v LGS na základe vyšetrovaných (v rámci vyrovnania) empirických hodnôt štandardných odchýlok  $s_{\hat{x}}, s_{\hat{y}}$  súradníc  $\hat{C}_{UB}$ , absolútnych hodnôt rezíduí  $|V_i|$  meraných veličín, participujúcich v spracovaní LGS.

Ak napr. hodnoty  $s_{\hat{x}}, s_{\hat{y}}$  sú nereálne veľké, neprijateľné a zároveň aj vektor  $V$  obsahuje neakceptovateľné vysoké hodnoty  $|V_i|$ , je odôvodnené pochybovať o kvalitnom zameraní a spracovaní LGS a tým aj o správnosti výsledkov z MNS spracovania LGS.

Na posúdenie kvality výsledkov vyrovnania sa môžu použiť (okrem štandardných ukazovateľov) aj ďalšie veličiny, napr. hodnoty parametrov vnútornej a vonkajšej spoľahlivosti LGS, parametrov matematického vyjadrenia aposteriórnej kvality LGS, posúdenie rozloženia polohovej presnosti UB v LGS a ďalšie ukazovatele (Wolf 2004, Jäger 2005, Caspary 1988, Grafarend 1993 a ďalší).

### Matematické posúdenie výsledkov vyrovnania

Na numerické posúdenie a hodnotenie výstupných veličín (a ich funkcií) z vyrovnávacieho procesu sa najčastejšie používajú rôzne vhodné maticové štruktúry s aplikáciou jednak meraných veličín a jednak aj výstupných veličín zo samotného procesu spracovania. Takto účelovo vytvorené rôzne maticové formulácie sú vhodné na numerickú kontrolu vzájomných vzťahov medzi nameranými aj vypočítanými veličinami. Ich štruktúralne väzby prezentujú reálne matematické i štatistické vzťahy v odhadovacom procese. Najčastejšie sa z nich používajú tie vzťahy, v ktorých vystupujú matice vyrovnávacej procedúry jednak vstupné ( $A, Q_L, dL, \dots$ ) a jednak výstupné ( $d\hat{C}, \Sigma_{\hat{C}}, \dots$ ). Spravidla sa použijú citlivé “kontroly” medzi maticami vyrovnávacieho procesu, viazané na maticu  $Q_L$  (“presnosť meraní”) v štruktúrach rovníc R1 - R5:

$$\begin{aligned}
 \text{R1: } & dL^T \cdot Q_L^{-1} \cdot A \cdot d\hat{C} = 0, \\
 & \quad (1,n) \quad (n,n) \quad (n,2u) \quad (2u,1) \\
 \text{R2: } & dL^T \cdot Q_L^{-1} \cdot dL = 0, \\
 & \quad (1,n) \quad (n,n) \quad (n,1) \\
 \text{R3: } & V^T \cdot Q_L^{-1} \cdot dL = 0, \\
 & \quad (1,n) \quad (n,n) \quad (n,1) \\
 \text{R4: } & dL^T \cdot Q_L^{-1} \cdot V = 0, \\
 & \quad (1,n) \quad (n,n) \quad (n,1) \\
 \text{R5: } & V^T \cdot Q_L^{-1} \cdot V = 0 \\
 & \quad (1,n) \quad (n,n) \quad (n,1)
 \end{aligned} \tag{4}$$

a ďalších, pričom teoreticky platné nulové hodnoty uvedených maticových súčinov sú odhadované numerickými hodnotami ľavých strán vzťahov (4). Tieto hodnoty by mali mať v správnom, bezchybnom riešení prijateľné vyjadrenie s nenulovými hodnotami od 3. – 4. desiatinného miesta (0,000XX...).

Dostatočne malé, zanedbateľné numerické hodnoty vo vyjadrení pravých strán vzťahov (4) indikujú, že použité matice na ľavých stranách (4) majú prijateľné reálne numerické obsahy, i keď sú zaťažené náhodnými chybami. Situácie, keď niektoré rovnice (4) nedávajú ani približne teoretické nulové hodnoty na pravých

stranách príslušných vzťahov poukazujú na chybnú numerickú štruktúru niektorej matice (alebo aj viac matíc) na ľavej strane vzťahov (4).

