Alberto Landro

ACERCA DEL "REGELLOSIGKEITSAXIOM" DE VON MISES

Cuadernos del CIMBAGE, núm. 12, 2010, pp. 1-21,
Facultad de Ciencias Económicas
Argentina

CUADERNOS DEL CIMBAGE

Cuadernos del CIMBAGE,
ISSN (Versión impresa): 1666-5112
cimbage@econ.uba.ar
Facultad de Ciencias Económicas
Argentina

Cuadernos del CIMBAGE Nº 12 (2010) 1 - 21

ACERCA DEL "REGELLOSIGKEITSAXIOM" DE VON MISES

Alberto Landro
Centro de Investigaciones en Econometría
Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Matemática
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122 - 2º piso - Ciudad de Buenos Aires - C1120AAQ - Argentina
alandro@econ.uba.ar

Recibido 21 de septiembre de 2009, aceptado 23 de noviembre de 2009

Resumen

El problema de la indemostrabilidad de la aleatoriedad de la estructura de una sucesión de observaciones ha sido estudiado por A. Church, A. Turing, G. Chaitin, A. Kolmogorov y P. Martin-Löf. En este trabajo se propone realizar una objeción formal al axioma de irregularidad de von Mises y postular la posibilidad de aproximar los conceptos de aleatorio y demostrable, a partir de la consideración de procesos dinámicos con atractores complejos

Palabras clave: aleatoriedad, interpretación frecuencista de la probabilidad, complejidad, teorema de Gödel, tesis de Church-Turing, número de Chaitin.

ON VON MISES "REGELLOSIGKEITSAXIOM"

Alberto Landro
Centro de Investigaciones en Econometría
Instituto de Investigaciones en Administración, Contabilidad y Matemática
Facultad de Ciencias Económicas
Universidad de Buenos Aires
Av. Córdoba 2122 - 2º piso - Ciudad de Buenos Aires - C1120AAQ - Argentina
alandro@econ.uba.ar

Received September 21st 2009, accepted November 23rd 2009

Abstract

The problem of non-demonstrability of randomness in a structure containing a succession of observations has been studied by A. Church, A. Turing, G. Chaitin, A. Kolmogorov, and P. Martin-Löf. The purpose of this study is to raise a formal objection to von Mises' irregularity axiom and to put forward the possibility of bringing the concepts of random and demonstrable closer together from the consideration of dynamic processes with complex attractors.

Keywords: randomness, frequencist viewpoint of the probability, complexity, Gödel theorem, Church-Turing Tesis, Chaitin's number.

---

1. A MODO DE INTRODUCCIÓN: LA ALEATORIEDAD Y LA INTERPRETACIÓN FRECUENCISTA DE LA PROBABILIDAD

La extensión de la teoría de la probabilidad al ámbito de la física, la biología, la psicología y la sociología trajo aparejados cambios radicales en los métodos de investigación de dichas ramas de la ciencia. Pero, a su vez, este cambio en el pensamiento científico generó una nueva interpretación de la noción de probabilidad y su reconocimiento, en el dominio de la epistemología, como una herramienta fundamental en la investigación científica. En particular, condujo al traslado progresivo del concepto de probabilidad "a priori" clásica, basado en el supuesto de equiprobabilidad de los resultados, al de probabilidad "a posteriori" física, definida a partir de la frecuencia relativa que se obtiene como resultado de la observación repetida de un fenómeno en igualdad de condiciones.

La teoría frecuencista tuvo su culminación en la formulación realizada por Hans Reichenbach y Richard von Mises "...a fin de reemplazar o complementar la rígida estructura causal de la teoría clásica"[1], a partir de la definición de "objeto colectivo" o "serie colectiva" como un conjunto de elementos heterogéneos que varían aleatoriamente con respecto a un atributo cuantificable común.

Von Mises, R. (1928) considera la necesidad de distinguir entre "colectivos empíricos" (que pueden ser hallados en el mundo real que, por lo tanto, son observables y que, en consecuencia, están formados por un número finito de elementos)[2] y "colectivos matemáticos" (formados por una sucesión infinita de elementos). De la comparación de estas dos definiciones surge, en forma inmediata, que un colectivo matemático consiste en una sucesión ordenada, en tanto que un colectivo empírico no observa ningún orden natural.

De acuerdo con von Mises, R. (1928), los colectivos empíricos obedecen a dos principios fundamentales: i) la "ley de estabilidad de las frecuencias estadísticas"[3] y ii) la existencia de aleatoriedad absoluta en la proyección de los atributos sobre los elementos del colectivo.

A partir de estos principios, mediante la abstracción (o idealización), es posible establecer los axiomas de la teoría matemática de la probabilidad

---

[1] Von Mises, 1921.

