Desenvolvimento de uma Medida de Desempenho Comportamental

(Development of a Behavioral Performance Measure)

Marcelo Cabus Klotzle*
Leonardo Lima Gomes**
Luiz Eduardo Teixeira Brandão***
Antonio Carlos Figueiredo Pinto****

Resumo

Desde os anos cinquenta, diversas medidas têm sido desenvolvidas com o intuito de medir o desempenho seja de investimentos, seja de escolhas envolvendo resultados incertos. Boa parte destas medidas se baseia na Teoria da Utilidade Esperada, mas desde os anos noventa algumas medidas têm sido propostas com base na Teoria da Utilidade Não-Esperada. Dentre as Teorias da Utilidade Não-Esperada destaca-se a Teoria do Prospecto, que é o alicerce das Finanças Comportamentais. Baseada nesta Teoria este estudo propõe uma nova medida de desempenho na qual são incorporadas a aversão à perda junto com as distorções das probabilidades na escolha de alternativas. Um exemplo hipotético é apresentado em que diversas medidas de desempenho, incluindo a medida nova, são comparadas entre si. Os resultados mostraram que a ordenação dos ativos variou de acordo com a medida de desempenho adotada. De acordo com o esperado, a medida de desempenho nova conseguiu captar claramente a distorção das probabilidades e a aversão à perda do tomador de decisão, ou seja, aqueles ativos com maiores desvios negativos em relação à meta foram os que tiveram o pior desempenho.

***Palavras-chave*:** finanças comportamentais; teoria do prospecto; medida de desempenho.

JEL code: G02; G11.

Submetido em 1 de agosto de 2012. Reformulado em 11 de setembro de 2012. Aceito em 12 de setembro de 2012. Publicado on-line em 15 de outubro de 2012. O artigo foi avaliado segundo o processo de duplo anonimato além de ser avaliado pelo editor. Editor responsável: Ricardo P. C. Leal. Os autores agradecem o suporte financeiro da Elektro via programa de P&D da Aneel.

*Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: klotzle@iag.puc-rio.br

**Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: leonardolima@iag.puc-rio.br

***Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: brandao@iag.puc-rio.br

****Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil. E-mail: figueiredo@iag.puc-rio.br

ISSN 1679-0731, ISSN online 1984-5146

Abstract

Since the fifties, several measures have been developed in order to measure the performance of investments or choices involving uncertain outcomes. Much of these measures are based on Expected Utility Theory, but since the nineties a number of measures have been proposed based on Non-Expected Utility Theory. Among the Theories of Non-Expected Utility highlights Prospect Theory, which is the foundation of Behavioral Finance. Based on this theory this study proposes a new performance measure in which are embedded loss aversion along with the likelihood of distortions in the choice of alternatives. A hypothetical example is presented in which various performance measures, including the new measure are compared.The results showed that the ordering of the assets varied depending on the performance measure adopted. According to what was expected, the new performance measure clearly has captured the distortion of probabilities and loss aversion of the decision maker, i.e., those assets with the greatest negative deviations from the target were those who had the worst performance.

Keywords**:** behavioral finance; prospect-theory; performance measure.

1. Introdução

A quantidade de ativos arriscados à disposição dos investidores é inúmera: fundos mútuos, fundos de hedge, fundos multimercado, somente para citar alguns. As características de cada classe de ativos podem ser sintetizadas em diferentes distribuições de retornos. Até mesmo dentro de uma classe única de ativos as distribuições de retornos não são iguais.

Medidas de desempenho têm sido desenvolvidas para classificar os ativos, com a finalidade de se escolher o melhor para se investir, partindo do pressuposto que ativos são mutualmente exclusivos. A metodologia básica na teoria financeira consiste em se usar alguma medida de desempenho de carteiras para ordenar os diferentes investimentos de risco. Cada medida de desempenho calcula um escore para cada ativo usando sua distribuição de probabilidade dos retornos. O melhor ativo para se investir é aquele com o maior escore (Zakamouline, 2011).

A literatura em medidas de desempenho começou com o trabalho seminal de Sharpe (1966), que propôs uma medida de retorno/risco hoje conhecida mundialmente como o índice de Sharpe. Entretanto, hoje em dia é amplamente reconhecido que, devido ao fato do índice de Sharpe ser baseado na teoria da média-variância, ele é válido somente para retornos com distribuição normal ou existência de preferências quadráticas. Portanto, quando tais pré-requisitos não são satisfeitos, o índice de Sharpe pode levar conclusões equivocadas e paradoxos na hora da tomada de decisão de alocação (Bernardo & Ledoit, 2000).

Diversas medidas de desempenho universais foram propostas, que de uma maneira ou outra, são alternativas ao índice de Sharpe e tentam levar em consideração a não normalidade dos retornos. Como exemplos, podemos citar o índice de Sortino(Sortino e Price, 1994), a medida Ômega (Shadwick & Keating, 2002), o índice de Kappa(Kaplan e Knowles, 2004), relação do potencial de *upside* (Sortino *et al.*, 1999) e a razão Farinelli-Tibiletti (Farinelli *et al.*, 2008).

Mesmo que a condição da não normalidade dos retornos seja atendida, surge outro problema: a questão da utilização da modelagem das preferências do investidor dentro do modelo de utilidade esperada desenvolvido por Von Neumann & Morgenstern (1944) e no qual se baseou Markowitz quando estruturou seu modelo de média-variância (Markowitz, 1952).

Por outro lado, estudos recentes em finanças comportamentais mostraram evidências que a Teoria do Prospecto (Kahneman & Tversky, 1979) e a Teoria do Prospecto Cumulativa (Tversky & Kahneman, 1992) fornecem uma melhor descrição das escolhas do investidor do que o modelo de média/variância de Markowitz. Como exemplos podemos citar os estudos de (Barberis & Thaler, 2003) e (De Bondt, 1998).

A Teoria do Prospecto já foi utilizada, entre outros, para explicar a baixa participação no mercado acionário (Barberis *et al.*, 2006), alta intensidade das negociações no mercado de capitais (Gomes, 2005), preferências dos investidores por retornos com distribuições assimétricas positivas (Barberis & Huang, 2008) e alto prêmio de risco e volatilidade do mercado acionário (Barberis *et al.*, 2001).

Baseado nisto, este estudo procura contribuir para a literatura de medidas de avaliação sugerindo uma medida baseada na Teoria do Prospecto, em que a aversão à perda é incorporada na medida de desempenho.

Na próxima seção será feita uma introdução à Teoria da Utilidade esperada e às medidas de desempenho que se baseiam nela. Em seguida será feita uma breve descrição da Teoria da Utilidade Não Esperada, com ênfase na Teoria do Prospecto, e das medidas a ela relacionadas. Na quarta seção será feita a sugestão de uma nova medida de desempenho e por fim serão apresentadas as conclusões.

2. Medidas baseadas na Teoria da Utilidade Esperada

A Teoria da Utilidade Esperada de von Neumann e Morgenstern foi durante muito tempo a base principal da moderna teoria financeira. Uma função utilidade de von Neumann-Morgenstern é definida, com base na riqueza do investidor, da seguinte maneira:

$$U(W) \tag{1}$$

onde $U(.)$ é alguma função específica e W é o nível de riqueza do investidor.