Iná skupina vzťahov medzi maticami vyrovnávacieho postupu je viazaná na vektor rezíduí  $V$  ("chyby meraní") alebo na rôzne jeho funkcie:

$$\begin{aligned}
 \text{R6: } & A \cdot N^{-1} \cdot A^T \cdot Q_L^{-1} - E \cdot dL = V, \\
 & \begin{matrix} (n,2u) & (2u,2u) & (2u,n) & (n,n) & (n,n) & (n,1) & (n,1) \end{matrix} \\
 \text{R7: } & \hat{L} - L^0 - dL = V, \\
 & \begin{matrix} (n,1) & (n,1) & (n,1) & (n,1) \end{matrix} \\
 \text{R8: } & A - d\hat{C} - dL = V, \\
 & \begin{matrix} (n,2u) & (2u,1) & (n,1) & (n,1) \end{matrix} \\
 \text{R9: } & dL^T \cdot Q_L^{-1} \cdot dL - dL^T \cdot Q_L^{-1} \cdot A \cdot d\hat{C} = V^T \cdot Q_L^{-1} \cdot V, \\
 & \begin{matrix} (1,n) & (n,n) & (1,n) & (n,n) & (n,2u) & (2u,1) & (1,n) & (n,n) & (n,1) \end{matrix}
 \end{aligned} \tag{5}$$

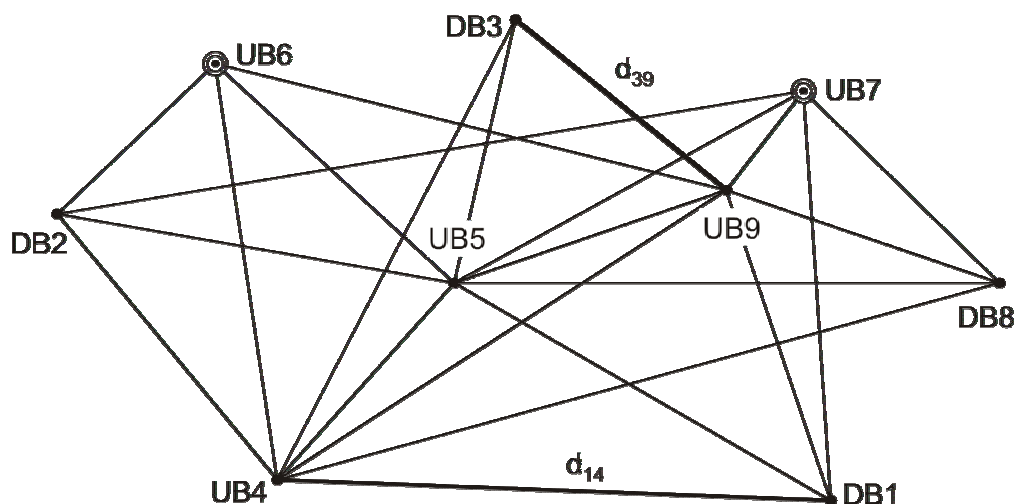
ako aj na ďalšie možné štruktúry kontrolných vzťahov, ako funkcií použitých matíc.

Rovnice (5) overujú predovšetkým maticu rezíduí  $V$  vo vzťahu k ostatným maticiam vyrovnávacieho postupu. Kontrolujú hodnoty  $V_i$  vo vykonaných meraniach, resp. ich funkciu (kvadratickú formu rezíduí  $V^T Q_L^{-1} V$ ), zohľadňujúcu aj použité kofaktory  $Q_L$ , aj merané hodnoty  $L$  veličín v LGS.

Vzťahy (5) sa používajú aj v anulovanej forme.

### Demonštračný príklad

LGS bola zameraná ako trilaterálna sieť, t.j. vhodnými dĺžkami medzi jej bodmi a spracovaná s použitím MNS vyrovnania viazaného (Obr. 1).



Obr. 1. Trilaterálna sieť.  
Fig. 1. Trilateration network.

