SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI

Ana Brico

ARITMETIKOM DO IDEJA ZA UZORKE

DIPLOMSKI RAD

Slavonski Brod, 2018.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET ZA ODGOJNE I OBRAZOVNE ZNANOSTI

Integrirani preddiplomski i diplomski sveučilišni Učiteljski studij

ARITMETIKOM DO IDEJA ZA UZORKE

DIPLOMSKI RAD

Predmet: Elementarna matematika

Mentorica: izv. prof. dr. sc. Ružica Kolar-Šuper

Sumentorica: prof. dr. sc. Zdenka Kolar-Begović

Studentica: Ana Brico

Matični broj: 2717

Modul: A

Slavonski Brod

srpanj 2018.

Matematika je kraljica znanosti, a aritmetika kraljica matematike.

Carl Friedrich Gauss

SAŽETAK

Budući da aritmetički sadržaji čine najveći dio matematičkih sadržaja u razrednoj nastavi te da uspješnost usvajanja temeljnih aritmetičkih pojmova značajno ovisi o načinu podučavanja, u prvome dijelu rada prikazani su različiti pristupi formiranju temeljnih aritmetičkih pojmova (prirodni broj, brojenje, relacije na skupu prirodnih brojeva, zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje). Središnji dio ovoga rad bavi se modularnom aritmetikom koja se definira uvođenjem relacije kongruencije na skupu cijelih brojeva. Modularna aritmetika može se koristiti u kreiranju umjetničkih uzoraka: zvijezde s *m* krakova, (*m*, *n*) – uzorka te uzoraka dobivenih pomoću tablica zbrajanja i množenja modulo *m*. Za potrebe diplomskoga rada provedena je radionica *Aritmetikom do dizajna* u kojoj su sudjelovali studenti 4. godine Fakulteta za odgojne i obrazovne znanosti, dislociranoga Učiteljskoga studija u Slavonskome Brodu te učenici sedmoga razreda OŠ „Ivan Goran Kovačić" iz Slavonskoga Broda. Uzorci kreirani pomoću tablica zbrajanja i množenja modulo 6 pridonijeli su ostvarenju cilja ovoga rada: pokazati da se spojivši znanje o osnovnim računskim radnjama, kongruencijama i izometrijama ravnine mogu kreirati zaista mala umjetnička djela.

Ključne riječi: aritmetika, izometrije, kongruencije, uzorak

SUMMARY

Since the arithmetic contents make the largest part of mathematical contents in class teaching and the success in acquiring basic arithmetic terms depends on the teaching methods significally, the first part of the paper shows different approaches to forming basic arithmetic terms (natural number, counting, relations on a set of natural numbers, addition, subtraction, multiplication and division). The central part of the paper deals with modular arithmetic which defines introducing congruence relation on a set of integers. Modular arithmetic can be used to create artistic patterns: an *m*-pointed star, an (*m*, *n*) residue pattern and patterns created by using addition and multiplication tables for least residues modulo *m*. A workshop *Design ideas through arithmetic* was organized and conducted for the purpose of the thesis. Participants were fourth year students of the Faculty of Education, Slavonski Brod branch and seventh grade students of primary school Ivan Goran Kovačić from Slavonski Brod. Student works – patterns created by using addition and multiplication tables for least residues modulo 6 have contributed to achieving the goal of the paper: to show that by combining knowledge about basic mathematical operations, congruences and plane isometries little pieces of art can be created.

Key words: arithmetic, isometries, conguences, pattern

SADRŽAJ

1. UVOD

Aritmetika – vjerojatno pomalo komplicirana i strana riječ učenicima razredne nastave, ali ono što se krije iza definicije *aritmetike* vrlo im je blisko, imajući na umu da je aritmetika grana matematike koja se bavi brojevima, osnovnim računskim radnjama (zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem i dijeljenjem) te višim računskim radnjama. Uvidom u *Nastavni plan i program za osnovnu školu* vrlo se lako može zaključiti da upravo aritmetički sadržaji čine najveći dio propisanih matematičkih sadržaja u razrednoj nastavi. Upravo zato, u prvome dijelu ovoga rada, razmatran je skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ te su prikazani različiti pristupi formiranju temeljnih aritmetičkih pojmova kod učenika razredne nastave. Pod temeljnim aritmetičkim pojmovima misli se na prirodne brojeve, brojenje, relacije na skupu prirodnih brojeva te osnovne računske radnje s prirodnim brojevima (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje).

Središnji dio ovoga rada posvećen je modularnoj aritmetici, tj. aritmetici modulo prirodni broj m koja se definira uvođenjem relacije kongruencije na skupu cijelih brojeva. Jednu od najznačajnijih relacija u teoriji brojeva, relaciju kongruencije, uveo je i razvio 1801. godine njemački matematičar, *princ matematike*, Carl Friedrich Gauss. Cilj je ovoga dijela pokazati kreativnu stranu matematike, tj. prikazati primjenu modularne aritmetike u kreiranju različitih uzoraka: zvijezde s m krakova, (m, n) – uzorka te uzoraka dobivenih pomoću tablica zbrajanja i množenja modulo m.

U završnome dijelu rada prikazano je nekoliko uzoraka dobivenih pomoću tablica zbrajanja i množenja modulo 6, koji su nastali u okviru radionice *Aritmetikom do dizajna*. Radionica je provedena 22. travnja 2016. godine u okviru Festivala znanosti te 6. svibnja 2016. godine u okviru Dana otvorenih vrata Fakulteta za odgojne i obrazovne znanosti Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. U radionici su sudjelovali učenici sedmoga razreda OŠ „Ivan Goran Kovačić'" iz Slavonskoga Broda te 26 studenata 4. godine Fakulteta za odgojne i obrazovne znanosti, dislociranoga Učiteljskoga studija u Slavonskome Brodu. Navedena me je radionica i potaknula na pisanje diplomskoga rada s ovom tematikom.

2. SKUP PRIRODNIH BROJEVA ℕ

Brojenje je vjerojatno prvo matematičko znanje koje čovjek usvaja. Čovjek iskustvom spoznaje da na nebu sja samo jedno Sunce, da svaki čovjek ima dva oka, da neke životinje imaju dvije, a neke četiri noge itd. Promatranjem bića, pojava i predmeta oko sebe čovjek dolazi do apstraktnih pojmova *jedan, dva, tri, četiri*, … koje s 1, 2, 3, 4, … Brojeve 1, 2, 3, … zovemo prirodnim brojevima. Dakle, prirodni broj element je skupa {1, 2, 3, 4, . . .}, a navedeni skup označava se s ℕ (lat. *naturalis* = prirodan).

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$$

U skupu prirodnih brojeva postoji najmanji broj, a to je broj 1. Ne postoji najveći prirodni broj. Skup prirodnih brojeva prebrojiv je skup. Kardinalni broj skupa ℕ označava se s "alef nula" (prema prvome slovu ℵ "alef" hebrejskoga pisma) i pišemo $k(\mathbb{N}) = \aleph_0$.

Skup prirodnih brojeva aksiomatski je uveo talijanski matematičar Giuseppe Peano 1891. godine. Ti su aksiomi u njegovu čast nazvani Peanovim aksiomima.

2.1. Peanovi aksiomi

U nastavku su navedena četiri Peanova aksioma.

(1) *Postoji funkcija* $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *koju ćemo zvati "biti sljedbenik".*

(2) *Postoji bar jedan element u skupu* $\mathbb{N}$, *označimo ga s 1, takav da je* $s(n) \neq 1$ *za svaki prirodni broj n.*

(3) $s(m) = s(n)$ *povlači* $m = n$, *za svaki m, n iz* $\mathbb{N}$.

(4) *Ako je* $M \subseteq \mathbb{N}$ *i ako vrijedi:*

(a) $1 \in M$

(b) Za svaki prirodni broj n, koji je iz skupa M, slijedi da je i sljedbenik toga broja iz skupa M, tj. $\forall n \in M \Rightarrow s(n) \in M$.

Tada je $M = \mathbb{N}$.

Iza svakoga prirodnoga broja dolazi točno određen prirodni broj koji se zove sljedbenik toga broja. Broj 2 sljedbenik je broja 1, broj 25 sljedbenik je broja 24 itd. Broj 1 nije ničiji sljedbenik. Funkcija *s* po (3) je injekcija što znači da svaka dva različita prirodna broja imaju različite sljedbenike.

Slika je funkcije $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ po (2) skup prirodnih brojeva bez broja 1, tj. $I(s) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ pa se može zaključiti da funkcija s nije surjektivna funkcija. Četvrti aksiom naziva se i aksiom matematičke indukcije.

2.2. Parni i neparni brojevi

Za proučavanje skupa $\mathbb{N}$ važna su njegova dva podskupa – skup svih neparnih prirodnih brojeva $M_1 = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ i skup svih parnih prirodnih brojeva $M_2 = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji prirodni broj $k \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je ili $n = 2k$ ili $n = 2k - 1$. Skupovi neparnih i parnih prirodnih brojeva obično se bilježe na sljedeći način:

$$M_1 = \{n : n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}\} \text{ i } M_2 = \{n : n = 2k, k \in \mathbb{N}\}.$$

Za navedene skupove vrijedi: $M_1 \cup M_2 = \mathbb{N}$ te $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

Parnih i neparnih prirodnih brojeva ima jednako mnogo. Može se reći da je rastav skupa $\mathbb{N}$ na parne i neparne prirodne brojeve, tj. na disjunktne podskupove koji u uniji daju čitav skup, particija skupa $\mathbb{N}$. Svaki je prirodni broj ili paran ili neparan.

2.3. Prosti i složeni brojevi

Ako za prirodne brojeve a i b postoji prirodni broj k takav da vrijedi $a = k \cdot b$, kažemo da je broj a djeljiv brojem b. Ako je broj a djeljiv brojem b, tada je broj b djelitelj broja a, a broj a višekratnik broja b. Svi višekratnici prirodnoga broja n brojevi su: $1 \cdot n = n$, $2 \cdot n = 2n$, … Općenito, svi višekratnici prirodnoga broja n brojevi su oblika $k \cdot n$, gdje je $k \in \mathbb{N}$. Svaki prirodni broj n različit od 1 ima barem dva djelitelja. To su 1 i n. Prirodni broj $n \neq 1$ koji osim 1 i samoga sebe nema drugih djelitelja zove se prost broj ili prim broj. Broj 2 najmanji je prost broj te jedini parni prost broj. Prirodni broj, različit od 1, koji nije prost zove se složen broj. Svaki složeni broj može se jednoznačno zapisati kao umnožak prostih brojeva, tj. rastaviti na proste faktore. Prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

2.4. Računske radnje u skupu $\mathbb{N}$

U skupu prirodnih brojeva definirane su četiri osnovne računske radnje: zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje. Zbroj prirodnih brojeva uvijek je prirodni broj. Umnožak prirodnih brojeva također je prirodni broj. Dakle, skup $\mathbb{N}$ zatvoren je s obzirom na zbrajanje i množenje. Razlika dvaju prirodnih brojeva i količnik dvaju prirodnih brojeva nisu uvijek prirodni brojevi. Primjer. $3 - 5 = -2$, $3 : 2 = 1.5$. Brojevi - 2 i 1.5 nisu prirodni brojevi. Skup prirodnih brojeva nije zatvoren s obzirom na oduzimanje i dijeljenje.

2.4.1. Zbrajanje i množenje prirodnih brojeva

Zbrajanje u skupu $\mathbb{N}$ funkcija je $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ koja svakome uređenome paru prirodnih brojeva (m, n) pridružuje prirodni broj $m + n$ na sljedeći način:

(1) $m + 1 = s(m), \forall m \in \mathbb{N}$

(2) $m + s(n) = s(m + n), \forall m, n \in \mathbb{N}$.

Primjer. Nađimo 2 + 3.

$2 + 3 = 2 + s(2)$	prema definiciji $s(2) = 3$
$= s(2 + 2)$	prema (2)
$= s(2 + s(1))$	prema definiciji $s(1) = 2$
$= s(s(2 + 1))$	prema (2)
$= s(s(s(2)))$	prema (1)
$= s(s(3))$	prema definiciji $s(2) = 3$
$= s(4)$	prema definiciji $s(3) = 4$
$= 5$	prema definiciji $s(4) = 5$

Zbrajanjem se nijedan uređeni par prirodnih brojeva ne preslikava u 1 pa zato funkcija $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ nije surjektivna, tj. $I(+) = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Funkcija $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ nije ni injektivna jer npr. $(1, 2) \neq (2, 1)$, ali $(1, 2) \xrightarrow{+} 3$ i $(2, 1) \xrightarrow{+} 3$.

U skupu prirodnih brojeva ne postoji neutralni element za zbrajanje, tj. ne postoji prirodan broj e za koji vrijedi $e + n = n + e = n, \forall n \in \mathbb{N}$. Ukoliko se skup $\mathbb{N}$ proširi brojem 0 tada se dobiva novi skup $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. U tome skupu postoji neutralni element za zbrajanje, a to je broj 0. Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $n + 0 = 0 + n = n$.

Množenje u skupu $\mathbb{N}$ funkcija je $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koja svakome uređenome paru prirodnih brojeva (m, n) pridružuje prirodni broj $m \cdot n$ na sljedeći način:

(3) $m \cdot 1 = m, \forall m \in \mathbb{N}$

(4) $m \cdot s(n) = m \cdot n + m, \forall m, n \in \mathbb{N}$.

U skupu prirodnih brojeva postoji neutralni element za množenje. To je broj 1.

Primjer. Nađimo $2 \cdot 3$.

$2 \cdot 3 = 2 \cdot s(2)$	prema definiciji s (2) = 3
$= 2 \cdot 2 + 2$	prema (4)
$= (2 \cdot s(1)) + 2$	prema definiciji s (1) = 2
$= (2 \cdot 1 + 2) + 2$	prema (4)
$= (2 + 2) + 2$	prema (3)
$= (2 + s(1)) + 2$	prema definiciji s (1) = 2
$= s(2 + 1) + 2$	prema (2)
$= s(s(2)) + 2$	prema (1)
$= s(3) + 2$	prema definiciji s (2) = 3
$= 4 + 2$	prema definiciji s (3) = 4
$= 4 + s(1)$	prema definiciji s (1) = 2
$= s(4 + 1)$	prema (2)
$= s(s(4))$	prema (1)
$= s(5)$	prema definiciji s (4) = 5
$= 6$	prema definiciji s (5) = 6

Funkcija $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ surjektivna je funkcija jer je $I(\cdot) = \mathbb{N}$, ali nije injektivna jer npr. $(1, 2) \neq (2, 1)$, a $(1, 2) \xrightarrow{\cdot} 2$ i $(2, 1) \xrightarrow{\cdot} 2$.

2.4.2. Svojstva računskih radnji u skupu $\mathbb{N}$

U skupu $\mathbb{N}$ za zbrajanje i množenje vrijede sljedeći zakoni:

- komutativnost zbrajanja: $m + n = n + m, \forall m, n \in \mathbb{N}$
- komutativnost množenja: $m \cdot n = n \cdot m, \forall m, n \in \mathbb{N}$
- asocijativnost zbrajanja: $(m + n) + p = m + (n + p), \forall m, n, p \in \mathbb{N}$
- asocijativnost množenja: $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p), \forall m, n, p \in \mathbb{N}$
- distributivnost množenja prema zbrajanju: $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p, \forall m, n, p \in \mathbb{N}$

2.5. Najznačajnije relacije u skupu $\mathbb{N}$

Najznačajnije su relacije skupa $\mathbb{N}$ relacija "<" (*biti manji*) i relacija " | "(*dijeli*). Tvrdnja da je prirodni broj m manji od prirodnoga broja n, tj. $m < n$ ekvivalentna je tvrdnji da postoji prirodni broj p takav da vrijedi $n = m + p$. Dakle, za prirodne brojeve m i n vrijedi:

$$m < n \Leftrightarrow (\exists\, p \in \mathbb{N}) \text{ takav da je } n = m + p.$$

Primjer. $3 < 5 \Leftrightarrow (\exists\, p \in \mathbb{N})$ takav da je $5 = 3 + p$, $p = 2$.

Tvrdnja da prirodni broj m dijeli prirodni broj n, tj. $m|n$ ekvivalentna je tvrdnji da postoji prirodni broj p takav da vrijedi $n = m \cdot p$. Dakle, za prirodne brojeve m i n vrijedi:

$$m|n \Leftrightarrow (\exists\, p \in \mathbb{N}) \text{ takav da je } n = m \cdot p.$$

Primjer. $3|6 \Leftrightarrow (\exists\, p \in \mathbb{N})$ takav da je $6 = 3 \cdot p$, $p = 2$.

Relacije "≤" (*biti manji ili jednak*), ">" (*biti veći*) i "≥" (*biti veći ili jednak*) uvode se na sljedeći način:

$$m \leq n \quad \Leftrightarrow \quad m < n \quad \vee \quad m = n$$
$$m > n \quad \Leftrightarrow \quad n < m$$
$$m \geq n \quad \Leftrightarrow \quad n \leq m.$$

3. FORMIRANJE TEMELJNIH ARITMETIČKIH POJMOVA

3.1. Formiranje pojma prirodnoga broja

Polaskom u školu djeca najčešće poznaju pojedine brojeve, ali bez razumijevanja veza i odnosa među njima. Rijetko koje dijete dolaskom u školu shvaća da je npr. broj 7 sljedbenik broja 6, a prethodnik broja 8. Pod poznavanjem se brojeva u školskih početnika obično podrazumijeva znanje brojevnih riječi, a pod znanjem brojenja često se podrazumijeva mehaničko izgovaranje brojevnih riječi, niza verbalnih asocijacija bez razumijevanja njihova značenja (riječi *jedan, dva, tri…* usvajaju se kao auditivni, ritmički podražaji). Djeca će prirodne brojeve zaista upoznati tek u početnoj nastavi matematike i to upoznavanjem međusobnih veza i odnosa među njima.

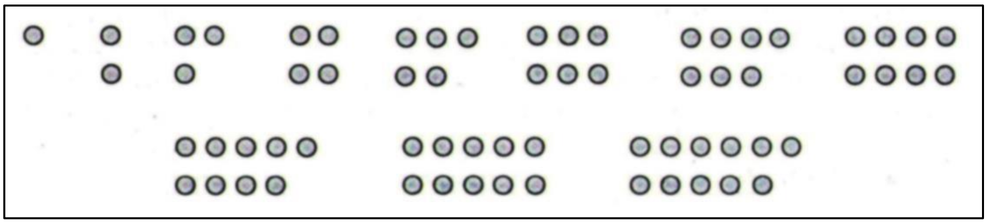
Ciljevi formiranja pojma prirodnoga broja:

– *izgrađivati spoznaju o povezanosti prirodnih brojeva i skupova; prirodne brojeve shvaćati svojstvom brojnosti skupova s jednako mnogo elemenata*
– *upoznati nastajanje niza prirodnih brojeva (idući broj nastaje dodavanjem broja 1 prethodnome broju) i mjesta broja u nizu (neposredni sljedbenik, neposredni prethodnik, broj između dvaju brojeva)*
– *upoznati relacije na skupu prirodnih brojeva (biti manji, biti veći, biti jednak)*
– *upoznati brojenje kao postupak kojim se doznaje broj, odnosno količina elemenata u skupu koji se broji*
– *upoznati značenje i pisanje znakova za brojeve i znakova za relacije <, >, =*
– *upoznati računske radnje s prirodnim brojevima (zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje)*
– *upoznati neka svojstva računskih radnji.* (Markovac, 2001: 122-123)

Različiti pristupi formiranju temeljnih aritmetičkih pojmova temelje se na različitim shvaćanjima izvora spoznaje tih pojmova – vizualna percepcija, operacije sa skupovima ili brojenje. (Markovac, 2001) U nastavku su prikazana tri metodička pristupa formiranju pojma prirodnoga broja: perceptivno-predodžbeni, brojevni i skupovni.

Perceptivno-predodžbeni pristup polazi od shvaćanja percepcija i predodžbi kao glavnih izvora razumijevanja pojma prirodnoga broja. Promatranjem se uspostavlja veza između perceptivne, tj. fizičke strukture promatranih objekata i mentalnih struktura koje se njima pokreću. Predmet su promatranja objekti u prostoru, slike objekata te tzv. brojne slike.