A conhecida teoria moderna de carteiras de Markowitz e a utilização da função de utilidade de média-variância pode ser justificada pela aproximação de uma função de utilidade de von Neumann-Morgenstern por uma função de média-variância, conforme demonstrado, por exemplo, por Samuelson (1970) , Tsiang (1972) e Levy & Markowitz (1979). Além disso, a utilização da função utilidade de média-variância pode ser justificada quando os retornos são normais ou a função utilidade do investidor é quadrática. O problema surge, entretanto, quando se usa a função de utilidade quadrática, já que ela tem propriedades consideradas anômalas, como por exemplo, o aumento da aversão ao risco à medida que o nível de riqueza cresce (Koekebakker & Zakamouline, 2007b).

A função de média-variância é definida da seguinte maneira:

$$E\left[U(W)\right] = E[W] - \frac{1}{2}\gamma Var[W] \tag{2}$$

onde:
$E[U(W)]$ é a riqueza esperada;
$Var[W]$ é a variância da riqueza, e;
γ é o coeficiente de aversão ao risco do investidor. Se a utilidade do investidor é dada por alguma função, então o coeficiente de aversão ao risco é computado da seguinte maneira:

$$\gamma = -\frac{U''}{U'} \tag{3}$$

onde U'' e U' são respectivamente a segunda e primeira derivadas da função utilidade do investidor. Essa medida também é conhecida com a medida Arrow-Pratt de aversão absoluta ao risco. Como demonstrado em Zakamouline & Koekebakker (2009) a função de utilidade de média-variância leva à famosa medida de performance conhecida como Índice de Sharpe:

$$IS = \frac{\mu - r}{\sigma} \tag{4}$$

onde μ e σ são respectivamente o retorno esperado e o desvio padrão dos retornos dos ativos selecionado e r é a taxa livre de risco. O Índice de Sharpe é popular, porque além de ser de fácil implementação, as preferências do investidor são anuladas no cálculo da medida de desempenho. Em outras palavras: independente do nível de aversão ao risco, todos os investidores com função utilidade quadrática ou de média-variância vão classificar de maneira idêntica diferentes investimentos (Pézier, 2011).

Entretanto, recentemente diversos artigos demonstraram que o índice de Sharpe é de fácil manipulação (Goetzmann *et al.*, 2002, Ingersoll *et al.*, 2007). Conforme demonstrado por esses autores, a manipulação do índice de Sharpe se dá entre outros com o uso de derivativos. O uso de estratégias com derivativos provoca uma assimetria no que seria umacurva normal de retornos, alongando-a à esquerda (*leftskewness*). Essa distorção faz com que,para pequenas oscilações, a média dos retornos aumente, incrementando o índice de Sharpe. Entretanto, com o aumento da volatilidade aumenta a probabilidade de perdas. Assim, uminvestidor que prefira tal fundo a partir de uma situação de tranquilidade no mercado pode, sem saber, estar assumindo riscos indesejados (*left-tailrisk*).

Além disso, trabalhos como o de Koekebakker & Zakamouline (2007b) demonstram que a função utilidade do investidor não deve ser ignorada. Segundo esses autores, o primeiro passo é especificar a função utilidade do investidor e depois escolher o ativo de risco ou carteira que maximiza a utilidade esperada do investidor. A análise desses autores sugere, por sua vez, que a classificação de diferentes alternativas de investimento pode variar bastante para diferentes tipos de função utilidade.

Com base nisso nesses problemas, surgiram alguns trabalhos que tentaram fazer ajustes no índice de Sharpe. Um é o próprio trabalho de Koekebakker & Zakamouline (2007b) que sugeriram aproximar uma função utilidade geral usando os primeiros três momentos das distribuições dos retornos, ou seja, a média, a variância e a assimetria. Eles derivam uma medida que eles denominam o Índice de Sharpe ajustado à Assimetria (ISA), definido como:

$$ISA = IS\sqrt{1 + \frac{bA}{3}IS} \tag{5}$$

onde:
IS é o Índice de Sharpe como definido em (4);
A é a assimetria da distribuição dos retornos, e;
b é um parâmetro que define as preferências do investidor pela assimetria da distribuição dos retornos. Este parâmetro é definido com base nas três primeiras derivadas da função de utilidade (U) do investidor.

$$b = \frac{\frac{U'''}{U'}}{(\frac{U''}{U'})^2} \tag{6}$$

Observe que, ao contrário do Índice de Sharpe, o valor do ISA não é único e depende das preferências do investidor pela assimetria, especificada por uma função utilidade específica. Entretanto, quando se usa o ISA na prática, não se pode evitar a ambiguidade na hora de ordenar os diferentes ativos de risco. Conforme demonstrado por Koekebakker & Zakamouline (2007a), o ranqueamento das diferentes alternativas de investimentos depende substancialmente do valor do parâmetro de assimetria b, especialmente quando as distribuições dos retornos são altamente assimétricas ou o valor do parâmetro b é relativamente alto com relação ao valor unitário.

3. Medidas baseadas na Teoria da Utilidade Não-Esperada

Pouco tempo depois da Teoria da Utilidade Esperada ter sido formulada por Von Neumann & Morgenstern (1944), questionamentos surgiram sobre seu valor como um modelo descritivo de escolha sob incerteza. Allais (1953) e Ellsberg (1961) estavam entre os primeiros a desafiar a Teoria da Utilidade Esperada demonstrando que algumas de suas premissas não podiam ser justificadas por estudos empíricos.

Por outro lado, a análise de média-variância de Markowitz foi muito criticada devido ao fato que muitos investidores não associarem o risco ao desvio-padrão dos retornos, mas sim à possibilidade de perdas. Em vista disto, até Markowitz reconheceu que o desvio-padrão não era uma medida adequada de risco. Markowitz (1959) também propôs usar a semivariância como uma medida alternativa de risco.

Na abordagem de Markowitz (1959) a semivariância é igual à variância, com a exceção que só considera retornos abaixo de um determinado nível estipulado como meta. Em termos técnicos a agregação das semivariâncias de ativos individuais para carteiras é algo relativamente trabalhoso, resultando em um alto custo/benefício, motivo pelo qual essa sugestão não foi intensamente aplicada na prática.

Um pouco após Markowitz (1959) sugerir sua medida de semivariância, a noção de uma medida de semivariância ajustada para baixo foi generalizada por Fishburn (1977) e Bawa (1978), que introduziram a noção de momento parcial inferior como medida de risco. A definição de um Momento Parcial Inferior (MPI) de ordem n em um determinado nível tg é:

$$MPI_n(x, tg) = \int_{-\infty}^{tg} (tg - x)^n dF(x) \tag{7}$$

onde x é uma variável randômica qualquer e $F(x)$ é a distribuição da probabilidade cumulativa de x. O nível tg pode ser interpretado como o retorno mínimo aceitável pelo investidor ou como um retorno (ponto) de referência, no qual o investidor se baseia para avaliar seus ganhos ou perdas (Zakamouline, 2010).