[2] Que dan origen a lo que algunos autores han denominado *frecuencismo finito.*

[3] Esta denominación se debe a Keynes, 1921. Von Mises, 1928 la llamó el "*fenómeno primario*" ("*Urphänomen*") de la teoría de la probabilidad.

aplicables a colectivos matemáticos de la forma $C = \{w_1, w_2, ..., w_n, ...\}$ (donde $w_n \in \Omega \left(n = 1,2,...\right)$), a saber: 1) axioma de convergencia; 2) axioma de aleatoriedad o de irregularidad ("Regellosigkeitsaxiom").

El tratamiento de von Mises de la aleatoriedad constituye la parte más original, más controvertida y más interesante de su teoría. El principio fundamental es que los elementos de los colectivos empíricos deben satisfacer alguna ley de aleatoriedad (por ejemplo, la ley de los grandes números).

Fry, T.C. (1928) y Cantelli, F.P. (1935) plantearon una objeción formal a este principio, estableciendo que sólo una formulación matemática precisa (es decir, utilizando exclusivamente conceptos estrictamente matemáticos) del axioma de aleatoriedad podría garantizar la consistencia de ambos axiomas y, en consecuencia, la consistencia de la teoría.

En base a los postulados de K. Gödel, la propuesta de Fry-Cantelli fue completada formalmente por los aportes sucesivos de A. Wald, A. Church, A. Turing, A.N. Kolmogorov, G. Chaitin y P. Martin-Löf, a partir de los cuales se puede concluir en la indemostrabilidad de la aleatoriedad.

2. EL "ENTSCHEIDUNGSPROBLEM"

Las primeras ideas sobre complejidad (y, en consecuencia, sobre aleatoriedad como complejidad máxima) fueron propuestas originalmente por G.W. Leibniz en su *Discours de métaphysique* (1686). En esta obra, en lo que podría considerarse un cuestionamiento al principio determinístico de la razón insuficiente[4], Leibniz planteó la distinción entre fenómenos formalizables, es decir, que pueden ser explicados por una ley que permite descubrir sistemas de relación y construir modelos sobre su comportamiento, y fenómenos irregulares. Establece, además, el principio que una teoría debe ser más simple que los datos que intenta explicar[5].

Como una aproximación a la propuesta de Leibniz, en 1928 David Hilbert y Wilhelm Ackermann, a partir de una posición formalista, plantearon el "Entscheidungsproblem" (o problema decisorio) que consistía en decidir si era posible definir un sistema matemático formal, completo y consistente

[4] Según el cual, si algo es verdadero, debe serlo por alguna razón.
[5] Ver Rosen, 1985; Bar-Hillel; Wagenaar, 1991.

que permitiera determinar la veracidad o falsedad de cualquier proposición. Es decir, un sistema tal que, dado un problema perfectamente definido, siempre fuera posible hallar un algoritmo capaz de resolverlo[6].

Hilbert estaba convencido que la matemática tradicional era lógicamente consistente, que incluía dos clases de "verdad": una sintáctica, inherente exclusivamente a la forma; y otra semántica, inherente a los referentes externos, y que la solución a todas sus paradojas e inconsistencias radicaba en "capturar" las verdades semánticas mediante reglas sintácticas a partir de la creación de una estructura puramente formal en cuyo ámbito se pudiera establecer la verdad de sus afirmaciones matemáticas[7].

Las afirmaciones de un sistema formal son sucesiones finitas de símbolos abstractos. El sistema está compuesto por una axiomática definida por un conjunto finito de dichas sucesiones y un conjunto finito de reglas de transformación que permiten convertir una sucesión de símbolos en otra distinta: dado un axioma, el proceso general consiste en aplicar una sucesión finita de transformaciones que lo conviertan en una secuencia finita de nuevas sucesiones en la cual cada sucesión es un axioma o es un derivado de los axiomas anteriores. La sucesión final de dicha secuencia constituye un teorema del sistema. La totalidad de los teoremas define un conjunto de sucesiones demostrables del sistema.

La relación entre este ámbito puramente sintáctico del sistema formal y el ámbito semántico de los objetos matemáticos y sus propiedades se obtiene a partir de la interpretación de los elementos del sistema formal en términos de los objetos y operaciones de una estructura matemática asociada, es decir, a partir de la anexión de un significado semántico a la estructura abstracta, puramente sintáctica, de los símbolos y sucesiones del sistema formal. De modo que los teoremas del sistema formal pueden ser interpretados como afirmaciones verdaderas acerca de los objetos matemáticos asociados.

