Éléments de géométrie pour la mécanique des milieux continus

Boris Kolev, R. Desmorat

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE POUR LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

B. KOLEV AND R. DESMORAT

Résumé. Ce texte est le résultat d'un dialogue entre mathématiciens et mécaniciens. Il est destiné à faire le point sur le sujet des grandes déformations, d'un point de vue géométrique, en y maintenant un discours mathématique rigoureux tout en restant accessible et proche des préoccupations des mécaniciens.

Table des matières

1. L'espace des configurations en MMC

En mécanique des milieux continus (MMC), l'espace ambiant $\mathscr{E}$ est représenté par un espace affine euclidien de dimension 3. En désignant par $\mathbf{q}$ la métrique euclidienne sur $\mathscr{E}$, il vaut mieux considérer cet espace comme une variété riemannienne $(\mathscr{E}, \mathbf{q})$ et oublié, dans un premier

Date: Version 1 : 3 novembre 2019.

Key words and phrases. mécanique des grandes déformations ; espaces des métriques ; géométrisation de la mécanique ; lois de comportement.

temps, cette structure affine de l'espace. De façon imagée, on peut considérer $(\mathscr{E}, \mathbf{q})$ [1] comme le « cahier de laboratoire tridimensionnel » (ou système de référence) d'un observateur dans lequel il consigne ses observations, après avoir choisi une unité de longueur (la métrique). Le milieu matériel est paramétré par une variété à bord (compacte et orientable) de dimension 3, notée $\mathscr{B}$ et dénommée habituellement par l'anglicisme *body*. Cette variété $\mathscr{B}$ est munie d'une *forme volume* μ, la *mesure de masse* [41].

Remarque 1.1. La coutume veut que l'on désigne habituellement les grandeurs *matérielles* (*i.e.* définies sur le body $\mathscr{B}$) par des lettres majuscules alors que les grandeurs *spatiales* (*i.e.* définies sur l'espace $\mathscr{E}$) sont représentées par des lettres minuscules.

Une *configuration* d'un milieu matériel est représentée par un *plongement* (les particules ne peuvent occuper le même point de l'espace) de classe C^∞

$$p : \mathscr{B} \to \mathscr{E}$$

et dénommé *placement* en mécanique. La sous-variété $\Omega = p(\mathscr{B})$ correspond à une *configuration du système*. L'application linéaire tangente $Tp : T\mathscr{B} \to T\mathscr{E}$ est traditionnellement désignée par les mécaniciens comme le *gradient de la transformation* et notée $\mathbf{F}$.

Remarque 1.2. Certains auteurs tiennent beaucoup à utiliser une *configuration de référence*

$$\Omega_{p_0} = p_0(\mathscr{B}),$$

afin de pouvoir considérer le *body comme une sous-variété de l'espace* $\mathscr{E}$. De fait, ils travaillent alors avec l'application [10, 17, 41, 42]

$$\varphi := p \circ p_0^{-1}, \qquad \Omega_{p_0} \to \Omega.$$

L'espace des configurations en MMC est donc l'ensemble, noté $\mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$, des *plongements lisses* de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{E}$ (plongement se dit *embedding* et parfois *imbedding* en anglais). Cet ensemble peut être muni d'une structure de *variété différentielle de dimension infinie* [19] (une *variété de Fréchet*). L'espace tangent à $\mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$ en un point $p \in \mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$ se décrit de la façon suivante. Soit $p(t)$ une courbe dans $\mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$ telle que $p(0) = p$ et $(\partial_t p)(0) = p_t(0) = \boldsymbol{V}$, alors l'espace tangent en $p \in \mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$ est l'ensemble

$$T_p\mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E}) = \{\boldsymbol{V} \in \mathrm{C}^\infty(\mathscr{B}, T\mathscr{E});\ \pi \circ \boldsymbol{V} = p\},$$

où $\boldsymbol{V}$ est décrit par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} T\mathscr{B} \arrow[r, "Tp"] \arrow[d, "\pi"'] & T\mathscr{E} \arrow[d, "\pi"] \\ \mathscr{B} \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, "\boldsymbol{V}"] & \mathscr{E} \end{tikzcd}$$

On reconnaît $\boldsymbol{V}$ comme une *vitesse Lagrangienne*. $T\mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$ est l'ensemble des *vitesses lagrangiennes virtuelles*. Lorsque l'on précise un chemin de plongements $p(t)$, alors la vitesse lagrangienne associée à l'instant t, $\boldsymbol{V}(t) = p_t(t)$ appartient à l'espace tangent $T_{p(t)}\mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$. Attention, *il ne s'agit pas d'un champ de vecteurs*, ni sur $\mathscr{B}$, ni sur $\Omega_p = p(\mathscr{B})$! On peut toutefois fabriquer des champs de vecteurs à partir d'une courbe $p(t, \mathbf{X})$ et de sa vitesse Lagrangienne $p_t(t, \mathbf{X})$:

— Sur $\mathscr{B}$, en posant $\boldsymbol{U}(t, \mathbf{X}) := (Tp^{-1}.\boldsymbol{V})(t, \mathbf{X})$;

— Sur $\Omega_p = p(\mathscr{B})$, en posant $\boldsymbol{u}(t, \mathbf{x}) := (\boldsymbol{V} \circ p^{-1})(t, \mathbf{x})$.

Ces champs de vecteurs, respectivement dénommés *vitesse eulerienne à gauche* et *vitesse eulerienne à droite* jouent des rôles fondamentaux en mécanique.

1. Pour être plus exact, la variété $\mathscr{E}$ n'est pas « l'espace » mais la *fibre type*, de dimension 3, d'une variété fibrée de dimension 4 munie d'une structure galiléenne [22, 23, 7].

Remarque 1.3. La vitesse eulerienne à gauche (ou *vitesse matérielle*) intervient dans les équations d'Euler de la dynamique du solide rigide [11], alors que la vitesse eulerienne à droite (ou *vitesse spatiale*) intervient en mécanique des fluides (mais aussi en mécanique du solide déformable). Une vision unifiée de ces équations a été proposée par Arnold dans un article dédié au bicentenaire des équations d'Euler du solide rigide [2].

Depuis le *programme d'Erlangen (1872)* de Felix Klein [21], une *géométrie, c'est un groupe !* ou plus exactement l'action d'un groupe sur un ensemble [38]. Il est donc important de détailler les groupes qui ressortent naturellement dans ce modèle :

— Le groupe des difféomorphismes de $\mathscr{B}$, noté $\mathrm{Diff}(\mathscr{B})$;
— Le groupe des difféomorphismes de $\mathscr{B}$ qui préservent la mesure de masse μ, noté $\mathrm{Diff}_{\mu}(\mathscr{B})$;
— Le groupe des difféomorphismes de $\mathscr{E}$, noté $\mathrm{Diff}(\mathscr{E})$;
— Le groupe des isométries de la variété riemannienne $(\mathscr{E}, \mathbf{q})$, noté $\mathrm{Isom}(\mathscr{E}, \mathbf{q})$ (qui est le groupe des *déplacements* de l'espace affine euclidien) ;

Une des difficultés en mécanique des grandes déformations vient du fait que certains auteurs travaillent avec des *variables matérielles* et d'autres avec des *variables spatiales*, multipliant par conséquent les définitions des concepts fondamentaux comme le *taux de déformation* ou les *contraintes*. Sur le fond, cela n'est pas vraiment gênant, à condition de savoir jongler astucieusement et rigoureusement entre ces jeux de variables. Cela est possible et même facile à condition de maîtriser les concepts mathématiques de *pull-back* et *push-forward* rappelés dans l'Appendice B.

A chaque plongement p correspond une forme volume $p_* \mu$ sur la configuration $\Omega_p = p(\mathscr{B})$. Par ailleurs, la métrique riemannienne $\mathbf{q}$ induit sur Ω_p une forme volume, notée vol_q. Par conséquent, $p_* \mu$ est proportionnelle à vol_q

$$p_* \mu = \rho \, \mathrm{vol}_q, \tag{1.1}$$

ce qui permet de définir la *densité de masse* ρ comme une fonction scalaire sur le domaine spatial Ω_p.

De même, à chaque plongement $p \in \mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$ correspond une métrique riemannienne

$$\boldsymbol{\gamma} = p^* \mathbf{q} \in \mathrm{Met}(\mathscr{B}),$$

où $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ désigne l'ensemble des métriques riemanniennes définies sur $\mathscr{B}$. On pourra noter que la courbure riemannienne de $\boldsymbol{\gamma}$ est nulle quand $\mathscr{B}$ est une variété à bord de dimension 3 (ceci n'est évidemment plus vrai en théorie des coques où $\mathscr{B}$ est une variété de dimension 2). La question suivante se pose alors naturellement. Soit

$$\Phi : \mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E}) \to \mathrm{Met}(\mathscr{B}), \qquad p \mapsto p^* \mathbf{q},$$

cette application est-elle injective ? La réponse est non et le défaut d'injectivité s'explique facilement. Soit p un plongement et $\boldsymbol{\gamma} = \Phi(p)$ alors étant donné n'importe quelle isométrie $g \in \mathrm{Isom}(\mathscr{E}, \mathbf{q})$ et n'importe quelle isométrie $h \in \mathrm{Isom}(\mathscr{B}, \boldsymbol{\gamma})$, on a

$$(g \circ p \circ h)^* \mathbf{q} = h^* p^* (g^* \mathbf{q}) = h^* p^* \mathbf{q} = h^* \gamma = \gamma$$

et donc

$$\Phi(g \circ p \circ h) = \Phi(p).$$

Inversement, considérons deux plongements p et $\bar{p}$ tels que $\Phi(p) = \Phi(\bar{p}) = \boldsymbol{\gamma}$. Alors

$$\varphi := \bar{p} \circ p^{-1} : \Omega_p \to \Omega_{\bar{p}}$$

est une isométrie. C'est donc la restriction à Ω_p d'un déplacement $g \in \mathrm{Isom}(\mathscr{E}, \mathbf{q})$ tel que $\Omega_{\bar{p}} = g(\Omega_p)$. On a donc

$$\bar{p} = g \circ p \circ h,$$

où $h := (\bar{p})^{-1} \circ g \circ p \in \mathrm{Isom}(\mathscr{B}, \boldsymbol{\gamma})$. On pourra noter, toutefois qu'en général, le groupe des isométries $\mathrm{Isom}(\mathscr{B}, \boldsymbol{\gamma})$ est réduit à l'identité, ce qui n'est pas le cas du groupe $\mathrm{Isom}(\mathscr{E}, \mathbf{q})$ qui est un groupe de Lie de dimension 6.

Remarque 1.4. Le volume riemannien vol_γ sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ et la mesure de masse μ sont reliés par une fonction positive définie sur $\mathscr{B}$. Des relations

$$p_*\mu = \rho \mathrm{vol}_q, \qquad \mathrm{vol}_\gamma = p^* \mathrm{vol}_q,$$

on déduit que

$$\mu = (p^*\rho)\mathrm{vol}_\gamma.$$

Ceci nous amène à introduire la densité de masse intrinsèque (ou densité de masse sur le body) comme

$$\rho_{\mathscr{B}} := p^*\rho = \frac{\mu}{\mathrm{vol}_\gamma}. \tag{1.2}$$

2. Déformations et contraintes

Un mouvement en MMC correspond à une courbe $p(t)$ dans $\mathrm{Emb}(\mathscr{B}, \mathscr{E})$ (un *chemin de plongements*). A ce mouvement est associé une vitesse lagrangienne

$$\partial_t p(t, \mathbf{X}) = \boldsymbol{V}(t, \mathbf{X})$$

et une vitesse eulerienne (à droite)

$$\boldsymbol{u}(t, \mathbf{x}) = \boldsymbol{V}(t, p^{-1}(t, \mathbf{x})).$$

Traditionnellement, on définit le *taux de déformation* (sur Ω_p) par la quantité

$$\widehat{\mathbf{d}} := \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^t\right)$$

où $\nabla \boldsymbol{u}$ est la dérivée covariante de la vitesse eulerienne $\boldsymbol{u}$ et $(\nabla \boldsymbol{u})^t$ désigne la transposée (par rapport à la métrique $\mathbf{q}$, voir Appendice A) de l'opérateur linéaire $\mathbf{w} \mapsto \nabla_{\mathbf{w}} \boldsymbol{u}$. Les champs de tenseurs $\widehat{\mathbf{d}}$, $\nabla \boldsymbol{u}$ et $(\nabla \boldsymbol{u})^t$ sont mixtes de type $(1, 1)$. Dans un système de coordonnées locales, leurs composantes respectives s'écrivent $\hat{d}^i{}_j$, $(\nabla \boldsymbol{u})^i{}_j$ et $((\nabla \boldsymbol{u})^t)^i{}_j$. Grâce à la métrique $\mathbf{q}$ sur Ω_p, on peut transformer le champ de tenseurs mixte $\widehat{\mathbf{d}}$ en un champ de tenseurs covariants d'ordre 2, $\mathbf{d} := \mathbf{q}\widehat{\mathbf{d}}$, c'est à dire

$$d_{ij} = q_{ik} \hat{d}^k{}_j. \tag{2.1}$$

Lemme 2.1. *Le tenseur taux de déformation* $\mathbf{d}$ *satisfait l'équation*

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}} \mathbf{q},$$

où $\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}$ *est la dérivée de Lie par rapport à la vitesse eulerienne* $\boldsymbol{u}$ *et* $\mathbf{q}$ *est la métrique sur* $\mathscr{E}$.

Démonstration. C'est une application directe du théorème D.4 pour $\mathbf{k} = \mathbf{q}$, sachant que par définition $\nabla \mathbf{q} = 0$. En utilisant de plus la relation (A.1), on obtient donc

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}} \mathbf{q} = \mathbf{q} \nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^\star \mathbf{q} = \mathbf{q} \nabla \boldsymbol{u} + \mathbf{q} (\nabla \boldsymbol{u})^t = 2\mathbf{q}\widehat{\mathbf{d}} = 2\mathbf{d},$$

$(\nabla \boldsymbol{u})^\star$ étant l'adjoint de l'opérateur $(\nabla \boldsymbol{u})$ par rapport à la métrique $\mathbf{q}$ (voir Appendice A). $\square$

A chaque plongement p correspond une métrique riemannienne $\boldsymbol{\gamma} := p^*\mathbf{q}$ sur le body $\mathscr{B}$. Par ailleurs, on peut également définir $\mathbf{D} := p^*\mathbf{d}$, qui est un champ de tenseurs covariants symétriques sur $\mathscr{B}$.

Théorème 2.2 (Rougée, 2006)**.** *Le long d'un chemin de déformation* $p(t)$*, la métrique riemannienne sur* $\mathscr{B}$*,* $\boldsymbol{\gamma}(t) = p(t)^*\mathbf{q}$*, satisfait l'équation d'évolution*

$$\boldsymbol{\gamma}_t = 2\mathbf{D}.$$

Démonstration. C'est une application directe du théorème C.5 avec $\mathbf{k} = \boldsymbol{\gamma}$ et du lemme 2.1. On obtient

$$\boldsymbol{\gamma}_t = p^*(\partial_t \mathbf{q} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}} \mathbf{q}) = p^*(2\mathbf{d}) = 2\mathbf{D}.$$

$\square$

La notion de contraintes est duale de celle des déformations. Le concept le plus commun est celui de *tenseur des contraintes de Cauchy* $\boldsymbol{\sigma}$, défini sur la configuration $\Omega_p = p(\mathscr{B})$. Sa puissance s'écrit

$$\mathscr{P}(\mathbf{d}) = \int_\Omega (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}) \operatorname{vol}_q = \int_\Omega \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} : \mathbf{d} \right) \rho \operatorname{vol}_q,$$

où $\boldsymbol{\tau} := \boldsymbol{\sigma}/\rho$ est le *tenseur des contraintes de Kirchhoff*. Ceci nous amène à introduire un *tenseur des contraintes sur le Body* [31], ou *tenseur de Rougée*, contravariant et symétrique, $\boldsymbol{\theta} := p^* \boldsymbol{\tau}$, qui apparaît naturellement à partir de la formule du changement de variables

$$\mathscr{P}(\mathbf{d}) = \int_\Omega (\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d}) \rho \operatorname{vol}_q = \int_{\mathscr{B}} (\boldsymbol{\theta} : \mathbf{D}) \, \mu.$$

Un second tenseur des contraintes, également contravariant et symétrique,

$$\mathfrak{S} := p^* \boldsymbol{\sigma} = \rho_{\mathscr{B}} \, \boldsymbol{\theta} \tag{2.2}$$

peut être défini sur le Body [29], de sorte que

$$\mathscr{P} = \int_\Omega (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}) \operatorname{vol}_q = \int_{\mathscr{B}} (\mathfrak{S} : \mathbf{D}) \operatorname{vol}_\gamma.$$

Le tenseur $\mathfrak{S}$ sera dénommé *tenseur des contraintes intrinsèque*.

Le mécanicien considère très souvent une configuration de référence $\Omega_{p_0} = p_0(\mathscr{B})$ et introduit les définitions suivantes.

Définition 2.3. Soit $\varphi = p \circ p_0^{-1}$. Le *tenseur de Cauchy-Green droit* est défini par

$$\mathbf{C} := \varphi^* \mathbf{q} = \mathbf{F}_\varphi^\star \mathbf{q} \, \mathbf{F}_\varphi = \mathbf{q} \mathbf{F}_\varphi^t \mathbf{F}_\varphi.$$

C'est un champ de tenseurs covariants symétriques sur la configuration de référence $\Omega_{p_0} = p_0(\mathscr{B})$. Le *tenseur de Cauchy-Green gauche* est défini par

$$\mathbf{b} := \varphi_* \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{F}_\varphi \mathbf{q}^{-1} \mathbf{F}_\varphi^\star = \mathbf{F}_\varphi \mathbf{F}_\varphi^t \mathbf{q}^{-1}.$$

C'est un champ de tenseurs contravariants symétriques sur la configuration déformée $\Omega_p = p(\mathscr{B})$.