De uma maneira similar pode-se definir um momento parcial superior (Schipper & Thompson, 1983) de ordem n a um nível tg:

$$MPS_n(x, tg) = \int_{tg}^{\infty} (x - tg)^n dF(x) \tag{8}$$

Fishburn (1977) e Bawa (1978) propuseram o modelo de momento parcial inferior médio para a seleção de carteiras. Esses autores provam que a utilização do momento parcial inferior médio como modelo de escolha de ativos corresponde a uma função utilidade específica do investidor. Definida sobre o retorno randômico x de um ativo, a função utilidade é dada pela seguinte fórmula:

$$U(X) = \begin{cases} x & x \geq tg, \\ x - \gamma(tg - x)^n & x < tg \end{cases} \tag{9}$$

onde γ é uma medida de aversão ao risco do investidor, e n é a ordem do momento parcial inferior. Se a taxa livre de risco (r) é usada como ponto de referência, como é feito na maioria dos casos (Zakamouline, 2010), isto é, $tg = r$, e $n = 2$, então a medida de desempenho pode ser caracterizada como o conhecido Índice de Sortino (ISO), definido como:

$$ISO = \frac{E(x) - r}{\sqrt{MPI_2(x, r)}} \tag{10}$$

onde $E(x)$ é o valor esperado de x. Essa medida foi introduzida por Sortino & Price (1994), baseado nas considerações de Fishburn (1977) e Bawa (1978). Essa medida difere do Índice de Sharpe por penalizar apenas os desvios negativos em relação à rentabilidade mínima exigida pelos investidores.

Conforme demonstrado por Zakamouline (2010), outras medidas de desempenho se baseiam também em momentos parciais da distribuição. Zakamouline (2010) cita, além do Índice de Sortino, entre outros a medida Ômega (Shadwick & Keating, 2002), a medida de Kappa (Kaplan & Knowles, 2004), a relação do potencial de *upside* (Sortino *et al.*, 1999) e a razão Farinelli-Tibiletti (Farinelli *et al.*, 2008).

Conforme demonstrado por Chen *et al.* (2011), a medida Ômega (Ω) pondera o benefício dos ganhos com o impacto das perdas e é definido da seguinte maneira:

$$\Omega(x,r) = \frac{MPS_1(x,r)}{MPI_1(x,r)} = \frac{E(x)-r}{MPI_1(x,r)} + 1 \tag{11}$$

onde r é a rentabilidade mínima exigida ou ponto de referência do investidor, que pode ou não ser a taxa livre de risco. De acordo com Shadwick & Keating (2002), a medida Ômega incorpora o efeito total de todos os momentos da distribuição, sem a necessidade de calculá-los individualmente.

O índice de Kappa foi desenvolvido por Kaplan & Knowles (2004) como uma generalização das medidas de desempenho baseadas no MPI, ao permitir a variação do parâmetro n. Ele é definido da seguinte maneira:

$$K_n(x,r) = \frac{E(x)-r}{\sqrt[n]{MPI_n(x,r)}} \tag{12}$$

De fato é visível que para n =1, obtém-se a equivalência entre a medida Ômega e o índice de Kappa, ou seja, $\Omega(x,r) = K_1(x,r) + 1$. Da mesma maneira obtém-se para $n = 2$ a igualdade entre os índices de Sortino e Kappa, ou seja, $IS(x,r) = K_2(x,r)$ (Chen *et al.*, 2011).

A relação do potencial de *upside* (RPU), por sua vez, é definida da seguinte forma:

$$RPU = \frac{MPS_1(x,r)}{\sqrt{MPI_2(x,r)}} \tag{13}$$

De acordo com Sortino *et al.* (2003), essa medida é adequada para investidores que procuram o melhor desempenho acima do seu ponto de referência, sujeito ao risco da meta não ser alcançada.

Por última medida baseada nos momentos parciais da distribuição vale a pena citar a razão Farinelli-Tibiletti (FT), definida como:

$$FT = \frac{\sqrt[m]{MPS_m(x,r)}}{\sqrt[n]{MPI_n(x,r)}} \tag{14}$$

De acordo com Eling *et al.* (2011), os coeficientes m e n ($m, n > 0$) são calibrados para se ajustar à atitude do investidor em relação às consequências de sobre-ousub-desempenho em relação ao ponto de referência. Como argumenta Fishburn (1977) quanto maiores os coeficientes m e n, maiores são as preferências dos investidores (no caso de ganhos esperados, captado pelo parâmetro m) ou aversão (no caso de perdas esperadas, captado pelo parâmetro n) a eventos extremos. Se a preocupação principal do investidor é que o fundo ou a carteira talvez não alcance a meta, independente de quanto seja o desvio, então um valor pequeno de n (isto é $0 < n < 1$) é apropriado. Entretanto, se pequenos desvios abaixo da meta são relativamente insignificantes, se comparados a desvios extremos (eventos catastróficos), então um valor alto de n (isto é, $n > 1$) é recomendado. A escolha do valor de m é feita de maneira similar e deve capturar desvios relativos acima do ponto de referência. Vale a pena salientar que se $m = 1$ e $n = 1$, a razão Farinelli-Tibiletti se reduz então para a medida Ômega (Eling *et al.*, 2011).

A noção de aversão à perda também foi amplamente discutida dentro do contexto da Teoria do Prospecto (Kahneman & Tversky, 1979, Tversky & Kahneman, 1992). Conforme discutido anteriormente, diversos estudos questionaram as premissas da Teoria da Utilidade Esperada. Kahneman & Tversky (1979) propuseram, com a Teoria do Prospecto, um modelo alternativo descritivo de escolha sob incerteza. Conforme exemplificado em Camerer (2000) a Teoria do Prospecto pode prever corretamente escolhas individuais, até mesmo nos casos onde a Teoria da Utilidade Esperada é violada.

Na Teoria do Prospecto a função valor substitui a função utilidade na Teoria da Utilidade Esperada. Essa função valor exibe as seguintes propriedades (De Giorgi & Hens, 2009):

1. Ela é definida sobre ganhos e perdas em relação a um ponto de referência em oposição à riqueza na Teoria da Utilidade Esperada, ou seja, ela é definida em relação a desvios de um ponto de referência. Normalmente o nível atual da riqueza do investidor (o chamado *status quo*) serve como ponto de referência. Entretanto, como argumentado por Kahneman & Tversky (1979), ganhos e perdas podem ser codificadas como uma expectativa ou um nível de aspiração que difere do *status quo*.

2. Ela é côncava para ganhos e convexa para perdas, ou seja, as pessoas exibem aversão ao risco no domínio positivo e propensão ao risco no domínio negativo.

3. A função é mais inclinada na área de perdas do que na área de ganhos, indicando aversão a perdas.

A figura 1 mostra uma típica função valor na Teoria do Prospecto. De acordo com Tversky & Kahneman (1992) a função valor (V) pode ser parametrizada como uma função potência, da seguinte forma:

$$V(X) = \begin{cases} x^{\alpha} & x \geq 0, \\ -\lambda(-x)^{\beta} & x < 0 \end{cases} \tag{15}$$

onde α e β medem a curvatura da função valor para ganhos e perdas respectivamente, e λ é o coeficiente de aversão à perda.