Se dice que un sistema es completo si cada verdad matemática puede ser traducida en un teorema y viceversa. Por otra parte, si el sistema no

---

[6] El concepto matemático riguroso de *algoritmo* como conjunto finito de reglas ordenadas que se puede ejecutar en un número determinado de pasos fue obtenido recién en la década de 1930 como culminación de la investigaciones sobre los fundamentos de la lógica matemática (ver Knuth, 1985; Davies, 2000).

[7] Este criterio constituye la esencia de la filosofía formalista.

presenta afirmaciones contradictorias que puedan ser demostradas (por ejemplo, que una afirmación y su negación puedan ambas ser traducidas en teoremas), se dice que es consistente.

El planteo de Hilbert-Ackermann consideraba que el problema de la consistencia de la matemática en su totalidad era reducible a la determinación de la consistencia de la aritmética. De modo que su propuesta se limitó a desarrollar una teoría de la aritmética basada en un sistema formal completo, consistente, suficientemente potente como para representar todas las afirmaciones que se pudieran hacer sobre los números naturales y tal que las afirmaciones demostrables pudieran ser demostrables en un número finito de pasos. En este contexto, el “Entscheidungsproblem” puede ser interpretado como el problema de decidir si existe algún procedimiento finito capaz de determinar la verdad o falsedad de cualquier afirmación aritmética. En otros términos, decidir si la aritmética puede ser considerada un sistema que contiene un modelo de sí mismo, es decir si, de acuerdo con la nomenclatura de Rosen, R. (1985), puede ser considerada un “sistema anticipatorio”.

3. EL TEOREMA DE INCOMPLETITUD

En 1931 Kurt Gödel publicó su teorema de incompletitud en el que, refutando la pretensión de Hilbert y Ackermann de hallar una teoría del todo en la matemática y lesionando seriamente los postulados formalistas, demostró que “todo sistema de primer orden consistente, que contenga los teoremas de la aritmética y cuyo conjunto de axiomas sea recursivo es incompleto” (como se verá más adelante, la restricción a un conjunto recursivo de axiomas se justifica en la medida que suponer un conjunto no-recursivo genera el problema de la imposibilidad de verificar si una fórmula es o no un axioma y, por lo tanto, si una demostración es o no válida). En una generalización posterior Gödel consideró la utilización de sistemas inductivos más potentes que la lógica de primer orden y concluyó que “no existe ningún sistema deductivo cuyo conjunto de axiomas sea recursivo que contenga los teoremas de la aritmética y que además sea consistente y completo”[8].

---

[8] En otros términos, el teorema de Gödel postula que la aritmética no es completamente formalizable, que el total de teoremas en la teoría de números es de cardinalidad mayor que el conjunto de teoremas de una formalización; es decir que la aritmética no es sólo sintaxis

El punto de partida del desarrollo que condujo a Gödel a esta versión lógica formal de su teorema fue la paradoja de Epiménides que, en este contexto puede ser expresada como "esta afirmación es falsa". La intención de Gödel era hallar una forma de expresar afirmaciones de este tipo (paradójicas autorreferenciales) en el ámbito de la aritmética. Ahora bien, dado que la afirmación de Epiménides involucra la noción de verdad (que, de acuerdo con la demostración de A. Tarski, no puede ser "capturada" en el ámbito de un sistema formal), la única solución posible para Gödel consistió en reemplazar la noción (no formalizable) de verdad por la noción (formalizable) de "demostrabilidad" y transformar la paradoja en la proposición "esta afirmación no es demostrable". Obsérvese que, si la afirmación es demostrable, entonces es verdadera, es decir que debe ser verdadera y es no-demostrable, de modo que la afirmación y su negación son ambas demostrables, lo cual implica inconsistencia. Por otra parte, si la afirmación no es demostrable, entonces la afirmación es verdadera, es decir que es verdadera pero no-demostrable, lo cual implica que el sistema formal es incompleto. Al generalizar este razonamiento, Gödel concluyó que en todo sistema formal suficientemente potente como para contener todas las afirmaciones acerca de los números naturales, existe una afirmación que es no-demostrable a partir de las reglas del sistema. Diseñó, además, las reglas necesarias para construir una afirmación aritmética traducible en la afirmación metamatemática "la aritmética es consistente" y demostró (en forma independiente de Tarski) que esta afirmación no es demostrable y, por lo tanto, que la consistencia de la aritmética no puede ser establecida exclusivamente mediante argumentos inherentes al sistema formal de la aritmética misma[9].

4. LA TESIS DE CHURCH-TURING

Los resultados de Gödel y la asimilación formalista de la matemática a un tipo de morfogénesis y su consecuente identificación con un mecanismo de generación de nuevos comportamientos (teoremas) a partir de comportamientos dados (axiomas) de acuerdo con reglas definidas dieron origen a la teoría de la computabilidad fundamentalmente a partir de los trabajos de Kleene, Church, Turing y Post.