Brojne slike figure su sastavljene najčešće od točaka ili kružića kojima se sadržaj može zahvatiti jednim pogledom, a najprikladnijima smatraju se Bornove brojne slike. (Markovac, 2001)



Slika 1. Bornove brojne slike (Markovac, 2001: 47)

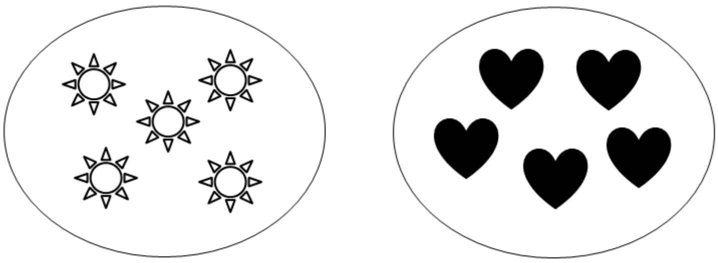
Promatranjem takvih figura pojam prirodnoga broja nastaje iz percepcije krugova raspoređenih u statičke figure. Bitno je obilježje takvoga metodičkoga pristupa što veći broj promatranja s ciljem stjecanja što više percepcija iz kojih će se potom apstrakcijom doći do općega koje se izražava brojevnim znakom, tj. znamenkom. Glavna slabost perceptivno-predodžbenoga pristupa statičnost je brojnih slika. Naime, promatrajući brojne slike čiji su elementi uvijek u istome rasporedu brojnost elemenata poistovjećuje se s njihovim rasporedom. Tako se npr. brojnost slike  poistovjećuje s karakterističnim i fiksiranim rasporedom elemenata što vodi krivoj spoznaji da se broj pet povezuje isključivo uz takvu perceptivnu strukturu. Otežano je razumijevanje činjenice da broj elemenata u skupu ne ovisi o njihovome rasporedu. (Markovac, 2001)

Prema brojevnome pristupu do pojma broja dolazi se brojenjem. Svaki prirodni broj može se izgraditi ako se broj 1 dovoljno puta uzme kao pribrojnik. Da bi se, primjerice, izgradio broj 4, broj 1 treba uzeti 4 puta kao pribrojnik (1 + 1 + 1 + 1 = 4). Brojevni pravac (brojevna crta) jedna je od zornih podloga toga pristupa u nastavi. Budući da se tim pristupom broj ne povezuje s realnošću, odnosno ne uspostavlja se veza između brojeva i realnosti, pojam broja otežano se primjenjuje u realnosti. Iako je matematički potpuno korektan, brojevni pristup nije prikladan za početno usvajanje brojeva. (Markovac, 2001)

Liebeck (1995) navodi da se djetetovo matematičko iskustvo razvija slijedom apstrahiranja: I – *iskustvo* fizičkih predmeta, G – *govorni jezik* koji opisuje to iskustvo, S – *slike* koje prikazuju to iskustvo, Z – pismeni *znakovi* koji generaliziraju to iskustvo. Skupovni pristup polazi od tvrdnje da su brojevi apstrakcije, proizvodi mišljenja te da se s njima ne mogu izvoditi konkretne operacije. To se može i mora činiti s tzv. predstavnicima brojeva, tj. sa skupovima konkretnih predmeta. Pojam prirodnoga broja izgrađuje se radnjama s ekvipotentnim (jednakobrojnim) skupovima apstrahirajući nebitna svojstva (po čemu se skupovi razlikuju – boja, oblik, veličina, raspored elemenata, materijal od kojega su načinjeni i sl.) i generalizirajući bitna svojstva (što je skupovima zajedničko), tj. broj elemenata u skupovima. Na taj način pojam broja izvodi se iz realnosti, a izveden na taj način lako se u realnosti i primjenjuje. Aktivnosti s ekvipotentnim skupovima uključuju tri važna aspekta: materijalni (sastavljanje jednakobrojnih skupova konkretnih predmeta), misaoni (apstrahiranje i generaliziranje) te verbalni (formuliranje sadržaja generalizacije). Kako bi se aktivnosti s ekvipotentnim skupovima mogle provoditi, svaki bi učenik morao raspolagati odgovarajućom količinom didaktičkoga materijala (štapići, kuglice, plodovi, kamenčići, olovke i sl.) iz kojega će formirati skupove s jednako mnogo elemenata. Nakon formiranja ekvipotentnih skupova slijedi metodička interpretacija kojom se ističe sljedeće:

- *dani skupovi imaju jednako mnogo elemenata (utvrđuje se pogledom, brojenjem ili pridruživanjem)*
- *sastavljeni su od različitih elemenata (štapići, krugovi, trokuti, plodovi i sl.)*
- *skupovima s jednako mnogo elemenata pridružuje se isti broj*. (Markovac, 2001: 124)

Skupovni pristup uvažava obilježja psihičkoga razvoja školskih početnika pa ga mnogi smatraju i najprikladnijim za početno usvajanje brojeva.



Slika 2. Ekvipotentni skupovi

3.1.1. Upoznavanje brojenja

Učenici brojenjem trebaju spoznati da posljednja izgovorena brojevna riječ označava broj elemenata u skupu te da se pridružuje skupu, a ne posljednjemu izbrojenome elementu, tj. da se odnosi na ukupnost elemenata u skupu koji se broji. Prilikom brojenja trebaju imati na umu da se svaki element skupa broji samo jedanput te da se svaki element skupa koji se broji mora obuhvatiti brojenjem. S obzirom na složenost i težinu početna nastava matematike razlikuje nekoliko načina brojenja:

- brojenje predmeta pomicanjem (učenicima najlakši način brojenja jer uključuje vizualnu, taktilnu i kinestetičku percepciju predmeta koji se broje)
- brojenje predmeta dodirivanjem (brojenje fizički većih predmeta poput ormara, stolova, učenika i sl.)
- brojenje predmeta pokazivanjem (bez fizičkoga kontakta učenika s predmetima koje broji)
- brojenje predmeta pogledom, bez pokazivanja (zahtjevniji način brojenja jer podrazumijeva samo vizualnu percepciju; pogledom treba brojiti izbliza ili s manjih udaljenosti koje osiguravaju preglednost predmeta koji se broje)
- brojenje predmeta koji se gibaju (npr. vozila u kretanju, ptice u letu i sl.)
- brojenje predmeta i pojava koji slijede jedan iza drugoga (brojenje postaje teže ako je veći vremenski razmak u kojemu se pojave ili predmeti javljaju; mogu se brojiti koraci, pokreti rukom i sl.)
- brojenje u mislima, tj. mentalno brojenje (učenicima najapstraktniji način brojenja jer je lišen svake perceptivne podloge, tj. zasniva se na predodžbama, na zamišljanju prije percipiranih predmeta; mogu se brojiti predmeti koje su učenici vidjeli na izletu, na putu do škole i sl.)
- brojenje od zadanoga broja unaprijed, unazad te između dvaju brojeva (Markovac, 2001)

3.1.2. Upoznavanje relacija na skupu prirodnih brojeva

Skup prirodnih brojeva uređen je skup što znači da za bilo koja dva prirodna broja m i n vrijedi: $m < n$, $m = n$ ili $m > n$. Upoznavanjem odnosa među brojevima učenici se osposobljavaju u određivanju koji je broj veći, a koji manji odnosno jesu li brojevi međusobno jednaki. Osnova razumijevanja odnosa među brojevima poznavanje je odnosa među skupovima. Dakle, da bi se razumjeli i usvojili odnosi među brojevima potrebno je uspoređivati skupove konkretnih predmeta te na osnovi toga apstrahirati i generalizirati odnose među brojevima. Prema tome, upoznavanje odnosa među brojevima odvija se sljedećim redoslijedom:

- uspoređivanje skupova predmeta (pridruživanjem, brojenjem, pogledom)
- uspoređivanje brojeva

– upoznavanje znakova i termina za relacije na skupu prirodnih brojeva (<, >, =). (Markovac, 2001)

Uspoređujući skupove predmeta, npr. 3 olovke i 5 bilježnica, utvrđuje se da skupovi nemaju jednak broj elemenata, jedan ima više, a drugi manje. Taj odnos učenici govorom izražavaju: *Olovaka ima manje, a bilježnica više*. Postupno se prelazi na uspoređivanje brojeva potkrepljujući to još uvijek uspoređivanjem skupova. Promatrajući odnos dvaju skupova, 3 olovke i 5 bilježnica, uočava se da bilježnica ima više, a olovaka manje te se na osnovi toga utvrđuje da je broj 5 veći od broja 3, odnosno broj 3 manji je od broja 5. Iz odnosa dvaju skupova izvodi se spoznaja o odnosu njihovih kardinalnih brojeva. Kada se uz pomoć skupova shvate odnosi među brojevima, treba ih promatrati i na brojevnoj crti. Uočivši na njoj dva broja, npr. 3 i 5, može se tvrditi sljedeće:

– broj 3 manji je od broja 5 jer brojeći najprije dolazimo do broja 3, a zatim do broja 5
– broj 5 veći je od broja 3 jer brojeći do broja 5 dolazimo kasnije nego do broja 3
– broj 3 manji je od broja 5 jer se na brojevnoj crti nalazi ispred broja 5
– broj 5 veći je od broja 3 jer se na brojevnoj crti nalazi iza broja 3.

Kada se učenici osposobe da za dva broja mogu reći koji je veći, a koji manji te zašto je jedan veći, a drugi manji, uvode se znakovi i termini za označavanje odnosa među brojevima. Znakovi su ">", "<", a termini *veći od* i *manji od*. Objašnjenje znakova i termina potkrepljuje se usporedbom dvaju skupova.

Primjer.

2 **3**

2 < 3

Slika 3. Objašnjenje znaka "<" i termina *manji od* usporedbom dvaju skupova

Uočava se da je krugova manje nego zvijezda, odnosno da je broj 2 manji od broja 3 te se zapisuje 2 < 3 i čita: *Broj dva manji je od broja tri*. Zapis 2 < 3 predstavlja *nejednakost* jer se na lijevoj i desnoj strani znaka "<" nalaze različiti brojevi.

Nakon upoznavanja prije navedenih znakova, termina i zapisa, učenici upoznaju znak, termin i izraz za jednakost brojeva. Upoznavanje učenika sa znakom "=" i terminom *jednako je*/*jednak je* također se zasniva na konkretnoj, empirijskoj podlozi kakva je uspoređivanje skupova s jednako mnogo elemenata. (Markovac, 2001)

Primjer.

6 **6**

6 = 6

Slika 4. Objašnjenje znaka ''='' i termina *jednako je/jednak je* usporedbom dvaju skupova

Uočava se da skupovi imaju jednako mnogo elemenata (6 krugova, 6 zvijezda) te se zapisuje 6 = 6. Znak "=" znak je za jednake brojeve i čita se *jednako je*/*jednak je*. Zapis 6 = 6 predstavlja *jednakost* jer se na lijevoj i desnoj strani znaka "=" nalaze isti brojevi.

3.2. Osnovne računske radnje s prirodnim brojevima

Zbrajanje i oduzimanje prve su računske radnje s brojevima koje učenici usvajaju u osnovnoj školi. Budući da su to radnje s pojmovnim objektima, spoznajni proces ostvaruje se u kontinuitetu od konkretnoga (aktivnosti sa skupovima) prema apstraktnome (operacije s brojevima) te prema praktičnoj stvarnosti, tj. primjeni računskih radnji s brojevima u svakodnevnome životu. (Markovac, 2001)

U drugome se razredu osnovne škole učenici upoznaju s množenjem i dijeljenjem. Množenje se učenicima prikazuje kao uzastopno zbrajanje istih pribrojnika, a dijeljenje kao uzastopno oduzimanje istoga broja. Na takav način pridonosi se izgradnji spoznaje o povezanosti računskih radnji, množenja i zbrajanja te dijeljenja i oduzimanja. (Sharma, 1980, prema Posokhova, 2001)

3.2.1. Formiranje pojma zbrajanja prirodnih brojeva

Bit metodičkoga postupka formiranja pojma zbrajanja prirodnih brojeva čine dvije etape – etapa konkretnih aktivnosti te etapa apstraktnih operacija.

Etapa konkretnih aktivnosti podrazumijeva sve učeničke aktivnosti s konkretnim predmetima kao što su didaktički materijal (krugovi, trokuti, kocke i sl.) i drugi predmeti kojima se lako može manipulirati (kamenčići, štapići i sl.). Pojam zbrajanja prirodnih brojeva izvodi se iz realnosti za koju je karakteristična sljedeća situacija: zadana su dva disjunktna skupa A i B i njihovi kardinalni brojevi, a promatramo uniju i njezin kardinalni broj, tj. zbroj kardinalnih brojeva A i B. U etapi konkretnih aktivnosti provode se sljedeće aktivnosti sa skupovima:

- rastavljanje skupova predmeta na podskupove
- združivanje (unija) skupova konkretnih predmeta. (Markovac, 2001)

Svrha je rastavljanja skupova predmeta na podskupove osposobiti učenike za razumijevanje odnosa između cjeline (skupa) i dijelova (podskupova). Skupovi predmeta rastavljaju se na podskupove u dvije inačice: s obzirom na logičke i s obzirom na brojevne odnose. S obzirom na logičke odnose rastavljaju se skupovi voća, životinja, školskoga pribora i sl.

Primjer. Može se zatražiti da učenici skup voća sastavljen od jabuka i krušaka rastave na dva podskupa – podskup jabuka i podskup krušaka. S obzirom na brojevne odnose rastavlja se npr. skup od 7 jabuka na podskupove od 4 i 3 jabuke. Učenike treba poticati da svako rastavljanje na skupove obrazlože i govorom.

Konačna svrha rastavljanja skupova predmeta na podskupove osposobiti je učenike u rastavljanju brojeva pa nakon što su ovladali rastavljanjem skupova učenici počinju rastavljati brojeve na različite načine. (Markovac, 2001)

Primjer. Broj 8 rastavlja se na 1 i 7, 2 i 6, 3 i 5, 4 i 4.

Združivanje (unija) skupova konkretnih predmeta provodi se na sljedeći način:

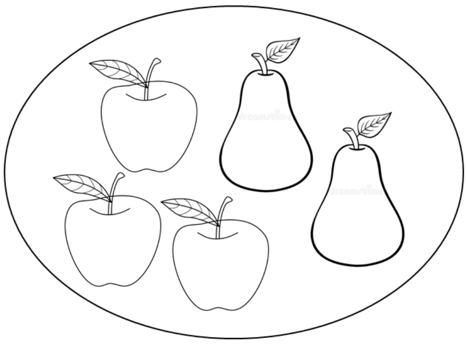
- postavljaju se dva skupa koja nemaju zajedničkih elemenata
- skupovi se udružuju u jedan skup
- pronalazi se broj elemenata u udruženome skupu

– govorom se obrazlaže izvedeno združivanje ističući brojeve elemenata u skupovima (govornim se obrazlaganjem materijalna radnja – združivanje skupova postupno transformira u misaonu radnju – zbrajanje brojeva).

Združivanje skupova treba povezivati uz učenicima poznate situacije, a to se postiže upotrebom jednostavnih tekstualnih zadataka.

Primjer. U jednoj posudi nalaze se 3 jabuke, a u drugoj posudi 2 kruške. Koliko je voća u obje posude?

Jedan oblik združivanja skupova, koji je učenicima posebno zanimljiv, grafičko je združivanje – skupovi koji se združuju prikazuju se slikom ili crtežom predmeta. (Markovac, 2001)



Slika 5. Grafičko združivanje skupova (3 + 2)

Etapa apstraktnih operacija podrazumijeva napuštanje konkretne podloge i prelaženje na mentalno (usmeno) zbrajanje brojeva. Prvi i najlakši način mentalnoga zbrajanja pribrajanje je broja 1 zadanome broju (određivanje uzastopnoga sljedbenika). Izvodi se u dvije inačice: zadanome broju pribraja se 1 ili mu se pribrajaju ostali brojevi (2, 3, 4 …), ali tako da se pribrajaju po 1. Druga inačica zbrajanja pribrajanjem broja 1 zahtijeva rastavljanje brojeva na jedinice, npr. broj 2 na 1 i 1. (Markovac, 2001)

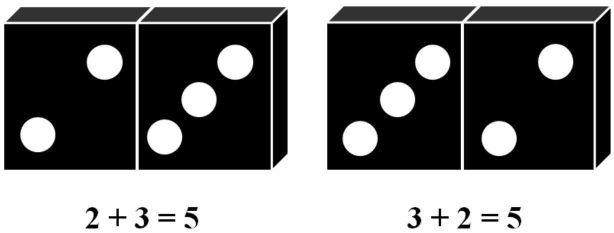
Primjer. 5 i 2 je … 5 i 1 je 6, 6 i 1 je 7 … 5 i 2 je 7
Neki će učenici zbrajati na sljedeći način: 5 i 2 je … 6, 7 … 5 i 2 je 7, tj. brojeći od zadanoga broja za toliko jedinica koliko ima broj koji se pribraja. *Taj način zbrajanja neposredna je priprema za izračunavanje zbroja pa učenike treba poticati da se njime služe.* (Markovac, 2001: 152)

Uvjeti uvođenja zapisa za zbrajanje brojeva:

- mogućnost pronalaženja kardinalnoga broja unije skupova (sposobnost učenika da govorom izrazi odnose brojeva u uniji skupova znak je da je shvatio misaonu operaciju s brojevima prikazanu zapisom oblika $a + b = c$)
- razumijevanje značenja svakoga znaka od kojih je zapis sastavljen (znakovi za brojeve, znak za relaciju "=" te znak za zbrajanje brojeva "+" koji se čita *plus*). (Markovac, 2001)

Uvođenjem zapisa za zbrajanje brojeva učenici trebaju usvojiti i pojmove *prvi* i *drugi pribrojnik* (brojevi koje zbrajamo) te *zbroj* (rezultat zbrajanja).

Proširivanje pojma zbrajanja prirodnih brojeva podrazumijeva upoznavanje komutativnosti i asocijativnosti zbrajanja. Upoznati komutativnost zbrajanja znači doći do spoznaje da zamjena mjesta pribrojnika ne utječe na zbroj, tj. ne mijenja ga. Do istoga kardinalnoga broja unije dolazi se združe li se skupovi od 2 i 3 elementa ili skupovi od 3 i 2 elementa.



Slika 6. Zoran prikaz komutativnosti zbrajanja

Asocijativnost zbrajanja najprirodnije će se upoznati pođe li se od pitanja kako zbrojiti više pribrojnika, npr. 1 + 3 + 5 = ? Učenici trebaju doći do spoznaje da je zbrajanje binarna operacija, tj. da se odnosi na dva broja te da način udruživanja pribrojnika ne mijenja zbroj.

Primjer. U jednakosti 1 + (3 + 5) = 9 i u jednakosti (1 + 3) + 5 = 9 poredak je pribrojnika isti, ali je različit način njihova udruživanja. Način udruživanja pribrojnika ne mijenja zbroj.

3.2.2. Formiranje pojma oduzimanja prirodnih brojeva

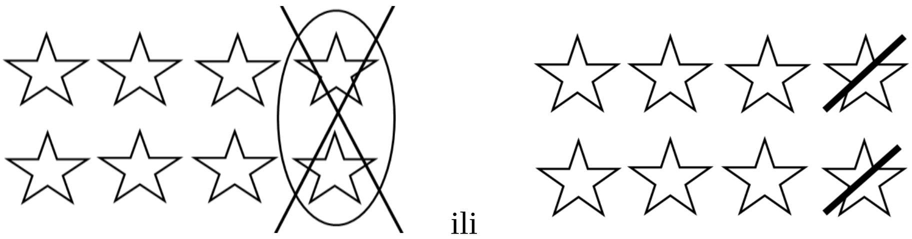
Pojam oduzimanja prirodnih brojeva izvodi se iz realnosti za koju je karakteristična sljedeća situacija: zadana su dva skupa A i B (B ⊆ A) i njihovi kardinalni brojevi, a tražimo

A\B te njezin kardinalni broj, tj. broj koji je razlika kardinalnih brojeva zadanih skupova. Temeljna je aktivnost etape konkretnih aktivnosti oduzimanje promatranjem skupova konkretnih predmeta. (Markovac, 2001)

Oduzimanje promatranjem skupova konkretnih predmeta provodi se na sljedeći način:

- postavlja se (uočava se) skup predmeta
- od toga se skupa predmeta oduzima jedan podskup
- pronalazi se broj elemenata u podskupu koji je preostao
- govorom se obrazlaže izvedeno oduzimanje.