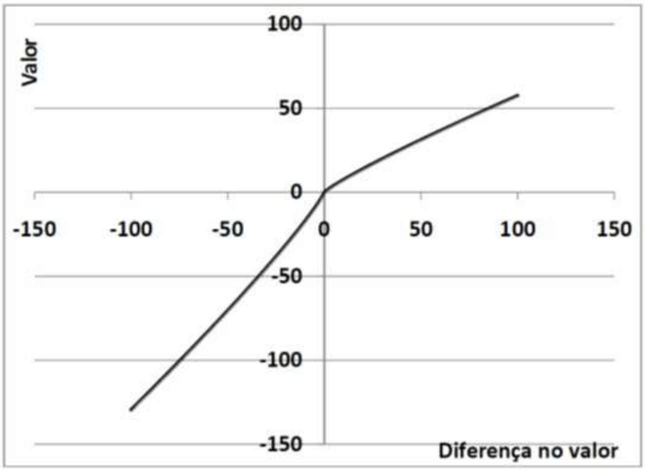

Figura 1
Típica função de valor na teoria do prospecto

Uma segunda característica da Teoria do Prospecto se refere à estimativa de probabilidades sobre a ocorrência de eventos. Enquanto a Teoria da Utilidade Esperada usa probabilidades simples, a Teoria do Prospecto usa pesos de decisão. Tversky & Kahneman (1992) definiram e calibraram com base em experimentos uma função peso, que associa a cada probabilidade p um peso $\pi(p)$. Esse peso reflete por sua vez o impacto de p no valor total do prospecto. Na maioria dos casos a soma dos pesos é menor que 1, ou seja, $\pi(p) + \pi(p-1) < 1$. A figura 2 mostra a função peso na Teoria do Prospecto. Ela é parametrizada da seguinte forma:

$$\pi^{+}(p) = \frac{p^{\gamma}}{(p^{\gamma} + (1-p)^{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}} \tag{16}$$

$$\pi^{-}(p) = \frac{p^{\delta}}{(p^{\delta} + (1-p)^{\delta})^{\frac{1}{\delta}}} \tag{17}$$

onde γ e δ são constantes. Uma característica desta função peso é que ela dá um peso maior a baixas e um peso menor a altas probabilidades.

O trabalho empírico de Tversky & Kahneman (1992) resultou nos seguintes valores medianos para os parâmetros apresentados anteriormente: $\alpha = 0,88$, $\beta = 0,88$, $\lambda = 2,25$, $\gamma = 0,61$ e $\delta = 0,69$.

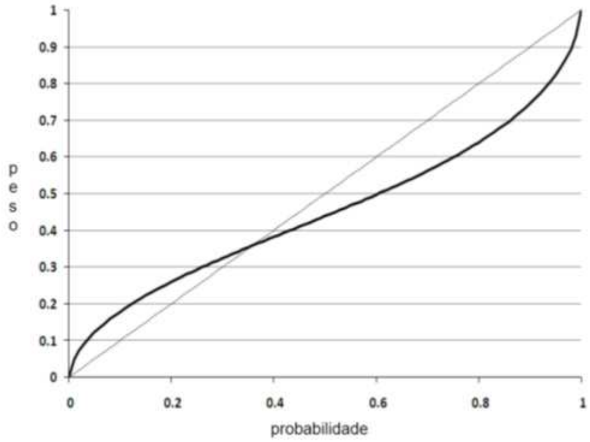

Figura 2
Função peso na teoria do prospecto

Existem alguns trabalhos que tentaram desenvolver medidas de desempenho baseadas na Teoria do Prospecto.

Zakamouline & Koekebakker (2009) e Koekebakker & Zakamouline (2008) fizeram uma análise de aproximação do problema de alocação de capital ótima de um investidor com aversão a perdas e demonstraram que a função valor da Teoria do Prospecto equivale aproximadamente à seguinte função utilidade, que eles denominaram de função utilidade comportamental:

$$E[U(W)] = MPS_{\alpha}(W, W_0) - \lambda MPI_{\beta}(W, W_0) \tag{18}$$

onde α β são os parâmetros da função valor, λ é o coeficiente de aversão à perda e W_0 é o ponto de referência, que pode ser o nível atual de riqueza (*status quo*).

O momento parcial inferior (MPI) e o momento parcial superior são, por sua vez, definidos da seguinte maneira:

$$MPI_{\beta}(W, W_0) = \int_{-\infty}^{W_0} (W_0 - w)^{\beta} dQ_W(w) \tag{19}$$

$$MPS_{\alpha}(W, W_0) = \int_{\infty}^{W_0} (w - W_0)^{\alpha} dQ_W(w) \tag{20}$$

Conforme demonstrado por Zakamouline & Koekebakker (2009), existe, portanto a seguinte diferença entre a avaliação do risco no investidor que usa uma função utilidade de média-variância e aquele que usa uma baseada nos momentos parciais oriundos da Teoria do Prospecto: Enquanto que para o primeiro a variância é a única fonte de risco, para o segundo existem três diferentes tipos de risco: o momento parcial inferior de ordem um, que é relacionado à perda esperada, o momento parcial inferior de ordem dois, que tem relação com a incerteza da ocorrência de perdas e o momento parcial superior de ordem dois queé relacionado à incerteza de ocorrência de ganhos. É interessante notar que a no caso da função utilidade baseada na Teoria do prospecto (18), a medida de aversão ao risco na área de perdas ainda é alavancada com a medida de aversão à perda. Isso sugere que um tomador de decisão com aversão à perda põe mais peso na incerteza relacionada à ocorrência de perdas do que na incerteza baseada na ocorrência de ganhos.

A medida de aversão à perda (λ) é dada, por sua vez, pela seguinte fórmula (Koekebakker & Zakamouline, 2008, Zakamouline & Koekebakker, 2009):

$$\lambda = \frac{U'_-}{U'_+} \tag{21}$$

onde U'_- e U'_+ são respectivamente a primeira derivada da função utilidade na área de perdas e ganhos. Essa medida de aversão à perda foi inicialmente proposta por Benartzi & Thaler (1995) e posteriormente desenvolvida por Köbberling & Wakker (2005). É importante observar que aversão à perda implica em $\gamma > 1$.

Os parâmetros α e β são por sua vez definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{U''_-}{U'_-} \\ \alpha &= -\frac{U''_+}{U'_+} \end{aligned} \tag{22}$$

onde U''_- e U''_+ são respectivamente a segunda derivada da função utilidade na área de perdas e ganhos.

Koekebakker & Zakamouline (2008) e Zakamouline & Koekebakker (2009) demonstram também que se o ponto de referência é assumido como sendo a riqueza inicial do investidor, capitalizada pela taxa livre de risco, isto é $W_0 = W(1+r)$, então é possível chegar a uma solução explícita do problema da alocação ótima de capital, além de uma solução fechada para a medida de desempenho do investidor.

Supondo que não haja vendas a descoberto, então a quantia ótima (φ) a ser investida no ativo de risco supondo que o investidor aja de acordo com a Teoria do Prospecto, mas sem incluir os pesos de decisão, ou seja, supondo que as probabilidades sejam computadas de maneira objetiva, é definida como (Zakamouline & Koekebakker, 2009):

$$\varphi = (\frac{\alpha MPS_{\alpha}(x-r,0)}{\lambda\beta MPI_{\beta}(x-r,0)})^{\frac{1}{\beta-\alpha}} \tag{23}$$

Essa solução só existe, entretanto, na condição que $\beta > \alpha$.