Remarque 2.4. On a :

$$p_0^* \mathbf{C} = p_0^* \varphi^* \mathbf{q} = p^* \mathbf{q} = \boldsymbol{\gamma},$$

et

$$p^* \mathbf{b} = p^* \varphi_* \mathbf{q}^{-1} = p_0^* \mathbf{q}^{-1} = \boldsymbol{\gamma}_0^{-1}.$$

On définit également habituellement les deux *tenseurs de Piola-Kirchhoff*.

Définition 2.5. Soit $\varphi = p \circ p_0^{-1}$ et $\mathbf{F}_\varphi = T\varphi$. Le premier tenseur de Piola-Kirchhoff, noté $\boldsymbol{\Pi} = (\Pi^{IJ})$, contravariant et non symétrique, et le second tenseur de Piola-Kirchhoff, noté $\mathbf{S} = (S^{IJ})$, contravariant et symétrique, sont définis sur Ω_{p_0} par :

$$\mathbf{S} := \varphi^* \boldsymbol{\tau}, \qquad \boldsymbol{\Pi} := \rho_0 \mathbf{F}_\varphi \mathbf{S}.$$

Afin de rester cohérent avec la notion de pull-back, $\mathbf{S}$ et $\boldsymbol{\Pi}$ sont ici définis à un facteur ρ_0 près par rapport aux textes classiques [10, 41, 17, 42, 28, 27, 4, 18, 35, 39].

Remarque 2.6. $\mathbf{S}$ est un champ de tenseurs sur la configuration de référence Ω_{p_0}, $\boldsymbol{\Pi}$ n'est pas un champ de tenseurs sur Ω_{p_0} (tout comme la vitesse lagrangienne $\boldsymbol{V}$ n'est pas un champ de vecteurs, section 1).

Notons finalement que, dans les travaux de Rougée [31, 33, 34], les tenseurs de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau} = \sigma/\rho$, de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S} = \varphi^* \boldsymbol{\tau}$ et de Rougée $\boldsymbol{\theta} = p^* \boldsymbol{\tau}$ ont été définis à partir de $\boldsymbol{\sigma}/\rho$ et non pas $(\det \mathbf{F}_\varphi \circ \varphi^{-1}) \, \boldsymbol{\sigma}$ comme dans les textes classiques.

3. Les équations d'équilibre formulées sur le body

Dans cette section, on formulera les équations d'équilibre directement sur le body.

3.1. Conservation de la masse.

Théorème 3.1 (Conservation de la masse)**.** *Étant donnée une configuration de référence p_0 et une autre configuration p, on a :*

$$\rho_0 = (\varphi^* \rho) J_\varphi = (\rho \circ \varphi) J_\varphi, \tag{3.1}$$

où J_φ est le Jacobien de la transformation $\varphi := p \circ {p_0}^{-1}$.

Remarque 3.2. Le Jacobien J_φ est défini implicitement par l'équation

$$\varphi^* \mathrm{vol}_q = J_\varphi \mathrm{vol}_q,$$

c'est à dire, $J_\varphi = \det \mathbf{F}_\varphi$ avec $\mathbf{F}_\varphi = T\varphi = Tp \circ Tp_0^{-1}$. Le mécanicien écrit la relation (3.1) de manière plus courte

$$\rho_0 = \rho J_\varphi = \rho \det \mathbf{F}_\varphi$$

car il considère implicitement $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{x}_0)$ et $\rho = \rho(\mathbf{x}) = \rho(\varphi(\mathbf{x}_0))$.

Démonstration. On part de la définition de la densité de masse (1.1)

$$(p_0)_* \mu = \rho_0 \mathrm{vol}_q, \qquad p_* \mu = \rho \mathrm{vol}_q,$$

et on utilise la définition de $\varphi = p \circ p_0^{-1}$, qui nous donne

$$\varphi^* = (p_0^{-1})^* p^* = (p_0)_* p^*.$$

On obtient d'abord

$$\mu = (p_0)^* (\rho_0 \mathrm{vol}_q) = p^* (\rho \mathrm{vol}_q),$$

et on en déduit

$$\rho_0 \mathrm{vol}_q = (p_0)_* \mu = (p_0)_* p^* (\rho \mathrm{vol}_q) = \varphi^* (\rho \mathrm{vol}_q) = (\varphi^* \rho) \varphi^* \mathrm{vol}_q = (\rho \circ \varphi) J_\varphi \mathrm{vol}_q,$$

d'où (3.1). □

Corollaire 3.3 (Version dynamique de la conservation de la masse)**.** *Considérons un chemin de plongements $p(t)$. Alors*

$$\rho_t + \mathbf{div}(\rho \boldsymbol{u}) = \rho_t + \nabla_{\boldsymbol{u}} \rho + \rho \, \mathbf{div} \, \boldsymbol{u} = 0. \tag{3.2}$$

Démonstration. On part de la relation (3.1). En dérivant par rapport au temps, on obtient

$$\frac{d}{dt} ((\rho \circ \varphi) J_\varphi) = [(\rho_t \circ \varphi) + (\nabla_{\boldsymbol{u}} \rho) \circ \varphi] \, J_\varphi + (\rho \circ \varphi) \partial_t J_\varphi,$$

car $\partial_t \varphi = u \circ \varphi$. Par ailleurs, soit $\mathbf{F}_\varphi := T\varphi = \partial \varphi / \partial \mathbf{x}_0$, on a

$$\partial_t \mathbf{F}_\varphi = \partial_t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}_0} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_0} (\partial_t \varphi) = (\nabla \boldsymbol{u} \circ \varphi) \mathbf{F}_\varphi,$$

d'où l'on tire

$$\partial_t J_\varphi = \mathrm{tr} \left(\mathbf{F}_\varphi^{-1} \partial_t \mathbf{F}_\varphi \right) J_\varphi = (\mathbf{div} \, \boldsymbol{u}) \circ \varphi.$$

On a donc finalement

$$\rho_t + \nabla_{\boldsymbol{u}} \rho + \rho \, \mathbf{div} \, \boldsymbol{u} = 0.$$

que le mécanicien écrit $\dot{\rho} + \rho \, \mathbf{div} \, \boldsymbol{u} = 0$ avec $\dot{\rho} := \rho_t + \nabla_{\boldsymbol{u}} \rho$ la dérivée particulaire de ρ. □

Remarque 3.4. Un milieu continu est dit incompressible si $\mathbf{div} \, \boldsymbol{u} = 0$. Dans ce cas, φ est une transformation qui préserve la forme volume vol_q.

Corollaire 3.5 (Version dynamique de la conservation de la masse formulée sur le body)**.** *Soit $\rho_{\mathscr{B}} = p^* \rho$ la densité sur $\mathscr{B}$, $\boldsymbol{U} = p^* \boldsymbol{u}$ la vitesse eulerienne à gauche, alors*

$$(\rho_{\mathscr{B}})_t + \rho_{\mathscr{B}} \, \mathbf{div}^\gamma \boldsymbol{U} = 0.$$

Démonstration. On a, en vertu du théorème D.4 et du lemme C.5

$$p^* (\rho_t + \nabla_{\boldsymbol{u}} \rho + \rho \, \mathbf{div} \, \boldsymbol{u}) = p^* (\rho_t + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}} \rho + \rho \, \mathbf{div} \, \boldsymbol{u}) = (\rho_{\mathscr{B}})_t + \rho_{\mathscr{B}} \, \mathbf{div}^\gamma \boldsymbol{U}.$$

□

3.2. **Relation fondamentale de la dynamique.** Les *efforts extérieurs*, exercés sur le système, sont représentés par une densité volumique vectorielle $\boldsymbol{f}(\mathbf{x},t)$ définie sur $\Omega_{p(t)}$. La *relation fondamentale de la dynamique* s'écrit :

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \rho(\partial_t \boldsymbol{u} + \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u}), \tag{3.3}$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ est le *tenseur des contraintes de Cauchy* qui représente les *efforts intérieurs* du milieux et qui est un tenseur d'ordre 2, contravariant et symétrique.

Remarque 3.6. Les relations (3.2) et (3.3) forment donc un système de 4 équations scalaires pour les 10 inconnues $\rho, u_1, u_2, u_3, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$. Le système est donc sous-déterminé. Il doit être complété par les diverses *lois de comportement* que proposent la mécanique des fluides, la théorie de l'élasticité, etc.

En remarquant que $\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{u} = [\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}] = 0$ (*c.f.* théorème D.4) et donc, par le lemme C.5, que

$$p^*\dot{\boldsymbol{u}} = p^*(\partial_t \boldsymbol{u} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{u} + \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u}) = \partial_t \boldsymbol{U} + \nabla^{\gamma}_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{U},$$

le pull-back de la relation fondamentale de la dynamique (3.3) sur le body $\mathscr{B}$ s'écrit :

$$\mathbf{div}^{\gamma}\, \boldsymbol{\mathfrak{S}} + \mathscr{F} = \rho_{\mathscr{B}} \left(\partial_t \boldsymbol{U} + \nabla^{\gamma}_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{U}\right), \qquad \dot{\boldsymbol{U}} := \partial_t \boldsymbol{U} + \nabla^{\gamma}_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{U},$$

où $\boldsymbol{\mathfrak{S}} = p^*\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes intrinsèque (2.2), $\boldsymbol{U} = p^*\boldsymbol{u} = \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{u}\circ p) = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{V}$ est la vitesse eulerienne à gauche (voir section 1), $\dot{\boldsymbol{U}}$ est l'accélération eulerienne à gauche, $\rho_{\mathscr{B}} = p^*\rho$ est la densité intrinsèque (sur $\mathscr{B}$), et $\mathscr{F} = p^*\boldsymbol{f} = \mathbf{F}^{\star}(\boldsymbol{f}\circ p)$ est la force volumique intrinsèque (sur $\mathscr{B}$). Enfin,

$$\mathbf{div}^{\gamma}\, \boldsymbol{\mathfrak{S}} := \operatorname{tr}\left(\nabla^{\gamma} \boldsymbol{\mathfrak{S}}\right),$$

est la divergence du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\mathfrak{S}}$ sur le body $\mathscr{B}$ pour la métrique $\boldsymbol{\gamma}$.

Remarque 3.7. $\boldsymbol{\mathfrak{S}}$ est symétrique et est un champ de tenseurs, contrairement au premier tenseur de Kirchhoff $\boldsymbol{\Pi} = \rho_0 \mathbf{F}_{\varphi}\mathbf{S}$ (*c.f.* définition 2.5 et remarque 2.6) habituellement utilisé pour écrire les équations d'équilibre

$$\mathbf{div}\, \boldsymbol{\Pi} + \mathbf{F}_{\varphi}^{-1} \boldsymbol{f} = \rho_0 \partial_t \boldsymbol{V},$$

sur la configuration de référence Ω_{p_0} (alors confondue avec $\mathscr{B}$ de sorte que $\boldsymbol{V} = \varphi_t$).

4. La variété des métriques riemanniennes

L'ensemble $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$, des métriques riemanniennes définies sur $\mathscr{B}$ acquiert donc une certaine importance en MMC. Le lecteur pourra se référer aux travaux de Rougée [33, 34] pour une formulation géométrique de l'hyper-élasticité comme comme un champ de vecteurs sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$, autrement dit comme une section $F : \mathrm{Met}(\mathscr{B}) \to T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ du fibré tangent $T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$. La formulation des lois d'hypo-élasticité (6.1) est quant à elle interprétée géométriquement en Sections 6–7.

Il se trouve que $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ est lui-même une variété de Fréchet, en fait un *ouvert convexe* de l'espace vectoriel de dimension infinie (un espace de Fréchet et non un espace de Banach)

$$\Gamma(S^2 T^{\star}\mathscr{B}),$$

des sections C^{∞} du fibré des tenseurs covariants d'ordre 2 symétriques. L'espace tangent $T_{\boldsymbol{\gamma}}\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ s'identifie donc canoniquement avec l'espace vectoriel $\Gamma(S^2T^{\star}\mathscr{B})$ et le fibré tangent $T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ est trivial

$$T\mathrm{Met}(\mathscr{B}) = \mathrm{Met}(\mathscr{B}) \times \Gamma(S^2 T^{\star}\mathscr{B}).$$

On peut munir la variété des métriques $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ d'une structure Riemannienne naturelle, en posant

$$G^{\mu}_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^2) := \int_{\mathscr{B}} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^1\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^2)\, \mu, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^2 \in T_{\boldsymbol{\gamma}}\mathrm{Met}(\mathscr{B}), \tag{4.1}$$

où $\operatorname{tr}(\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^1\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^2) = \gamma^{ij}\varepsilon^1_{ik}\gamma^{kl}\varepsilon^2_{jl}$, dans un système de coordonnées locales. Celle-ci a été introduite par Rougée [33, 34] et semble bien adaptée pour la formulation géométrique de plusieurs concepts en mécanique du solide. Nous la dénommerons pour cette raison la *métrique de Rougée*.

Remarque 4.1. Dans (4.1), un point $\mathbf{X} \in \mathscr{B}$ étant fixé, l'intégrant correspond à un produit scalaire sur l'espace (de dimension finie) des matrices symétriques et cette métrique peut s'interpréter comme la « moyenne » de ces produits scalaires. Il s'agit d'un cas particulier de métriques dites affines [1] et dont la structure est assez riche.

En relativité générale, où aucune forme volume n'est définie a priori, on utilise plutôt une variante de cette métrique, la *métrique d'Ebin* [9, 13, 5] définie par

$$G_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^2) := \int_{\mathscr{B}} \operatorname{tr}(\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^1\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}^2)\, \mathrm{vol}_\gamma, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^2 \in T_{\boldsymbol{\gamma}}\mathrm{Met}(\mathscr{B}). \tag{4.2}$$

où vol_γ désigne le volume riemannien associé à la métrique γ. Une propriété importante de la métrique d'Ebin est qu'elle est invariante par le groupe des difféomorphismes $\mathrm{Diff}(\mathscr{B})$. Plus précisément :

$$G_{\varphi^*\boldsymbol{\gamma}}(\varphi^*\boldsymbol{\varepsilon}^1, \varphi^*\boldsymbol{\varepsilon}^2) = G_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\varepsilon}^1, \boldsymbol{\varepsilon}^2), \qquad \forall \varphi \in \mathrm{Diff}(\mathscr{B}).$$

Contrairement à la métrique d'Ebin G, la métrique de Rougée G^μ, elle, n'est pas invariante par le groupe des difféomorphismes $\mathrm{Diff}(\mathscr{B})$ mais seulement par son sous-groupe

$$\mathrm{Diff}_\mu(\mathscr{B}) := \{\varphi \in \mathrm{Diff}(\mathscr{B});\ \varphi^*\mu = \mu\},$$

des difféomorphismes qui préservent la forme volume μ.

Ces structures riemanniennes sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ sont relativement bien comprises et ont été intensément étudiées ces dernières années [8, 9, 13, 15, 5]. On notera toutefois des différences fondamentales importantes entre la géométrie riemannienne sur une variété de dimension finie ou sur une variété de Fréchet.

Une métrique riemannienne G définie sur une variété M (de dimension finie ou infinie) induit une application

$$G : TM \to T^\star M$$

qui est injective (une métrique est, en chaque point, une forme bilinéaire symétrique non dégénérée). Si M est de dimension finie cette application est nécessairement bijective mais ceci n'est plus nécessairement vrai en dimension infinie. On distinguera alors une métrique riemannienne *forte* (si G est bijective) d'une métrique riemannienne *faible* (si G est seulement injective).

4.1. **Dérivées covariantes.** Sur un espace vectoriel de Fréchet, seule la notion de dérivée directionnelle a un sens. Sur $\Gamma(S^2T^\star\mathscr{B})$, celle-ci s'écrit

$$\partial_t\boldsymbol{\varepsilon} := \partial_t\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{X}), \tag{4.3}$$

étant entendu que $\boldsymbol{\varepsilon}$ est un champ de vecteurs dépendant du temps et que la dérivée partielle par rapport au temps t s'effectue dans chaque espace vectoriel (de dimension finie) $T^\star_{\mathbf{X}}\mathscr{B}$.