Oduzimanje skupova konkretnih predmeta upotpunjuje se grafičkim prikazom oduzimanja skupova. Zatvorenom crtom odvaja se podskup koji se oduzima, a oduzimanje se označava precrtavanjem jednom ili dvjema crtama. (Markovac, 2001)



Slika 7. Dva načina grafičkoga prikaza oduzimanja brojeva (8 – 2)

Etapa apstraktnih operacija počinje mentalnim (usmenim) oduzimanjem brojeva. Najjednostavniji oblik mentalnoga oduzimanja brojeva oduzimanje je po 1 koje se svodi na određivanje neposrednoga prethodnika i ostvaruje se brojenjem unazad. Izvodi se u dvije inačice: od zadanoga broja oduzima se broj 1 ili se od zadanoga broja oduzimaju ostali brojevi, ali tako da se prethodno rastave na jedinice pa se potom broj 1 uzastopno oduzima. (Markovac, 2001)

Primjer. 5 manje 2 je … 5 manje 1 je 4, 4 manje 1 je 3 … 5 manje 2 je 3

Neki će učenici oduzimati na sljedeći način: 5 manje 2 je … 4, 3 … 5 manje 2 je 3, tj. brojenjem unazad za toliko jedinica koliko ih sadrži broj koji se oduzima.

Uvjeti uvođenja zapisa za oduzimanje brojeva:

- mogućnost pronalaženja kardinalnoga broja diferencije skupova znak je da je učenik shvatio misaonu operaciju s brojevima prikazanu zapisom oblika $a – b = c$

– razumijevanje značenja svakoga znaka od kojih je zapis sastavljen (znakovi za brojeve, znak za relaciju "=" te znak za oduzimanje brojeva "–" koji se čita *minus*). (Markovac, 2001)

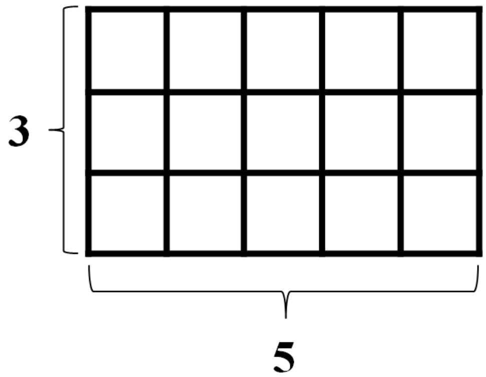
Uvođenjem zapisa za oduzimanje brojeva učenici trebaju usvojiti i pojmove *umanjenik* (broj od kojega oduzimamo), *umanjitelj* (broj koji oduzimamo) te *razlika* (rezultat oduzimanja).

3.2.3. Formiranje pojma množenja prirodnih brojeva

Uobičajena definicija množenja, za učenike u nižim razredima osnovne škole, prikazuje množenje kao skraćeno zbrajanje jednakih pribrojnika. (Sharma, 1980, prema Posokhova, 2001)

Dva su istaknuta pristupa podučavanju množenja – pristup jednakih pribrojnika i pristup Kartezijeva umnoška. Pristup jednakih pribrojnika množenje prikazuje kao uzastopno zbrajanje istoga broja. Tako se npr. $3 \cdot 4$ tumači kao $4 + 4 + 4$ (3 skupine po 4). (Sharma, 1980, prema Posokhova, 2001) Uzastopno zbrajanje istoga broja može se potkrijepiti brojevnom crtom ili združivanjem jednakobrojnih skupova. (Markovac, 2001)

Pristup Kartezijevoga umnoška koncept množenja prikazuje kao dvodimenzionalni koncept u kojemu se faktori prikazuju kao duljine dviju stranica pravokutnika. (Sharma, 1980, prema Posokhova, 2001)



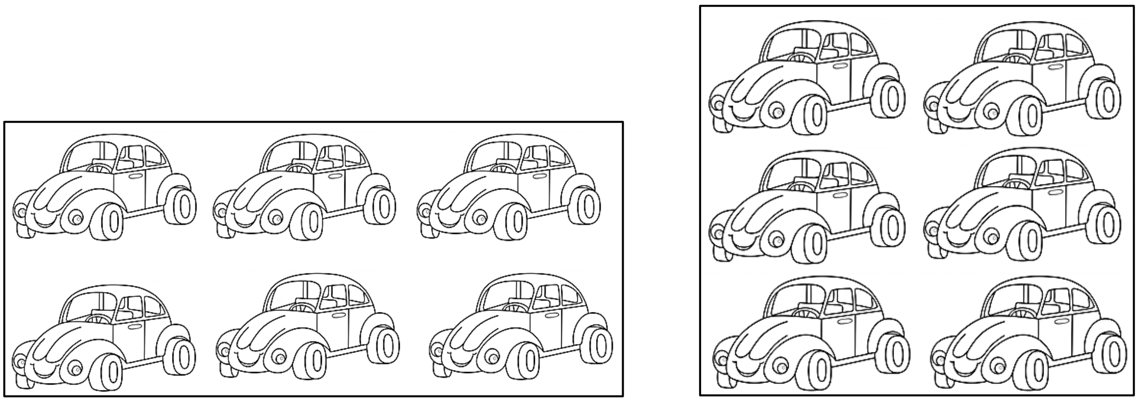
Slika 8. Prikaz množenja prema pristupu Kartezijevoga umnoška (3 · 5)

Shvaćanje činjenice da se zbroj istih brojeva kraće i brže pronalazi množenjem spoznajna je podloga razumijevanju značenja zapisa za množenje brojeva oblika $a \cdot b = c$.

Uvođenjem zapisa za množenje brojeva učenici trebaju usvojiti i pojmove *puta, prvi* i *drugi faktor* (brojevi koje množimo) te *umnožak* (rezultat množenja).

Proširivanje pojma množenja prirodnih brojeva podrazumijeva upoznavanje komutativnosti i asocijativnosti množenja te distributivnosti množenja prema zbrajanju. Upoznati komutativnost množenja znači doći do spoznaje da zamjena mjesta faktora ne utječe na umnožak, tj. ne mijenja ga.

Primjer. $2 \cdot 3 = 6$ (2 skupa po 3 elementa), $3 \cdot 2 = 6$ (3 skupa po 2 elementa)



$2 \cdot 3 = 6$ **$3 \cdot 2 = 6$**

Slika 9. Zoran prikaz komutativnosti množenja

Asocijativnost množenja najprirodnije će se upoznati pođe li se od pitanja kako pomnožiti više faktora, npr. $2 \cdot 4 \cdot 7 = ?$ Učenici trebaju doći do spoznaje da se umnožak ne mijenja pomnože li se faktori različitim redoslijedom.

Primjer. U jednakosti $2 \cdot (4 \cdot 7) = 56$ i u jednakosti $(2 \cdot 4) \cdot 7 = 56$ poredak je faktora isti, ali različit je način njihova udruživanja. Način udruživanja faktora ne mijenja umnožak.

Kada je riječ o upoznavanju učenika s distributivnosti množenja prema zbrajanju treba imati na umu da je množenje prema zbrajanju distributivno slijeva pa za svaka tri prirodna broja a, b i c vrijedi $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, ali i zdesna pa za svaka tri prirodna broja a, b i c vrijedi i $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. Učenici trebaju spoznati da se zbroj množi brojem tako da se svaki pribrojnik pomnoži tim brojem, a dobiveni se umnošci zatim zbroje.

3.2.4. Formiranje pojma dijeljenja prirodnih brojeva

Uobičajena definicija dijeljenja, koja se daje učenicima u nižim razredima osnovne škole, prikazuje dijeljenje kao uzastopno oduzimanje istoga broja. Učenici mogu uzastopno oduzimati usmeno (napamet, bez zapisivanja) te pomoću brojevne crte. Dijeliti se može i pomoću množenja – traži se broj kojim treba pomnožiti djelitelj kako bi se dobio djeljenik.

Glasnović Gracin (2014) navodi dva modela dijeljenja: partitivno i mjerno dijeljenje. Kod partitivnoga dijeljenja poznata je količina koju treba razdijeliti na jednake dijelove, a poznat je i broj dijelova.

Primjer. 15 bombona želimo podijeliti trima djevojčicama tako da svaka djevojčica dobije jednako mnogo bombona. Koliko će bombona dobiti svaka djevojčica?

Kod mjernoga dijeljenja poznata je veličina svakoga dijela (broj elemenata u svakome podskupu), ali ne i broj dijelova na koje treba razdijeliti zadanu veličinu.

Primjer. 15 bombona treba podijeliti djevojčicama tako da svaka djevojčica dobije 5 bombona. Koliko će djevojčica dobiti bombone?

Uvođenjem zapisa za dijeljenje brojeva oblika $a : b = c$ učenici trebaju usvojiti i pojmove *podijeljeno*, *djeljenik* (broj koji dijelimo) i *djelitelj* (broj kojim dijelimo) te *količnik* (rezultat dijeljenja).

3.2.5. Upoznavanje redoslijeda izvođenja računskih radnji

Izvođenje računskih radnji pravilnim redoslijedom podrazumijeva poznavanje sljedećih činjenica:

- zbrajanje i oduzimanje računske su operacije 1. stupnja, a množenje i dijeljenje računske operacije 2. stupnja
- ako su u zadatku sve četiri računske operacije najprije se množi i dijeli, a zatim zbraja i oduzima
- ako su u zadatku računske operacije istoga stupnja, izvode se redom kako su napisane.

4. MODULARNA ARITMETIKA I KONGRUENCIJE

Modularna aritmetika predstavlja aritmetički sustav u kojemu se brojevi *vraćaju u krug* nakon što dostignu određenu vrijednost – modul. Definira se uvođenjem relacije kongruencije na skupu cijelih brojeva.

Jednu od najznačajnijih relacija u teoriji brojeva, relaciju kongruencije, uveo je i razvio 1801. godine njemački matematičar, *princ matematike*, Carl Friedrich Gauss (1777. – 1855.) u djelu *Disquistiones Arithmeticae*.

4.1. Skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$

Ranije u tekstu navedeno je da skup $\mathbb{N}$ nije zatvoren s obzirom na oduzimanje. Razlika dvaju prirodnih brojeva bit će prirodni broj samo ako je umanjenik veći od umanjitelja. Navedena činjenica bila je motiv za proširenje skupa $\mathbb{N}$ i to na način da se za svaki prirodni broj n uvede njemu suprotan broj $-n$ te 0 kao zbroj prirodnoga broja i njemu suprotnoga broja, $n + (-n) = -n + n = 0$. Dobiva se beskonačni skup koji se naziva skup cijelih brojeva i označava sa $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

Skup $\mathbb{Z}$ zatvoren je s obzirom na zbrajanje, oduzimanje i množenje, tj. zbrojimo li, oduzmemo ili pomnožimo dva cijela broja rezultat će biti cijeli broj. Rezultat dijeljenja dvaju cijelih brojeva nije uvijek cijeli broj pa skup $\mathbb{Z}$ nije zatvoren s obzirom na dijeljenje.

4.2. Kongruencija modulo *m*

U ovome dijelu uvest ćemo relaciju *biti kongruentan modulo m*. Najprije navedimo sljedeći značajan teorem.

Teorem o dijeljenju s ostatkom. Za proizvoljan prirodan broj b i cijeli broj a postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je $a = qb + r$, $0 \leq r < b$.
Broj q zove se količnik, a r ostatak.

Definicija. Neka je m prirodan broj te neka su a i b cijeli brojevi. Ako broj m dijeli razliku $a - b$ tada kažemo da je *a kongruentno b modulo m* i pišemo $a \equiv b \pmod{m}$. Definicija se može zapisati simbolima na sljedeći način:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m|(a-b) \quad a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}.$$

Primjer. $10 \equiv 1 \pmod 3$ jer 3 dijeli razliku $10 - 1 = 9$

$30 \equiv 2 \pmod 7$ jer 7 dijeli razliku $30 - 2 = 28$

Iz definicije kongruencije može se zaključiti da ako je $a \equiv b \pmod m$ tada postoji cijeli broj k takav da je $a = k \cdot m + b$.

Primjer. $10 \equiv 1 \pmod 3$, $10 = 3 \cdot 3 + 1$, $k = 3$

$30 \equiv 2 \pmod 7$, $30 = 4 \cdot 7 + 2$, $k = 4$

Koncept modularne aritmetike povezan je s konceptom ostatka pri dijeljenju. Ako je ostatak pri dijeljenju broja a brojem m jednak r, $0 \leq r < m$, piše se $a \bmod m = r$.

Primjer. 15 mod 12 = 3 (15 : 12 = 1 i ostatak 3)

11 mod 5 = 1 (11 : 5 = 2 i ostatak 1)

4.2.1. Relacija ekvivalencije

Definicija. Neka je S neprazan skup, a $S^2 = S \times S$ njegov Kartezijev kvadrat. Svaki podskup $\rho \subseteq S^2$ zove se binarna relacija na skupu S. Za $x, y \in S$ kaže se da su u relaciji ρ te se piše $\rho(x, y)$ ili $x \rho y$ ako je $(x, y) \in \rho$.

Za relaciju ρ na skupu S kažemo da je relacija ekvivalencije ako su ispunjena sljedeća 3 uvjeta:

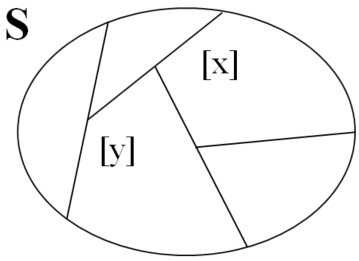
(1) refleksivnost: $x \rho x, \forall x \in S$

(2) simetričnost: $x \rho y \Rightarrow y \rho x$

(3) tranzitivnost: $x \rho y \land y \rho z \Rightarrow x \rho z$

Primjer. Neka je $\mathcal{P}$ skup svih pravaca ravnine. Relacija *biti paralelan* na $\mathcal{P}$ relacija je ekvivalencije na skupu $\mathcal{P}$. Vrijede: refleksivnost ($a \parallel a, \forall a \in \mathcal{P}$), simetričnost ($a \parallel b \Rightarrow b \parallel a, \forall a, b \in \mathcal{P}$) i tranzitivnost ($a \parallel b \land b \parallel c \Rightarrow a \parallel c, \forall a, b, c \in \mathcal{P}$).

Relacija ekvivalencije označava se $\sim$. Ako je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu S tada se S može prikazati kao unija disjunktnih podskupova, tzv. klasa ekvivalencije s obzirom na relaciju $\sim$. U istu klasu ulaze svi međusobno ekvivalentni elementi od S. Klasa ekvivalencije od x, pri čemu je $x \in S$, označava se s $[x] = \{y \in S: y \sim x\}$. U klasi elementa x sigurno je x pa ona nije prazan skup. Za svake dvije klase vrijedi da se ili podudaraju ($[x] = [y]$) ili su disjunktne ($[x] \cap [y] = \emptyset$). Unija svih klasa ekvivalencije čitav je skup S. Relacija ekvivalencije $\sim$ na skupu S definira jednu particiju, tj. rastav skupa S na klase ekvivalencije (disjunktne podskupove). Skup svih klasa ekvivalencije s obzirom na relaciju ekvivalencije $\sim$ na skupu S zove se kvocijentni skup i označava se sa $S|_\sim$.



Slika 10. Particija skupa S na klase ekvivalencije

Relacija *biti kongruentan modulo m* relacija je ekvivalencije na skupu $\mathbb{Z}$, što znači da je navedena relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Dokaz da je relacija *biti kongruentan modulo m*:

– refleksivna:

$a \equiv a \ (\text{mod } m) \Leftrightarrow m|(a - a) \quad \forall a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$

$m|0$

– simetrična:

$a \equiv b \ (\text{mod } m) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tdj. $a - b = k \cdot m \ / \cdot (-1)$

$b - a = -k \cdot m, -k \in \mathbb{Z}$

$m|(b - a) \Leftrightarrow b \equiv a \ (\text{mod } m)$

– tranzitivna:

$a \equiv b \ (\text{mod } m) \wedge b \equiv c \ (\text{mod } m) \Rightarrow m|(a - b) \wedge m|(b - c)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{Z} \text{ tdj. } a - b = k_1 \cdot m \\ \wedge \exists k_2 \in \mathbb{Z} \text{ tdj. } \underline{b - c = k_2 \cdot m} \end{array}\right\} +$$

$a - c = m\,(k_1 + k_2), (k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$

$m|(a - c) \Leftrightarrow a \equiv c \ (\text{mod } m)$

Svaki cijeli broj pri dijeljenju brojem *m* kao ostatak daje jedan od brojeva iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, m - 1\}$. Promatrajući ostatke pri dijeljenju nekoga broja iz skupa $\mathbb{Z}$ brojem *m*, relacija *biti kongruentan modulo m* rastavlja skup $\mathbb{Z}$ na *m* nepraznih disjunktnih podskupova koji u uniji daju čitav skup. Ti se podskupovi zovu *klase kongruencije modulo m*. U klasama se nalaze elementi koji daju isti ostatak pri dijeljenju brojem *m*. Skup svih *klasa kongruencije modulo m* kvocijentni je skup skupa ℤ s obzirom na relaciju *biti kongruentan modulo m* i bilježi se sa $\mathbb{Z}|_{\equiv \text{ (mod } m)}$.

4.2.2. Relacija *biti kongruentan modulo 3*

U nastavku je prikazano uvođenje relacije *biti kongruentan modulo 3* u skupu cijelih brojeva. Razmotrimo najprije ostatke pri dijeljenju brojem 3.

Tablica 1. Relacija biti *kongruentan modulo 3*

a : m **a ∈ ℤ, m ∈ ℕ** **m = 3**	**ostatak pri dijeljenju brojem 3 (b)** **b ∈ ℕ**	**a = k · m + b** **k ∈ ℤ**	**relacija** ***biti kongruentan modulo 3***
– 4 : 3 = – 2	**2**	– 4 = – 2 · 3 + 2	– 4 ≡ 2 (mod 3)
– 3 : 3 = – 1	**0**	– 3 = – 1 · 3 + 0	– 3 ≡ 0 (mod 3)
– 2 : 3 = – 1	**1**	– 2 = – 1 · 3 + 1	– 2 ≡ 1 (mod 3)
– 1 : 3 = – 1	**2**	– 1 = – 1 · 3 + 2	– 1 ≡ 2 (mod 3)
0 : 3 = 0	**0**	0 = 0 · 3 + 0	0 ≡ 0 (mod 3)
1 : 3 = 0	**1**	1 = 0 · 3 + 1	1 ≡ 1 (mod 3)
2 : 3 = 0	**2**	2 = 0 · 3 + 2	2 ≡ 2 (mod 3)
3 : 3 = 1	**0**	3 = 1 · 3 + 0	3 ≡ 0 (mod 3)
4 : 3 = 1	**1**	4 = 1 · 3 + 1	4 ≡ 1 (mod 3)
5 : 3 = 1	**2**	5 = 1 · 3 + 2	5 ≡ 2 (mod 3)
6 : 3 = 2	**0**	6 = 2 · 3 + 0	6 ≡ 0 (mod 3)
7 : 3 = 2	**1**	7 = 2 · 3 + 1	7 ≡ 1 (mod 3)

Iz tablice 1. može se vidjeti da su ostatci pri dijeljenju brojem 3 brojevi 0, 1 i 2. Dakle, relacija *biti kongruentan modulo 3* podijelila je skup ℤ na tri klase kongruencije modulo 3: [0], [1], [2]. U navedenima klasama nalaze se brojevi koji daju isti ostatak pri dijeljenju brojem 3.

$$[0] = \{\ldots -3, 0, 3, 6 \ldots\}$$
$$[1] = \{\ldots -2, 1, 4, 7 \ldots\}$$
$$[2] = \{\ldots -1, 2, 5, 8 \ldots\}$$

Skup svih *klasa kongruencije modulo 3* kvocijentni je skup skupa $\mathbb{Z}$ s obzirom na relaciju *biti kongruentan modulo 3* i bilježi se sa $\mathbb{Z}|_{\equiv \text{ (mod 3)}} = \{[0], [1], [2]\}$.

Za bolje razumijevanje onoga što će biti prikazano u ovome radu u nastavku je objašnjeno zbrajanje i množenje modulo 3.