Com base nisto, e supondo que tanto α como $\beta > 0$, as medidas de desempenho (MD) equivalentes seriam dadas por:

$$MD(\alpha > 0) = \frac{E(x-r) - (\lambda-1)MPI_1(x-r,0)}{\sqrt{\lambda\theta MPI_2(x-r,0) + MPS_2(x-r,0)}} \tag{24}$$

$$MD(\beta > 0) = \frac{E(x-r) - (\lambda-1)MPI_1(x-r,0)}{\sqrt{\lambda MPI_2(x-r,0) + \theta MPS_2(x-r,0)}} \tag{25}$$

A medida θ é definida como:

$$\theta = \frac{\beta}{\alpha} \tag{26}$$

ou seja, θ é a relação entre a aversão do investidor à incerteza de ocorrência de perdas e ganhos respectivamente.

Zakamouline & Koekebakker (2009) demonstram que se $\lambda = 1$ e $\alpha = 0$, e partindo do pressuposto que o investidor não distorce a distribuição de probabilidades, então a medida de desempenho dada por (24) é equivalente ao seguinte Índice de Sortino (IS), definido em (10). Além disso, a medida de desempenho se reduz ao Índice de Sharpe, definido em (4), quando o investidor tem uma função de utilidade von Neumann-Morgenstern, na qual $\gamma = 1$ e $\alpha = \beta$.

Gemmill *et al.* (2006) também desenvolveram uma medida de desempenho baseada na Teoria do Prospecto, inicialmente proposta em um trabalho de Darsinos & Satchell (2004). Eles denominam a medida de LAP (*loss-averseperformance*). Essa medida de desempenho baseada na aversão à perda pode considerar ou não um chamado efeito dos ganhos/perdas anteriores, que os autores denominam como *house-moneyeffect*. Aqui será descrita somente a medida que incorpora tal efeito, a qual os autores descrevem como LAP^H. Definindo o erro de *tracking* (TE) como:

$$TE = r_p - r_b \tag{27}$$

onde r_p é o retorno da carteira e r_b é o retorno do ativo de referência, a LAPH é parametrizada da seguinte forma:

$$LAP^H = \frac{pE[(TE_t^+)^{v_1}]}{\lambda(1-p)E[(-TE_t^-)^{v_2}]} \tag{28}$$

onde TE_t^+ e $(-TE_t^-)$ são respectivamente o erro de *tracking* na área de ganhos e perdas respectivamente, p e $(1-p)$ são respectivamente a probabilidade objetiva da ocorrência de um TE positivo e negativo, v_1 e v_2 são os coeficientes de aversão ao risco na área de ganhos e perdas respectivamente.

Ao contrário da versão original da Teoria do Prospecto, Gemmill *et al.* (2006) definem o coeficiente de aversão à perda λ como o efeito "house-money". Este, por sua vez, é definido como função do desempenho anterior, ou seja:

$$\lambda_t = \beta_0 - \beta_1 TE_{t-1} \tag{29}$$

onde $\beta_0 > 0$, $\beta_1 \geq 0$. A interpretação do coeficiente λ é a seguinte: Quando há perdas no período anterior $(TE_{t-1} < 0)$, o coeficiente de aversão à perdas fica maior e a medida de desempenho (LAPH) piora. Sendo assim, perdas passadas influenciam a avaliação corrente de um ativo de uma forma negativa.

No Brasil existem alguns estudos que aplicaram a Teoria do Prospecto na tomada de decisões multicritério. Esses trabalhos se baseiam na metodologia TODIM (Tomada de Decisão Interativa Multicritério) desenvolvida por Gomes & Lima (1992b) e Gomes & Lima (1992a).

Conforme discutido em Gomes & Maranhão (2008), o diferencial do método TODIM consiste, portanto no uso da função valor desenvolvida por Kahneman & Tversky (1979). O método TODIM se contrapõe consequentemente aos demais métodos multicritério,que partem da premissa de que otomador de decisão decide buscando sempre a solução correspondente ao máximo de algumamedida de desempenho racional. Um exemplo poderia sera maximização de uma função de utilidademultiatributo, como no caso da MAUT (*Multi-AttributeUtilityTheory*) desenvolvida por Keeney & Raiffa (1993).

O método TODIM já foi aplicado no Brasil, entre outros, na avaliação do aluguel de propriedades residenciais (Gomes & Rangel, 2009) e na análise da melhor opção para o destino do gás natural (Gomes & Rangel, 2009).

Gomes & Rangel (2009) aplicaram o método TODIM na avaliação do aluguel de propriedades residenciais na cidade de Volta Redonda. O objetivo do estudo foi de definir um valor de referência para os aluguéis, baseado no ranqueamento de propriedades com diferentes características. Como resultado da aplicação do método TODIM foi obtida uma ordenação das residências, além de diferentes escalas do valor do aluguel a cobrar de todas as propriedades analisadas. O estudo foi complementado com uma análise de sensibilidade de todos os resultados numéricos obtidos.

O método TODIM também foi aplicado na seleção da melhor opção para o destino das reservas de gás natural descobertas no campo de Mexilhão na bacia de Santos (Gomes & Rangel, 2009). O objetivo do estudo foi de permitir aos tomadores de decisão não só a escolha da melhor opção para o destino do gás natural, como também a seleção daquelas opções de investimento melhor alinhadas com as estratégias da empresa. A aplicação do método TODIM se mostrou muito útil na recomendação de opções para projetos de investimento na área de petróleo e gás, pois conseguiu alinhar bem a seleção das melhores alternativas face aos critérios de escolha utilizados e em relação aos cenários testados.

Os estudos apresentados até aqui servem como base para o desenvolvimento de uma nova medida de desempenho, que será descrita a seguir.

4. Desenvolvimento de uma nova medida baseada na Teoria do Prospecto

O objetivo desta seção é desenvolver uma medida de desempenho baseada na Teoria do Prospecto descrita anteriormente.

Os estudos apresentados anteriormente demonstram que existem duas maneiras de se desenvolver uma medida de desempenho, que é abordando ou não as preferências do investidor. O índice de Sharpe descrito anteriormente é um exemplo de medida onde as preferências do investidor não são consideradas, já que independe do nível de aversão ao risco do tomador de decisão. Já as medidas de desempenho desenvolvidas, por exemplo, por Zakamouline & Koekebakker (2009) e Koekebakker & Zakamouline (2008) dependem por sua vez dos parâmetros α, β e λ da função valor, ou seja, sem computar os níveis de atitude frente ao risco nas áreas de ganho e perdas, além do nível de aversão à perda, é impossível chegar a um escore de desempenho.

A medida a ser desenvolvida neste estudo se enquadra no segundo tipo, ou seja, ela é específica a cada tomador de decisão. Além de se abordar os parâmetros da função valor, a medida vai mais adiante e abordará também a maneira como os tomadores de decisão transformam a distribuição de probabilidade original em uma distribuição de probabilidades subjetiva, ou seja, irá abordar também a parametrização da função peso.