Plus généralement, une dérivée covariante sur $T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ est un opérateur linéaire D qui associe à chaque champ de vecteurs $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ défini le long d'une courbe $\boldsymbol{\gamma}(t) \in \mathrm{Met}(\mathscr{B})$ (*i.e.* $\pi \circ \boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\gamma}(t)$), un champ de vecteurs $D_t\boldsymbol{\varepsilon}$ défini le long de $\boldsymbol{\gamma}(t)$ et qui satisfait la règle de Leibniz

$$D_t(f\boldsymbol{\varepsilon}) = f_t\boldsymbol{\varepsilon} + fD_t(\boldsymbol{\varepsilon}),$$

pour toute fonction numérique $f : t \mapsto f(t)$. Dans le cas où on a besoin d'insister sur la dépendance de cette dérivée covariante par rapport au chemin de métriques $\widetilde{\gamma} : t \mapsto \boldsymbol{\gamma}(t)$, on utilisera de préférence la notation

$$\frac{D_{\widetilde{\gamma}}\,\boldsymbol{\varepsilon}}{Dt}.$$

En particulier, ∂_t définit une dérivée covariante sur l'espace vectoriel $\Gamma(S^2T^\star\mathscr{B})$ qui induit, par restriction sur l'ouvert $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$, une dérivée covariante que l'on peut considérer comme canonique. Tout autre dérivée covariante sur $T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ pourra donc s'écrire

$$D_t\boldsymbol{\varepsilon} = \partial_t\boldsymbol{\varepsilon} + \Gamma_\gamma(\gamma_t, \boldsymbol{\varepsilon}).$$

La connexion riemannienne associée à une métrique G sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ est caractérisée, d'une part, par le fait d'être *compatible avec la métrique* G, c'est à dire

$$\frac{d}{dt}G_{\boldsymbol{\gamma}(t)}(\boldsymbol{\varepsilon}^1(t),\boldsymbol{\varepsilon}^2(t)) = G_{\boldsymbol{\gamma}(t)}(D_t\boldsymbol{\varepsilon}^1(t),\boldsymbol{\varepsilon}^2(t)) + G_{\boldsymbol{\gamma}(t)}(\boldsymbol{\varepsilon}^1(t),D_t\boldsymbol{\varepsilon}^2(t)),$$

pour toute famille à un paramètre $\boldsymbol{\gamma}(t)\in \mathrm{Met}(\mathscr{B})$ et tous champs de vecteurs $\boldsymbol{\varepsilon}^1(t),\boldsymbol{\varepsilon}^2(t)$ définis le long de $\boldsymbol{\gamma}(t)$ et, d'autre part, par le fait qu'elle soit *symétrique*, c'est à dire

$$D_s\partial_t\boldsymbol{\gamma}(t,s) = D_t\partial_s\boldsymbol{\gamma}(t,s).$$

pour toute famille à deux paramètres $\boldsymbol{\gamma}(t,s)\in \mathrm{Met}(\mathscr{B})$. Il faut noter, toutefois, que pour une métrique riemannienne faible, comme c'est le cas de la structure riemannienne sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$, seule l'unicité d'une dérivée covariante symétrique qui préserve la métrique (connexion de Levi-Civita) est assurée mais pas son existence, *a priori*.

Théorème 4.2. *La métrique de Rougée* G^μ *définie par* (4.1) *sur* $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ *admet l'unique dérivée covariante symétrique suivante compatible avec elle*

$$D_t\boldsymbol{\varepsilon} := \partial_t\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2}\left(\gamma_t\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\gamma_t\right). \tag{4.4}$$

On pourra observer le fait notable suivant : bien que la métrique de Rougée dépendent explicitement de la forme volume μ, la dérivée covariante associée n'en dépend pas. Cette dérivée covariante est de plus invariante par l'action de tout le groupe des difféomorphismes sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ (alors que la métrique n'est invariante que par le groupe des difféomorphismes qui préservent la forme volume μ). Autrement dit, étant donné un difféomorphisme $\psi\in\mathrm{Diff}(\mathscr{B})$, une courbe $\widetilde{\gamma}: t\mapsto\boldsymbol{\gamma}(t)$ sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ et une courbe $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ sur $T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ définie le long de γ, alors

$$\frac{D_{\psi^*\widetilde{\gamma}}\,(\psi^*\boldsymbol{\varepsilon})}{Dt} = \psi^*\left(\frac{D_{\widetilde{\gamma}}\,\boldsymbol{\varepsilon}}{Dt}\right)$$

et donc

$$\Gamma_{\psi^*\gamma}(\psi^*\gamma_t,\psi^*\boldsymbol{\varepsilon}) = \psi^*\left(\Gamma_\gamma(\gamma_t,\boldsymbol{\varepsilon})\right).$$

Remarque 4.3. La dérivée covariante associée à la métrique d'Ebin (4.2) sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ a été calculée dans [15]. Elle est légèrement plus compliquée et s'écrit :

$$D_t\boldsymbol{\varepsilon} := \partial_t\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2}\left(\gamma_t\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\gamma_t + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\gamma}^{-1}\gamma_t\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\gamma} - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\gamma}^{-1}\gamma_t)\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})\gamma_t\right). \tag{4.5}$$

Elle est également invariante par $\mathrm{Diff}(\mathscr{B})$.

Le dual $T^\star_{\boldsymbol{\gamma}}\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ est un espace de *tenseurs-distributions*, c'est à dire de formes linéaires continues sur l'espace des champs de déformations virtuelles $T_{\boldsymbol{\gamma}}\mathrm{Met}(\mathscr{B})$. Toute dérivée covariante sur $T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ induit formellement une dérivée covariante sur le fibré cotangent $T^\star\mathrm{Met}(\mathscr{B})$, grâce à la règle de Leibniz, définie par

$$D_tP(\boldsymbol{\varepsilon}) = \partial_t(P(\boldsymbol{\varepsilon})) - P\left(D_t\boldsymbol{\varepsilon}\right), \tag{4.6}$$

pour tout champ de covecteur P et tout champ de vecteurs $\boldsymbol{\varepsilon}$ définis le long d'une courbe $\boldsymbol{\gamma}(t)\in\mathrm{Met}(\mathscr{B})$.

Soit maintenant $\boldsymbol{\theta}$ un champ de tenseurs contravariants d'ordre 2 sur $\mathscr{B}$. Alors, sa « puissance »

$$P(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\mathscr{B}}(\boldsymbol{\theta}:\boldsymbol{\varepsilon})\mu, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}\in\Gamma(S^2T^\star\mathscr{B}) \tag{4.7}$$

définit une forme linéaire continue sur $T_{\boldsymbol{\gamma}}\mathrm{Met}(\mathscr{B})\simeq\Gamma(S^2T^\star\mathscr{B})$ et s'interprète donc comme un élément de $T^\star_{\boldsymbol{\gamma}}\mathrm{Met}(\mathscr{B})$. On a de plus

$$D_tP(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\mathscr{B}}\left(\partial_t\boldsymbol{\theta}:\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\theta}:\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}(\gamma_t,\boldsymbol{\varepsilon})\right)\mu.$$

Lorsque cette dernière expression possède une densité, on dit que la dérivée covariante D préserve les *distributions à densité* et on s'autorisera alors l'abus de notation suivant :

$$D_t P(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\mathscr{B}} (D_t \boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\varepsilon})\, \mu.$$

4.2. **Géodésiques et transport parallèle.** En géométrie riemannienne, les géodésiques sont définies comme les extrémales de la *fonctionnelle énergie*

$$E(\gamma) := \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \gamma_t, \gamma_t \rangle \, dt.$$

Pour la métrique de Rougée, elle sont donc solutions de l'équation d'Euler-Lagrange associée qui s'écrit :

$$D_t \boldsymbol{\gamma}_t = \boldsymbol{\gamma}_{tt} - \boldsymbol{\gamma}_t \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t = 0,$$

où les dérivées partielles doivent être comprises comme des dérivées dans l'espace vectoriel de dimension fini $S^2 T^\star_{\mathbf{X}} B$, $\mathbf{X}$ étant fixé. Cette équation est équivalente à

$$\partial_t (\boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t) = 0.$$

L'équation des géodésiques est une équation différentielle du deuxième ordre sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$. Étant donné des valeurs initiales $(\boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0)$, on introduit le tenseur mixte $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 := \boldsymbol{\gamma}_0^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_0$ et on obtient

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = \boldsymbol{\gamma}_0 \exp\left(t \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0\right).$$

On en déduit l'expression de l'*exponentielle Riemannienne* associée à la métrique de Rougée G^μ. Celle-ci est définie comme le temps 1 du flot géodésique $\Phi(t, \boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\varepsilon})$, où $(\gamma_0, \boldsymbol{\varepsilon})$ sont les données initiales (position–vitesse) à l'instant $t = 0$ de la géodésique $\boldsymbol{\gamma}(t) = \Phi(t, \boldsymbol{\gamma}_0, \boldsymbol{\varepsilon})$. On a donc :

$$\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{\gamma}_0}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\gamma}_0 \exp\left(\boldsymbol{\gamma}_0^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}\right).$$

Cette application exponentielle est de plus un difféomorphisme local [15, Theorem 3.4].

Un champ de vecteurs sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$, défini le long d'une courbe $\boldsymbol{\gamma}(t)$ est dit *parallèle* pour la métrique de Rougée si

$$D_t \boldsymbol{\varepsilon} = \partial_t \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\gamma}_t \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t\right) = 0.$$

Cette équation se réécrit

$$\partial_t (\boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t - \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \widehat{\boldsymbol{\gamma}_t} - \widehat{\boldsymbol{\gamma}_t} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

avec $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} := \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}$ et $\widehat{\boldsymbol{\gamma}_t} := \boldsymbol{\gamma}^{-1} \boldsymbol{\gamma}_t$. Soit $\hat{\mathbf{h}}(t)$ le tenseur mixte, solution de l'équation linéaire $\hat{\mathbf{h}}_t = (\hat{\mathbf{h}} \widehat{\boldsymbol{\gamma}_t})/2$. Alors, l'équation

$$\partial_t \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \widehat{\boldsymbol{\gamma}_t} - \widehat{\boldsymbol{\gamma}_t} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

s'intègre en

$$\partial_t \left(\hat{\mathbf{h}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \hat{\mathbf{h}}^{-1}\right) = 0,$$

ce qui nous donne

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \hat{\mathbf{h}}^{-1}(t) \left(\hat{\mathbf{h}}_0 \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \hat{\mathbf{h}}_0^{-1}\right) \hat{\mathbf{h}}(t).$$

Remarque 4.4. Tout champ de vecteurs parallèle $\boldsymbol{\varepsilon}$ sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ pour la métrique de Rougée est *isospectral*, dans le sens où $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ et $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ ont les mêmes valeurs propres.

4.3. **La variété** $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ **comme produit de variétés riemanniennes.** $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ étant un ouvert de $\Gamma(S^2T^\star\mathscr{B})$, on peut également voir $\gamma\in\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ comme un élément de $T_\gamma\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ et donc considérer l'application

$$\boldsymbol{\gamma}\mapsto\boldsymbol{\gamma},\qquad \mathrm{Met}(\mathscr{B})\to T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$$

comme une section du fibré tangent, c'est à dire un champ de vecteurs. On peut donc écrire

$$T_{\boldsymbol{\gamma}}\mathrm{Met}(\mathscr{B})=\mathrm{C}^\infty(\mathscr{B})\boldsymbol{\gamma}\oplus(\mathrm{C}^\infty(\mathscr{B})\boldsymbol{\gamma})^\perp, \tag{4.8}$$

où l'orthogonalité peut se référer, soit à la métrique d'Ebin (4.2), soit à la métrique de Rougée (4.1). Dans les deux cas, l'espace $(\mathrm{C}^\infty(\mathscr{B})\boldsymbol{\gamma})^\perp$ s'écrit

$$(\mathrm{C}^\infty(\mathscr{B})\boldsymbol{\gamma})^\perp=\left\{\boldsymbol{\varepsilon}\in\Gamma(S^2T^\star\mathscr{B});\ \mathrm{tr}(\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon})=0\right\},$$

et on a le résultat suivant.

Lemme 4.5. *Soit $p\in\mathrm{Emb}(\mathscr{B},\mathscr{E})$, $\mathbf{k}$ un champ de tenseurs covariant d'ordre 2 sur $\Omega_p=p(\mathscr{B})$ et*

$$\mathbf{k}=\mathbf{k}^H+\mathbf{k}^D,$$

sa décomposition en partie sphérique *(on dit encore hydrostatique) et* déviateur *(par rapport à la métrique $\mathbf{q}$ sur $\mathscr{E}$). Alors, le pullback de cette décomposition*

$$p^*\mathbf{k}=p^*\mathbf{k}^H+p^*\mathbf{k}^D$$

correspond à la décomposition orthogonale (4.8).

A la décomposition du fibré tangent (4.8) correspond une structure de variété riemannienne produit de $(\mathrm{Met}(\mathscr{B}),G)$ [6]. Soit $\mathrm{Vol}(\mathscr{B})$ l'ensemble des formes volumes positives sur $\mathscr{B}$. Il s'agit d'un cône ouvert dans l'espace vectoriel $\Omega^3(\mathscr{B})$, des formes différentielles de degré 3 sur $\mathscr{B}$ et cette variété est munie de la métrique riemannienne suivante

$$G_\nu(\omega_1,\omega_2):=\int_{\mathscr{B}}\left(\frac{\omega_1}{\nu}\right)\left(\frac{\omega_2}{\nu}\right)\nu.$$

Étant donnée une forme volume μ sur $\mathscr{B}$, on définit alors la sous-variété

$$\mathrm{Met}_\mu(\mathscr{B}):=\{\boldsymbol{\gamma}\in\mathrm{Met}(\mathscr{B});\ \mathrm{vol}_\gamma=\mu\}.$$

Il existe alors une *isométrie riemannienne*

$$J_\mu:\mathrm{Vol}(\mathscr{B})\times\mathrm{Met}_\mu(\mathscr{B})\to\mathrm{Met}(\mathscr{B}),\qquad(\nu,\boldsymbol{\gamma})\mapsto(\nu/\mu)^{2/3}\boldsymbol{\gamma}.$$

5. Covariance générale – Indifférence matérielle – Objectivité

La mécanique classique est un système de croyance : chacun d'entre nous croit vivre, à chaque instant, dans un *espace affine euclidien orienté de dimension* 3 et disposer d'un *temps absolu*. Ces hypothèses semblent confirmées par l'expérience dans une bonne approximation, du moins à l'échelle quotidienne. En paraphrasant Jean-Marie Souriau [37], nos horloges sont théoriquement *synchrones* et nous nous attendons à ce que, quelque soit le destin de chacun d'entre nous, elles indiquent la même heure à chacune de nos rencontres et par extension que le temps soit le même partout. De même, les longueurs semblent avoir un sens absolu. L'univers newtonien M est donc modélisé par un espace euclidien tridimensionnel $\mathscr{E}$ et une *flèche du temps absolu* $\mathscr{T}$. Le choix d'un repère de temps et d'un repère d'espace orthonormé permet ainsi de localiser tout *évenement* de l'univers par un quadruplet de nombre réels (t,x,y,z) qui sont les coordonnées de cet évenement dans ce *référentiel* et que l'on écrira de manière plus condensée sous la forme $(t,\mathbf{x})$. Par conséquent, nous faisons le postulat qu'un changement d'observateur conduit à une transformation

$$(\bar t,\bar{\mathbf{x}})=(t+t_0,g(t)\mathbf{x}),\qquad g(t)\mathbf{x}=a(t)\mathbf{x}+b(t),\quad a(t)\in\mathrm{O}(3),b(t)\in\mathbb{R}^3,$$

où $g(t)$ est un déplacement de l'espace affine euclidien $\mathscr{E}$ dépendant du temps.

La notion d'*objectivité* ou d'*indifférence matérielle*, bien que souvent confuse et sujet à controverse dans la littérature mécanique, semble remonter au célèbre ouvrage de Truesdell et Noll [41], qui ont cherché à formuler des principes de covariance que devaient respecter les lois de comportement. Nous n'entrerons pas dans le débat sur le bien-fondé de ces hypothèses ici mais nous chercherons à clarifier la définition mathématique du concept d'objectivité.

Définition 5.1. Soit $\mathscr{F} : \widetilde{p} \mapsto \mathbf{t}_{\widetilde{p}}$ une application qui à tout chemin de plongements $\widetilde{p} := (p(t))$ associe un champ de tenseurs (ou une fonction scalaire) $\mathbf{t}_{\widetilde{p}}$, dépendant du temps t et défini, à chaque instant t, sur $\Omega_{p(t)} := p(t)(\mathscr{B})$. Soit $\widetilde{g} := (g(t))$, un chemin de déplacements de l'espace $\mathscr{E}$ et notons $\widetilde{g} \star \widetilde{p}$, le chemin de plongements défini à l'instant t par $g(t) \circ p(t)$. On dira que :

(1) $\mathscr{F}$ est *objective* si
$$\mathbf{t}_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}(t) = g(t)_* \mathbf{t}_{\widetilde{p}}(t),$$
pour tout chemin de plongements $\widetilde{p}$ et tout chemin de déplacements $\widetilde{g}$;

(2) $\mathscr{F}$ est *covariante générale* si
$$\mathbf{t}_{\widetilde{\varphi}\star\widetilde{p}}(t) = \varphi(t)_* \mathbf{t}_{\widetilde{p}}(t),$$
pour tout chemin de plongements $\widetilde{p}$ et tout chemin de difféomorphismes $\widetilde{\varphi} := (\varphi(t))$ de l'espace.

Remarque 5.2. En language mathématique plus rigoureux, l'application $\mathscr{F}$ correspond à une section (le long d'une courbe $\widetilde{p}$) du fibré vectoriel
$$\mathscr{E} = \bigsqcup_{p \in \mathrm{Emb}(\mathscr{B},\mathscr{E})} \mathscr{E}_p$$
où
$$\mathscr{E}_p := \{\mathbf{t} \in \mathrm{C}^\infty(\Omega_p, \mathbb{T});\ \pi \circ \mathbf{t} = \mathrm{Id}\}$$
est l'espace vectoriel des champs de tenseurs d'un type donné $\mathbb{T}$ sur $\mathscr{E}$ mais définis *a priori* uniquement sur Ω_p. L'objectivité (ou la covariance générale) se traduisent par des propriétés d'équivariance de ces sections.

Remarque 5.3. Il est évident que toute application $\mathscr{F}$ covariante générale est également objective mais l'inverse n'est pas vrai.

Exemple 5.4. Soit $\mathbf{T}$ un champ de tenseurs défini sur $\mathscr{B}$ et soit $\mathscr{F}(\widetilde{p}) = \mathbf{t}_{\widetilde{p}}$, avec $\mathbf{t}_{\widetilde{p}}(t) = p(t)_* \mathbf{T}$. Alors $\mathscr{F}$ est covariante générale et donc objective.