Tablica 2. Zbrajanje modulo 3

+	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Zbrajanje modulo 3 provodi se na sljedeći način:

0 + 0 = 0, 0 : 3 = 0 i ostatak **0**, 0 + 0 ≡ 0 (mod 3), tj. 0 ≡ 0 (mod 3)

0 + 1 = 1, 1 : 3 = 0 i ostatak **1**, 0 + 1 ≡ 1 (mod 3), tj. 1 ≡ 1 (mod 3)

0 + 2 = 2, 2 : 3 = 0 i ostatak **2**, 0 + 2 ≡ 2 (mod 3), tj. 2 ≡ 2 (mod 3)

1 + 0 = 1, 1 : 3 = 0 i ostatak **1**, 1 + 0 ≡ 1 (mod 3), tj. 1 ≡ 1 (mod 3)

1 + 1 = 2, 2 : 3 = 0 i ostatak **2**, 1 + 1 ≡ 2 (mod 3), tj. 2 ≡ 2 (mod 3)

1 + 2 = 3, 3 : 3 = 1 i ostatak **0**, 1 + 2 ≡ 0 (mod 3), tj. 3 ≡ 0 (mod 3)

2 + 0 = 2, 2 : 3 = 0 i ostatak **2**, 2 + 0 ≡ 2 (mod 3), tj. 2 ≡ 2 (mod 3)

2 + 1 = 3, 3 : 3 = 1 i ostatak **0**, 2 + 1 ≡ 0 (mod 3), tj. 3 ≡ 0 (mod 3)

2 + 2 = 4, 4 : 3 = 1 i ostatak **1**, 2 + 2 ≡ 1 (mod 3), tj. 4 ≡ 1 (mod 3).

Tablica 3. Množenje modulo 3

$\cdot$	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Množenje modulo 3 provodi se na sljedeći način:

$0 \cdot 0 = 0$, $0 : 3 = 0$ i ostatak **0**, $0 \cdot 0 \equiv 0 \pmod 3$, tj. $0 \equiv 0 \pmod 3$

$0 \cdot 1 = 0$, $0 : 3 = 0$ i ostatak **0**, $0 \cdot 1 \equiv 0 \pmod 3$, tj. $0 \equiv 0 \pmod 3$

$0 \cdot 2 = 0$, $0 : 3 = 0$ i ostatak **0**, $0 \cdot 2 \equiv 0 \pmod 3$, tj. $0 \equiv 0 \pmod 3$

$1 \cdot 0 = 0$, $0 : 3 = 0$ i ostatak **0**, $1 \cdot 0 \equiv 0 \pmod 3$, tj. $0 \equiv 0 \pmod 3$

$1 \cdot 1 = 1$, $1 : 3 = 0$ i ostatak **1**, $1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 3$, tj. $1 \equiv 1 \pmod 3$

$1 \cdot 2 = 2$, $2 : 3 = 0$ i ostatak **2**, $1 \cdot 2 \equiv 2 \pmod 3$, tj. $2 \equiv 2 \pmod 3$

$2 \cdot 0 = 0$, $0 : 3 = 0$ i ostatak **0**, $2 \cdot 0 \equiv 0 \pmod 3$, tj. $0 \equiv 0 \pmod 3$

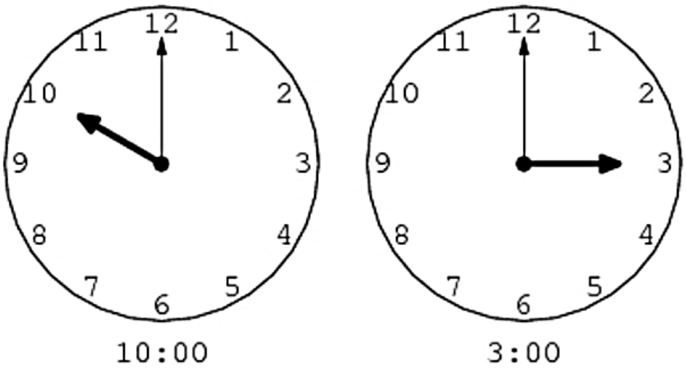
$2 \cdot 1 = 2$, $2 : 3 = 0$ i ostatak **2**, $2 \cdot 1 \equiv 2 \pmod 3$, tj. $2 \equiv 2 \pmod 3$

$2 \cdot 2 = 4$, $4 : 3 = 1$ i ostatak **1**, $2 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 3$, tj. $4 \equiv 1 \pmod 3$.

4.3. Kongruencije u svakodnevnome životu

Gotovo svakodnevno koristimo kongruencije, premda često nismo svjesni toga. Kongruenciju modulo 12 koristimo pri mjerenju vremena (ure s kazaljkama) dijeleći dan na dva perioda od 12 sati, a kongruenciju modulo 7 pri navođenju dana u tjednu.

Primjer. Sedam je dana u tjednu: ponedjeljak, utorak, srijeda, četvrtak, petak, subota i nedjelja. Pridružimo ponedjeljku broj 1, utorku 2, srijedi 3, četvrtku 4, petku 5, suboti 6 i nedjelji 0. Ako je danas ponedjeljak za tjedan dana (za 7 dana) opet će biti ponedjeljak što bi značilo da je $1 + 7 \equiv 1 \pmod 7$ jer 7 dijeli razliku $8 - 1 = 7$. Ako je danas utorak za 14 će dana opet biti utorak, tj. $2 + 14 \equiv 2 \pmod 7$ jer 7 dijeli razliku $16 - 2 = 14$.



Slika 11. Kongruencija modulo 12 pri mjerenju vremena (preuzeto 15. 4. 2018. s http://mathworld.wolfram.com/Congruence.html)

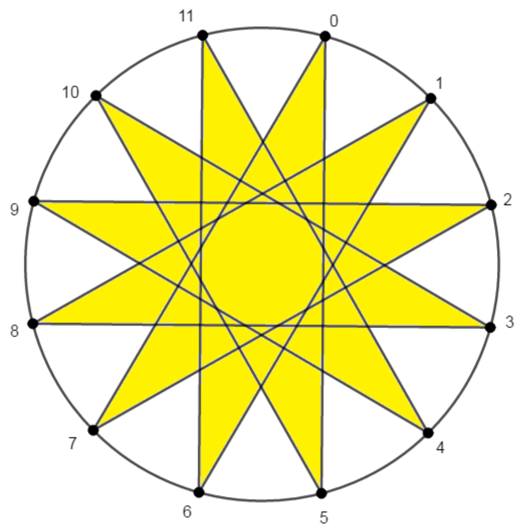
Primjer. Ako je na uri s kazaljkama točno 10 sati za 5 će sati biti točno 3 sata (Slika 11.) što znači da je $10 + 5 \equiv 3 \pmod{12}$ jer 12 dijeli razliku $15 - 3 = 12$. Ako je na uri s kazaljkama točno 12 sati (broju 12 pridružimo broj 0) za 13 će sati biti točno 1 sat što znači da je $0 + 13 \equiv 1 \pmod{12}$ jer 12 dijeli razliku $13 - 1 = 12$.

5. ARITMETIKOM DO IDEJA ZA UZORKE

Modularna aritmetika može se koristiti u kreiranju različitih umjetničkih uzoraka – šara. U nastavku je prikazana primjena modularne aritmetike u kreiranju zvijezde s m krakova, (m, n) – uzorka te uzorka dobivena pomoću tablica zbrajanja i množenja modulo m.

5.1. Zvijezda s *m* krakova

Upute za kreiranje zvijezde s m krakova: na kružnici proizvoljnoga polumjera odabere se m jednako udaljenih točaka (kao za konstrukciju pravilnoga mnogokuta). Točke se označe s 0, 1, 2, …, $m - 1$ (ostatci modulo m). Odabere se ostatak i mod m takav da je $(i, m) = 1$, odnosno da su i i m relativno prosti brojevi. [1] Slijedi spajanje točaka sljedećim redoslijedom: točku 0 spojimo s točkom i pa tu točku s točkom $2i$ mod m pa nju s točkom $3i$ mod m i tako dalje sve dok točku $(m - 1)i$ mod m ne spojimo s točkom mi mod m što je ujedno i početna točka 0.



Slika 12. Zvijezda s 12 krakova

Primjer. Zvijezda s 12 krakova

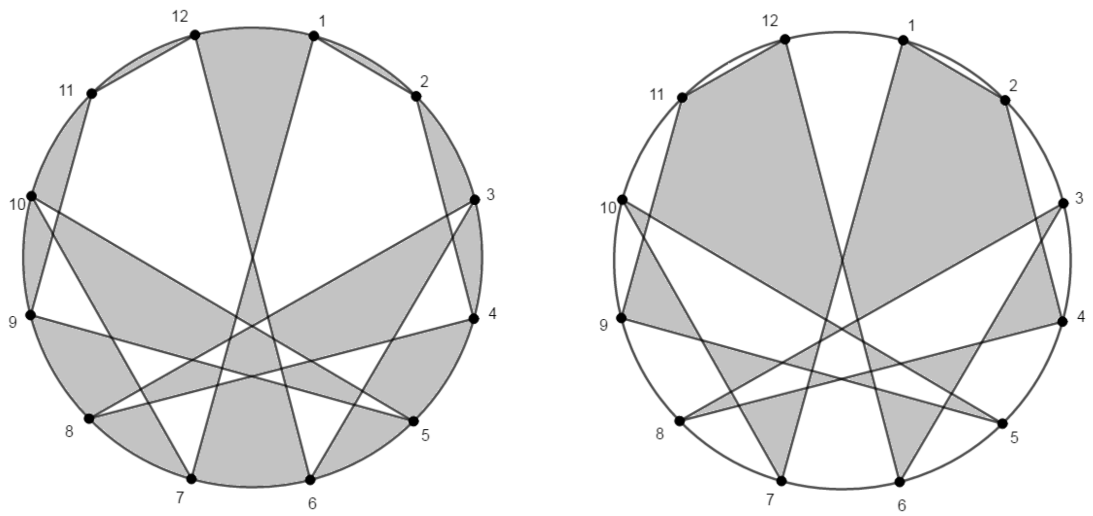
Možemo uzeti $i = 5$ jer je $(5, 12) = 1$. Točke spajamo sljedećim redoslijedom: točku 0 s točkom 5, točku 5 s točkom $2 \cdot 5$ mod 12 (10), točku 10 s točkom $3 \cdot 5$ mod 12 (3), točku 3 s točkom $4 \cdot 5$ mod 12 (8), točku 8 s točkom $5 \cdot 5$ mod 12 (1), točku 1 s točkom $6 \cdot 5$ mod 12 (6), točku 6 s točkom $7 \cdot 5$ mod 12 (11), točku 11 s točkom $8 \cdot 5$ mod 12 (4), točku 4 s točkom

[1] Brojevi a i b relativno su prosti ako je najveći zajednički djelitelj brojeva a i b jednak 1.

9 · 5 mod 12 (9), točku 9 s točkom 10 · 5 mod 12 (2), točku 2 s točkom 11 · 5 mod 12 (7) i točku 7 s točkom 12 · 5 mod 12 (0). Za kreiranje zvijezde s 12 krakova (Slika 12.) korišten je program GeoGebra. Uočimo da bi se ista figura dobila i za $i = 7$.

5.2. (m, n) – uzorak

Kako bismo kreirali (m, n) – uzorak, gdje je $1 \leq n \leq m$ i $(m, n) = 1$, na kružnici proizvoljnoga polumjera potrebno je odabrati $m - 1$ jednako udaljenih točaka te ih označiti s 1, 2, …, $m - 1$. Slijedi spajanje svake točke x s točkom nx mod m. Na takav način unutar kružnice dobit će se područje podijeljeno na više manjih područja različitih oblika i dimenzija.



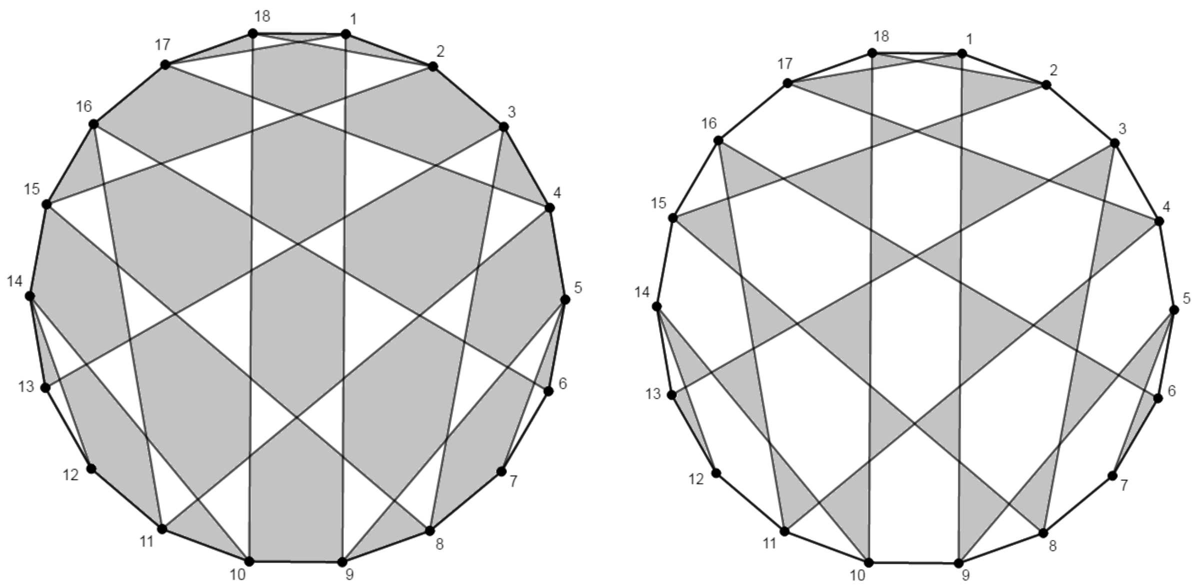
Slika 13. (13, 7) – uzorak

Primjer. (13, 7) – uzorak

Za kreiranje (13, 7) – uzorka na kružnici proizvoljnoga polumjera odaberemo 12 jednako udaljenih točaka i označimo ih s 1, 2, …, 12. Svaki od tih brojeva pomnožimo sa 7 i odredimo ostatak pri dijeljenju dobivenoga umnoška brojem 13. (Tablica 4.) Spajanjem točaka 1 i 7, 2 i 1, 3 i 8, …, 11 i 12 te 12 i 6 dobivamo (13, 7) – uzorak. (Slika 13.) Uzorak je kreiran u GeoGebri.

Tablica 4. Točke spajanja za kreiranje (13, 7) – uzorka

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
n · x = 7 · x	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
7 · x mod 13	**7**	**1**	**8**	**2**	**9**	**3**	**10**	**4**	**11**	**5**	**12**	**6**



Slika 14. (19, 17) – uzorak

Primjer. (19, 17) – uzorak

Za kreiranje (19, 17) – uzorka na kružnici proizvoljnoga polumjera odaberemo 18 jednako udaljenih točaka i označimo ih s 1, 2, …, 18. Svaki od tih brojeva pomnožimo sa 17 i odredimo ostatak pri dijeljenju dobivenoga umnoška brojem 19. (Tablica 5.) Spajanjem točaka 1 i 17, 2 i 15, 3 i 13, …, 17 i 4 te 18 i 2 dobivamo (19, 17) – uzorak. (Slika 14.) Uzorak je kreiran u GeoGebri.

Tablica 5. Točke spajanja za kreiranje (19, 17) – uzorka

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
n · x = 17 · x	17	34	51	68	85	102	119	136	153
17 · x mod 19	**17**	**15**	**13**	**11**	**9**	**7**	**5**	**3**	**1**

x	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
n · x = 17 · x	170	187	204	221	238	255	272	289	306
17 · x mod 19	**17**	**16**	**14**	**12**	**10**	**8**	**6**	**4**	**2**

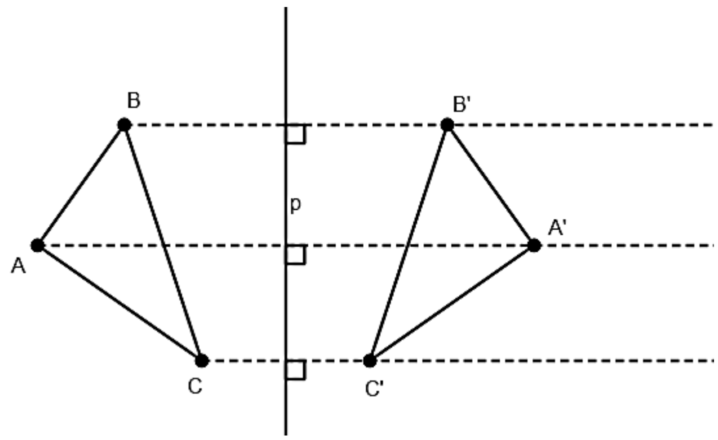
Za bolje razumijevanje kreiranja uzoraka pomoću tablica zbrajanja i množenja modulo *m* u nastavku su objašnjene izometrije ravnine koje će se također primijeniti u kreiranju navedenih uzoraka.

5.3. Izometrije ravnine

Definicija. *Izometrija (grč. izos* = jednak, *metron* = mjera*) ravnine M preslikavanje je $f\colon M \to M$ sa svojstvom da je $d(A, B) = d(f(A), f(B))$ za sve točke $A, B \in M$.*
Svaka izometrija ravnine preslikava pravce u pravce, dužine u dužine, kružnice u kružnice. Izometrije čuvaju udaljenost te ih vežemo uz pojam sukladnosti.

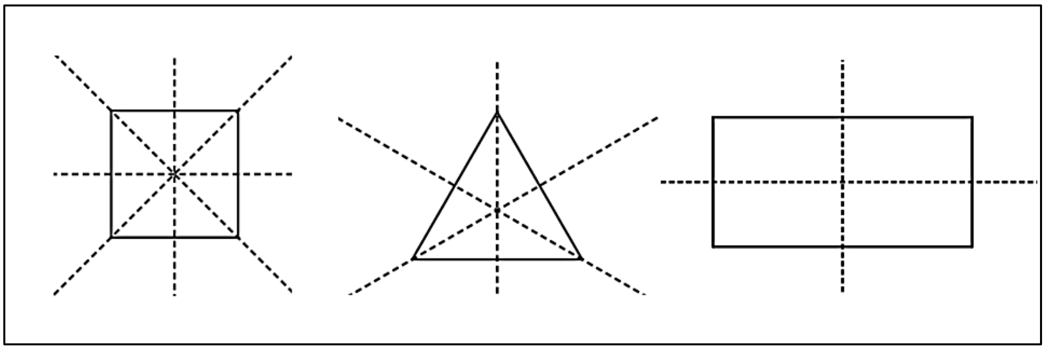
5.3.1. Osna simetrija

Definicija. *Osna simetrija $s_p\colon M \to M$ s osi p izometrija je ravnine M kod koje su sve točke osi p, i samo one, fiksne.*



Slika 15. Osnosimetrična slika △ABC s obzirom na pravac p

Za neki skup točaka ravnine kažemo da je osnosimetričan ako postoji osna simetrija pri kojoj se taj skup točaka preslikava na sama sebe. Tako su naprimjer osnosimetrične figure: jednakostraničan trokut (3 osi simetrije – 3 pravca na kojima leže njegove visine), jednakokračan trokut (1 os simetrije – pravac na kojemu leži visina na osnovicu), kvadrat (4 osi simetrije – 2 pravca na kojemu leže dijagonale te 2 pravca koja prolaze polovištima nasuprotnih stranica), pravokutnik (2 osi simetrije – 2 pravca koja prolaze polovištima nasuprotnih stranica), krug (beskonačno mnogo osi simetrija – pravci koji prolaze središtem kruga).