A medida tem como base os estudos de Darsinos & Satchell (2004), Gemmill *et al.* (2006) e De Giorgi & Hens (2009). A medida de desempenho também terá uma natureza geral, ou seja, não será necessariamente focada na avaliação de investimentos financeiros, mas sim terá uma aplicação que independe do tipo de ativo a ser analisado. Isso significa que ela poderá ser utilizada para computar o desempenho de qualquer decisão envolvendo riscos.

Primeiro parte-se da definição de Erro da Meta (EM), definida da seguinte maneira:

$$EM = RA - M \tag{30}$$

onde RA = Resultado Alcançado, ou seja, é qual foi efetivamente o resultado alcançado e M = Meta, o ponto de referência. O ponto de referência pode ser interpretado como aquele resultado que o tomador de decisão almeja alcançar. Erros da meta podem ser positivos (EM^+), indicando que o decisor ultrapassou o resultado desejado, ou negativo (EM^-), sinal que o resultado ficou abaixo do esperado. Em termos da função valor da Teoria do Prospecto (equação 15), EM^+ implica que o tomador de decisão está na área de ganhos, ao passo que EM^- demonstra que ele está na área de perdas.

Do ponto de vista do tomador de decisão, este tem uma função peso (equações 16 e 17) baseada na Teoria do Prospecto, ou seja, há uma transformação por parte do decisor das probabilidades de ele estar acima ou abaixo da meta.

Com base nisso, chega-se ao resultado esperado na área de ganhos (RE^+) e de perdas (RE^-) respectivamente:

$$RE^{+} = \pi^{+}(p)E[(EM^{+})]^{\alpha} \tag{31}$$

ou em forma de distribuição da função peso na área de ganhos:

$$RE^{+} = \int_{M}^{+\infty}(p)E[(EM^{+})]^{\alpha}d\pi^{+}(p) \tag{31a}$$

$$RE^{-} = \pi^{-}(p)\lambda E[(-EM^{-})]^{\beta} \tag{32}$$

ou em forma de distribuição da função peso na área de perdas:

$$RE^{-} = \int_{-\infty}^{M}(p)\lambda E[(-EM^{-})]^{\beta}d\pi^{-}(p) \tag{32a}$$

onde $\pi^{+}(p)$ e $\pi^{-}(p)$ são respectivamente a função peso na área de ganhos e perdas; $E[(EM^{+})]^{\alpha}$ e $[(-EM^{-})]^{\beta}$ são na devida ordem as expectativas de estar acima e abaixo da meta, parametrizados respectivamente com os coeficientes de aversão/propensão ao risco na área de ganhos e perdas; e λ é o coeficiente de aversão à perda.

A medida de desempenho comportamental (MDC) é computada, por fim, da seguinte forma:

$$MDC = \frac{RE^{+}}{RE^{-}} \tag{33}$$

ou:

$$MDC = \frac{\pi^{+}(p)E[(EM^{+})]^{\alpha}}{\pi^{-}(p)\lambda E[(-EM^{-})]^{\beta}} \tag{34}$$

ou em forma de distribuição da função peso:

$$MDC = \frac{\int_{M}^{+\infty}(p)E[(EM^{+})]^{\alpha}d\pi^{+}(p)}{\int_{-\infty}^{M}-(p)\lambda E[(EM^{-})]^{\beta}d\pi^{-}(p)} \tag{34a}$$

Algumas considerações dessa medida devem ser feitas: o denominador é multiplicado pelo sinal de menos, já que os desvios são negativos na área de perdas, ou seja, quanto maior forem esses desvios ou quanto maior for o nível de aversão à perda do tomador de decisão, pior será a medida de *performance*.

Além disso, a medida não é geral e sim específica a cada tomador de decisão, já que os parâmetros dependem do grau de aversão à perda e das atitudes frente ao risco na área de ganhos e perdas de cada decisor. Uma opção quando as decisões são feitas em grupo é, portanto utilizar medianas dos resultados das loterias, que são usadas para estimar os parâmetros (Abdellaoui *et al.*, 2008), ou até as medianas dos próprios parâmetros em si (Tversky & Kahneman, 1992, Abdellaoui *et al.*, 2008).

Para demonstrar melhor como funciona a nova medida de desempenho será desenvolvido um exemplo em que será aplicada a medida nova, conjuntamente com outras medidas descritas anteriormente. Na tabela 1 são apresentados 3 ativos com diferentes distribuições de probabilidades e resultados. Assume-se que a taxa livre de risco, que vai ser utilizada como referência é 4% ao ano.

Tabela 1
Distribuição de probabilidades dos 3 ativos

Estado	1	2	3	4
Probabilidade	0,01	0,24	0,5	0,25
Retorno ativo A	-10%	0%	20%	30%
Retorno ativo B	-15%	4%	20%	30%
Retorno ativo C	-5%	4%	10%	20%
Taxa Livre de Risco	4%	4%	4%	4%

Neste exemplo tanto a variância, como as semi-variâncias na área de ganhos como na de perdas irão ser calculadas não com base no retorno esperado e sim com base na taxa livre de risco, que é a meta a ser alcançada. Assim sendo, temos a seguinte relação:

$$\sigma^2 = \sigma_+^2 + \sigma_-^2 \tag{35}$$

ou seja a variância total corresponde às somas respectivamente das semi-variâncias positiva e negativa.

Na tabela 2 estão listados todos os parâmetros descritivos dos 3 ativos.

Tabela 2
Parâmetros descritivos da distribuição dos retornos dos 3 ativos com risco

Parâmetro	Ativo A	Ativo B	Ativo C
$E(r)$	17,40%	18,31%	10,91%
σ	17,40%	17,33%	9,10%
σ_+	17,23%	17,23%	9,06%
σ_-	2,41%	1,90%	0,90%
RE^+	9,94	9,94	5,37
RE^-	-3,63	-1,65	-0,86

A primeira linha descreve o retorno esperado ($E(r)$), seguido do desvio padrão (σ). As terceiras e quartas linhas são respectivamente os desvios-padrão baseados na semi-variância positiva e negativa respectivamente. Eles são denominados σ_+ e σ_-. Assim, por exemplo, para o ativo A, calcula-se primeiro as semi-variâncias positiva e negativa respectivamente:

$$\sigma_{+A}^2 = 0 + 0 + 0.5(20-4)^2 + 0,25(30-4)^2 = 297$$

$$\sigma_{-A}^2 = 0.01(-10-4)^2 + 0,24(0-4)^2 + 0 + 0 = 5,8$$

Repare que (35) procede, ou seja, a variância total equivale à soma das semi-variâncias positiva e negativa ($17,40^2 = 297+5,8$). Com base nas semi-variâncias se chega à $\sigma_{+A} = 17,23\%$ e $\sigma_{-A} = 2,41\%$.

Na quarta e quinta linhas estão listados RE^+ e RE^-, calculados de acordo com as fórmulas 30a e 31a respectivamente.

Para chegar a esses valores adotaram-se os parâmetros estimados por Tversky & Kahneman (1992) em seu trabalho seminal. Ou seja, baseado nas fórmulas (15), (16) e (17), tem-se: $\alpha = 0,88$, $\beta = 0,88$, $\lambda = 2,25$, $\gamma = 0,61$ e $\delta = 0,69$.