Exemple 5.5. Étant donné un champ de tenseurs $\mathbf{t}$ défini sur $\mathscr{E}$, soit $\mathscr{F}(\widetilde{p}) = \mathbf{t}_{\widetilde{p}}$, où $\mathbf{t}_{\widetilde{p}}(t)$ est la restriction de $\mathbf{t}$ à $\Omega_{p(t)} = p(t)(\mathscr{B})$. Alors $\mathscr{F}$ est objective si et seulement si $g_* \mathbf{t} = \mathbf{t}$ quelque soit le déplacement g. En particulier, si $\mathbf{t}$ est une fonction scalaire, alors elle est constante. Si $\mathbf{t}$ est un champ de vecteurs, alors $\mathbf{t} = 0$. Si $\mathbf{t}$ est un champ de tenseurs covariants d'ordre 2 symétriques, alors $\mathbf{t} = \lambda \mathbf{q}$. Si $\mathbf{t}$ est un champ de tenseurs covariants alternés d'ordre 3, alors $\mathbf{t} = \lambda \mathrm{vol}_{\mathbf{q}}$.

Remarque 5.6. Deux exemples physiques complémentaires de vecteurs et de tenseurs d'ordre 2 non objectifs viennent illustrer l'exemple précédent.

- Les champs électrique $\mathbf{E}$ et magnétique $\mathbf{B}$, aucunement liés à la configuration Ω et définis sur tout l'espace $\mathscr{E}$, ne sont pas des grandeurs objectives.
- Dans un milieu homogène isotrope défini par une permittivité électrique ϵ et une perméabilité magnétique μ, le tenseur électromagnétique de Maxwell, d'ordre 2, ici covariant,
$$\epsilon \left(\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} - \frac{1}{2} \|\mathbf{E}\|^2 \mathbf{q} \right) + \frac{1}{\mu} \left(\mathbf{B} \otimes \mathbf{B} - \frac{1}{2} \|\mathbf{B}\|^2 \mathbf{q} \right)$$
n'est pas objectif. En particulier, ni $\mathbf{E} \otimes \mathbf{E}$ ni $\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}$ ne sont objectifs.

Exemple 5.7. Soit $\mathscr{F} : \widetilde{p} \mapsto \boldsymbol{u}_{\widetilde{p}}$, l'application qui à tout chemin de plongements $\widetilde{p}$ associe sa vitesse eulerienne (à droite)
$$\boldsymbol{u}_{\widetilde{p}}(t) := (\partial_t p) \circ p(t)^{-1},$$
qui est un champ de vecteurs sur $\Omega_{p(t)}$. Alors, on a :
$$\boldsymbol{u}_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}(t) = g(t)_* \boldsymbol{u}_{\widetilde{p}}(t) + \mathbf{w}(t),$$

où $\mathbf{w}(t) := (\partial_t g) \circ g(t)^{-1}$ est la *vitesse d'entraînement*. La vitesse eulerienne n'est donc pas objective.

Exemple 5.8. Lorsque l'on passe de $p(t)$ à $\bar{p}(t) = g(t) \circ p(t)$, où $g(t)\mathbf{x} = a(t)\mathbf{x} + b(t)$, le gradient de la vitesse eulerienne se transforme de la façon suivante

$$\nabla \boldsymbol{u}_{\bar{p}} = a(\nabla \boldsymbol{u}_p)a^t + \boldsymbol{\omega},$$

où $\boldsymbol{\omega} := \dot{a}a^{-1}$ est antisymétrique. L'application $\widetilde{p} \mapsto \nabla \boldsymbol{u}_{\widetilde{p}}$ n'est donc pas objective mais le taux de déformation

$$\widehat{\mathbf{d}}_{\widetilde{p}} := \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u}_{\widetilde{p}} + \nabla \boldsymbol{u}_{\widetilde{p}}{}^t\right)$$

l'est. Il n'est toutefois pas covariant général.

La notion d'objectivité (et de covariance générale) s'étend, sans difficulté, des champs de tenseurs aux *tenseurs-distributions*, c'est à dire aux formes linéaires sur les champs de tenseurs et en particulier aux *puissances virtuelles*. Plus précisément, soit $\mathscr{P}_{\widetilde{p}}$ un chemin de tenseurs-distributions sur l'espace des champs de tenseurs covariants symétriques d'ordre 2 et soit $\widetilde{g}$ un chemin de déplacements. On dira que $\mathscr{P}_{\widetilde{p}}$ est objectif si

$$\mathscr{P}_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}(t) = \widetilde{g}(t)_* \mathscr{P}_{\widetilde{p}}(t),$$

où

$$(\widetilde{g}_* \mathscr{P}_{\widetilde{p}})(\mathbf{k}) := \mathscr{P}_{\widetilde{p}}(\widetilde{g}^* \mathbf{k}),$$

pour tout champ de tenseurs covariants symétriques d'ordre 2 défini sur Ω_p. Cette définition étendue nous permet de formuler le résultat suivant dénommé théorème de Noll [41].

Théorème 5.9. *La puissance virtuelle d'une distribution à densité*

$$\mathscr{P}_{\widetilde{p}}(\mathbf{k}) := \int_{\Omega_p} \boldsymbol{\sigma}_{\widetilde{p}} : \mathbf{k} \,\mathrm{vol}_{\mathbf{q}}$$

est objective si et seulement si le champ de tenseurs $\boldsymbol{\sigma}_{\widetilde{p}}$ *l'est.*

Démonstration. La puissance virtuelle $\mathscr{P}_{\widetilde{p}}$ est objective si et seulement si

$$\mathscr{P}_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}(t) = g(t)_* \mathscr{P}_{\widetilde{p}}(t),$$

ce qui se réécrit

$$\int_{\Omega_{\bar{p}(t)}} \boldsymbol{\sigma}_{\widetilde{g}(t)\star\widetilde{p}}(t) : \bar{\mathbf{k}} \,\mathrm{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Omega_{p(t)}} \boldsymbol{\sigma}_{\widetilde{p}}(t) : (g^*(t)\bar{\mathbf{k}}) \,\mathrm{vol}_{\mathbf{q}},$$

pour tout champ $\bar{\mathbf{k}}$ défini sur $\Omega_{\bar{p}}$ et où on a posé $\bar{p}(t) = g(t) \circ p(t)$. Mais

$$\boldsymbol{\sigma}_{\widetilde{p}}(t) : (g^*(t)\bar{\mathbf{k}}) \,\mathrm{vol}_{\mathbf{q}} = g^*(t) \left(g_*(t)\boldsymbol{\sigma}_{\widetilde{p}}(t) : \bar{\mathbf{k}} \,\mathrm{vol}_{\mathbf{q}}\right)$$

car $g^*(t)\mathrm{vol}_{\mathbf{q}} = \mathrm{vol}_{\mathbf{q}}$. L'objectivité de $\mathscr{P}_{\widetilde{p}}$ se traduit donc, après utilisation de la formule de changement de variable, par

$$\int_{\Omega_{\bar{p}(t)}} \boldsymbol{\sigma}_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}(t) : \bar{\mathbf{k}} \,\mathrm{vol}_{\mathbf{q}} = \int_{\Omega_{\bar{p}(t)}} g_*(t)\boldsymbol{\sigma}_{\widetilde{p}}(t) : \bar{\mathbf{k}} \,\mathrm{vol}_{\mathbf{q}}.$$

Ceci étant vrai pour tout champ $\bar{\mathbf{k}}$, on a bien l'équivalence entre $\mathscr{P}_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}(t) = g(t)_*\mathscr{P}_{\widetilde{p}}(t)$ et $\boldsymbol{\sigma}_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}(t) = g(t)_*\boldsymbol{\sigma}_{\widetilde{p}}(t)$, ce qui achève la preuve. ∎

6. Dérivées matérielles

La notion d'objectivité a été étendue, en mécanique des milieux continus, aux dérivées temporelles. Celles-ci interviennent de manière récurrente en mécanique des matériaux et sont l'objet d'une littérature abondante, bien que cette notion semble rarement définie avec rigueur. Rappelons également que ces dérivées, notées $d_{\widetilde{p}}/dt$ dans ces notes et appliquées à des grandeurs objectives, sont souvent utilisées pour formuler des lois d'hypo-élasticité sur la configuration déformée [20, 40]. Par exemple pour les matériaux métalliques on écrit :

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\boldsymbol{\tau}}{dt} = \mathbf{E} : \mathbf{d} \qquad \left(\frac{d_{\widetilde{p}}\tau^{ij}}{dt} = E^{ijkl}d_{kl}\right) \tag{6.1}$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est le tenseur des contraintes de Kirchhoff (éventuellement, le tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$), $\mathbf{d}$ le taux de déformation, et $\mathbf{E}$ le tenseur d'(hypo-)élasticité, d'ordre 4, *a priori* fonction de l'état de déformation [3, 36].

Définition 6.1. Une *dérivée matérielle* est un opérateur linéaire $d_{\widetilde{p}}/dt$ opérant sur les champs de tenseurs $\mathbf{t}_{\widetilde{p}}$ définis le long d'un chemin de plongements $\widetilde{p} : t \mapsto p(t)$ et satisfaisant de plus la règle de Leibniz

$$\frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}(f\mathbf{t}) = (\partial_t f)\mathbf{t} + f\frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}(\mathbf{t}),$$

pour toute fonction $f : t \mapsto f(t)$.

Remarque 6.2. En langage mathématique plus rigoureux, une dérivée matérielle correspond à une dérivée covariante sur le fibré vectoriel (de dimension infinie) $\mathscr{E}$ défini dans la remarque 5.2.

L'exemple le plus connu de dérivée matérielle est sans doute la *dérivée particulaire*, définie de la manière suivante. Soit $\widetilde{p} : t \mapsto p(t)$ un chemin de plongements et $\mathbf{t}$ un champ de tenseurs défini sur $\Omega_{p(t)} = p(t)(\mathscr{B})$. Fixons une particule indexée par $\mathbf{X} \in \mathscr{B}$. Alors son « histoire » est décrite par une courbe $\tilde{\mathbf{x}} : t \mapsto p(t, \mathbf{X})$ sur $\mathscr{E}$ et $\mathbf{t}(t) := \mathbf{t}(t, p(t, \mathbf{X}))$ est un champ de tenseurs sur $\Omega_{p(t)}$ défini le long de $\tilde{\mathbf{x}}$. Si la dérivée partielle de $\mathbf{t}(t, \mathbf{x})$ par rapport à t a un sens car il s'agit d'une dérivée dans l'espace vectoriel fixe $T_{\mathbf{x}}\mathscr{E}$, la dérivée partielle par rapport à $\mathbf{x}$ nécessite la définition d'une *dérivée covariante* sur $\mathscr{E}$, que nous choisirons comme étant la dérivée riemannienne associée à $\mathbf{q}$. On peut donc calculer la dérivée covariante de $\mathbf{t}(t)$ le long de $\widetilde{\mathbf{x}}$. Celle-ci s'écrit

$$\dot{\mathbf{t}} := \partial_t \mathbf{t} + \nabla_{\boldsymbol{u}} \mathbf{t}. \tag{6.2}$$

C'est la *dérivée particulaire* de $\mathbf{t}$, qui peut s'interpréter également par la formule

$$\partial_t(\mathbf{t} \circ p) \circ p^{-1},$$

qui définit une dérivée covariante sur le fibré $\mathscr{E}$ défini dans la remarque 5.2.

Remarque 6.3. L'*accélération lagrangienne* d'une particule indexée par $\mathbf{X} \in \mathscr{B}$ est définie par

$$\frac{\partial^2 p}{\partial^2 t}(t, \mathbf{X}) = \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t}(t, \mathbf{X}) = (\dot{\boldsymbol{u}} \circ p)(t, \mathbf{X}), \tag{6.3}$$

son *accélération eulerienne à droite* comme

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} \circ p^{-1} = \dot{\boldsymbol{u}} = \partial_t \boldsymbol{u} + \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u}, \tag{6.4}$$

et son *accélération eulerienne à gauche* comme

$$Tp^{-1} \circ \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial t} = Tp^{-1} \circ \dot{\boldsymbol{u}} \circ p = p^*\dot{\boldsymbol{u}} = \partial_t \boldsymbol{U} + \nabla_{\boldsymbol{U}} \boldsymbol{U}, \tag{6.5}$$

$\boldsymbol{U} = Tp^{-1} \circ \boldsymbol{V}$, étant la vitesse eulerienne à gauche.

L'extension de la notion d'objectivité pour les dérivées matérielles s'obtient naturellement en requérant que celles-ci transforment des quantités objectives en quantités objectives, autrement dit, en demandant que

$$\frac{d_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}}{dt}\mathbf{t}_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}} = \frac{d_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}}{dt}(\widetilde{g}_*\mathbf{t}_{\widetilde{p}}) = \widetilde{g}_*\left(\frac{d_{\widetilde{p}}\mathbf{t}_{\widetilde{p}}}{dt}\right),$$

pour tout champ de tenseurs $\mathbf{t}_{\widetilde{p}}$ objectif, où on a posé $(\widetilde{g}_* \mathbf{t}_{\widetilde{p}})(t) = g(t)_* \mathbf{t}_{\widetilde{p}}(t)$. Ceci nous amène à formuler les définitions suivantes.

Définition 6.4. (1) Une *dérivée matérielle* $d_{\widetilde{p}}/dt$ est *objective* si

$$\frac{d_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}}{dt}(\widetilde{g}_*\mathbf{t}) = \widetilde{g}_*\left(\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{t}}{dt}\right),$$

pour tout chemin de plongements $\widetilde{p}$, tout chemin de déplacements $\widetilde{g}$ et tout champ de tenseurs $\mathbf{t}$ défini le long de $\widetilde{p}$;

(2) Une *dérivée matérielle* $d_{\widetilde{p}}/dt$ est *covariante générale* si

$$\frac{d_{\widetilde{\varphi}\star\widetilde{p}}}{dt}(\widetilde{\varphi}_*\mathbf{t}) = \widetilde{\varphi}_*\left(\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{t}}{dt}\right),$$

pour tout chemin de plongements $\widetilde{p}$, tout chemin de difféomorphismes $\widetilde{\varphi} := (\varphi(t))$ de l'espace et tout champ de tenseurs $\mathbf{t}$ défini le long de $\widetilde{p}$.

Exemple 6.5 (La dérivée particulaire)**.** La dérivée particulaire définie par (6.2) n'est pas objective. En effet :

$$\frac{d_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}}{dt}(\widetilde{g}_*\mathbf{t}) = \widetilde{g}_*\left(\partial_t\mathbf{t} + \nabla_{\boldsymbol{u}}\mathbf{t} + \mathscr{L}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{t} + \nabla_{\widetilde{g}^*\mathbf{w}}\mathbf{t}\right),$$

$\mathbf{w} := \partial_t g \circ g^{-1}$ étant la vitesse d'entraînement, alors que

$$\widetilde{g}_*\left(\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{t}}{dt}\right) = \widetilde{g}_*\left(\partial_t\mathbf{t} + \nabla_{\boldsymbol{u}}\mathbf{t}\right).$$

Exemple 6.6 (La dérivée de Lie)**.** Une autre façon d'obtenir une dérivée matérielle est de poser

$$\overset{\triangledown}{\mathbf{t}} := \partial_t\mathbf{t} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{t}. \tag{6.6}$$

Cette dernière, contrairement à la dérivée particulaire est non seulement objective mais également covariante générale. En effet :

$$\frac{d_{\widetilde{\varphi}\star\widetilde{p}}}{dt}(\widetilde{\varphi}_*\mathbf{t}) = \partial_t(\widetilde{\varphi}_*\mathbf{t}) + \mathscr{L}_{\bar{\mathbf{u}}}(\widetilde{\varphi}_*\mathbf{t}).$$

où $\bar{\boldsymbol{u}}$, la vitesse eulerienne du chemin de plongements $\bar{p}(t) := \varphi(t) \circ p(t)$, s'écrit

$$\bar{\boldsymbol{u}} := \partial_t\bar{p} \circ \bar{p}^{-1} = \mathbf{w} + \varphi_*\boldsymbol{u}$$

et $\mathbf{w} := \partial_t\varphi \circ \varphi^{-1}$ est la vitesse d'entraînement. Par ailleurs (voir Appendice C), on a

$$\partial_t(\widetilde{\varphi}_*\mathbf{t}) = \widetilde{\varphi}_*\left(\partial_t\mathbf{t} - \mathscr{L}_{\mathbf{w}}\,\mathbf{t}\right), \quad \text{et} \quad \widetilde{\varphi}_*\left(\mathscr{L}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{t}\right) = \mathscr{L}_{\widetilde{\varphi}_*\mathbf{v}}\left(\widetilde{\varphi}_*\mathbf{t}\right).$$

On a donc

$$\partial_t(\widetilde{\varphi}_*\mathbf{t}) + \mathscr{L}_{\bar{\mathbf{u}}}(\widetilde{\varphi}_*\mathbf{t}) = \widetilde{\varphi}_*\left(\partial_t\mathbf{t} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{t}\right) = \widetilde{\varphi}_*\left(\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{t}}{dt}\right).$$

La dérivée matérielle $\overset{\triangledown}{\mathbf{t}}$ définie par (6.6) peut se réécrire à l'aide du lemme C.5 sous la forme

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{t}}{dt} := \widetilde{p}_*\left(\partial_t(\widetilde{p}^*\mathbf{t})\right), \tag{6.7}$$

ce qui nous amène à la reformulation suivante. Dans le cas d'un d'un champ de tenseurs covariants d'ordre 2, la formule (6.7) s'interprète comme le push-forward de la dérivée covariante canonique (4.3) sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$. Comme il n'y a par ailleurs aucune raison de limiter cette interprétation à la seule dérivée covariante canonique sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$, ceci nous offre la possibilité de produire de cette façon, une infinité de dérivées matérielles pour les champs de tenseurs covariants d'ordre 2 et nous amène à la définition suivante.