Vyrovnanie LGS sa vykonalo pre dve situácie siete:

- LGS(1) s použitím správne nameraných hodnôt dĺžok medzi bodmi (t.j. merané hodnoty zaťažené len náhodnými chybami),
- LGS(2) s chybnými (simulovanými) hodnotami dvoch dĺžok  $d_{14}, d_{39}$  a zároveň tiež s chybnými hodnotami približných súradníc  $C^0$  dvoch bodov (UB6, UB7).

Aplikáciu kontrolných vzťahov pre danú sieť v oboch prípadoch a), b) jej vyrovnania tvoria výstupné numerické hodnoty zo vzťahov (4), (5), uvedené v Tab. 1.

Tab. 1. Výstupné numerické hodnoty zo vzťahov (4), (5) pre sieť v prípadoch a), b).

Tab. 1. Output numerical values from the relations (4), (5) for network in the example a), b).

Kontrolný vzťah	LGS(1)	LGS(2)
R1	0,000 511	3,638 009
R2	0,000 716	3,644 368
R3	0,000 238	0,062 393
R4	-0,000 201	-0,067 404
R5	-0,000 201	-0,066 371
R6	$V1$	$V2$
R7	$V1$ (Správne	$V2$ (Chybné
R8	$V1$ hodnoty)	$V2$ hodnoty)
R9	0,000 004	-0,014 033

(6)

Numerické hodnoty z kontrolných rovníc (5) pre LGS(1), LGS(2) zamerania siete LGS, ktorej vektory rezíduí  $V$  pre kontrolné vzťahy R6, R7, R8 sú:

$$V1_{(mm)} = [-3.00 \quad 0.97 \quad 3.52 \quad 2.38 \quad 3.78 \quad 0.36 \quad 4.19 \quad 1.40 \quad 4.02 \quad -5.42 \quad -2.03 \quad 3.57 \quad 2.89 \quad 1.76 \quad -2.53 \quad 4.51 \quad -0.33 \quad -4.96 \quad 1.14 \quad 0.71 \quad -0.78 \quad 2.15 \quad 0.55 \quad 0,74], \quad (7)$$

$$V2_{(mm)} = [-17.69 \quad 27.86 \quad -9.81 \quad 22.52 \quad -4.65 \quad 9.25 \quad -22.61 \quad 4.04 \quad 11.42 \quad 19.77 \quad 11.16 \quad -2.69 \quad -2.20 \quad -2.87 \quad 3.58 \quad 18.35 \quad -1.19 \quad 0.00 \quad 5.82 \quad 19.30 \quad -7.87 \quad 12.32 \quad -3.81 \quad 5.2],$$

s evidentne prijateľnými hodnotami  $V1$  a neprijateľnými hodnotami  $V2$ .

Prvky vektora  $V1$  pre vzťahy R6, R7, R8 sa vzájomne odlišujú najviac o hodnoty  $|0.01| - |0.02|$  a tiež aj prvky vektorov  $V2$  pre vzťahy R6, R7, R8.

Uvedené kontrolné vzťahy R1 – R9, (4),(5),(6) aj ďalšie využiteľné numerické kontroly, môžu teda preukázať na základe svojich pravostranných výstupných (teoreticky „nulových“, reálne rôznych, temer nenulových) hodnôt (Tab. 1), v podstate dve odlišné výstupné situácie zo zamerania a spracovania LGS(1), LGS(2) z aspektu prijateľnosti:

- v prípade LGS(1) (korektné zameranie a spracovanie LGS), prijatie všetkých výsledkov R1 – R5, R9 indikujú nulové, resp. prijateľné kvázinulové hodnoty z použitých numerických hodnôt (6), keď aj vektor  $V1$  (identický pre R6 – R8) má nízke, reálne prijateľné hodnoty (7).
- v prípade LGS(2) (chybné zameranie LGS), zamietnutie všetkých výstupov R1 – R5, R9 z vyrovnania indikujú výrazné nenulové hodnoty z použitých numerických hodnôt (6) a keď aj vektor  $V2$  (identický pre R6 – R8) obsahuje vysoké neprijateľné hodnoty (7) vzniklé z chybných meraní a spracovaní výsledkov.