Para a obtenção da nova medida, o primeiro passo é calcular os pesos que equivalem às probabilidades objetivas. Assim para valores negativos utiliza-se (16), para positivos (17). Continuando com o exemplo do ativo A, a probabilidades de 0,01, 0,24, 0,5 e 0,25 equivalem a pesos (probabilidades subjetivas) de 0,055, 0,311, 0,42 e 0,291 respectivamente.

Em seguida é aplicada a função valor (equação 15), sendo que no caso de valores negativos, o valor deve ser multiplicado por 2,25, que é o coeficiente de aversão à perda. Assim sendo chegamos aos seguintes valores de RE^+ e RE^-:

$$RE_A^+ = [0,42(20-4)^{0,88}] + [0,291(30-4)^{0,88}] = 9,94$$

$$RE_A^- = [0,055(-2,25(-10-4)^{0,88})] + [0,311(-2,25(0-4)^{0,88})] = -3,63$$

Com base nessas considerações é possível então comparar as diversas medidas de desempenho entre si, no que tange a avaliação dos 3 ativos e chegar a algumas conclusões importantes. Aqui serão analisadas as seguintes medidas: Índice de Sharpe, Índice de Sortino, Medida Ômega, Relação Potencial de *Upside* e a Medida de Desempenho Comportamental.

A tabela 3 mostra os resultados por ativo.

Tabela 3
Indicadores de desempenho por ativo

Indicado	Ativo A	Ativo B	Ativo C
IS	0,77	0,83	0,76
ISO	8,63	10,38	7,28
Ω	13,18	76,32	77,78
RPU	6,02	7,63	7,78
MDC	2,74	6,02	6,24

Algumas conclusões podem ser tiradas destes resultados. O ativo B foi o que apresentou melhor desempenho, se considerarmos o Índice de Sharpe e o Índice de Sortino. Já o ativo C apresentou o melhor resultado na Medida Ômega, na Relação Potencial de *Upside* e na Medida de Desempenho Comportamental. Se agora forem observados os ativos com pior desempenho, pode ser constatado que o ativo C obteve os piores Índices de Sharpe e de Sortino, sendo que o ativo A teve a pior classificação na medida Ômega, na Relação de Potencial de *Upside* e na Medida de Desempenho Comportamental.

Estes resultados podem ser interpretados sob diversos ângulos. Começando com o ativo A, a explicação para o seu pior desempenho na Medida de Desempenho Comportamental, na Medida Ômega e na Relação Potencial de *Upside*, se deve ao fato deste ativo ter dois desvios negativos em relação à meta. No caso da medida comportamental, esses desvios negativos são ainda penalizados com o valor de 2,25, que é o coeficiente de aversão à perda. Já na medida Ômega e na Relação de Potencial de *Upside*, o raciocínio é semelhante, com a ressalva que as perdas não são penalizadas com um coeficiente de aversão à perda. Dessa maneira a medida nova pode ser interpretada com uma variante da medida Ômega, mas com um embasamento comportamental. No caso do ativo B, o melhor desempenho nos Índices de Sharpe e Sortino se deve ao fato deste ativo ter a melhor relação entre prêmio de risco e risco, tanto considerando a variância total como a semi-variância negativa.

Já a interpretação do melhor desempenho do ativo C na Medida Ômega, na Relação de Potencial de *Upside* e na Medida de Desempenho Comportamental se deve ao fato deste ativo ter a menor semi-variância negativa, além dos menores desvios negativos em relação à meta, levando, portanto a uma maior relação entre os ganhos e as perdas e diminuindo também, no caso da medida nova, a uma redução do sentimento de aversão à perda.

5. Conclusões

O objetivo deste artigo foi de propor uma medida nova de desempenho baseada em preceitos das Finanças Comportamentais, em especial da Teoria do Prospecto. Isso advém do fato da maioria das medidas utilizadas na prática hoje em dia não levar em consideração as especificidades de cada investidor.

Para tal foi feita uma revisão de diferentes medidas de desempenho baseadas tanto na Teoria da Utilidade Esperada como na Teoria da Utilidade Não-Esperada, mostrando que independente de que tipo de abordagem que se utiliza, para computar uma medida de desempenho de um ativo é necessário conhecer a função utilidade ou função valor do tomador de decisão.

A medida sugerida neste trabalho é baseada nas funções valor e peso do tomador de decisão e pode ser interpretada como uma medida ômega comportamental. Para tal foi apresentado um exemplo simples, em que diversas medidas de desempenho foram comparadas, incluindo a medida nova do estudo. No caso da medida nova, foram utilizados os parâmetros originalmente estimados por Tversky & Kahneman (1992) e os resultados mostraram que a ordenação dos ativos variou de acordo com a medida de desempenho adotada. De acordo com o esperado a Medida de Desempenho Comportamental conseguiu captar claramente a distorção das probabilidades e a aversão à perda do tomador de decisão, ou seja, aqueles ativos com maiores desvios negativos em relação à meta foram os que tiveram o pior desempenho.Isso mostra que uma medida de desempenho, para ser efetiva, deve trabalhar com decisões baseadas em preferências de cada tomador de decisão, para então, por meio de procedimentos estatísticos, ser generalizada para um grupo maior de tomadores de decisão, se for necessário.

Referências

Abdellaoui, Mohammed, Bleichrodt, Han, & L'Haridon, Olivier. 2008. A Tractable Method to Measure Utility and Loss Aversion under Prospect Theory. *Journal of Risk and Uncertainty*, **36**, 245–266.

Allais, Maurice. 1953. Le Comportement de l'HommeRationneldevant Le Risque: Critique Des PostulatsetAxiomes de l'EcoleAmericaine. *Econometrica*, **21**, 503–546.

Barberis, Nicholas, & Huang, Ming. 2008. Stocks as Lotteries: The Implications of Probability Weighting for Security Prices. *American Economic Review*, **98**, 2066–2100.

Barberis, Nicholas, & Thaler, Richard H. 2003. A Survey of Behavioral Finance. *Pages 1053–1128 of:* Constantinides, George M., Harris, Milton, & Stulz, René M. (eds), *Handbook of the Economics of Finance*. Elsevier.

Barberis, Nicholas, Huang, Ming, & Santos, Tano. 2001. Prospect Theory and Asset Prices. *The Quarterly Journal of Economics*, **116**, 1–53.

Barberis, Nicholas, Huang, Ming, & Thaler, Richard H. 2006. Individual Preferences, Monetary Gambles, and Stock Market Participation: A Case for Narrow Framing. *American Economic Review*, **96**, 1069–1090.

Bawa, Vijay S. 1978. Safety-First, Stochastic Dominance, and Optimal Portfolio Choice. *Journal of Financial & Quantitative Analysis*, **13**, 255–271.

Benartzi, Shlomo, & Thaler, Richard H. 1995. Myopic Loss Aversion and the Equity Premium Puzzle. *The Quarterly Journal of Economics*, **110**, 73–92.

Bernardo, Antonio E., & Ledoit, Olivier. 2000. Gain, Loss, and Asset Pricing. *Journal of Political Economy*, **108**, 144–172.

Camerer, Colin. 2000. Prospect Theory in the Wild: Evidence from the Field. *Pages 288–300 of:* Kahneman, Daniel, & Tversky, Amos (eds), *Choices, Values, and Frames*. Cambridge: Cambridge University Press.