Définition 6.7. Soit D une dérivée covariante sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$, $\widetilde{p} = (p(t))$ un chemin de plongements et $\widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$ le chemin de métriques $\gamma(t) = p(t)^*\mathbf{q}$. On définit alors une dérivée matérielle sur les champs de tenseurs covariants d'ordre 2, en posant

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{k}}{dt} := \widetilde{p}_*\left(\frac{D_{\widetilde{\gamma}}}{Dt}(\widetilde{p}^*\mathbf{k})\right), \tag{6.8}$$

pour tout champ de tenseurs objectif $\mathbf{k}$ défini le long de $\widetilde{p}$.

On a par ailleurs, le résultat notable suivant.

Théorème 6.8. *Quelque soit la dérivée covariante D sur* $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$*, la dérivée matérielle* (6.8) *est* objective.

Remarque 6.9. On notera toutefois que ces dérivées matérielles objectives n'ont aucune raison d'être, en générale, covariantes par rapport à un mouvement non rigide de l'espace.

Démonstration. Toute dérivation covariante sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ s'écrit

$$D_t\boldsymbol{\varepsilon} = \partial_t\boldsymbol{\varepsilon} + \Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\gamma}_t, \boldsymbol{\varepsilon}),$$

où Γ est un opérateur bilinéaire qui dépend de $\boldsymbol{\gamma}$. On a donc

$$\begin{aligned}\frac{d_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}}{dt}(\widetilde{g}_*\mathbf{k}) &= (\widetilde{g}\star\widetilde{p})_*(\partial_t(\widetilde{g}\star\widetilde{p})^*\mathbf{k}) + (\widetilde{g}\star\widetilde{p})_*\Gamma_{\widetilde{g}\star\widetilde{\gamma}}\left((\widetilde{g}\star\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})_t, (\widetilde{g}\star\widetilde{p})^*\mathbf{k}\right) \\ &= \widetilde{p}_*\partial_t(\widetilde{p}^*\mathbf{k}) + (\widetilde{g}\star\widetilde{p})_*\Gamma_{\widetilde{g}\star\widetilde{\gamma}}\left((\widetilde{g}\star\widetilde{\boldsymbol{\gamma}})_t, (\widetilde{g}\star\widetilde{p})^*\mathbf{k}\right),\end{aligned}$$

en vertu de la remarque 6.6. Mais $(\widetilde{g}\star\widetilde{p})^*\mathbf{q} = \widetilde{p}^*\mathbf{q} = \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}$ quelque soit le chemin $\widetilde{g}$ de déplacements euclidiens dans $\mathscr{E}$. Par suite

$$(\widetilde{g}\star\widetilde{p})_*\Gamma_{\widetilde{g}\star\widetilde{\gamma}}\left((\widetilde{g}\star\widetilde{\gamma})_t, (\widetilde{g}\star\widetilde{p})^*\mathbf{k}\right) = \widetilde{g}_*\left(\widetilde{p}_*\Gamma_{\widetilde{\gamma}}(\widetilde{\gamma}_t, \widetilde{p}^*(\widetilde{g}^*\mathbf{k}))\right).$$

On en déduit donc

$$\frac{d_{\widetilde{g}\star\widetilde{p}}\,(\widetilde{g}_*\mathbf{k})}{dt} = \widetilde{g}_*\left(\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{k}}{dt}\right),$$

ce qui achève la preuve. □

Le théorème 6.8 s'étend aux champs de tenseurs-distributions et en particulier aux champs de tenseurs d'ordre 2 contravariants, lorsque la connexion induite sur $T^\star\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ préserve les distributions à densité.

Théorème 6.10. *Toute dérivée covariante D sur $T^\star\mathrm{Met}(\mathscr{B})$, qui préserve les distributions à densité, définit une* dérivée matérielle objective

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\boldsymbol{\tau}}{dt} := \widetilde{p}_*\left(\frac{D_{\widetilde{p}}}{Dt}(\widetilde{p}^*\boldsymbol{\tau})\right).$$

sur les champs de tenseurs contravariants $\boldsymbol{\tau}$ d'ordre 2.

Remarque 6.11. On pourra observer que la définition même de $D_t\boldsymbol{\theta}$ conduit à la relation

$$D_t\boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\varepsilon} = \partial_t\boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\theta} : \Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\gamma}_t, \boldsymbol{\varepsilon}), \qquad \forall\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Cette dernière relation nous permet alors d'établir la règle de Leibniz suivante pour la dérivée matérielle

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\boldsymbol{\tau}}{dt} : \mathbf{k} + \boldsymbol{\tau} : \frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{k}}{dt} = p_*\left(\partial_t p^*(\boldsymbol{\tau} : \mathbf{k})\right). \tag{6.9}$$

Démonstration du théorème 6.10. Soit $\bar{p}(t) = g(t) \circ p(t)$ où $g(t)$ est un chemin de déplacements euclidiens dans $\mathscr{E}$. On a donc en vertu de (6.9) :

$$\begin{aligned} \frac{d_{\widetilde{g \star p}}}{dt}(g_* \boldsymbol{\tau}) : g_* \mathbf{k} &= (\overline{p}_* \circ \partial_t \circ \overline{p}^*)(g_* \boldsymbol{\tau} : g_* \mathbf{k}) - g_* \boldsymbol{\tau} : \frac{d_{\widetilde{g \star p}}}{dt}(g_* \mathbf{k}) \\ &= g_* \left[(p_* \circ \partial_t \circ p^*)(\boldsymbol{\tau} : \mathbf{k})\right] - g_* \boldsymbol{\tau} : g_* \left(\frac{d_{\widetilde{p}} \mathbf{k}}{dt}\right) \\ &= g_* \left[(p_* \circ \partial_t \circ p^*)(\boldsymbol{\tau} : \mathbf{k}) - \boldsymbol{\tau} : \left(\frac{d_{\widetilde{p}} \mathbf{k}}{dt}\right)\right] \\ &= g_* \left(\frac{d_{\widetilde{p}} \boldsymbol{\tau}}{dt} : \mathbf{k}\right) = g_* \left(\frac{d_{\widetilde{p}} \boldsymbol{\tau}}{dt}\right) : g_* \mathbf{k}, \end{aligned}$$

pour tous $\boldsymbol{\tau}$ et $\mathbf{k}$, et donc

$$\frac{d_{\widetilde{g \star p}}}{dt}(g_* \boldsymbol{\tau}) = \widetilde{g}_* \left(\frac{d_{\widetilde{p}} \boldsymbol{\tau}}{dt}\right),$$

ce qui achève la preuve. □

Remarque 6.12. La définition d'une distribution à densité dans $T^\star_\gamma \mathrm{Met}(\mathscr{B})$ aurait également pu se faire en utilisant le volume riemannien vol_γ plutôt que la mesure de masse μ, ce qui revient à considérer

$$\mathscr{P}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_{\mathscr{B}} (\mathbf{\mathfrak{S}} : \boldsymbol{\varepsilon}) \mathrm{vol}_\gamma, \qquad \boldsymbol{\varepsilon} \in \Gamma(S^2 T^\star \mathscr{B}), \tag{6.10}$$

en lieu et place de

$$\int_{\mathscr{B}} (\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\varepsilon}) \mu,$$

où $\mu = \rho_{\mathscr{B}} \,\mathrm{vol}_\gamma$, $\rho_{\mathscr{B}} = p^*(\rho)$ et $\mathbf{\mathfrak{S}} := p^* \boldsymbol{\sigma}$. Dans ce cas, la donnée d'une dérivée covariante sur $T^\star \mathrm{Met}(\mathscr{B})$, qui préserve les distributions à densité, induit une autre *dérivée matérielle objective* sur les tenseurs contravariants symétriques $\boldsymbol{\sigma}$ d'ordre 2 en écrivant [40] :

$$\rho \frac{d_{\widetilde{p}}}{dt} \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho}\right).$$

7. Les dérivées objectives de la littérature

Nous montrons dans cette section que toutes les dérivées matérielles objectives que l'on trouve dans la littérature sont induites par des dérivées covariantes définies sur l'espace des métriques $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$.

7.1. **La dérivée d'Oldroyd.** Celle-ci, introduite dans [30], parfois également dénommée dérivée de Lie, correspond à la dérivée covariante sur $T^\star \mathrm{Met}(\mathscr{B})$ induite par la dérivée covariante canonique $D_t = \partial_t$ sur $T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$. Elle s'écrit :

$$\overset{\triangledown}{\boldsymbol{\sigma}} = \partial_t \boldsymbol{\sigma} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - (\nabla \boldsymbol{u}) \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} (\nabla \boldsymbol{u})^\star.$$

7.2. **La dérivée de Truesdell.** Celle-ci, introduite dans [40], correspond à la variante de la dérive d'Oldroyd introduite dans la remarque 6.12. Elle s'écrit :

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \rho \, \widetilde{p}_* \left(\partial_t \widetilde{p}^* \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho}\right)\right) = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - (\nabla \boldsymbol{u}) \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} (\nabla \boldsymbol{u})^\star + (\mathbf{div}\, \boldsymbol{u}) \boldsymbol{\sigma},$$

car, du fait de la conservation de la masse $\rho_t + \mathbf{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0$, on a

$$\rho \widetilde{p}_* \left(\partial_t \widetilde{p}^* \left(\frac{1}{\rho}\right)\right) = \mathbf{div}\, \boldsymbol{u}.$$

7.3. **La dérivée de Zaremba–Jaumann.** Celle-ci, introduite dans [44, 20], s'écrit (voir également [24, 25, 26]) :

$$\overset{\triangle}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\mathbf{w}}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\mathbf{w}}^{\star}, \tag{7.1}$$

où

$$\widehat{\mathbf{w}} = (\nabla \boldsymbol{u})^{a} = \frac{1}{2}\left(\nabla \boldsymbol{u} - (\nabla \boldsymbol{u})^{t}\right).$$

C'est Paul Rougée [31, 32] qui a réalisé, pour la première fois, que cette dérivée objective correspondait à la dérivée covariante associée à la métrique G^{μ} (4.1).

Théorème 7.1 (Rougée, 2006)**.** *La dérivée de Zaremba–Jaumann correspond à la dérivée covariante*

$$D_t\boldsymbol{\varepsilon} := \partial_t\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2}\left(\gamma_t\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\gamma_t\right).$$

Celle-ci préserve les distributions à densité et on a :

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\mathbf{k}}{dt} = \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k}\widehat{\mathbf{w}} + \widehat{\mathbf{w}}^{\star}\mathbf{k}, \tag{7.2}$$

pour tout champ de 2-tenseurs covariants $\mathbf{k}$ *et*

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\boldsymbol{\tau}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\mathbf{w}}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\mathbf{w}}^{\star}, \tag{7.3}$$

pour tout champ de 2-tenseurs contravariants $\boldsymbol{\tau}$*.*

Démonstration. Commençons par observer que la dérivée covariante

$$D_t\boldsymbol{\varepsilon} := \partial_t\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{2}\left(\gamma_t\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\gamma_t\right).$$

préserve les distributions à densité. En effet :

$$\boldsymbol{\theta} : \Gamma^{\mu}_{\boldsymbol{\gamma}}(\gamma_t, \boldsymbol{\varepsilon}) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\theta} : \left(\gamma_t\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\gamma_t\right) = -\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\theta}\gamma_t\boldsymbol{\gamma}^{-1} + \boldsymbol{\gamma}^{-1}\gamma_t\boldsymbol{\theta}\right) : \boldsymbol{\varepsilon},$$

ce qui permet de définir

$$D_t\boldsymbol{\theta} := \partial_t\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\theta}\gamma_t\boldsymbol{\gamma}^{-1} + \boldsymbol{\gamma}^{-1}\gamma_t\boldsymbol{\theta}\right).$$

On d'autre part

$$\begin{aligned}
\frac{d_{\widetilde{p}}\mathbf{k}}{dt} &= p_*\left(D_t(p^*\mathbf{k})\right) \\
&= p_*\partial_t(p^*\mathbf{k}) - \frac{1}{2}p_*\left(\gamma_t\boldsymbol{\gamma}^{-1}(p^*\mathbf{k}) + (p^*\mathbf{k})\boldsymbol{\gamma}^{-1}\gamma_t\right) \\
&= \partial_t\mathbf{k} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{k} - \left(\mathbf{d}\mathbf{q}^{-1}\mathbf{k} + \mathbf{k}\mathbf{q}^{-1}\mathbf{d}\right) \\
&= \partial_t\mathbf{k} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{k} - ((\nabla\boldsymbol{u})^{s})^{\star}\mathbf{k} - \mathbf{k}(\nabla\boldsymbol{u})^{s} \\
&= \partial_t\mathbf{k} + \nabla_{\boldsymbol{u}}\mathbf{k} + (\nabla\boldsymbol{u})^{\star}\mathbf{k} + \mathbf{k}(\nabla\boldsymbol{u}) - ((\nabla\boldsymbol{u})^{s})^{\star}\mathbf{k} - \mathbf{k}(\nabla\boldsymbol{u})^{s} \\
&= \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k}(\nabla\boldsymbol{u})^{a} + ((\nabla\boldsymbol{u})^{a})^{\star}\mathbf{k} \\
&= \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k}\widehat{\mathbf{w}} + \widehat{\mathbf{w}}^{\star}\mathbf{k},
\end{aligned}$$

car $p_*\gamma_t = 2\mathbf{d} = 2\mathbf{q}(\nabla\boldsymbol{u})^{s}$ (théorème 2.2), $\mathbf{d}\mathbf{q}^{-1} = ((\nabla\boldsymbol{u})^{s})^{\star}$ et $\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{k} = \nabla_{\boldsymbol{u}}\mathbf{k} + (\nabla\boldsymbol{u})^{\star}\mathbf{k} + \mathbf{k}(\nabla\boldsymbol{u})$, en vertu du théorème D.4. De la même façon, on établit que

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\boldsymbol{\tau}}{dt} = p_*\left(D_t(p^*\boldsymbol{\tau})\right) = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\mathbf{w}}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\mathbf{w}}^{\star}.$$

□

7.4. **La dérivée de Fiala.** De manière similaire à la façon dont Rougée [31, 32] a retrouvé la dérivée de Zaremba-Jaumann à partir de la dérivée covariante associée à la métrique (4.1), Fiala a proposé dans [12] une nouvelle dérivée objective sur les tenseurs covariants d'ordre 2, à partir de la dérivée covariante (4.5) associée à la métrique d'Ebin (4.2).

Théorème 7.2. *La dérivée covariante* (4.5) *associée à la métrique d'Ebin* (4.2) *induit sur* $T^\star\mathrm{Met}(\mathscr{B})$ *une dérivée covariante qui préserve les distributions à densité. La dérivée objective correspondante sur les champs de tenseurs covariants* $\mathbf{k}$ *d'ordre* 2 *s'écrit :*

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{k}}{dt} := \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k}\widehat{\mathbf{w}} + \widehat{\mathbf{w}}^\star\mathbf{k} + \frac{1}{2}\big((\operatorname{tr}\widehat{\mathbf{d}})\,\mathbf{k} + \operatorname{tr}(\mathbf{q}^{-1}\mathbf{k})\,\mathbf{d} - \operatorname{tr}(\widehat{\mathbf{d}}\mathbf{q}^{-1}\mathbf{k})\,\mathbf{q}\big), \tag{7.4}$$

et celle sur les champs de tenseurs contravariants $\boldsymbol{\tau}$ *d'ordre* 2 *est donnée par :*

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\boldsymbol{\tau}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\mathbf{w}}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\mathbf{w}}^\star + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}\mathbf{q})\widehat{\mathbf{d}}\mathbf{q}^{-1} - \operatorname{tr}(\widehat{\mathbf{d}})\boldsymbol{\tau} - \operatorname{tr}(\boldsymbol{\tau}\mathbf{d})\mathbf{q}^{-1}\right). \tag{7.5}$$

où

$$\widehat{\mathbf{w}} = (\nabla\boldsymbol{u})^a = \frac{1}{2}\left(\nabla\boldsymbol{u} - (\nabla\boldsymbol{u})^t\right), \qquad \widehat{\mathbf{w}}^\star = -\mathbf{q}\widehat{\mathbf{w}}\mathbf{q}^{-1}.$$

Démonstration. La preuve est très similaire à celle donnée pour la dérivée de Zaremba–Jaumann et sera juste esquissée. Concernant le fait que cette dérivée covariante préserve les distributions à densité, on pourra vérifier que $\boldsymbol{\theta} : \Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\gamma}_t, \boldsymbol{\varepsilon}) = D_t\boldsymbol{\theta} : \boldsymbol{\varepsilon}$, où

$$D_t\boldsymbol{\theta} := \partial_t\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\gamma}_t\boldsymbol{\gamma}^{-1} + \boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}_t\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\gamma})\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}_t\boldsymbol{\gamma}^{-1} - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}_t)\boldsymbol{\theta} - \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\gamma}_t)\boldsymbol{\gamma}^{-1}\right).$$

Le calcul des dérivées objective s'obtient alors facilement en observant que

$$p^*\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\tau}, \qquad p^*\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{q}, \qquad p^*\boldsymbol{\gamma}_t = 2\mathbf{q}(\nabla\boldsymbol{u})^s = \mathbf{q}\widehat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}.$$

□

Remarque 7.3. En suivant Truesdell [40] (voir également la remarque 6.12), on définit une autre dérivée objective issue de (4.5) en posant

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\boldsymbol{\sigma}}{dt} := \rho\,\frac{d_{\widetilde{p}}\,\boldsymbol{\tau}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \widehat{\mathbf{w}}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\widehat{\mathbf{w}}^\star + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(\mathbf{q}\boldsymbol{\sigma})\widehat{\mathbf{d}}\mathbf{q}^{-1} + \operatorname{tr}(\widehat{\mathbf{d}})\boldsymbol{\sigma} - \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{d})\mathbf{q}^{-1}\right), \tag{7.6}$$

où l'on a utilisé l'équation de conservation de la masse $\dot{\rho} = -\rho\operatorname{tr}\widehat{\mathbf{d}}$ et le fait que

$$\widetilde{p}_*\partial_t(\widetilde{p}^*\rho) = \dot{\rho}.$$

Terminons par une remarque liée aux chargements hydrostatiques (pour lesquels $\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{q}^{-1}$ où P est la pression).