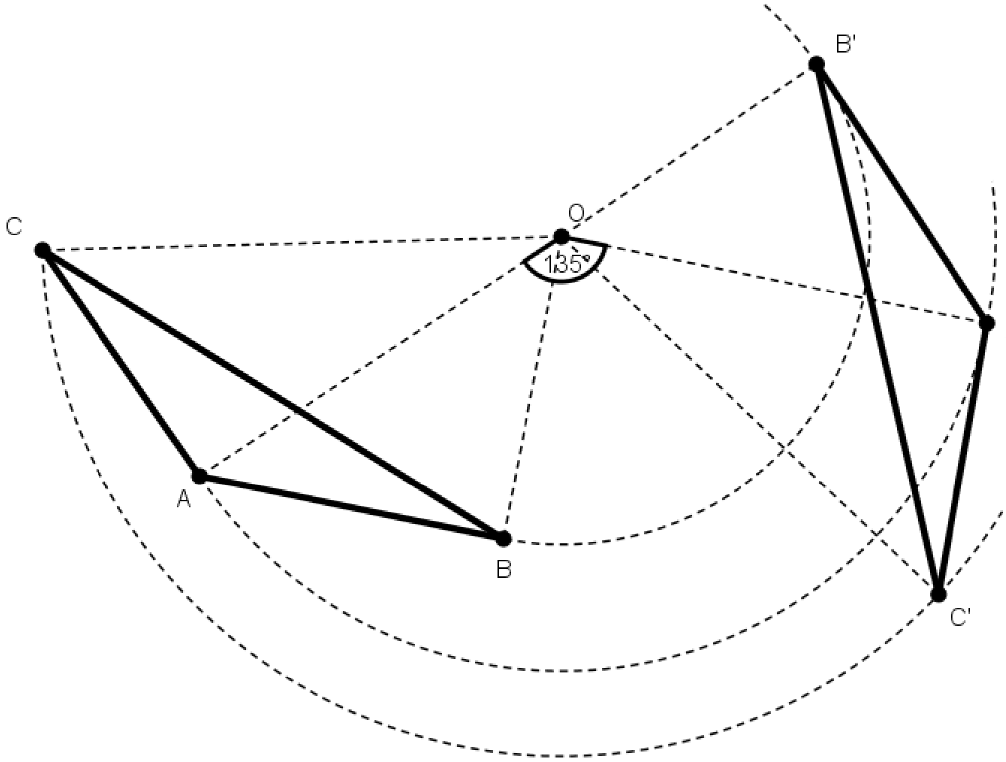


Slika 16. Osnosimetrični likovi i njihove osi simetrije

5.3.2. Rotacija

Definicija. *Rotacija s centrom O izometrija je ravnine M,* r_O*: M → M, čija je jedina fiksna točka O ili je identiteta* i_M*.*

Neka je zadana fiksna točka O u ravnini M te neka je dan orijentirani kut α. Rotacijom ravnine oko točke O za kut α svakoj se točki T pridružuje točka T' tako da je ∠ TOT' = α, |OT| = |OT'|. Rotaciju ravnine M zadanu centrom rotacije O i kutom rotacije α označavamo r_O^{α}.



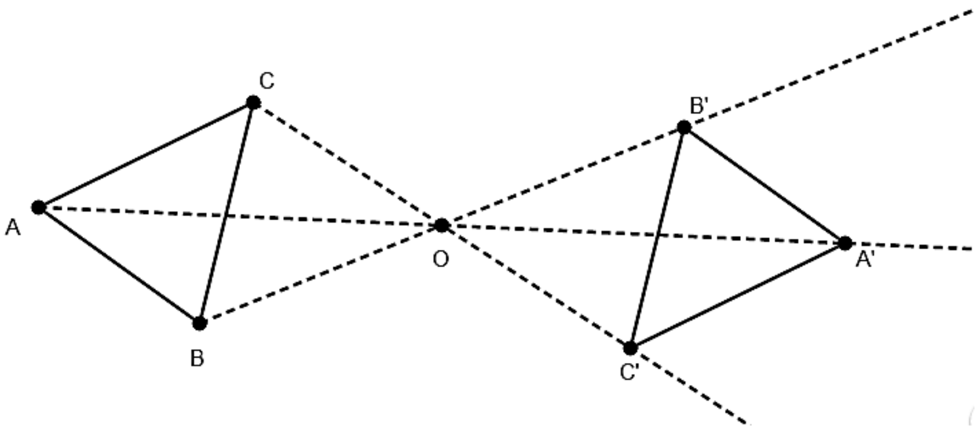
Slika 17. Rotacija △ABC oko točke O za 135°

Postoje likovi koji se rotacijom oko neke svoje točke mogu preslikati na sebe sama, npr. kvadrat i jednakostraničan trokut. Ako je S sjecište dijagonala kvadrata sljedeće rotacije preslikat će kvadrat u taj isti kvadrat: $r_S^{90°}$, $r_S^{180°}$, $r_S^{270°}$ i $r_S^{360°}$. Ako je T težište jednakostraničnoga trokuta sljedeće rotacije preslikat će jednakostraničan trokut u taj isti trokut: $r_T^{120°}$, $r_T^{240°}$ i $r_T^{360°}$.

5.3.3. Centralna simetrija

Definicija. *Neka je O točka ravnine M. Centralna simetrija c_O: $M \rightarrow M$ bijekcija je definirana na sljedeći način: ako je $T \in M$, a $T' = c_O(T)$ onda je O polovište dužine $\overline{TT'}$ ili vektorski $\overrightarrow{OT'} = -\overrightarrow{OT}$.*

Centralna simetrija poseban je slučaj rotacije oko točke O za kut od 180° ($c_O = r_O^{180°}$). Točka O fiksna je točka, a fiksni su i svi pravci koji prolaze točkom O ($O \in p \Rightarrow c_O(p) = p$).

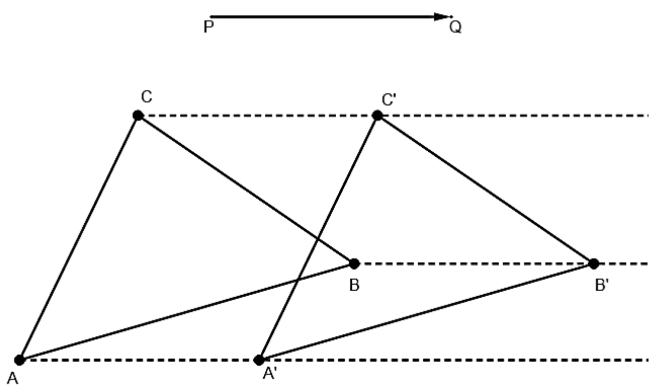


Slika 18. Centralnosimetrična slika △ABC

5.3.4. Translacija

Definicija. *Neka je $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ neki čvrsti vektor u ravnini M. Translacija $t_{\vec{a}}$ ravnine M za vektor $\vec{a}$ preslikavanje je $t_{\vec{a}}$: $M \rightarrow M$ koje točki $T \in M$ pridružuje točku $T' = t_{\vec{a}}(T)$ iz M tako da je $\overrightarrow{TT'} = \vec{a}$.*

Svi pravci paralelni s vektorom fiksni su pravci. Fiksnih točaka nema.



Slika 19. Translacija $\triangle ABC$ za vektor $\overrightarrow{PQ}$

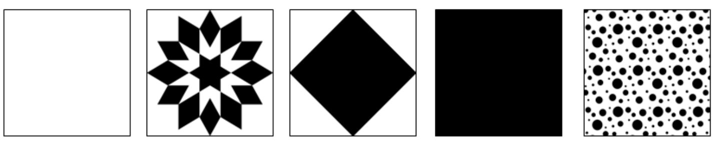
5.4. Uzorak dobiven pomoću tablica zbrajanja i množenja modulo *m*

Za kreiranje uzorka pomoću tablice zbrajanja modulo *m* potrebno je prvo popuniti tablicu zbrajanja modulo *m*. Neka je *m* = 5.

Tablica 6. Zbrajanje modulo 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

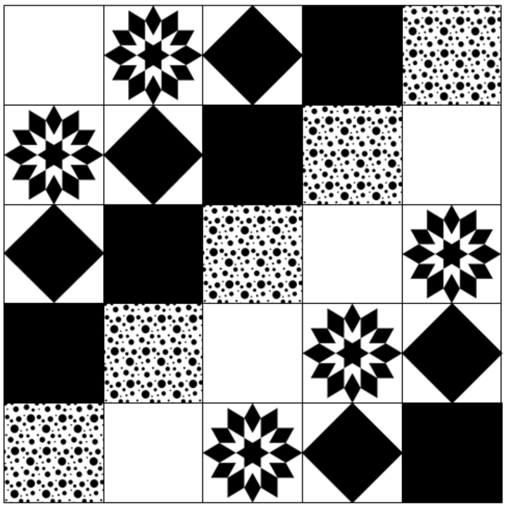
Potom odaberemo 5 uzoraka koji će predstavljati brojeve koji se javljaju u tablici. Naprimjer kao na slici 20.



0 1 2 3 4

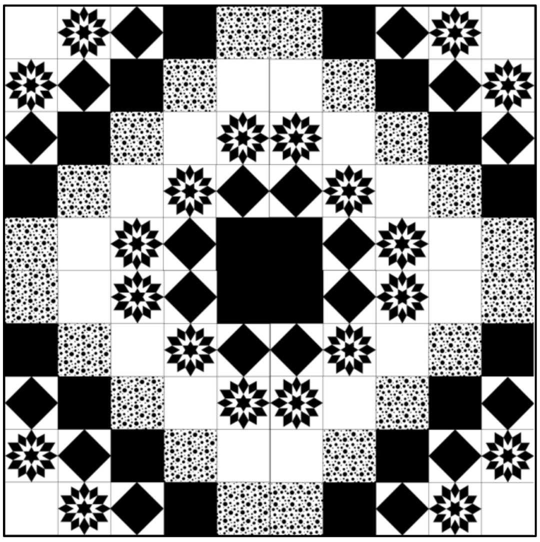
Slika 20. Uzorci kao predstavnici brojeva

Zamijenimo li svaki broj u tablici (bijeli dio tablice – zbrojevi modulo 5) odgovarajućim uzorkom sa slike 20. dobit ćemo osnovni uzorak kao na slici 21.

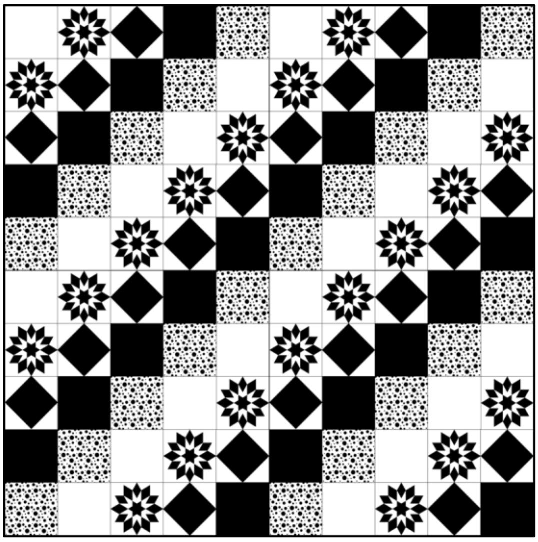


Slika 21. Osnovni uzorak

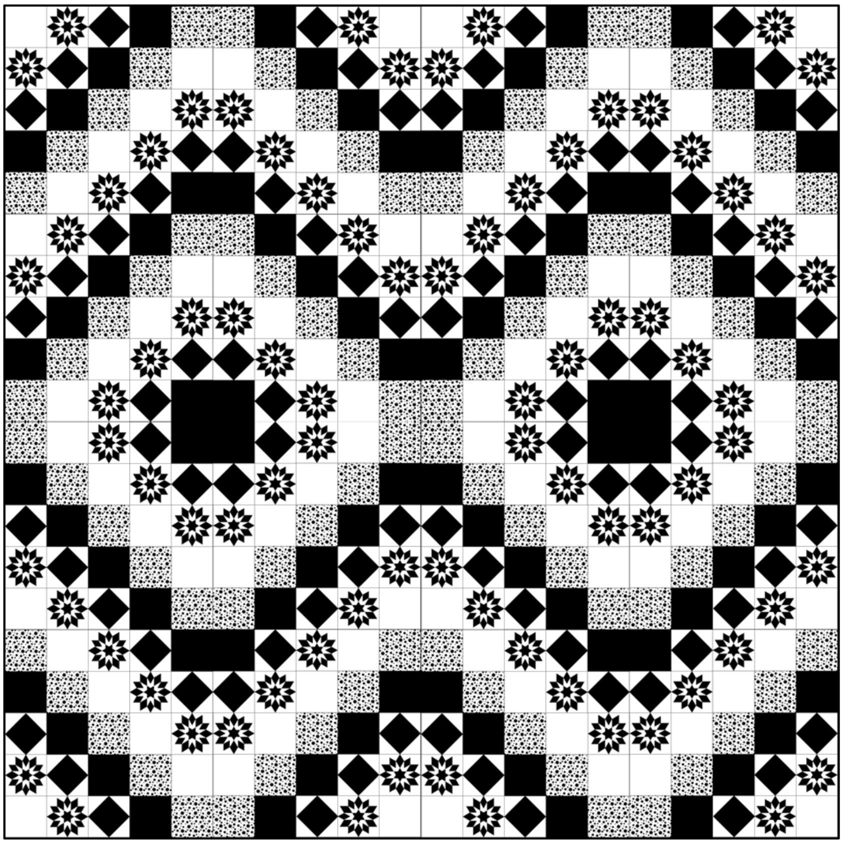
Osnovni uzorak polazište je za kreiranje novih uzoraka. Nekoliko osnovnih uzoraka moguće je spojiti na različite načine (izvršiti rotaciju, translaciju, osnu simetriju) te tako dobiti nove uzorke.



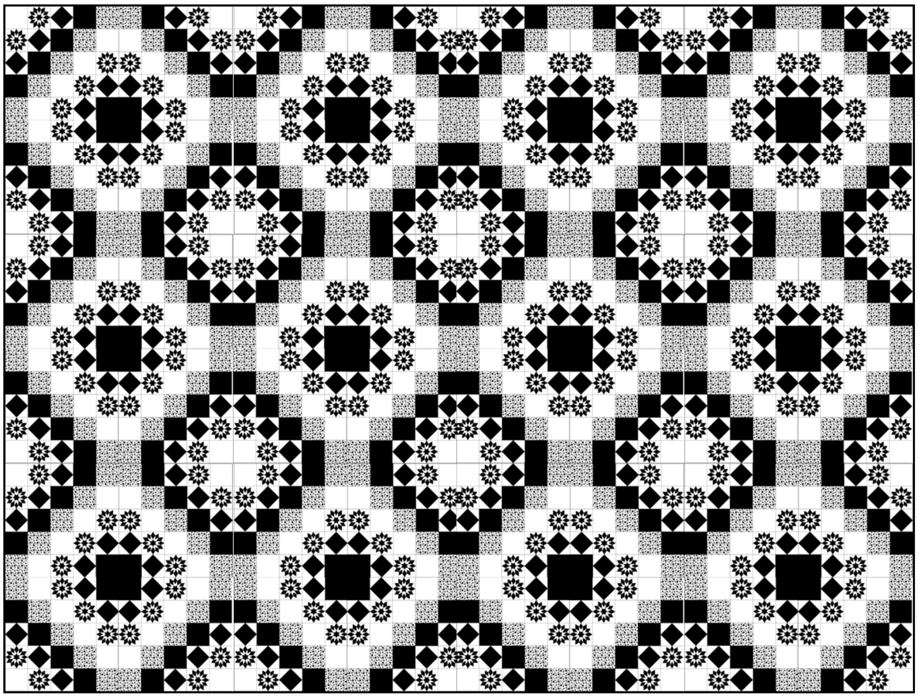
Slika 22. Osna simetrija/rotacija osnovnoga uzorka



Slika 23. Translacija osnovnoga uzorka



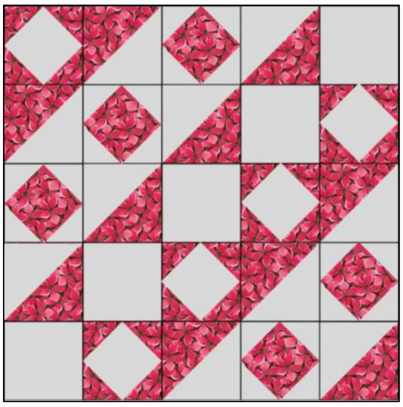
Slika 24. Translacija i osna simetrija/rotacija osnovnoga uzorka



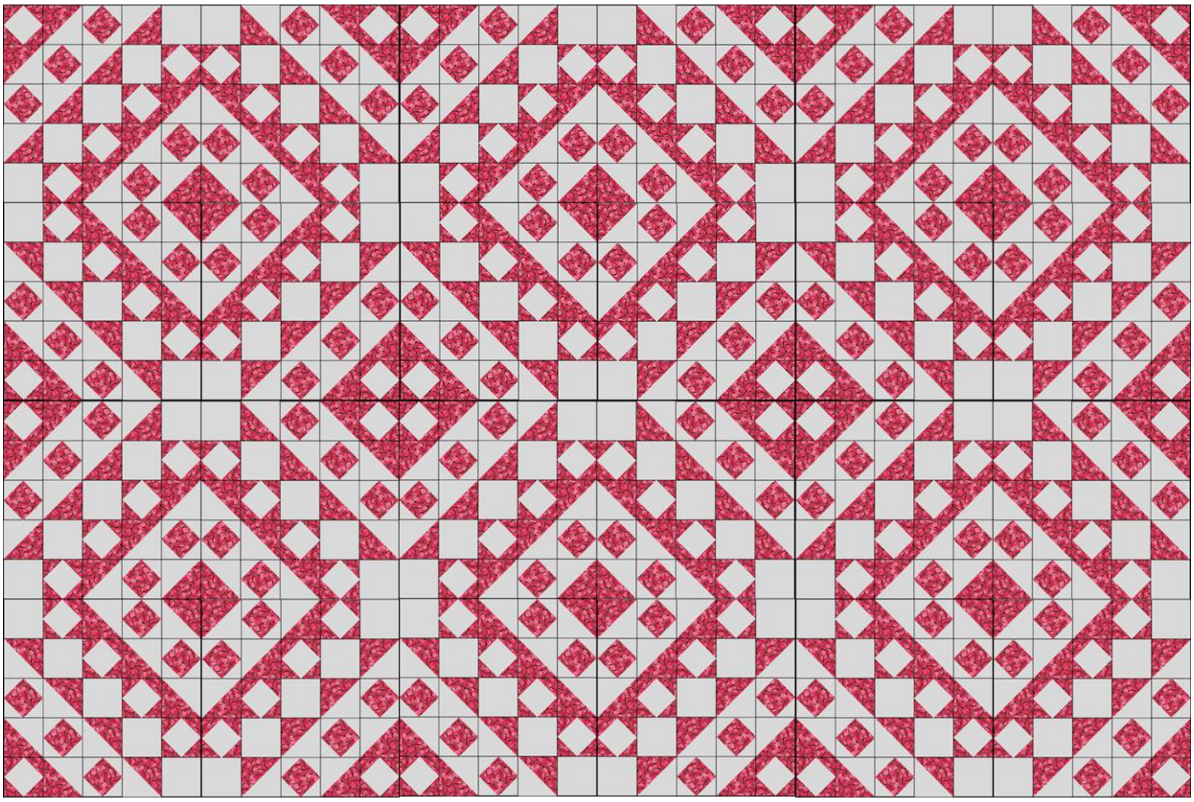
Slika 25. Translacija i osna simetrija/rotacija osnovnoga uzorka

Na isti način pomoću tablice zbrajanja modulo 5 i predstavnika brojeva na slici 26. kreiran je osnovni uzorak na slici 27., koji je poslužio kao polazište za kreiranje novoga uzorka prikazanoga na slici 28.

Slika 26. Uzorci kao predstavnici brojeva



Slika 27. Osnovni uzorak

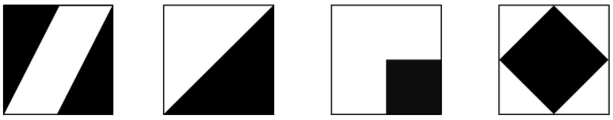


Slika 28. Osna simetrija/rotacija i translacija osnovnoga uzorka

U prethodnim primjerima za kreiranje osnovnoga uzorka korištena je mreža kvadratnoga oblika u kojoj su sva polja također kvadratnoga oblika. Međutim, mogu se koristiti mreže različitih dimenzija i oblika. Naprimjer, kvadrate je moguće zamijeniti pravokutnicima različitih dimenzija. Pokažimo to na sljedećemu primjeru (uzorak dobiven pomoću tablice zbrajanja modulo 4).