Chen, Li., He, Simai, & Zhang, Shuzhong. 2011. When All Risk-Adjusted Performance Measures are the Same: In Praise of the Sharpe Ratio. *Quantitative Finance*, **11**, 1439–1447.

Darsinos, TheofanisT., & Satchell, Stephen. 2004. Generalizing Universal Performance Measures. *Risk*, **17**, 80–84.

De Bondt, Werner F. M. 1998. A Portrait of the Individual Investor. *European Economic Review*, **42**, 831–844.

De Giorgi, Enrico, & Hens, Thorsten. 2009. Prospect Theory and Mean-Variance Analysis: Does It Make a Difference in Wealth Management? *Investment Management and Financial Innovations*, **6**, 122–129.

Eling, Martin, Farinelli, Simone, Rossello, Damiano, & Tibiletti, Luisa. 2011. One-Size or Tailor-Made Performance Ratios for Ranking Hedge Funds. *Journal of Derivatives and Hedge Funds*, **16**, 267–277.

Ellsberg, Daniel. 1961. Risk, Ambiguity, and the Savage Axions. *Quarterly Journal of Economics*, **75**, 643–669.

Farinelli, Simone, Ferreira, Manuel, Rossello, Damiano, Thoeny, Markus, & Tibiletti, Luisa. 2008. Beyond Sharpe Ratio: Optimal Asset Allocation Using Different Performance Ratios. *Journal of Banking and Finance*, **32**, 2057–2063.

Fishburn, Peter C. 1977. Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns. *American Economic Review*, **67**, 116–126.

Gemmill, Gordon, Hwang, Soosung, & Salmon, Mark. 2006. Performance Measurement with Loss Aversion. *Journal of Asset Management*, **7**, 190–207.

Goetzmann, William, Ingersoll, Jonathan, Spiegel, Matthew, & Welch, Ivo. 2002. *Sharpening Sharpe Ratios*. National Bureau of Economic Research Working Paper Series No. 9116.

Gomes, Francisco J. 2005. Portfolio Choice and Trading Volume with Loss Averse Investors. *The Journal of Business*, **78**, 675–706.

Gomes, Luiz F. A. M., & Lima, Monica M. P. P. 1992a. From Modelling Individual Preferences to Multicriteria Ranking of Discrete Alternatives: A Look at Prospect Theory and the Additive Difference Model. *Foundations of Computing and Decision Sciences*, **17**, 171–184.

Gomes, Luiz F. A. M., & Lima, Monica M. P. P. 1992b. TODIM: Basics and Application to Multicriteria Ranking of Projects with Environmental Impacts. *Foundations of Computing and Decision Sciences*, **16**, 113–127.

Gomes, Luiz F. A. M., & Maranhão, Francisco, J. C. 2008. A Exploração de Gás Naturalem Mexilhão: Análise Multicritério Pelo Método TODIM. *Pesquisa Operacional*, **28**, 491–509.

Gomes, Luiz F. A. M., & Rangel, Luís A. D. 2009. An Application of the TODIM Method to the Multicriteria Rental Evaluation of Residential Properties. *European Journal of Operational Research*, **193**, 204–211.

Ingersoll, Jonathan, Spiegel, Matthew, & Goetzmann, William. 2007. Portfolio Performance Manipulation and Manipulation-Proof Performance Measures. *The Review of Financial Studies*, **20**, 1503–1546.

Kahneman, Daniel, & Tversky, Amos. 1979. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. *Econometrica*, **47**, 263–291.

Kaplan, Paul D., & Knowles, James A. 2004. A Generilized Downside Risk-Adjusted Performance Measure. *Journal of Performance Measurement*, **8**, 42–54.

Keeney, Ralph L., & Raiffa, Howard. 1993. *Decisions with Multiple Objectives: Preferences Andvalue Tradeoffs*. Cambridge: Cambridge University Press.

Köbberling, Veronika, & Wakker, Peter P. 2005. An Index of Loss Aversion. *Journal of Economic Theory*, **122**, 119–131.

Koekebakker, Steen, & Zakamouline, Valeri. 2007a. *Generalized Sharpe Ratios and Portfolio Performance Evaluation*. Working Paper, University of Agder.

Koekebakker, Steen, & Zakamouline, Valeri. 2007b. *Skewness Preferences in Investment Decisions*. Working Paper, University of Agder.

Koekebakker, Steen, & Zakamouline, Valeri. 2008. *Analysis of Financial Decision Making with Loss Aversion*. European Financial Management Association Annual Meeting. Athens.

Levy, Haim, & Markowitz, Harry. 1979. Approximating Expected Utility by a Function of Mean and Variance. *The American Economic Review*, **69**, 308–317.

Markowitz, Harry. 1952. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7**, 77–91.

Markowitz, Harry. 1959. *Portfolio Selection. Eficient Diversification of Investments*. New York: John Wiley.

Pézier, Jacques. 2011. *Rationalization of Investment Preference Criteria*. ICMA Centre Discussion Papers in Finance DP2011-12.ICMA Centre. TheUniversity of Reading.

Samuelson, Paul A. 1970. The Fundamental Approximation Theorem of Portfolio Analysis in Terms of Means, Variances and Higher Moments. *The Review of Economic Studies*, **37**, 537–542.

Schipper, Katherine, & Thompson, Rex. 1983. Evidence on the Capitalized Value of Merger Activity for Acquiring Firms. *Journal of Financial Economics*, **11**, 85–119.

Shadwick, William F., & Keating, Con. 2002. A Universal Performance Measure. *Journal of Performance Measurement*, **6**, 59–84.

Sharpe, William F. 1966. Mutual Fund Performance. *The Journal of Business*, **39**, 119–138.

Sortino, Frank A., & Price, Lee N. 1994. Performance Measurement in a Downside Risk Framework. *Journal of Investing*, **3**, 59–65.

Sortino, Frank A., Van de Meer, Robert, & Plantinga, Auke. 1999. The Dutch Triangle. *Journal of Portfolio Management*, **26**, 50–57.

Sortino, Frank A., Van de Meer, Robert, Plantinga, Auke, & Forsey, Hal. 2003. The Upside Potential Ratio: What are We Trying to Measure? *Senior Consultant*, **6**, 1–3.

Tsiang, Sho-Chieh. 1972. The Rationale of the Mean-Standard Deviation Analysis, Skewness Preference, and the Demand for Money. *The American Economic Review*, **62**, 354–371.

Tversky, Amos, & Kahneman, Daniel. 1992. Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty. *Journal of Risk and Uncertainty*, **5**, 297–323.

Von Neumann, John, & Morgenstern, Oskar. 1944. *Theory of Games and Economic Behavior*. New Jersey: Princenton University Press.

Zakamouline, Valeri. 2010. *The Choice of Performance Measure Does Influence the Evaluation of Hedge Funds*. SSRN eLibrary. Disponível em: `http://ssrn.com/paper=1403246`.

Zakamouline, Valeri. 2011. Portfolio Performance Evaluation with Loss Aversion. *Quantitative Finance*, **iFirst**, 1–12.

Zakamouline, Valeri, & Koekebakker, Steen. 2009. A Generalisation of the Mean-Variance Analysis. *European Financial Management*, **15**, 934–970.