Remarque 7.4. La dérivée de Fiala du tenseur métrique $\mathbf{q}$ s'écrit :

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{q}}{dt} = \frac{3}{2}\,\mathbf{d} = \frac{3}{4}\,\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{q},$$

celle de son inverse $\mathbf{q}^{-1}$:

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{q}^{-1}}{dt} = \frac{3}{2}\,\widehat{\mathbf{d}}\mathbf{q}^{-1} - (\operatorname{tr}\widehat{\mathbf{d}})\mathbf{q}^{-1},$$

et

$$\rho\,\frac{d_{\widetilde{p}}}{dt}\left(\frac{\mathbf{q}^{-1}}{\rho}\right) = \frac{3}{2}\,\widehat{\mathbf{d}}\mathbf{q}^{-1}$$

alors que pour les dérivées de Zaremba-Jaumann (7.2) et de Green-Naghdi (7.7), celles-ci sont nulles.

7.5. **La dérivée de Green-Naghdi.** Celle-ci, introduite dans [16], est définie à partir d'une configuration de référence $p_0 : \mathscr{B} \to \Omega_{p_0}$. Elle s'écrit :

$$\overset{\square}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\boldsymbol{\omega}}^\star - \widehat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\tau}, \tag{7.7}$$

où

$$\widehat{\boldsymbol{\omega}}(t,\mathbf{x}) := \mathbf{R}_t(t,\varphi^{-1}(\mathbf{x}))\mathbf{R}^{-1}(t,\mathbf{x})$$

est un tenseur mixte antisymétrique de type $(1,1)$, que l'on écrit plus simplement $\widehat{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{R}_t\mathbf{R}^{-1}$ et

$$\mathbf{R} : T_{\mathbf{x}_0}\Omega_{p_0} \to T_{\mathbf{x}}\Omega$$

est l'isométrie euclidienne dans la décomposition polaire

$$\mathbf{F}_\varphi = \mathbf{R}\mathbf{U},$$

de l'application linéaire tangente $\mathbf{F}_\varphi = T\varphi$ (où $\varphi = p \circ p_0^{-1}$). Cette décomposition est caractérisée par les relations suivantes

$$\mathbf{R}^t = \mathbf{R}^{-1}, \qquad \mathbf{U}^t = \mathbf{U},$$

de sorte que

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{C}, \quad \text{où} \quad \mathbf{C} = \varphi^*\mathbf{q} = \mathbf{F}_\varphi^\star\mathbf{q}\,\mathbf{F}_\varphi.$$

Le tenseur mixte $\mathbf{U}$ est donc défini comme l'unique racine carrée positive du tenseur de Cauchy-Green droit mixte $\mathbf{q}^{-1}\mathbf{C}$ et $\mathbf{R} = \mathbf{F}_\varphi\mathbf{U}^{-1}$.

Cette dérivée objective provient également d'une dérivée covariante sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$. Pour le formuler, on introduira les notations suivantes :

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = p_0^*\mathbf{q}, \qquad \mathbf{U}_0 = p_0^*\mathbf{U},$$

ainsi que l'application linéaire

$$\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0} : \mathrm{End}_s(T\mathscr{B}) \to \mathrm{End}_s(T\mathscr{B}), \qquad M \mapsto \mathbf{U}_0M + M\mathbf{U}_0,$$

définie sur l'espace $\mathrm{End}_s(T\mathscr{B})$ des endomorphismes symétriques de $T\mathscr{B}$ (relativement à la métrique $\boldsymbol{\gamma}_0$). Celle-ci peut s'écrire également sous la forme

$$\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0} = \mathrm{Id}\,\underline{\otimes}\,\mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_0\,\underline{\otimes}\,\mathrm{Id} \qquad \left((\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0})^i{}_{jk}{}^l = \delta^i_k U^l_{0j} + U^i_{0k}\delta^l_j\right).$$

Lorsque $\mathbf{U}_0$ est définie positive, on peut vérifier que $\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}$ est inversible.

Théorème 7.5. *La dérivée de Green-Naghdi correspond à la dérivée covariante*

$$D_t\boldsymbol{\varepsilon} := \partial_t\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{U}_0^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}{}^{-1}(\boldsymbol{\gamma}_0^{-1}\boldsymbol{\gamma}_t)\right) - \left(\mathbf{U}_0^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}{}^{-1}(\boldsymbol{\gamma}_0^{-1}\boldsymbol{\gamma}_t)\right)^\star\boldsymbol{\varepsilon}$$

sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$. *Celle-ci préserve les distributions à densité et on a*

$$D_t\boldsymbol{\theta} := \partial_t\boldsymbol{\theta} + \left(\mathbf{U}_0^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}{}^{-1}(\boldsymbol{\gamma}_0^{-1}\boldsymbol{\gamma}_t)\right)\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\left(\mathbf{U}_0^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}{}^{-1}(\boldsymbol{\gamma}_0^{-1}\boldsymbol{\gamma}_t)\right)^\star$$

sur $T^\star\mathrm{Met}(\mathscr{B})$. *De plus les dérivées matérielles objectives correspondantes s'écrivent*

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{k}}{dt} = \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k}\widehat{\boldsymbol{\omega}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}^\star\mathbf{k}$$

pour un champ $\mathbf{k}$ *de tenseurs covariants d'ordre* 2 *et*

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\boldsymbol{\tau}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\boldsymbol{\omega}}^\star - \widehat{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{\tau},$$

pour un champ $\boldsymbol{\tau}$ *de tenseurs contravariants d'ordre* 2.

Démonstration. On cherche une dérivée covariante D_t sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$, sous la forme

$$D_t\boldsymbol{\varepsilon} = \partial_t\boldsymbol{\varepsilon} + \Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\gamma}_t,\boldsymbol{\varepsilon}),$$

telle que

$$p_*(D_t(p^*\mathbf{k})) = \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k}\widehat{\boldsymbol{\omega}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}^\star\mathbf{k}.$$

Grâce au lemme C.5, on a donc

$$\mathbf{k}_t + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{k} + p_*(\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{\gamma}_t, p^*\mathbf{k})) = \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{k}\widehat{\boldsymbol{\omega}} + \widehat{\boldsymbol{\omega}}^\star\mathbf{k},$$

puis

$$p_*(\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}(\gamma_t, p^*\mathbf{k})) = \mathbf{k}\,(\widehat{\boldsymbol{\omega}} - \nabla \boldsymbol{u}) + (\widehat{\boldsymbol{\omega}} - \nabla \boldsymbol{u})^\star\,\mathbf{k},$$

en utilisant le théorème D.4, et donc

$$\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}(\gamma_t, \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\varepsilon}\, p^*(\widehat{\boldsymbol{\omega}} - \nabla \boldsymbol{u}) + p^*(\widehat{\boldsymbol{\omega}} - \nabla \boldsymbol{u})^\star\,\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Or

$$\nabla \boldsymbol{u} = (\mathbf{F}_\varphi)_t \mathbf{F}_\varphi^{-1} = (\mathbf{R}_t\mathbf{U} + \mathbf{R}\mathbf{U}_t)(\mathbf{R}\mathbf{U})^{-1} = \mathbf{R}_t\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{F}_\varphi(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}_t)\mathbf{F}_\varphi^{-1} = \widehat{\boldsymbol{\omega}} + \varphi_*(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}_t),$$

d'où l'on tire

$$\widehat{\boldsymbol{\omega}} - \nabla \boldsymbol{u} = -\varphi_*(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}_t). \tag{7.8}$$

Posons $\mathbf{U}_0 := p_0^*\mathbf{U}$. Alors $\mathbf{U}_{0t} = p_0^*\mathbf{U}_t$ et donc

$$p^*(\widehat{\boldsymbol{\omega}} - \nabla \boldsymbol{u}) = p_0^*\varphi^*(\widehat{\boldsymbol{\omega}} - \nabla \boldsymbol{u}) = -p_0^*(\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U}_t) = -\mathbf{U}_0^{-1}\mathbf{U}_{0t}.$$

On a donc

$$\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}(\gamma_t, \boldsymbol{\varepsilon}) = -\boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{U}_0^{-1}\mathbf{U}_{0t}\right) - \left(\mathbf{U}_0^{-1}\mathbf{U}_{0t}\right)^\star \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Maintenant,

$$\boldsymbol{\gamma} = p^*\mathbf{q} = p_0^*\mathbf{C} = p_0^*(\mathbf{q}\mathbf{U}^2) = \gamma_0\mathbf{U}_0^2,$$

d'où l'on tire

$$\mathbf{U}_0\,\mathbf{U}_{0t} + \mathbf{U}_{0t}\,\mathbf{U}_0 = \gamma_0^{-1}\gamma_t.$$

Autrement dit

$$\mathbf{U}_{0t} = \mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}{}^{-1}(\gamma_0^{-1}\gamma_t),$$

$\mathbf{U}_0$ étant l'unique racine carrée positive de $\gamma_0^{-1}\boldsymbol{\gamma}$. On a donc finalement

$$\Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}(\gamma_t, \boldsymbol{\varepsilon}) = -\boldsymbol{\varepsilon}\left(\mathbf{U}_0^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}{}^{-1}(\gamma_0^{-1}\gamma_t)\right) - \left(\mathbf{U}_0^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}{}^{-1}(\gamma_0^{-1}\gamma_t)\right)^\star \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Il nous reste à vérifier que cette dérivée covariante préserve les distributions à densité. Or, si l'on pose $A := \mathbf{U}_0^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}{}^{-1}(\gamma_0^{-1}\gamma_t)$, on obtient

$$\boldsymbol{\theta} : \Gamma_{\boldsymbol{\gamma}}(\gamma_t, \boldsymbol{\varepsilon}) = -\operatorname{tr}(\boldsymbol{\theta}\,\boldsymbol{\varepsilon}A + \boldsymbol{\theta}A^\star\boldsymbol{\varepsilon}) = -(A\,\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}A^\star) : \boldsymbol{\varepsilon}.$$

L'expression $D_t\boldsymbol{\theta}$ est donc bien définie et s'écrit :

$$D_t\boldsymbol{\theta} = \partial_t\boldsymbol{\theta} + \left(\mathbf{U}_0^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}{}^{-1}(\gamma_0^{-1}\gamma_t)\right)\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\left(\mathbf{U}_0^{-1}\mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}{}^{-1}(\gamma_0^{-1}\gamma_t)\right)^\star.$$

□

Remarque 7.6. Dans la cas limite $\mathbf{U}_0 \to \mathrm{Id}$ des déformations négligeables, on obtient

$$\mathbf{U}_{0t} = \mathbf{L}_{\mathbf{U}_0}{}^{-1}(\gamma_0^{-1}\gamma_t) \approx \frac{1}{2}\gamma_0^{-1}\gamma_t,$$

et l'on retrouve alors que la dérivée de Green-Naghdi est proche de celle de Zaremba-Jaumann. Sur $\mathrm{Met}(\mathscr{B})$, cela se traduit par

$$D_t\boldsymbol{\theta} \underset{\mathbf{U}_0\to\mathrm{Id}}{\approx} \partial_t\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2}\left(\gamma_0^{-1}\gamma_t\,\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}\,\gamma_t\gamma_0^{-1}\right).$$

7.6. **Les dérivées objectives de Xiao-Bruhns-Meyers.** Une famille de dérivées objectives a été proposée dans [43], sous la forme

$$\frac{d_{\widetilde{p}}\boldsymbol{\tau}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^\star, \qquad \widehat{\boldsymbol{\Omega}} = \widehat{\mathbf{w}} + \widehat{\boldsymbol{\Upsilon}}(\widehat{\mathbf{b}}, \widehat{\mathbf{d}}), \tag{7.9}$$

avec

$$\widehat{\boldsymbol{\Upsilon}}(\widehat{\mathbf{b}}, \widehat{\mathbf{d}}) := \nu_1(\widehat{\mathbf{b}})\left(\widehat{\mathbf{b}}\widehat{\mathbf{d}}\right)^a + \nu_2(\widehat{\mathbf{b}})\left(\widehat{\mathbf{b}}^2\widehat{\mathbf{d}}\right)^a + \nu_3(\widehat{\mathbf{b}})\left(\widehat{\mathbf{b}}\widehat{\mathbf{d}}\widehat{\mathbf{b}}^2\right)^a,$$

où $\widehat{\mathbf{w}} = (\nabla \boldsymbol{u})^a$, $\widehat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}\mathbf{q} = (\varphi_*\mathbf{q}^{-1})\mathbf{q}$ est le tenseur de Cauchy-Green gauche mixte 2.3, $\widehat{\mathbf{d}} = (\nabla \boldsymbol{u})^s$ est le tenseur mixte des taux de déformation et les scalaires $\nu_k(\widehat{\mathbf{b}})$ sont des invariants isotropes de $\widehat{\mathbf{b}}$.

Remarque 7.7. Cette famille contient la dérivée de Jaumann, qui correspond à
$$\widehat{\boldsymbol{\Upsilon}}\big(\widehat{\mathbf{b}},\widehat{\mathbf{d}}\big)=0$$
ainsi que celle de Green-Naghdi, lorsque
$$\widehat{\boldsymbol{\Upsilon}}\big(\widehat{\mathbf{b}},\widehat{\mathbf{d}}\big)=\widehat{\mathbf{d}}-\widehat{\mathbf{b}}^{-\frac{1}{2}}\mathbf{L}_{\widehat{\mathbf{b}}^{\frac{1}{2}}}(\widehat{\mathbf{b}}\widehat{\mathbf{d}}),$$
car $\nabla\boldsymbol{u}=\widehat{\mathbf{d}}+\widehat{\mathbf{w}}$, $\varphi_*\mathbf{C}_t=\mathbf{d}$, $\varphi_*\mathbf{q}^{-1}=\mathbf{b}$, $\varphi_*\mathbf{U}^2=\mathbf{b}\mathbf{q}=\widehat{\mathbf{b}}$ (et où l'on a utilisé (7.8)). Elle ne contient par contre pas les dérivées objectives (7.5) et (7.6) (de type Ebin–Fiala).

Les dérivées objectives (7.9) sur les tenseurs d'ordre 2 contravariants $\boldsymbol{\tau}$ sont associées, par la règle de Leibniz, aux dérivées objectives
$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{k}}{dt}=\dot{\mathbf{k}}+\mathbf{k}\,\widehat{\boldsymbol{\Omega}}+\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^\star\mathbf{k},$$
définies sur les champs de tenseurs d'ordre 2 covariants $\mathbf{k}$. On peut alors énoncer le résultat suivant.

Théorème 7.8. *La famille de dérivées objectives de Xiao-Bruhns-Meyers*
$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{k}}{dt}=\dot{\mathbf{k}}+\mathbf{k}\,\widehat{\boldsymbol{\Omega}}+\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^\star\mathbf{k},\qquad \widehat{\boldsymbol{\Omega}}=\widehat{\mathbf{w}}+\widehat{\boldsymbol{\Upsilon}}\big(\widehat{\mathbf{b}},\widehat{\mathbf{d}}\big),\qquad \widehat{\mathbf{w}}=(\nabla\boldsymbol{u})^a,$$
correspond à la famille de dérivées covariantes sur $T\mathrm{Met}(\mathscr{B})$
$$\frac{D_{\widetilde{p}}\,\boldsymbol{\varepsilon}}{Dt}:=\partial_t\boldsymbol{\varepsilon}-\frac{1}{2}\left(\gamma_t\gamma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}\gamma^{-1}\gamma_t\right)+\boldsymbol{\varepsilon}\,\boldsymbol{\Upsilon}\big(\gamma_0^{-1}\gamma,\frac{1}{2}\gamma^{-1}\gamma_t\big)+\left(\boldsymbol{\Upsilon}\big(\gamma_0^{-1}\gamma,\frac{1}{2}\gamma^{-1}\gamma_t\big)\right)^\star\boldsymbol{\varepsilon}.$$
Celles-ci préservent les distributions à densité et on a
$$\frac{D_{\widetilde{p}}\,\boldsymbol{\theta}}{Dt}:=\partial_t\boldsymbol{\theta}+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\theta}\gamma_t\gamma^{-1}+\gamma^{-1}\gamma_t\boldsymbol{\theta}\right)-\boldsymbol{\Upsilon}\big(\gamma_0^{-1}\gamma,\frac{1}{2}\gamma^{-1}\gamma_t\big)\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\theta}\left(\boldsymbol{\Upsilon}\big(\gamma_0^{-1}\gamma,\frac{1}{2}\gamma^{-1}\gamma_t\big)\right)^\star.$$