Na základe získaných výsledkov z kontrolných vzťahov R1 – R5, R9 pre LGS(1) vyplýva, že tieto vzťahy numericky dávajú nízke, zanedbateľne malé, t.j. prakticky nulové hodnoty. Také numerické vyjadrenie naznačuje, že zameranie a vyrovnanie LGS(1) sa realizovalo správne, s dôveryhodnými numerickými výstupmi pre všetky veličiny, ktoré sa zúčastnili v spracovaní LGS(1). Vzťahy R6 – R8, prezentujúce hodnoty rezíduí  $V$  vo vykonanom zameraní LGS sú navzájom prakticky identické.

Použitie kontrolné vzťahy R6 – R8 dokumentujú aj korektné postupy v zameraniach a spracovaní LGS, t.j. výsledky použitého vyrovnania sú prijateľné a aplikovateľné.

Výsledky vyrovnania LGS(2) so simulovanými chybami v súradniciach 2 bodov UB:  $\varepsilon(X_3) = 0,032 \text{ m}$ ,  $\varepsilon(Y_3) = -0,025 \text{ m}$  a v dvoch meraných dĺžkach:  $\varepsilon(d_{14}) = 0,070 \text{ m}$ ,  $\varepsilon(d_{39}) = -0,093 \text{ m}$  dávajú podľa očakávania neprijateľné výsledné hodnoty v R1 – R5, ako aj hodnoty prvkov vektora  $V2$ .

## Záver

Pri obnovách, rozšíreniach 2D LGS a vôbec pri ich geodetických kontrolných overovaniach je vhodné použiť rôzne numerické kontroly, ktoré na základe súčasných meraní a ich výsledkov dávajú spoľahlivé podklady na hodnotenie geometrickej kvality LGS. Z rôznych daných a meraných veličín charakterizujúcich štruktúru a vlastnosti LGS, ako aj z výsledkov jej zamerania, je možné zostaviť vhodné rovnice s maticovými prvkami, ktoré majú mnohostranné kontrolné funkcie pre rôzne vlastnosti LGS. Na základe týchto kontrolných rovníc, z ktorých sú v danom príspevku uvedené najvhodnejšie maticové štruktúry pre MNŠ spracovanie LGS, je možné s aplikáciou získaných numerických veličín posúdiť kvalitu a spoľahlivosť príslušnej LGS na základe prijateľných, resp. neprijateľných hodnôt numerických ukazovateľov.

Je však evidentné, že kvalitnejšiu kontrolu spoľahlivosti výsledkov, resp. identifikáciu chybných meraní v LGS s vplyvom na výsledky vyrovnania, umožňujú najmä analýzy vektorov  $dL = L - L^0$  a  $C^0$  a ich pôsobenie na hodnoty výstupných veličín z vyrovnania.

#### Literatúra - References

- Böhm, J. et al.: Teorie chyb a vyrovnávací počet. *GKP Praha 1990*.
- Caspary, W. F.: Concepts of Network and Deformation Analysis. *Monograph No.11, School of Surveying, UNSW, Kensington 1988*.
- Grafarend, E. W. et al.: Ausgleichsrechnung in linearen Modellen. *Wissenschaftsverlag, Mannheim 1993*.
- Höpcke, W.: Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung. *W. de Gruyter, Berlin 1980*.
- Illner, J.: Datumfestlegung in freien Netzen. *DGK, Nr. 309, München 1985*.
- Ingedult, M. et al.: Geodézie. Metody výpočtu a vyrovnání geodetických sítí. *Praha ČVUT 1993*.
- Jäger, R. et al.: Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren. *Wichmann, Heidelberg 2005*.
- Koch, K. R.: Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models. *Springer, Berlin 1988*.
- Niemeier, W.: Ausgleichsrechnung. *W. de Gruyter, Berlin 2002*.
- Reissmann, G.: Die Ausgleichsrechnung VI g.f. *Bauwesen, Berlin 1980*.
- Wolf, H.: Ausgleichsrechnung I., II. (3. Aufl.). *Dümmler, Bonn 2004*.