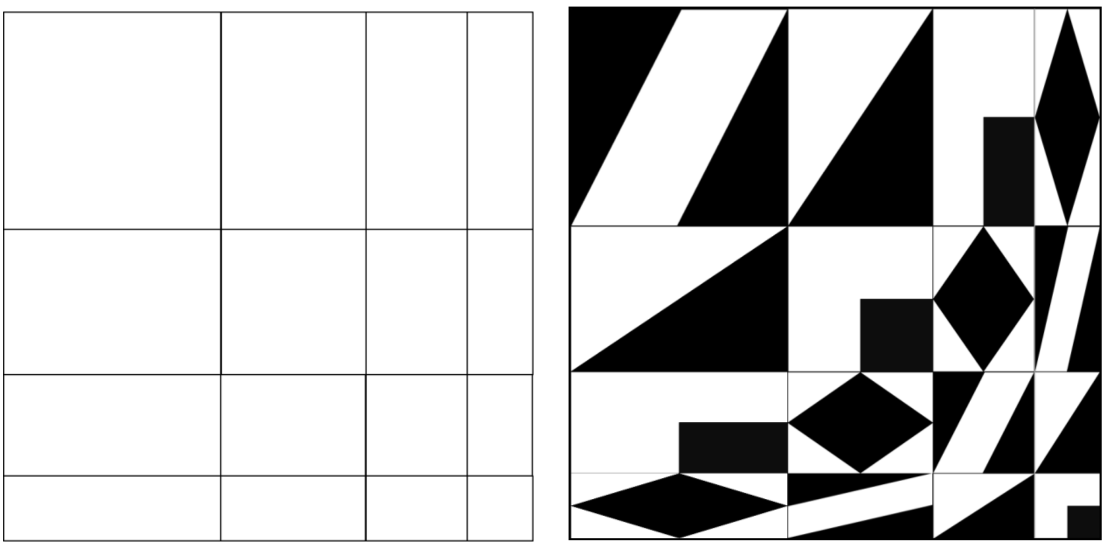
Tablica 7. Zbrajanje modulo 4

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

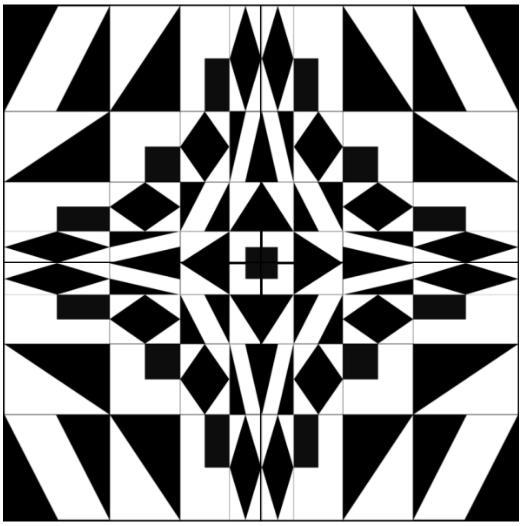


0 1 2 3

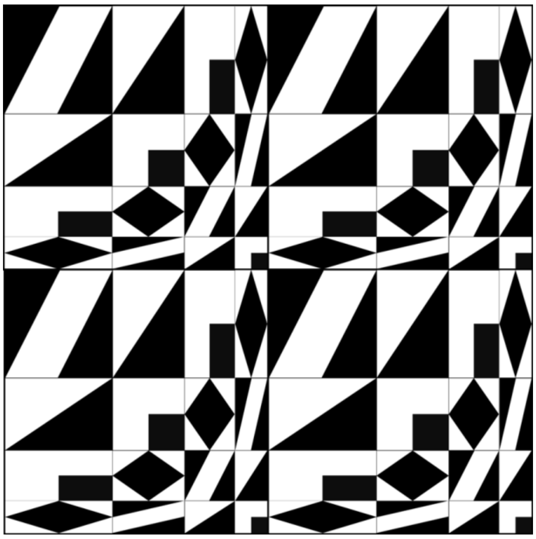
Slika 29. Uzorci kao predstavnici brojeva



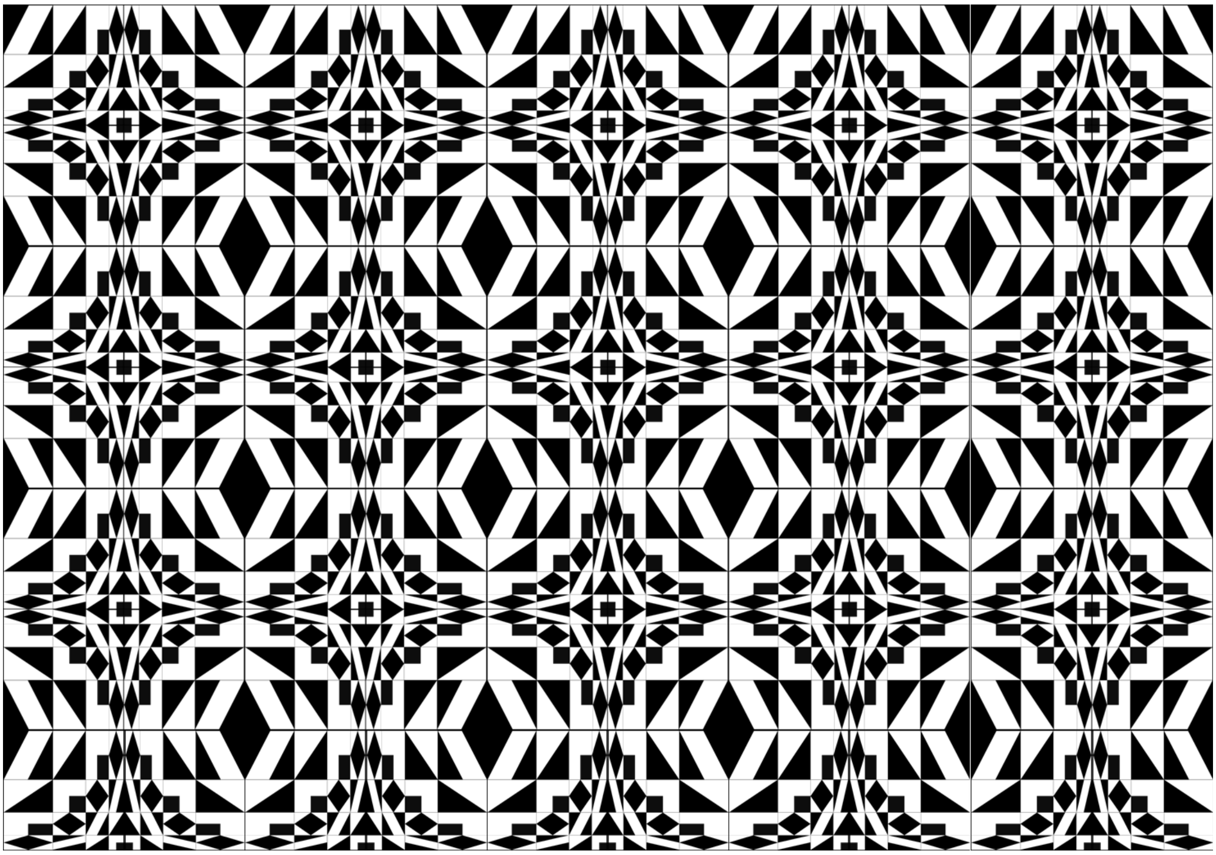
Slika 30. Mreža i dobiveni osnovni uzorak



Slika 31. Osna simetrija/rotacija osnovnoga uzorka



Slika 32. Translacija osnovnoga uzorka



Slika 33. Osna simetrija/rotacija i translacija osnovnoga uzorka

Na isti se način u kreiranju uzoraka može koristiti tablica množenja modulo m. Neka je $m = 5$. Tablicu množenje modulo m moguće je popuniti i bez uvrštavanja nule.

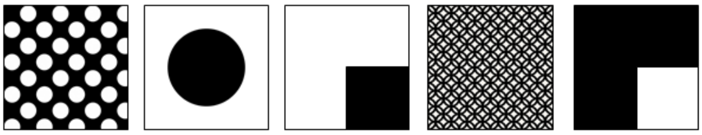
Tablica 8. Množenje modulo 5

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Tablica 9. Množenje modulo 5 (bez 0)

·	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

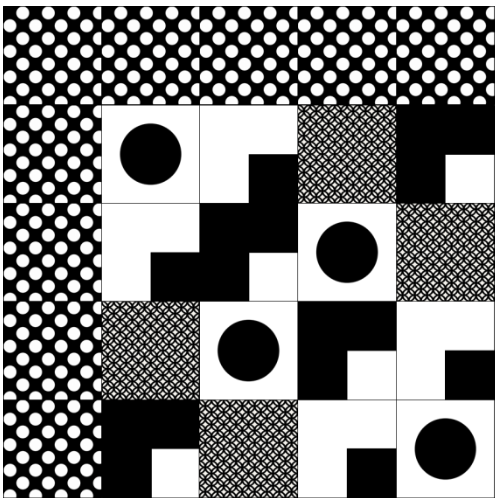
Potom odaberemo 5 uzoraka koji će predstavljati brojeve koji se javljaju u tablici. Naprimjer kao na slici 34.



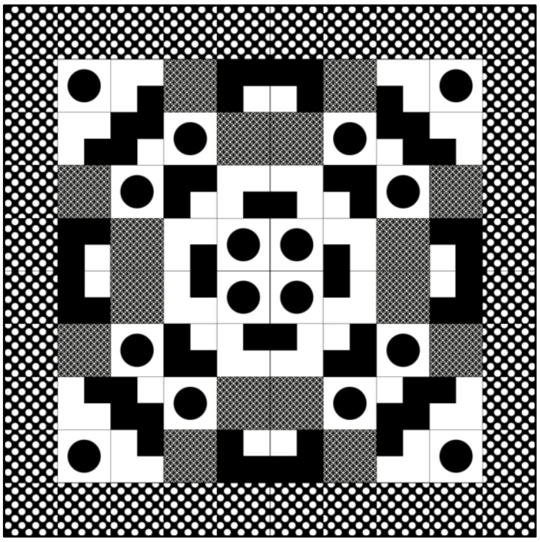
0 **1** **2** **3** **4**

Slika 34. Uzorci kao predstavnici brojeva

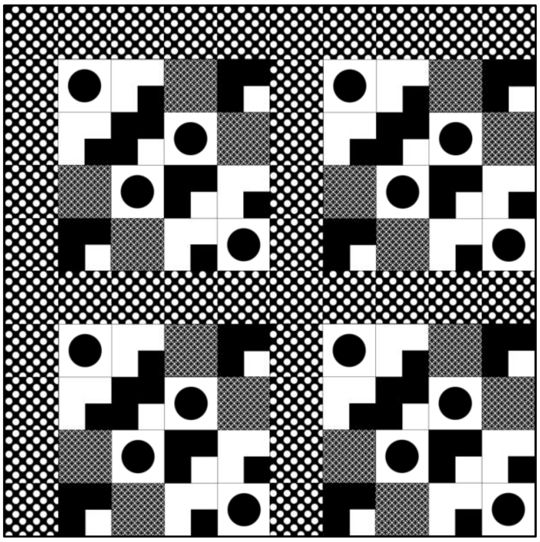
Zamijenimo li sada svaki broj u tablici (bijeli dio tablice – umnošci modulo 5) odgovarajućim uzorkom sa slike 34. dobit ćemo osnovni uzorak kao na slici 35.



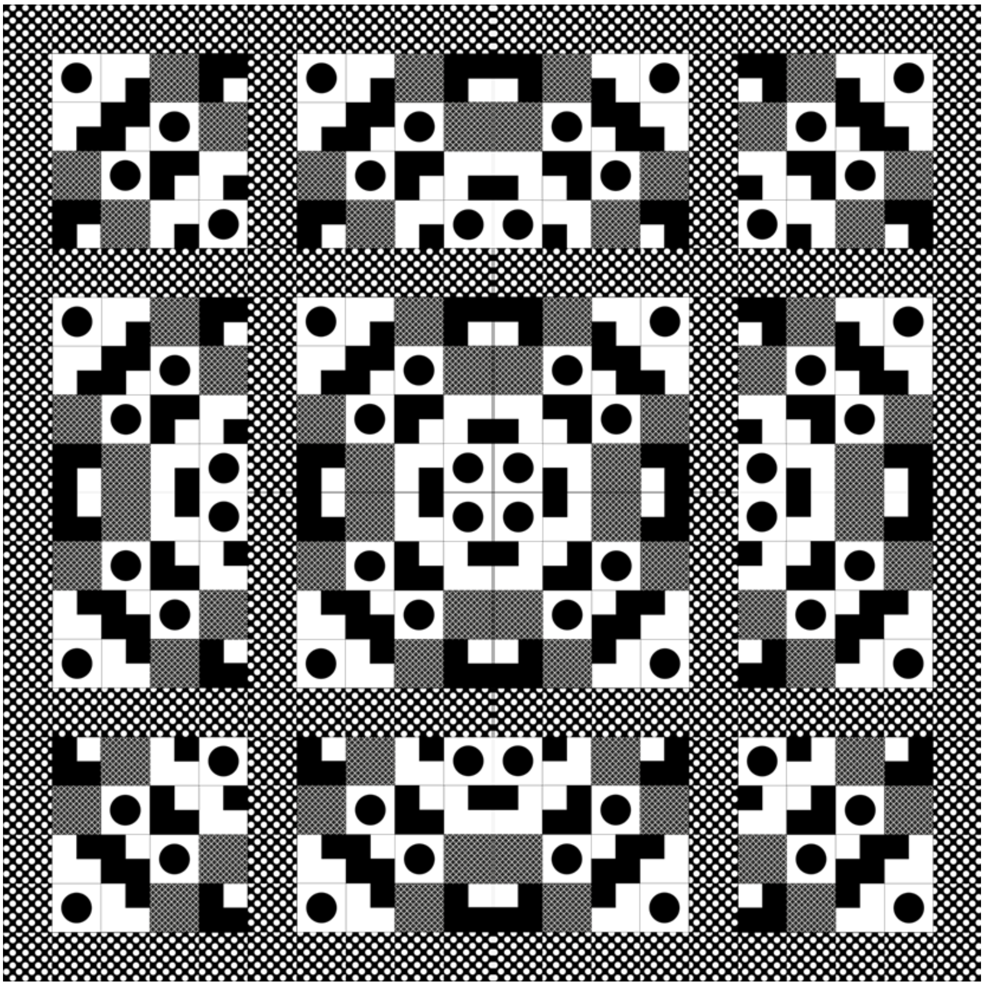
Slika 35. Osnovni uzorak



Slika 36. Osna simetrija/rotacija osnovnoga uzorka

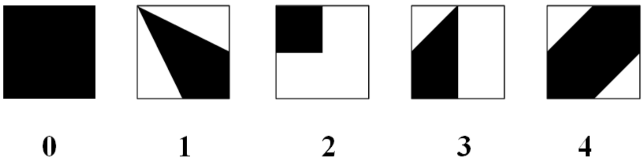


Slika 37. Translacija osnovnoga uzorka

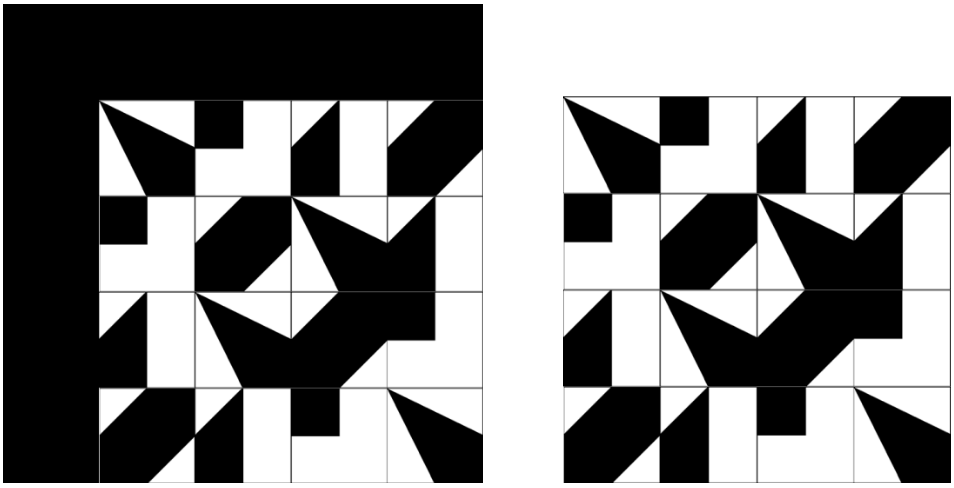


Slika 38. Translacija i osna simetrija/rotacija osnovnoga uzorka

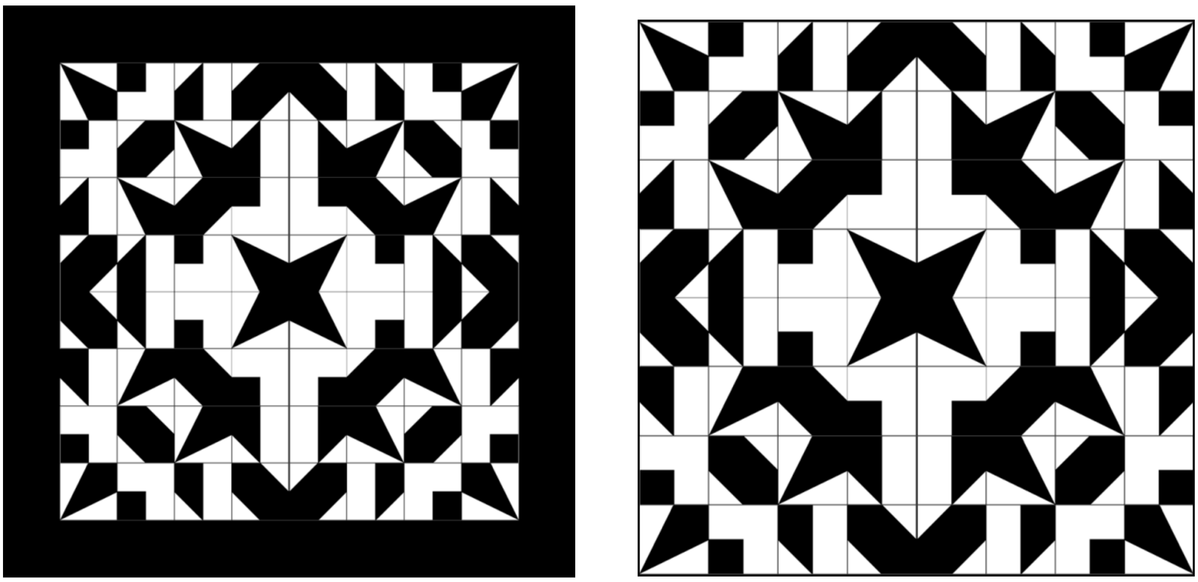
Na isti način pomoću tablice množenja modulo 5 i predstavnika brojeva na slici 39. kreiran je osnovni uzorak na slici 40., koji je poslužio kao polazište za kreiranje novih uzorka.