Démonstration. On note que ces dérivées s'écrivent
$$\frac{d_{\widetilde{p}}\,\mathbf{k}}{dt}=\overset{\triangle}{\mathbf{k}}+\mathbf{k}\,\widehat{\boldsymbol{\Upsilon}}\big(\widehat{\mathbf{b}},\widehat{\mathbf{d}}\big)+\widehat{\boldsymbol{\Upsilon}}\big(\widehat{\mathbf{b}},\widehat{\mathbf{d}}\big)^\star\mathbf{k},$$
$\overset{\triangle}{\mathbf{k}}$ désignant la dérivée de Jaumann de $\mathbf{k}$. On utilise ensuite le fait (voir remarque 2.4) que
$$p^*\mathbf{d}=\frac{1}{2}\gamma_t,\quad\text{et}\quad p^*\mathbf{b}=\gamma_0^{-1},$$
d'où l'on tire :
$$p^*\left(\widehat{\mathbf{d}}\right)=p^*(\mathbf{q}^{-1}\mathbf{d})=\frac{1}{2}\gamma^{-1}\gamma_t,\qquad p^*\left(\widehat{\mathbf{b}}\right)=p^*(\mathbf{b}\mathbf{q})=\gamma_0^{-1}\gamma,$$
puis
$$\begin{aligned}
p^*\left(\widehat{\mathbf{b}}\widehat{\mathbf{d}}\right)^a&=\frac{1}{2}p^*\left(\widehat{\mathbf{b}}\widehat{\mathbf{d}}-\widehat{\mathbf{d}}\widehat{\mathbf{b}}\right),\\
p^*\left(\widehat{\mathbf{b}}^2\widehat{\mathbf{d}}\right)^a&=\frac{1}{2}p^*\left(\widehat{\mathbf{b}}^2\widehat{\mathbf{d}}-\widehat{\mathbf{d}}\widehat{\mathbf{b}}^2\right),\\
p^*\left(\widehat{\mathbf{b}}\widehat{\mathbf{d}}\widehat{\mathbf{b}}^2\right)^a&=\frac{1}{2}p^*\left(\widehat{\mathbf{b}}\widehat{\mathbf{d}}\widehat{\mathbf{b}}^2-\widehat{\mathbf{b}}^2\widehat{\mathbf{d}}\widehat{\mathbf{b}}\right).
\end{aligned}$$
Par ailleurs, $\nu_k(\widehat{\mathbf{b}})$ est une fonction f_k de $\operatorname{tr}\widehat{\mathbf{b}}$, $\operatorname{tr}(\widehat{\mathbf{b}}^2)$, $\operatorname{tr}(\widehat{\mathbf{b}}^3)$ et donc
$$p^*\nu_k(\widehat{\mathbf{b}})=f_k(\operatorname{tr}(p^*\widehat{\mathbf{b}}),\operatorname{tr}(p^*\widehat{\mathbf{b}}^2),\operatorname{tr}p^*(\widehat{\mathbf{b}}^3))$$
On en déduit donc (voir théorème 7.1) que :
$$p^*\left(\frac{d_{\widetilde{p}}\,p_*(\boldsymbol{\varepsilon})}{dt}\right)=\partial_t\boldsymbol{\varepsilon}+\Gamma_\gamma(\boldsymbol{\varepsilon},\gamma_t)$$
avec
$$\Gamma_\gamma(\boldsymbol{\varepsilon},\gamma_t)=-\frac{1}{2}\left(\gamma_t\gamma^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}\,\gamma^{-1}\gamma_t\right)+\boldsymbol{\varepsilon}\,\boldsymbol{\Upsilon}\big(\gamma_0^{-1}\gamma,\frac{1}{2}\gamma^{-1}\gamma_t\big)+\left(\boldsymbol{\Upsilon}\big(\gamma_0^{-1}\gamma,\frac{1}{2}\gamma^{-1}\gamma_t\big)\right)^\star\boldsymbol{\varepsilon},$$

où l'on a substitué dans $\widehat{\boldsymbol{\Upsilon}}(\widehat{\mathbf{b}}, \widehat{\mathbf{d}})$, $\widehat{\mathbf{b}}$ par $\boldsymbol{\gamma}_0^{-1}\boldsymbol{\gamma}$ et $\widehat{\mathbf{d}}$ par $\frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}^{-1}\boldsymbol{\gamma}_t$. Enfin, on vérifie que la remarque 6.11 s'applique. □

Annexe A. Dualité, transposée, adjoint

Étant donné un espace vectoriel E (de dimension fini) défini sur un corps K, on définit le dual de E, noté $E^\star$ comme l'espace vectoriel des applications linaires de E dans K. On pourra remarquer que E et $E^\star$ ont même dimension. Le crochet de dualité entre $E^\star$ et E est défini comme suit :

$$(\alpha, \mathbf{v}) := \alpha(\mathbf{v}), \qquad \alpha \in E^\star, \mathbf{v} \in E.$$

C'est une application bilinéaire définie sur $E^\star \times E$. Si on se donne une base $(\mathbf{e}_i)$ de E, on définit une base $(\mathbf{e}^i)$ de $E^\star$, appelée base duale de $(\mathbf{e}_i)$ en posant

$$(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = \delta^i_j.$$

Remarque A.1. Une remarque fondamentale de l'algèbre linéaire est qu'il n'existe pas d'isomorphisme *canonique* (*i.e.* indépendant du choix d'une base) entre un espace vectoriel E et son dual $E^\star$.

Une application bilinéaire $\mathbf{b} : E \times E \to K$ est dite *non-dégénérée* si

$$b(\boldsymbol{u}, \mathbf{v}) = 0, \forall \mathbf{v} \in E \implies \boldsymbol{u} = 0.$$

On a le résultat suivant qui montre que tout isomorphisme entre E et son dual E^* correspond à la donnée d'une application bilinéaire non-dégénérée sur E.

Théorème A.2. *Tout isomorphisme $\kappa : E \to E^\star$ est équivalent à la donnée d'une application bilinéaire* $\mathbf{b}$ *non dégénérée sur E. Inversement, toute application bilinéaire non dégénérée b sur E définit un isomorphisme entre E et E^*.*

Démonstration. Soit $\kappa : E \to E^\star$ un isomorphisme et posons

$$b_\kappa(\boldsymbol{u}, \mathbf{v}) := (\kappa(\boldsymbol{u}), \mathbf{v}).$$

Alors, b_κ est une application bilinéaire définie sur E, qui est de plus non dégénérée si κ est un isomorphisme. Inversement, si b est une application bilinéaire non dégénérée sur E, alors on peut vérifier que l'application linéaire

$$\kappa_b : \boldsymbol{u} \mapsto b(\boldsymbol{u}, \cdot), \qquad E \to E^\star$$

est un isomorphisme. □

Exemple A.3. Soit $(\mathbf{e}_i)$ une base de E et

$$\kappa : \boldsymbol{u} = \sum_i u^i \mathbf{e}_i \mapsto \sum_i u^i \mathbf{e}^i, \qquad E \to E^\star.$$

Posons $b(\boldsymbol{u}, \mathbf{v}) := (\kappa(\boldsymbol{u}), \mathbf{v})$. Alors, dans la base $(\mathbf{e}_i)$, on a

$$b(\boldsymbol{u}, \mathbf{v}) = \sum_i u^i v^i$$

qui correspond à un produit scalaire sur E.

Étant donnée une application linéaire $L \in \mathscr{L}(E, F)$ entre deux espaces vectoriels E et F, on définit l'application linéaire $L^\star \in \mathscr{L}(F^\star, E^\star)$, appelée *adjoint*[2] (ou *application linéaire duale*) de L entre les duaux respectifs $F^\star$ et $E^\star$ de F et E par la formule

$$L^\star a := a \circ L, \qquad a \in F^\star.$$

Remarque A.4. On pourra observer les relations suivantes

$$(\mathscr{L}_1\, \mathscr{L}_2)^\star = \mathscr{L}_2^\star\, \mathscr{L}_1^\star, \qquad (L^{-1})^\star = (L^\star)^{-1}.$$

2. Notation utilisée par Noll [29].

Lorsque les espaces vectoriels E et F sont respectivement équipés de produits scalaires, qu'on notera $\mathbf{q}_E$ et $\mathbf{q}_F$ respectivement, alors on définit l'application *transposée* de $L \in \mathscr{L}(E,F)$ par rapport à ces produits scalaires et notée L^t à partir du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} E^\star & F^\star \arrow[l, "L^\star"'] \\ E \arrow[u, "\mathbf{q}_E"] \arrow[r, "L"] & F \arrow[u, "\mathbf{q}_F"'] \arrow[l, bend left, "L^t"] \end{tikzcd}$$

Autrement dit

$$\mathbf{q}_E \, L^t = L^\star \, \mathbf{q}_F, \tag{A.1}$$

ou encore $L^t = \mathbf{q}_E^{-1} \, L^\star \, \mathbf{q}_F$.

Annexe B. Pull-back et push-forward

Le concept fondamental en géométrie différentielle qui permet de passer des variables matérielles aux variables spatiales (et inversement) sont les opérations *pull-back* et *push-forward.* Pour les fonctions numériques, ces opérations sont définies par

$$p^* f = f \circ p \quad \text{(pull-back)}, \qquad p_* F = F \circ p^{-1} \quad \text{(push-forward)},$$

où $f \in \mathrm{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et $F \in \mathrm{C}^\infty(\mathscr{B}, \mathbb{R})$. Pour les *champs de vecteurs*, on se concentrera sur le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} T\mathscr{B} \arrow[r, "Tp"] \arrow[d, "\pi"] & T\mathscr{E} \arrow[d, "\pi"'] \\ \mathscr{B} \arrow[r, "p"] \arrow[u, bend left, "\boldsymbol{U}"] & \mathscr{E} \arrow[u, bend right, "\boldsymbol{u}"'] \end{tikzcd}$$

afin d'obtenir les définitions naturelles

$$p^* \boldsymbol{u} = Tp^{-1} \circ \boldsymbol{u} \circ p \quad \text{(pull-back)}, \qquad p_* \boldsymbol{U} = Tp \circ \boldsymbol{U} \circ p^{-1} \quad \text{(push-forward)}.$$

Ainsi, si $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Vect}(\Omega)$, alors $p^* \boldsymbol{u} \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$ et réciproquement, si $\boldsymbol{U} \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B})$, alors $p_* \boldsymbol{U} \in \mathrm{Vect}(\Omega)$. Pour les *champs de covecteurs*, le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} T^\star\mathscr{B} \arrow[d, "\pi"] & T^\star\mathscr{E} \arrow[l, "Tp^\star"'] \arrow[d, "\pi"'] \\ \mathscr{B} \arrow[r, "p"] \arrow[u, bend left, "A"] & \mathscr{E} \arrow[u, bend right, "a"'] \end{tikzcd}$$

où $Tp^\star$ est la transposée de l'application linéaire Tp, nous aide à obtenir les définitions suivantes

$$p^* a = Tp^\star \circ a \circ p \quad \text{(pull-back)}, \qquad p_* A = (Tp^\star)^{-1} \circ A \circ p^{-1} \quad \text{(push-forward)}.$$

Une fois compris ces règles du jeu, les opérations pull-back et push-forward s'étendent sans problème, aux champs de tenseurs contravariants d'ordre plus élevé, aux champs de tenseurs covariants d'ordre plus élevé, et enfin aux champs de tenseurs mixtes.

Remarque B.1. Il est intéressant de noter que les opérations de pull-back et push-forward sont inverses l'une de l'autre, *i.e.* que $p^* = (p_*)^{-1} = (p^{-1})_*$.

Dans des systèmes de coordonnées locales, (X^I) sur $\mathscr{B}$ et (x^i) dans $\mathscr{E}$, où on a posé $p(X) = x$, l'application linéaire tangente

$$Tp : T\mathscr{B} \to T\mathscr{E}$$

est représentée par la matrice carrée $\mathbf{F}$ définie par

$$\mathbf{F}^i{}_J = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} = \partial_J x^i,$$

et son application linéaire tangente duale

$$Tp^\star : T_x^\star \mathscr{E} \to T_X^\star \mathscr{B},$$

par

$$(\mathbf{F}^\star)_I{}^j = \frac{\partial x^j}{\partial X^I} = \partial_I x^j,$$

avec $\mathbf{F}^t = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{F}^\star\mathbf{q}$ et $\mathbf{F}^{-\star} := (\mathbf{F}^\star)^{-1} = (\mathbf{F}^{-1})^\star$.

Exemple B.2. Pour des *champs de vecteurs contravariants* $\mathbf{W} = (W^I)$, $\mathbf{w} = (w^i)$, on a

$$(p_*\mathbf{W})^i = \mathbf{F}^i{}_K(W^K \circ p^{-1}), \qquad (p^*\mathbf{w})^I = (\mathbf{F}^{-1})^I{}_k(w^k \circ p),$$

soit, sous forme matricielle,

$$p_*\mathbf{W} = \mathbf{F}(\mathbf{W} \circ p^{-1}), \qquad p^*\mathbf{w} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{w} \circ p).$$

Exemple B.3. Pour des *champ de vecteurs covariants* $\mathbf{A} = (A_I)$, $\mathbf{a} = (a_i)$, on a

$$(p_*\mathbf{A})_i = (\mathbf{F}^{-\star})_i{}^K(A_K \circ p^{-1}), \qquad (p^*\mathbf{a})_I = (\mathbf{F}^\star)_I{}^k(a_k \circ p),$$

soit, sous forme matricielle,

$$p_*\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{F}^{-1} \circ p^{-1}), \qquad p^*\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{F} \circ p).$$

Exemple B.4. Pour des *champs de tenseurs d'ordre 2 covariants* $\mathbf{K} = (K_{IJ})$, $\mathbf{k} = (k_{ij})$, on a

$$(p_*\mathbf{K})_{ij} = (\mathbf{F}^{-\star})_i{}^K(\mathbf{F}^{-\star})_j{}^L(K_{KL} \circ p^{-1}), \qquad (p^*\mathbf{k})_{IJ} = (\mathbf{F}^\star)_I{}^k(\mathbf{F}^\star)_J{}^l(k_{kl} \circ p),$$

soit, sous forme matricielle,

$$p_*\mathbf{K} = \mathbf{F}^{-\star}\mathbf{K}(\mathbf{F}^{-1} \circ p^{-1}), \qquad p^*\mathbf{k} = \mathbf{F}^\star\mathbf{k}(\mathbf{F} \circ p).$$

Exemple B.5. Pour des *champs de tenseurs d'ordre 2 contravariants* $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}^{IJ})$ et $\boldsymbol{\tau} = (\boldsymbol{\tau}^{ij})$, on a

$$(p_*\boldsymbol{\theta})^{ij} = \mathbf{F}^i{}_K\mathbf{F}^j{}_L(\boldsymbol{\theta}^{KL} \circ p^{-1}), \qquad (p^*\boldsymbol{\tau})^{IJ} = (\mathbf{F}^{-1})^I{}_k(\mathbf{F}^{-1})^J{}_l(\boldsymbol{\tau}^{kl} \circ p^{-1}),$$

soit, sous forme matricielle,

$$p_*\boldsymbol{\theta} = \mathbf{F}\boldsymbol{\theta}(\mathbf{F}^\star \circ p^{-1}), \qquad p^*\boldsymbol{\tau} = \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}(\mathbf{F}^{-\star} \circ p).$$

Exemple B.6. Pour des *champs de tenseurs d'ordre 2 mixtes* $\mathbf{M} = (M^I{}_J)$ et $\mathbf{m} = (m^i{}_j)$, on a

$$(p_*\mathbf{M})^i{}_j = \mathbf{F}^i{}_K(\mathbf{F}^{-\star})_j{}^L(M^K{}_L \circ p^{-1}), \qquad (p^*\mathbf{m})^I{}_J = (\mathbf{F}^{-1})^I{}_k(\mathbf{F}^\star)_J{}^l(m^k{}_l \circ p^{-1}),$$

soit, sous forme matricielle,

$$p_*\mathbf{M} = \mathbf{F}\mathbf{M}(\mathbf{F}^{-1} \circ p^{-1}), \qquad p^*\mathbf{m} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{m}(\mathbf{F} \circ p).$$

Plus généralement, pour des champs de tenseurs mixtes quelconques, on a :

$$(p_*\mathbf{T})^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_q} = \mathbf{F}^{i_1}{}_{K_1}\cdots\mathbf{F}^{i_p}{}_{K_p}(\mathbf{F}^{-\star})_{j_1}{}^{\mathscr{L}_1}\cdots(\mathbf{F}^{-\star})_{j_q}{}^{\mathscr{L}_q}(\mathbf{T}^{K_1\cdots K_p}{}_{\mathscr{L}_1\cdots\mathscr{L}_q} \circ p^{-1}); \tag{B.1}$$

$$(p^*\mathbf{t})^{I_1\cdots I_p}{}_{J_1\cdots J_q} = (\mathbf{F}^{-1})^{I_1}{}_{k_1}\cdots(\mathbf{F}^{-1})^{I_p}{}_{k_p}(\mathbf{F}^\star)_{J_1}{}^{l_1}\cdots(\mathbf{F}^\star)_{J_q}{}^{l_q}(\mathbf{t}^{k_1\cdots k_p}{}_{l_1\cdots l_q} \circ p); \tag{B.2}$$

Remarque B.7. Les opérations de *push-forward* et de *pull-back* commutent avec la contraction entre tenseurs covariants et contravariants. On obtient donc en particulier

$$(p_*\mathbf{A})\cdot(p_*\boldsymbol{U}) = p_*(\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{U}), \qquad (p_*\boldsymbol{\theta}) : (p_*\mathbf{K}) = p_*(\boldsymbol{\theta} : \mathbf{K}), \qquad \operatorname{tr}(p_*\mathbf{M}) = p_*(\operatorname{tr}\mathbf{M}).$$

Annexe C. Dérivée de Lie

Le groupe des difféomorphismes $\mathrm{Diff}(M)$ d'une variété différentielle M agit linéairement sur tout espace $\mathbb{T}(M)$, de champs de tenseurs sur M. Plus précisément, il existe un morphisme de groupe

$$\rho : \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{GL}(\mathbb{T}(M)), \qquad \varphi \mapsto \rho(\varphi) = \varphi_*.$$

Pour des raisons historiques, c'est en général l'action (à droite) $\varphi^* = (\varphi^{-1})_*$ qui est plutôt considérée. La dérivée de Lie d'un champ de tenseurs $\mathbf{t} \in \mathbb{T}(M)$ correspond à l'action infinitésimale de cette action.

Définition C.1 (Dérivée de Lie)**.** Soit $\boldsymbol{u}$ un champ de vecteurs sur M et $\varphi(t)$ son flot. Soit $\mathbf{t}$ un champ de tenseurs sur M. On définit la *dérivée de Lie*, $\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{t}$, de $\mathbf{t}$ par rapport à $\boldsymbol{u}$ par l'expression

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{t} := \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} \varphi(t)^*\mathbf{t}.$$

Remarque C.2. Lorsque $\mathbf{t}$ est un champ de vecteurs $\mathbf{v}$, on a $\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{v} = [\boldsymbol{u}, \mathbf{v}]$, où l'expression $[\boldsymbol{u}, \mathbf{v}]$ désigne le *crochet de Lie* des champs $\boldsymbol{u}$ et $\mathbf{v}$.

Le fait que la dérivée de Lie corresponde à l'action infinitésimale d'une représentation (à droite) ρ du groupe des difféomorphismes, c'est à dire que

$$\rho(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \rho(\varphi_2)\rho(\varphi_1),$$

nous permet de déduire le lemme suivant.

Lemme C.3. *Soit $\boldsymbol{u} \in \mathrm{Vect}(M)$, un champ de vecteurs sur M, $\varphi(t)$ son flot et $\mathbf{t} \in \mathbb{T}(M)$, un champ de tenseurs sur M. On a :*

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t)^*\mathbf{t} = \varphi(t)^*\,\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{t}.$$

Remarque C.4. Considérons maintenant un chemin (lisse) quelconque $\varphi(t)$ dans le groupe des difféomorphismes et introduisons sa vitesse eulerienne

$$\boldsymbol{u}(t) := \varphi_t \circ \varphi^{-1},$$

qui définit un *champ de vecteurs dépendant du temps*. Alors, la notion de dérivée de Lie s'étend sans difficulté dans ce cadre et le lemme C.3 demeure valable.

Le résultat suivant étend le lemme C.3 dans le cas où le chemin de difféomorphismes $\varphi(t)$ est remplacé par un chemin de plongements $p(t) : \mathscr{B} \to \mathscr{E}$.

Lemme C.5. *Soit $p(t)$ un chemin de plongements, $\boldsymbol{u} = (\partial_t p) \circ p^{-1}$ sa vitesse eulerienne (à droite) et $\mathbf{t}$ un champ de tenseurs défini le long de $p(t)$ (i.e. sur $\Omega_{p(t)} = p(t)(\mathscr{B})$ et dépendant éventuellement du temps). Alors*

$$\partial_t(p^*\mathbf{t}) = p^*\left(\partial_t\mathbf{t} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\,\mathbf{t}\right).$$

Démonstration. Le lemme est vrai pour une fonction, car

$$\partial_t(p^*f) = \partial_t(f \circ p) = (\partial_t f + \nabla_{\boldsymbol{u}} f) \circ p = (\partial_t f + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\, f) \circ p.$$

On va maintenant le montrer pour un champ de vecteurs $\mathbf{w}$. Dans une carte locale, on a

$$(p^*\mathbf{w})(t, X) = \mathbf{F}^{-1}(t, X).\mathbf{w}(t, p(t, X)),$$

d'après B.2, d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
\partial_t(p^*\mathbf{w}) &= \partial_t(\mathbf{F}^{-1}).(\mathbf{w} \circ p) + \mathbf{F}^{-1}.\partial_t(\mathbf{w} \circ p) \\
&= -(\mathbf{F}^{-1}(\partial_t\mathbf{F})\mathbf{F}^{-1}).(\mathbf{w} \circ p) + \mathbf{F}^{-1}.(\partial_t\mathbf{w} + \nabla_{\boldsymbol{u}}\mathbf{w}) \circ p.
\end{aligned}$$

Or $(\partial_t \mathbf{F})\mathbf{F}^{-1} = (\nabla \boldsymbol{u}) \circ p$ et donc

$$\begin{aligned}\partial_t (p^* \mathbf{w}) &= \mathbf{F}^{-1}.(-\nabla_{\mathbf{w}} \boldsymbol{u} + \partial_t \mathbf{w} + \nabla_{\boldsymbol{u}} \mathbf{w}) \circ p \\ &= \mathbf{F}^{-1}.(\partial_t \mathbf{w} + [\boldsymbol{u}, \mathbf{w}]) \circ p \\ &= p^*(\partial_t \mathbf{w} + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\, \mathbf{w}).\end{aligned}$$

On montre ensuite le lemme pour un champ de covecteurs α. Soit $\mathbf{W}$ un champ de vecteurs *indépendant du temps* sur $\mathscr{B}$ et $\mathbf{w} = p_* \mathbf{W}$. On a

$$\begin{aligned}\partial_t (p^* \alpha)(\mathbf{W}) &= \partial_t \big((p^*\alpha)(\mathbf{W}) \big) = \partial_t \big((p^*\alpha)(p^*\mathbf{w}) \big) \\ &= \partial_t \big(p^*(\alpha(\mathbf{w})) \big) = \partial_t \big((\alpha(\mathbf{w})) \circ p \big) \\ &= p^* \big(\partial_t (\alpha(\mathbf{w})) + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}} (\alpha(\mathbf{w})) \big) \\ &= p^* \big((\partial_t \alpha)(\mathbf{w}) + \alpha(\partial_t \mathbf{w}) + (\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\, \alpha)(\mathbf{w}) + \alpha(\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\, \mathbf{w}) \big) \\ &= p^* (\partial_t \alpha + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\, \alpha)(\mathbf{W}) + (p^*\alpha)\big(\partial_t (\mathbf{W})\big) \\ &= p^* (\partial_t \alpha + \mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\, \alpha)(\mathbf{W}).\end{aligned}$$

On montre enfin, et de la même manière, que le résultat est encore vrai pour n'importe quel champ de tenseurs $\mathbf{t}$, ce qui achève la preuve. □

Annexe D. Dérivées covariantes

Définition D.1 (Dérivée covariante)**.** Une *dérivée covariante* sur un fibré vectoriel $\mathbb{E}$ de base M est un opérateur linéaire

$$\nabla : \Gamma(\mathbb{E}) \to \Gamma(T^\star M \otimes \mathbb{E}), \qquad \mathbf{s} \mapsto \nabla \mathbf{s},$$

entre l'espace $\Gamma(\mathbb{E})$ des sections de $\mathbb{E}$ et celui des sections de $T^\star M \otimes \mathbb{E}$ qui vérifie de plus l'*identité de Leibniz*

$$\nabla (f\mathbf{s}) = df \otimes \mathbf{s} + f\, \nabla \mathbf{s},$$

pour toute fonction $f \in \mathrm{C}^\infty(M)$ et toute section $\mathbf{s} \in \Gamma(\mathbb{E})$.

Dans le cas particulier où $\mathbb{E} = TM$ est le fibré tangent d'une variété M, on peut définir la *torsion* de cette dérivé covariante, par la formule

$$T(\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v} - [\mathbf{v}, \mathbf{w}], \qquad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathrm{Vect}(M),$$

qui est un champ de tenseurs mixte de type $(1, 2)$.

Définition D.2. Une dérivée covariante sur le fibré tangent TM d'une variété M est *symétrique* si sa torsion est nulle, c'est à dire si

$$\nabla_{\mathbf{v}} \mathbf{w} - \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{v} = [\mathbf{v}, \mathbf{w}], \qquad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathrm{Vect}(M),$$

où $[\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ le crochet de Lie des champs de vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$.

Remarque D.3. On peut montrer l'existence sur toute variété différentielle M d'une dérivée covariante. Toutefois, il existe une infinité de telles dérivées et aucune d'entre elle ne joue un rôle particulier. En revanche, si une variété M est munie d'une métrique riemannienne g, alors il existe une unique dérivée covariante symétrique ∇ telle que $\nabla g = 0$ (voir par exemple [14, Theorem 2.51]), c'est la *dérivée covariante riemannienne*.

Toute dérivée covariante sur TM induit par la règle de Leibniz une dérivée covariante sur tous les fibrés tensoriels de M. Le lien entre la dérivée de Lie et une dérivée covariante symétrique est alors rappelé dans le théorème suivant, dans le cas d'une variété riemannienne (M, g).

Théorème D.4. *Soit M une variété différentielle munie d'une dérivée covariante* ∇ symétrique. *On a alors les relations suivantes :*

(1) Dérivée de Lie d'une fonction f :

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\, f = \nabla_{\boldsymbol{u}} f = df.\boldsymbol{u};$$

(2) *Dérivée de Lie d'un champ de vecteurs* $\mathbf{w} = (w^i)$ *:*

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\, \mathbf{w} = [\boldsymbol{u}, \mathbf{w}] = \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{u} - \nabla_{\mathbf{w}} \boldsymbol{u};$$

(3) *Dérivée de Lie d'un champ de covecteurs* (1*-forme*) $\alpha = (\alpha_i)$ *:*

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\, \alpha = \nabla_{\boldsymbol{u}} \alpha + (\nabla \boldsymbol{u})^\star \alpha;$$

(4) *Dérivée de Lie d'un champ de tenseurs covariants d'ordre deux,* $\mathbf{k} = (k_{ij})$ *:*

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\, \mathbf{k} = \nabla_{\boldsymbol{u}} \mathbf{k} + (\nabla \boldsymbol{u})^\star \mathbf{k} + \mathbf{k}(\nabla \boldsymbol{u});$$

(5) *Dérivée de Lie d'un champ de tenseurs contravariants d'ordre deux,* $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^{ij})$ *:*

$$\mathscr{L}_{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{\sigma} = \nabla_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\sigma} - (\nabla \boldsymbol{u}) \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} (\nabla \boldsymbol{u})^\star;$$

Afin de définir de manière intrinsèque l'équation des géodésiques d'une variété riemannienne, il est nécessaire d'étendre la notion de dérivée covariante pour les champs de vecteurs qui ne sont définis que le long d'une courbe (comme le vecteur vitesse $c'(t)$ d'une courbe c).

Définition D.5. Un champ de vecteurs le long d'une courbe $c : I \to M$ est une courbe $X : I \to TM$, telle que $X(t) \in T_{c(t)}M$, pour tout $t \in I$.

Proposition D.6. *Soit* (M, γ) *une variété riemannienne et* ∇ *la dérivée covariante associée. Soit* $c : I \to M$ *une courbe. Alors, il existe un unique opérateur* D_t *défini sur l'espace vectoriel des champs de vecteurs définis le long de* c*, qui vérifie les propriétés suivantes :*

(1) *pour toute fonction* $f : I \to \mathbb{R}$*,*

$$D_t(fX)(t) = f'(t)\, X(t) + f(t)\, D_t(X)(t);$$

(2) *Si* $X(t) = \tilde{X}(c(t))$ *où* $\tilde{X}$ *est un champ de vecteurs sur* M*, alors*

$$D_t(X)(t) = (\nabla_{c'(t)} \tilde{X})((t)).$$

Remarque D.7. En dimension infinie, sur une variété de Fréchet, seule la notion de dérivée covariante le long d'une courbe est définie.

Références

[1] K. M. and. Geometry of matrix decompositions seen through optimal transport and information geometry. *Journal of Geometric Mechanics*, 9(3) :335–390, 2017.

[2] V. I. Arnold. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 16(fasc. 1) :319–361, 1966.

[3] B. Bernstein. Hypo-elasticity and elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 6 :89–1041960, 1960.

[4] J. Besson, G. Cailletaud, J.-L. Chaboche, and S. Forest. *Mécanique non linéaire des matériaux.* Hermès, Paris, 2001.

[5] B. Clarke. The metric geometry of the manifold of Riemannian metrics over a closed manifold. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 39(3-4) :533–545, 2010.

[6] B. Clarke and Y. A. Rubinstein. Conformal deformations of the Ebin metric and a generalized Calabi metric on the space of Riemannian metrics. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 30(2) :251–274, 2013.

[7] C. Duval and H. P. Künzle. Sur les connexions newtoniennes et l'extension non triviale du groupe de galilée. *C.R. Acad. Sc. Paris, Série A*, 285 :813–816, 1977.

[8] D. G. Ebin. *On the space of Riemannian metrics.* PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., 1967.

[9] D. G. Ebin. On the space of Riemannian metrics. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74 :1001–1003, 1968.

[10] A. C. Eringen. *Nonlinear theory of continuous media.* McGraw-Hill Book Co., New York-Toronto-London, 1962.

[11] L. P. Euler. Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable. *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin*, 14 :154–193, 1765.

[12] Z. Fiala. Time derivative obtained by applying the riemannian manifold of riemannian metrics to kinematics of continua. *C. R. Mecanique*, 332 :97–102, 2004.

[13] D. S. Freed and D. Groisser. The basic geometry of the manifold of Riemannian metrics and of its quotient by the diffeomorphism group. *Michigan Math. J.*, 36(3) :323–344, 1989.

[14] S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.

[15] O. Gil-Medrano and P. W. Michor. The Riemannian manifold of all Riemannian metrics. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 42(166) :183–202, 1991.

[16] A. Green and P. Naghdi. A general theory of an elastic-plastic continuum. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 18(4) :251–281, 1965.

[17] A. E. Green and W. Zerna. *Theoretical elasticity*. Second edition. Clarendon Press, Oxford, 1968.

[18] P. Haupt. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. 2^{nd} Edition, Springer, Berlin, 2002. Traduction de la quatrième édition allemande par G. Juvet et R. Leroy.

[19] H. Inci, T. Kappeler, and P. Topalov. *On the Regularity of the Composition of Diffeomorphisms*, volume 226 of *Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, first edition, Mar. 2013.

[20] C. Jaumann. Geschlossenes system physikalischer und chemischer differentialgesetze. *Sitzber. Akad. Wiss. Wien (lIa)*, 120 :385–530, 1911.

[21] F. Klein. *Le programme d'Erlangen*. Gauthier-Villars éditeur, Paris-Brussels-Montreal, Que., 1974.

[22] H. P. Künzle. Galilei and Lorentz structures on space-time : comparison of the corresponding geometry and physics. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)*, 17 :337–362, 1972.

[23] H. P. Künzle. Covariant Newtonian limit of Lorentz space-times. *General Relativity and Gravitation*, 7(5) :445–457, 1976.

[24] P. Ladevèze. Sur la théorie de la plasticité en grandes déformations (internal report n$^{\text{o}}$ 9 of lmt-cachan). Technical report, 1980.

[25] P. Ladevèze. Sur une théorie des grandes transformations : modélisation et calcul (internal report n$^{\text{o}}$ 116 of lmt-cachan). Technical report, 1991.

[26] P. Ladevèze. *Nonlinear Computational Structural Mechanics : New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation (translated by J. G. Simmonds from the French edition "Mecanique non linéaire des structures", Hermès, Paris 1996*. Springer, Mechanical Engineering Series, 1999.

[27] J. Lubliner. *Plasticity Theory*. New York : Macmillan 1990. (Maxwell Macmillan International Editions), 1990.

[28] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity*. Dover Publications, Inc., New York, 1994. Corrected reprint of the 1983 original.

[29] W. Noll. A new mathematical theory of simple materials. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 48(1) :1–50, jan 1972.

[30] J. G. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of state. *Proc. Roy. Soc. London*, A200 :523–541, 1950.

[31] P. Rougée. The intrinsic lagrangian metric and stress variables. *Finite Inelastic Deformations - Theory and Applications, IUTAM Symposium Hannover/Germany 199*, pages 217–226, 1991.

[32] P. Rougée. A new lagrangian intrinsic approach of continuous media in large deformation. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 10 :15–39, 1991.

[33] P. Rougée. *Mécanique des grandes transformations*, volume 25 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[34] P. Rougée. An intrinsic lagrangian statement of constitutive laws in large strain. *Computers & Structures*, 84(17-18) :1125–1133, June 2006.

[35] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus, Tome 1 - Concepts généraux*. Editions de l'Ecole polytechnique, 2005.

[36] J. C. Simo and K. S. Pister. Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems : computational implications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46(2) :201–215, 1984.

[37] J.-M. Souriau. *Structure des systèmes dynamiques*. Maîtrises de mathématiques. Dunod, Paris, 1970.

[38] J.-M. Souriau. *Les groupes comme Universaux*, pages 302–316. Hermann, Paris, 2005.

[39] C. Stolz. *Milieux continus en transformations finies : hyperélasticité, rupture, élastoplasticité*. Editions de l'Ecole polytechnique, 2009.

[40] C. Truesdell. Hypo-elasticity. *J. Rational Mech. Anal.*, 4 :83–133, 1955.

[41] C. Truesdell and W. Noll. The non-linear field theories of mechanics. In *Handbuch der Physik, Band III/3*, pages 1–602. Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[42] C. C. Wang and C. Truesdell. *Introduction to rational elasticity*. Noordhoff International Publishing, Leyden, 1973. Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids : Mechanics of Continua.

[43] H. Xiao, O. T. Bruhns, and M. A. On objective corotational rates and their defining spin tensors. *Int. J. Solids Structures*, 35(30) :4001–4014, 1998.

[44] S. Zaremba. Sur une forme perfectionnee de la theorie de la relaxation. *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie*, pages 534–614, 1903.

(Boris Kolev) LMT (ENS Paris-Saclay, CNRS, Université Paris-Saclay), F-94235 Cachan Cedex, France

E-mail address: `boris.kolev@math.cnrs.fr`

(Rodrigue Desmorat) LMT (ENS Paris-Saclay, CNRS, Université Paris-Saclay), F-94235 Cachan Cedex, France

E-mail address: `desmorat@lmt.ens-cachan.fr`