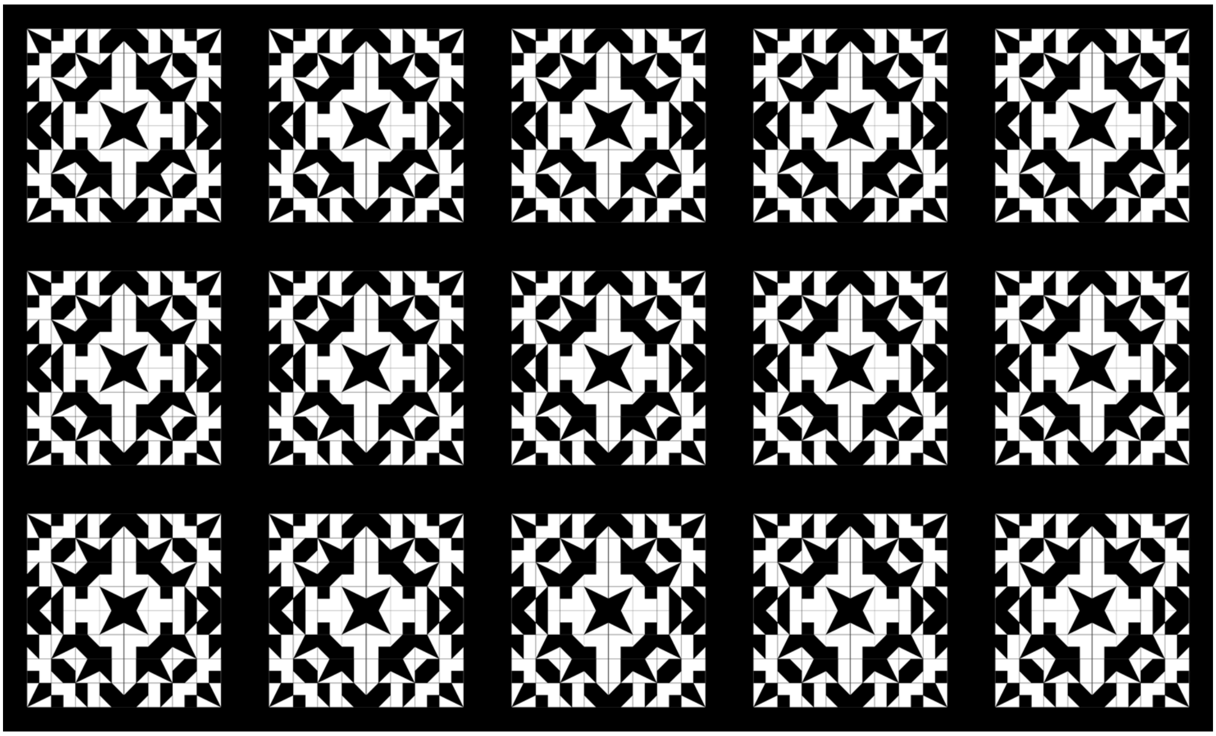
Slika 39. Uzorci kao predstavnici brojeva



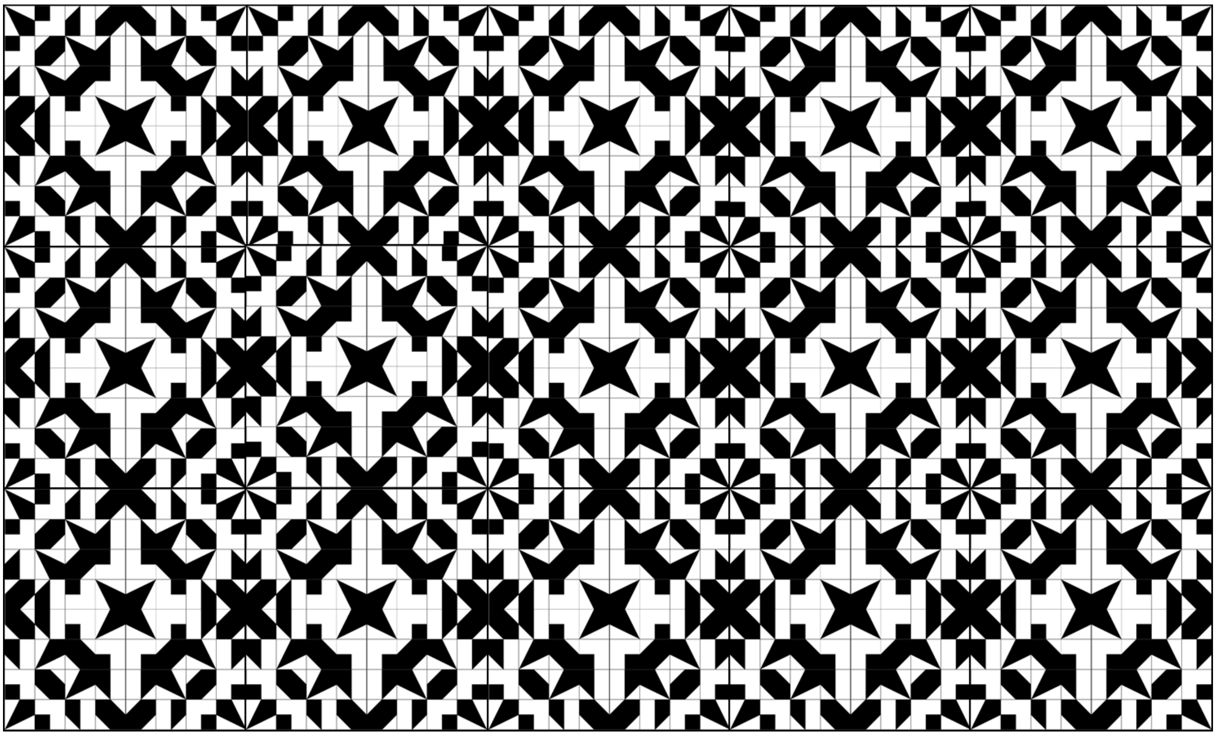
Slika 40. Osnovni uzorak (s nulom i bez nule)



Slika 41. Osna simetrija/rotacija osnovnoga uzorka (s nulom i bez nule)

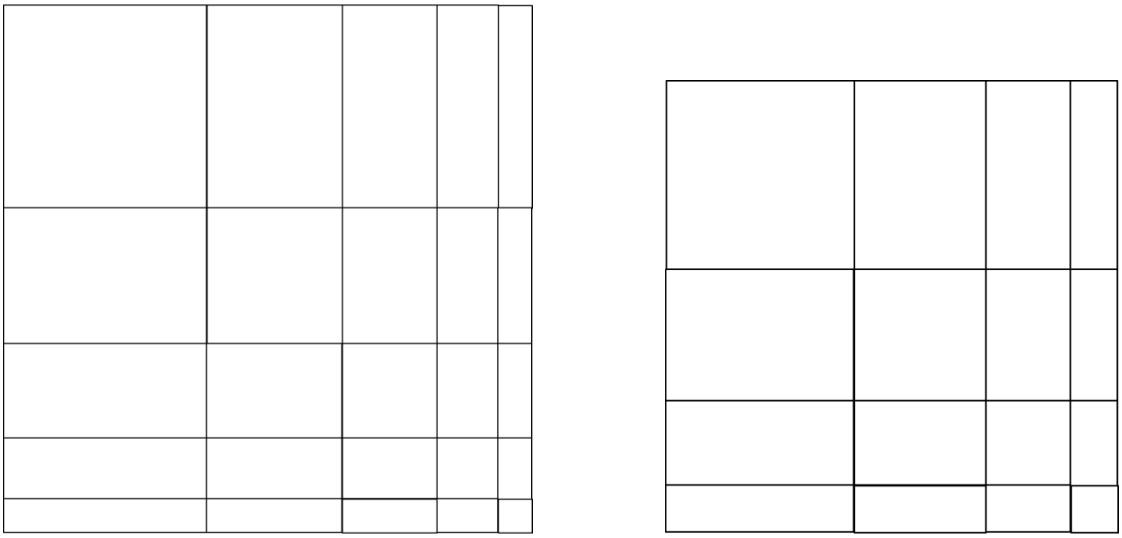


Slika 42. Osna simetrija/rotacija i translacija osnovnoga uzorka (s nulom)

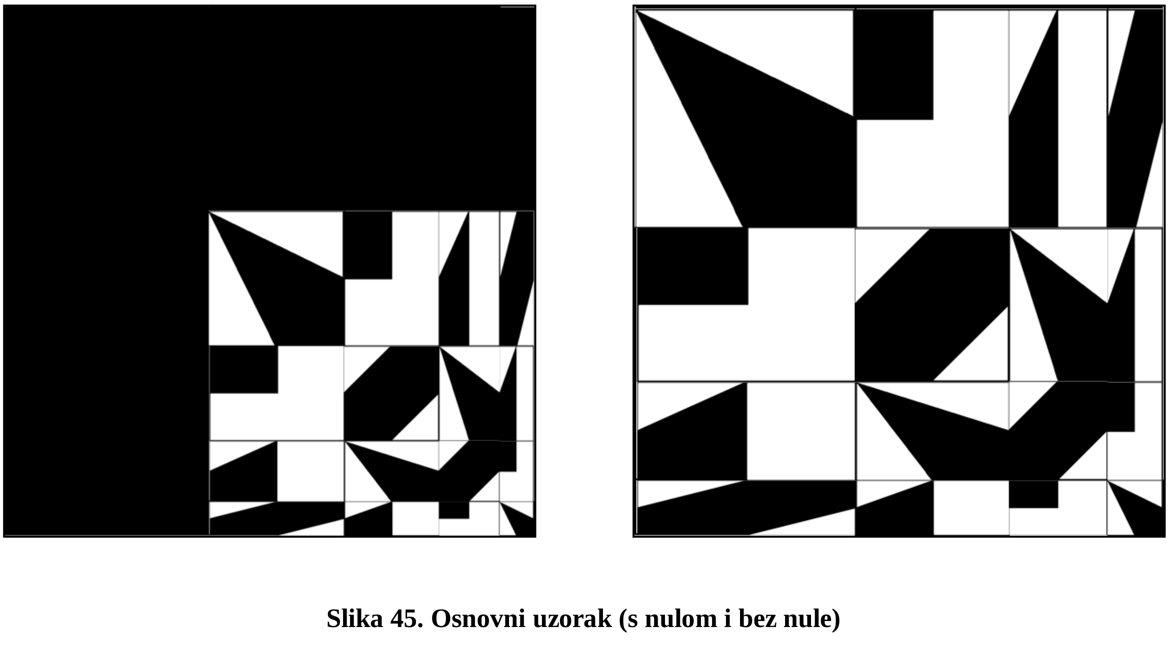


Slika 43. Osna simetrija/rotacija i translacija osnovnoga uzorka (bez nule)

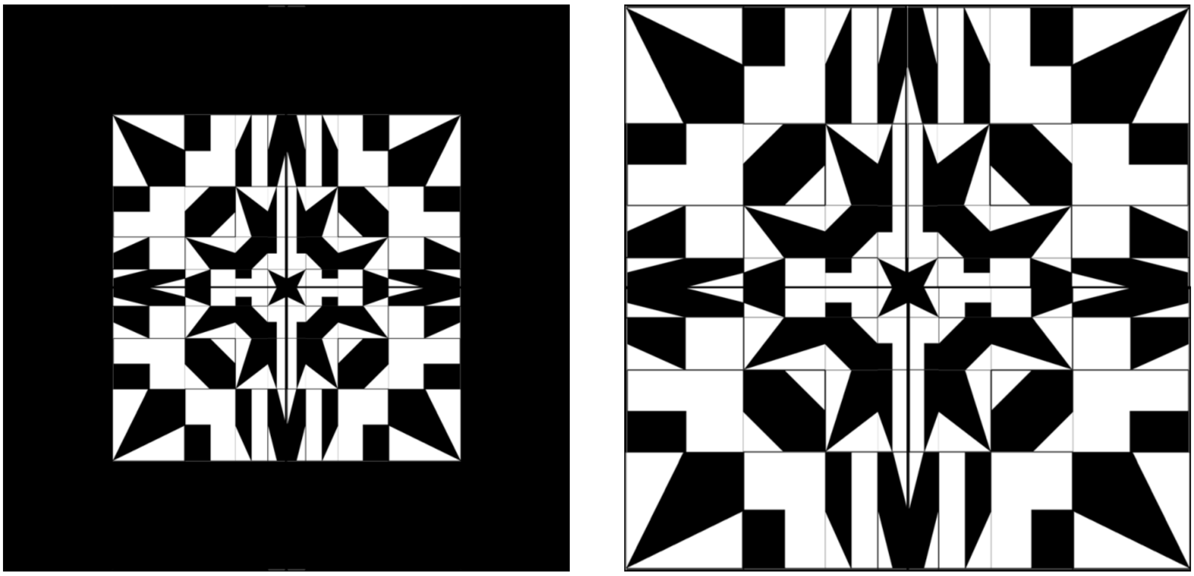
Uvrstimo li uzorke sa slike 39. u mreže oblika kao na slici 44. dobit ćemo osnovne uzorke kao na slici 45., koji su polazište za kreiranje novih uzoraka.



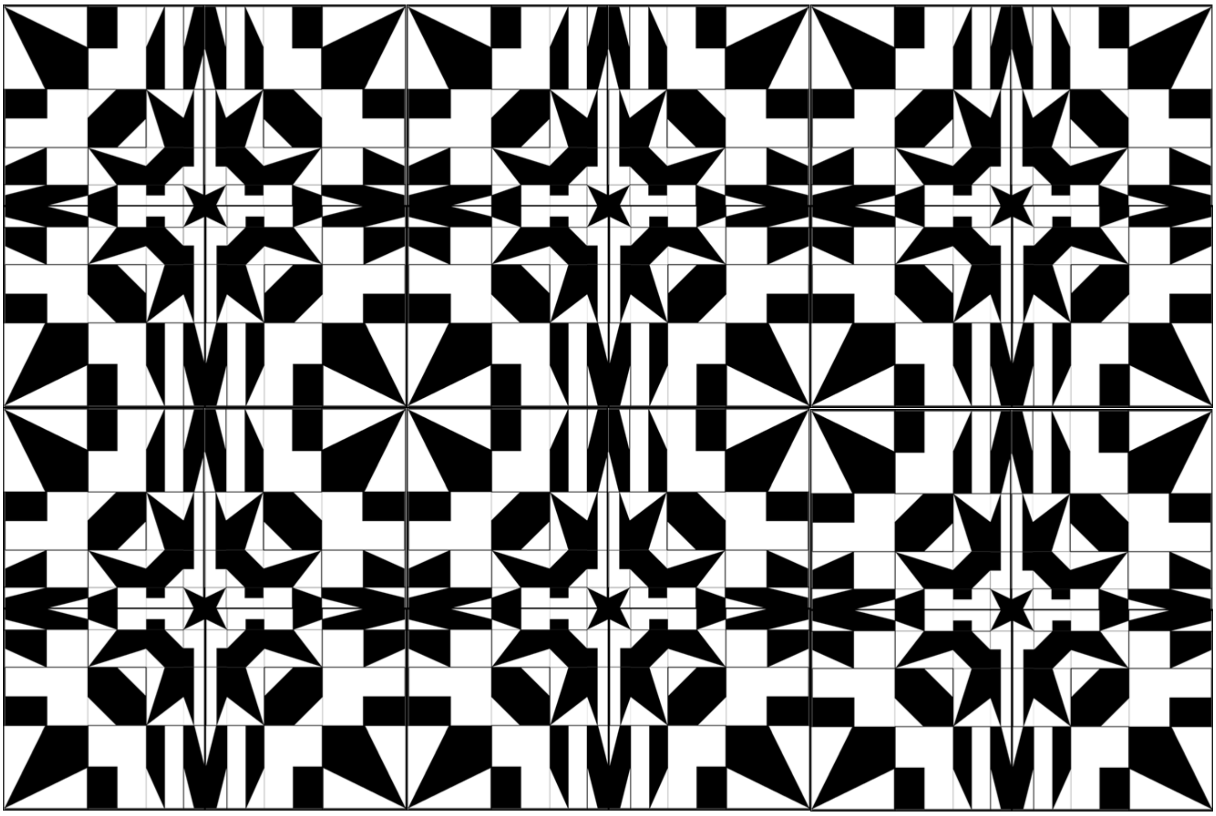
Slika 44. Mreže (za uzorak s nulom i bez nule)



Slika 45. Osnovni uzorak (s nulom i bez nule)



Slika 46. Osna simetrija/rotacija osnovnoga uzorka(s nulom i bez nule)



Slika 47. Osna simetrija/rotacija i translacija osnovnoga uzorka (bez nule)

6. RADIONICA *ARITMETIKOM DO DIZAJNA*

Ciljevi radionice *Aritmetikom do dizajna*:

- upoznati sudionike s relacijom *biti kongruentan modulo m* na skupu prirodnih brojeva
- objasniti zbrajanje i množenje modulo *m*
- prikazati način primjene modularne aritmetike u kreiranju različitih uzoraka
- potaknuti sudionike na izradu vlastitih uzoraka pomoću tablica zbrajanja i množenja modulo *m*

Vrijeme provedbe radionice: 22. travnja 2016. u okviru Festivala znanosti te 6. svibnja 2016. u okviru Dana otvorenih vrata Fakulteta za odgojne i obrazovne znanosti Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.

Mjesto provedbe radionice: Fakultet za odgojne i obrazovne znanosti, dislociran studij u Slavonskome Brodu.

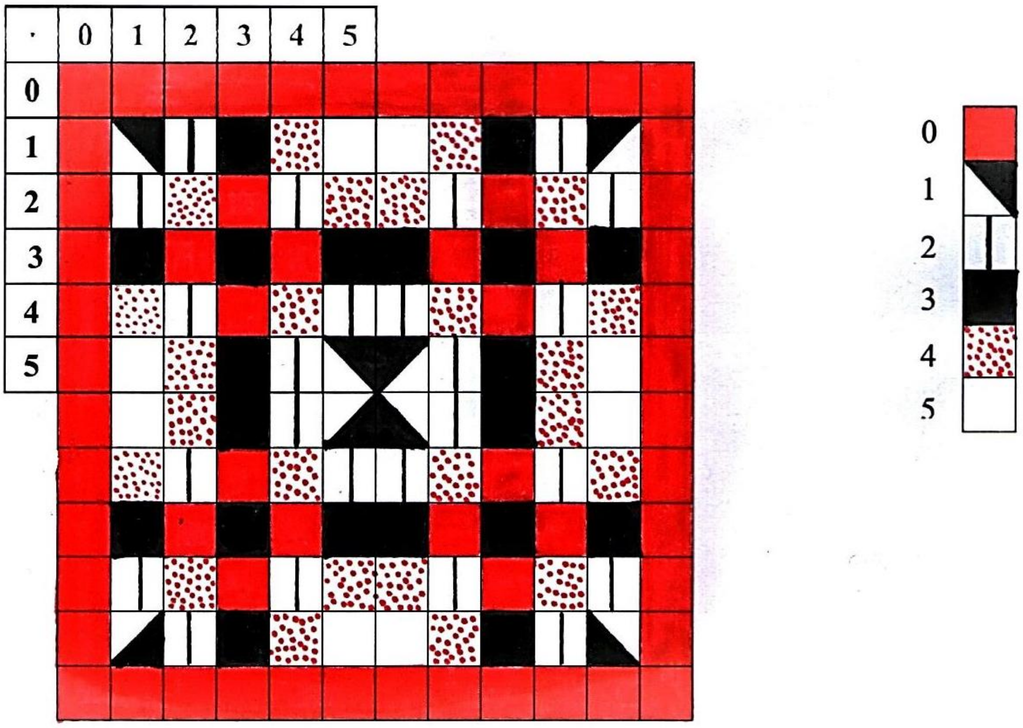
Trajanje radionice: dva puta po 60 minuta.

Sudionici: učenici sedmoga razreda OŠ „Ivan Goran Kovačić" iz Slavonskoga Broda te 26 studenata 4. godine Fakulteta za odgojne i obrazovne znanosti, dislociranoga Učiteljskoga studija u Slavonskome Brodu.

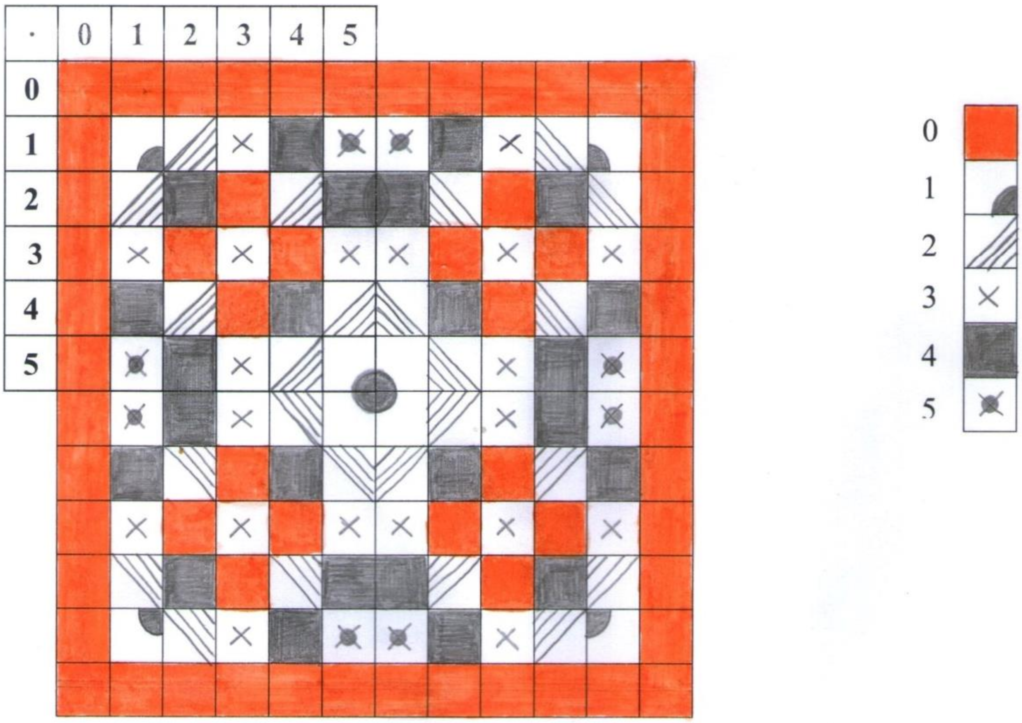
Opis: prikazujući na slikokazu nekoliko zadataka dijeljenja brojem 3 sudionici su trebali uočiti sve moguće ostatke pri dijeljenju brojem 3. Potom im se objasnio pojam *relacija biti kongruentan modulo 3* – dva su broja *kongruentna modulo 3* ako 3 dijeli njihovu razliku. Zbrajanje i množenje modulo *m* sudionici su upoznali na primjeru zbrajanja i množenja modulo 5 (popunjavanje tablica). Prije nego što su samostalno kreirali uzorke pomoću tablica zbrajanja i množenja modulo 6 (koristeći geometrijski pribor, bojice, kemijske i flomastere), sudionici su i samostalno riješili nekoliko zadataka (Prilog 1.) te pogledali nekoliko primjera kreiranih uzoraka.

U nastavku je prikazano nekoliko uzoraka koje su izradili sudionici radionice.

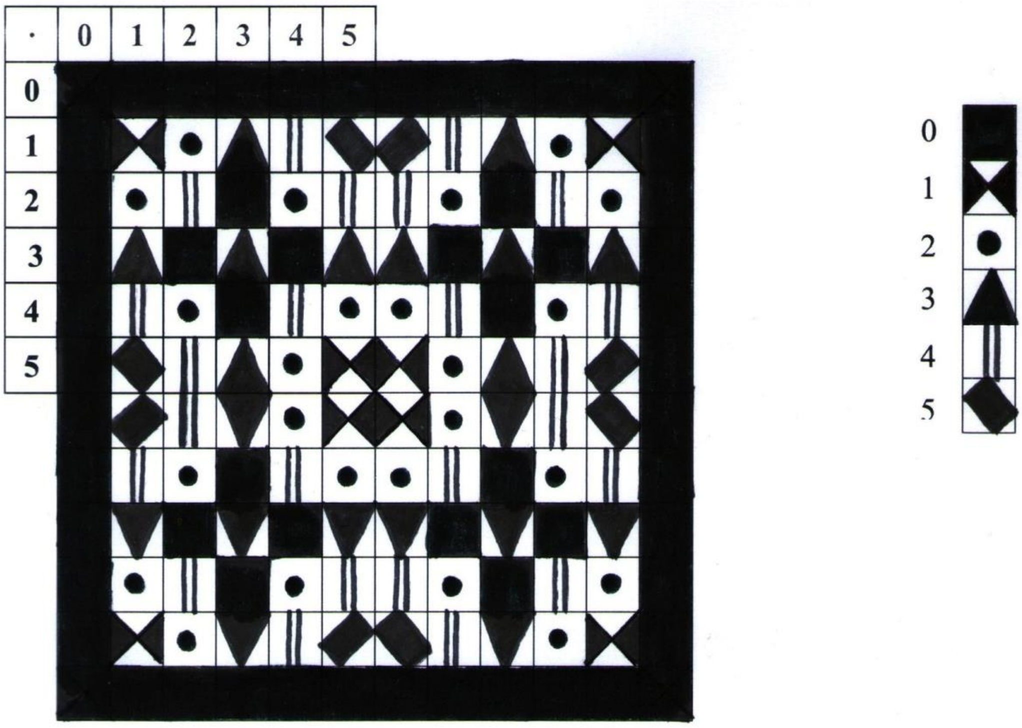
6.1. Uzorci dobiveni pomoću tablica zbrajanja i množenja modulo 6



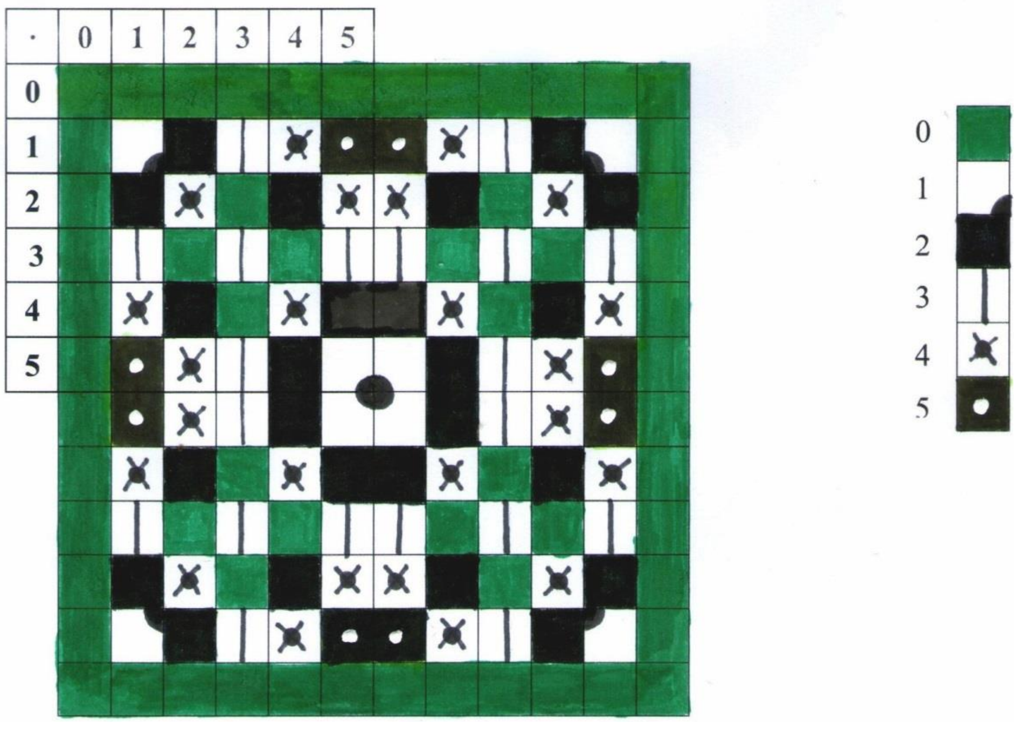
Slika 29. Uzorak dobiven pomoću tablice množenja modulo 6 (osna simetrija/rotacija)



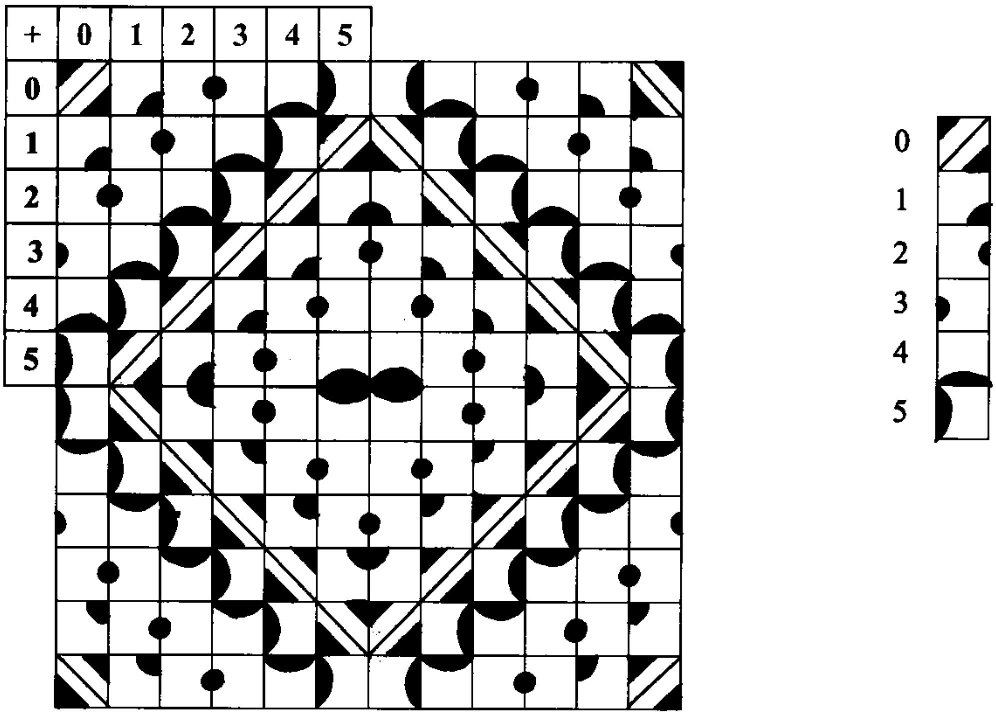
Slika 30. Uzorak dobiven pomoću tablice množenja modulo 6 (osna simetrija/rotacija)



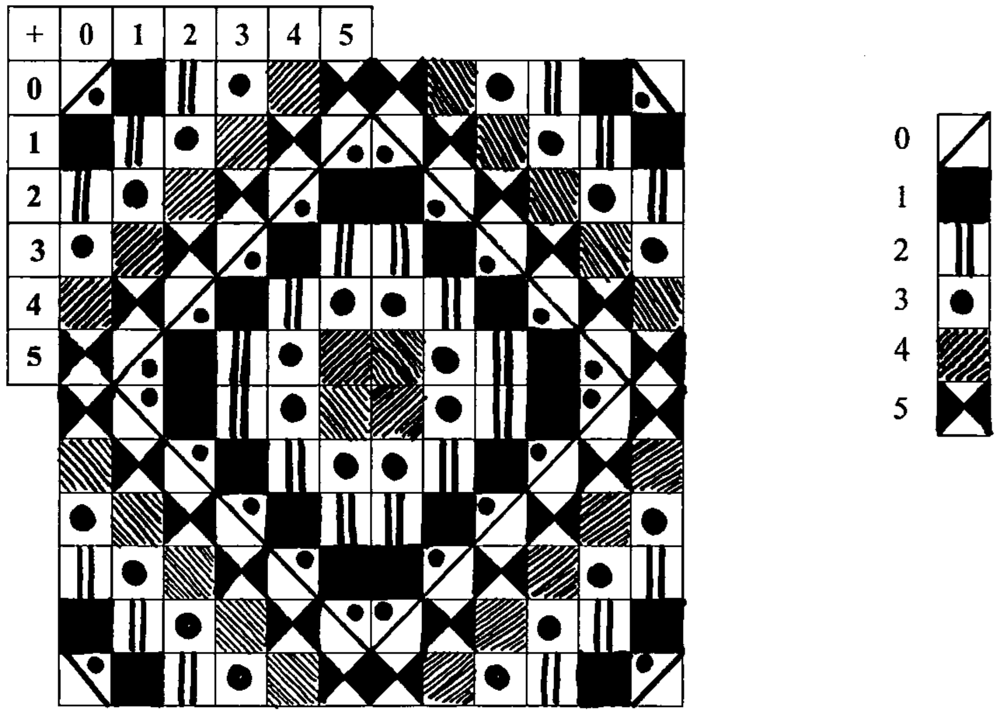
Slika 31. Uzorak dobiven pomoću tablice množenja modulo 6 (osna simetrija/rotacija)



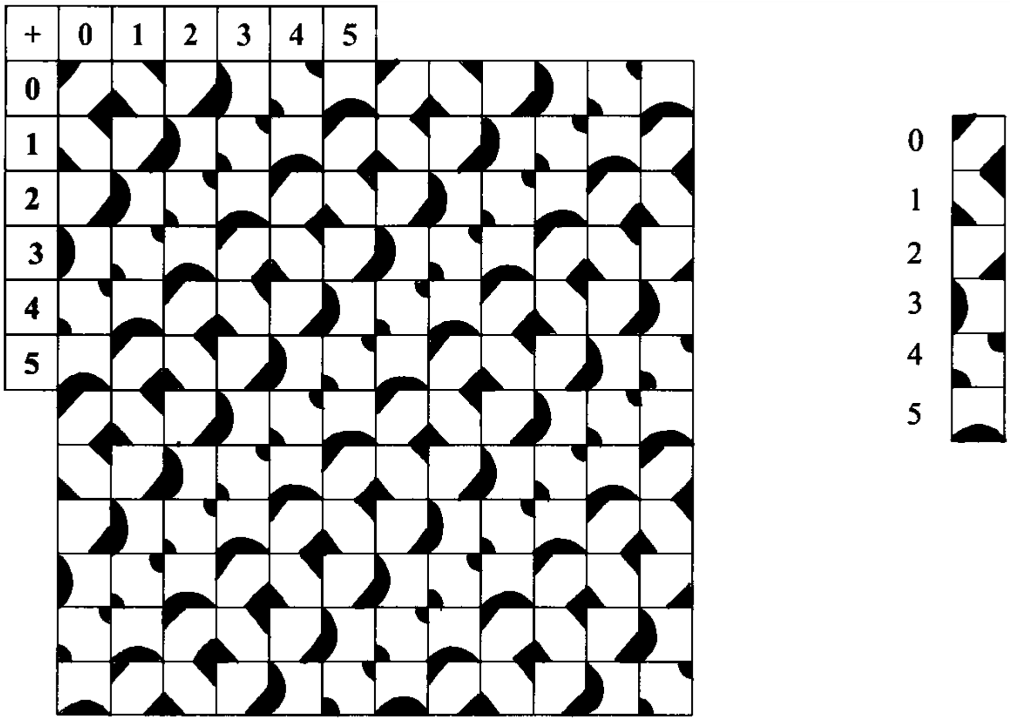
Slika 32. Uzorak dobiven pomoću tablice množenja modulo 6 (osna simetrija/rotacija)



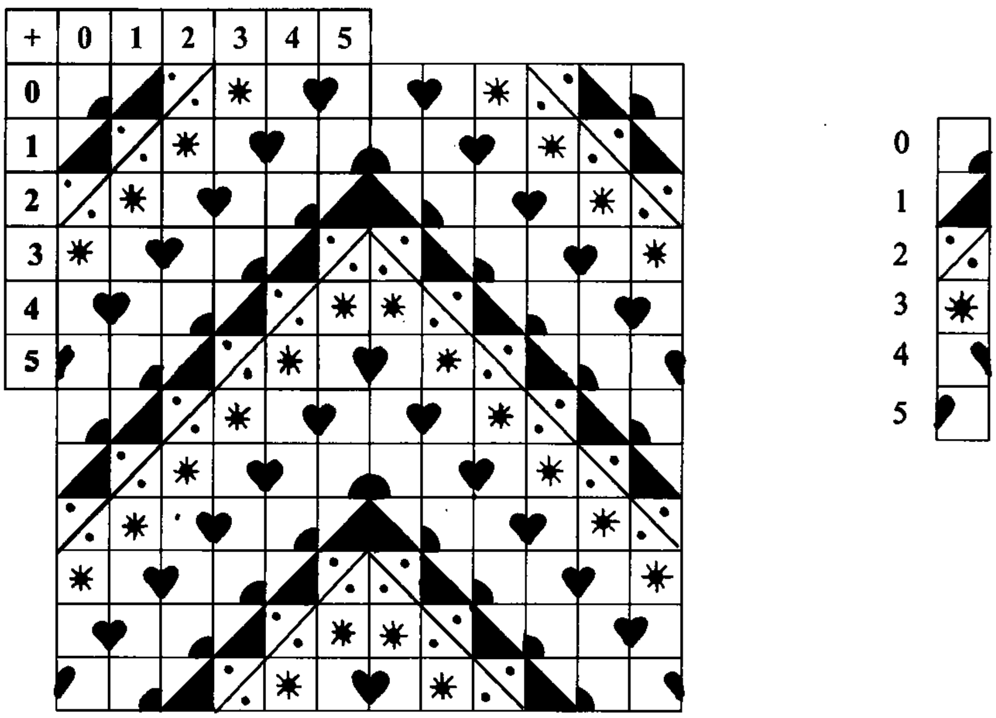
Slika 33. Uzorak dobiven pomoću tablice zbrajanja modulo 6 (osna simetrija/rotacija)



Slika 34. Uzorak dobiven pomoću tablice zbrajanja modulo 6 (osna simetrija/rotacija)



Slika 35. Uzorak dobiven pomoću tablice množenja modulo 6 (translacija)



Slika 36. Uzorak dobiven pomoću tablice zbrajanja modulo 6 (osna simetrija/rotacija i translacija)

7. ZAKLJUČAK

S ciljem potpuna ovladavanja temeljnim aritmetičkim pojmovima (prirodan broj, brojenje, relacije na skupu prirodnih brojeva, osnovne računske radnje) učenici bi trebali proći šest stupnjeva ovladavanja matematičkim simbolima koje je razmatrao Mahesh Sharma. Prvi je stupanj intuitivni i podrazumijeva povezivanje novoga s prethodno stečenim znanjem. Tijekom drugoga – konkretnoga stupnja učenici bi trebali doći do novih saznanja manipuliranjem stvarnim, konkretnim predmetima (npr. različiti didaktički materijali). Treći je stupanj slikovni i predstavlja važan korak u povezivanju konkretnoga i simboličkoga. Na četvrtome – apstraktnome stupnju konkretni predmeti i slike prevode se na jezik simbola i formula. Peti je stupanj primjena znanja što bi značilo da je učenik sposoban stečena matematička znanja primijeniti u stvarnim životnim situacijama. Na posljednjemu – komunikacijskome stupnju učenik bi trebao biti u stanju objasniti, obrazložiti riječima svoje postupke te podučiti drugoga učenika. (Sharma, 1990, prema Posokhova, 2001)

Modularna aritmetika predstavlja aritmetički sustav u kojemu se brojevi *vraćaju u krug* nakon što dostignu određenu vrijednost – modul. Definira se uvođenjem relacije kongruencije na skupu cijelih brojeva. Relacija *biti kongruentan modulo m* relacija je ekvivalencije na skupu $\mathbb{Z}$, što znači da je navedena relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna.

U vizualnim umjetnostima modularna aritmetika može se koristiti za kreiranje različitih uzoraka: zvijezde s m krakova, (m, n) – uzorka te uzoraka dobivenih pomoću tablica zbrajanja i množenja modulo m.

Sudionici radionice *Aritmetikom do dizajna* svojim su uradcima pokazali da se spojivši znanje o osnovnim računskim radnjama, kongruencijama i izometrijama ravnine mogu kreirati zaista mala umjetnička djela. Dakle, usvojimo li znanje, pokrenemo li maštu i damo li si truda, brojke mogu postati umjetnost kojoj ćemo se diviti.

LITERATURA

1. Cooper, T., Watson, T. (2013). *Mathematics and Modulo Art, Electronic edition*. Queensland University of Technology: YuMi Deadly Centre (pribavljeno 12. 4. 2018. s http://ydc.qut.edu.au/resources/student-learning-projects-resources/Mathematics-and-Modulo-Art.pdf)

2. Courant, R., Robbins, H. (1996). *What is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods*. New York: OXFORD UNIVERSITY PRESS

3. Dakić, B., Elezović, N. (2007). *Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred gimnazije, 1. dio.* Zagreb: Element

4. Duraković, A., Kapić, S. (2015). Matematikom do ideja za uzorke. *Osječki matematički list, 15(1)*, 41-50.

5. Glasnović Gracin, D. (2014). Modeli aritmetike za razrednu nastavu. *Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike, 15(59)*, 12-21.
(pribavljeno 18. 3. 2018. s https://hrcak.srce.hr/140113)

6. Koshy, T. (2007). *Elementary Number Theory with Applications*, Second Edition. Academic Press

7. Liebeck, P. (1995). *Kako djeca uče matematiku: metodički priručnik za učitelje razredne nastave, nastavnike i profesore matematike*. Zagreb: Educa

8. Marić, A. (2010). *Matematika 1, udžbenik i zbirka zadataka za 1. razred ekonomskih škola*. Zagreb: Element

9. Markovac, J. (2001). *Metodika početne nastave matematike, III. izdanje*. Zagreb: Školska knjiga

10. Pavković, B., Veljan, D. (2004). *Elementarna matematika I, II. izdanje*. Zagreb: Školska knjiga

11. Pavković, B., Veljan D. (1995). *Elementarna matematika II*. Zagreb: Školska knjiga

12. Pavleković, M. (2008). *Metodika nastave matematike s informatikom I, III. izdanje*. Zagreb: Element

13. Posokhova, I. (2001). *Matematika bez suza: Kako pomoći djetetu s teškoćama u učenju matematike/prema prof. Mahesh C. Sharma*. Lekenik: Ostvarenje

PRILOZI

Prilog 1. (zadatci za sudionike radionice *Aritmetikom do dizajna*)

1. Popuni tablicu zbrajajući modulo 4.

+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

2. Popuni tablicu množeći modulo 4.

·	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

3. a) Osjenčaj ili oboji sve kvadrate koji sadrže 1 u prethodne dvije tablice.
   b) Drugom bojom oboji sve kvadrate koji sadrže 0.

4. Popuni tablicu zbrajajući modulo 6.

+	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

5. Popuni tablicu množeći modulo 6.

·	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						