---

sino que posee propiedades matemáticas (ver Nagel y Newman, 1958; Hofstadter, 1979, Shanker, edit., 1988; Rosen en Casti y Karlqvist ,1990.

[9] Ver Feferman, edit., 1986.

El análisis de Church (1934, 1936ª, 1936b) se basó en la definición de función efectivamente computable (es decir, computable mediante un algoritmo) como sinónimo de función definible y en el empleo del cálculo lambda (que consiste en una gramática de términos vinculados por un conjunto de reglas de transformación, diseñado para formalizar la definición de función, la noción de aplicación de funciones y la propiedad de recursividad). A partir de estas definiciones Church propuso su tesis expresando que la clase de las funciones efectivamente computables coincide con la clase de las funciones recursivas. En base a este postulado, a la extrapolación de la teoría de números y sus formalizaciones y a la relación entre un sistema material y sus modelos, concluyó que la respuesta al "Entscheidungsproblem" era negativa, es decir que la matemática no era un sistema anticipatorio[10].

El enfoque de Turing (1936) al tratamiento del problema de Hilbert consistió en la utilización del concepto abstracto de máquina teórica (puramente sintáctica) que permitía caracterizar, de un modo matemático, el número de funciones efectivamente computables[11]. Una máquina de Turing (MT) consta de dos componentes: i) una cinta de dimensión infinita dividida en celdas cada una de las cuales contiene uno de un conjunto finito de símbolos y ii) un dispositivo lector que puede variar en un conjunto finito de estados internos, $E = \{e_0, e_1, \dots, e_n\}$, con un conjunto de símbolos-"input", $\Sigma = \{0,1\}$. Este dispositivo puede leer las celdas de la cinta y escribir uno de los símbolos en cada una de ellas. El comportamiento de la máquina está controlado por un algoritmo (programa) compuesto por un número finito de instrucciones, de modo que el comportamiento del dispositivo lector queda determinado por su estado actual y por el resultado de la lectura de la celda. Turing construyó, además, un programa que podía simular la acción de otro programa que

[10] Stephen Kleene arribó a la misma conclusión a partir del concepto de función recursiva (ver Soare, 1996, Bennett, 1998).

[11] Así como Gödel reemplazó la noción intuitiva de verdad por el concepto formalizable de "demostrabilidad", Turing reemplazó la noción intuitiva de computabilidad efectiva por el concepto de algoritmo.

formaba parte su “input”, generando la denominada máquina universal (MTU)[12].

Como el número de instrucciones que controla el comportamiento de la máquina es finito, es posible definir una sucesión de todas las máquinas de Turing, $\left\{MTU_1, MTU_2,...\right\}$, de acuerdo con la medida creciente de su conjunto de instrucciones (es decir, con el número de símbolos involucrados en su codificación).

Sea una máquina de Turing en su estado inicial. De acuerdo con el correspondiente conjunto de instrucciones, puede suceder que arribe a su estado final e_n y se detenga produciendo un “output” $MTU(x)$, en $\Sigma = \left\{0,1\right\}$ (en este caso se dice que la computación es convergente) o que no se detenga nunca (se dice, entonces, que la computación es divergente). Luego, se puede concluir que una máquina de Turing define una función parcial del conjunto de sucesiones finitas $\Sigma = \left\{0,1\right\}$.

Se dice que una función $f(\bullet): N \to N$ es computable en el sentido de Turing si existe una máquina de Turing tal que, para todo $n = g(\omega)$ en el dominio de f (donde ω define un “input” en $\Sigma = \left\{0,1\right\}$) se detendrá produciendo un “output” $MTU(\omega)$ tal que $f(n) = g\left(MTU(\omega)\right)$. Asimismo, se dice que un subconjunto $A \in N$ es recursivo si su función característica es computable en el sentido de Turing. Estos resultados se resumen en la expresión “la clase de las funciones intuitivamente computables coincide con la clase de las funciones computables en el sentido de Turing”, conocida como la tesis de Turing.

A partir de este concepto y teniendo en cuenta que el conjunto de las funciones computables en el sentido de Turing es un subconjunto finito numerable del conjunto no-numerable de todas las funciones parciales $N \to N$, que existen funciones que no observan regularidades

[12] De acuerdo con estas consideraciones, se puede concluir que una máquina de Turing no es una máquina en el sentido estricto del término, sino que debe interpretarse como sinónimo de programa o algoritmo (ver Herken, ed.,1988).

computables y que el número de funciones computables es comparativamente muy pequeño, Turing concluyó que la respuesta al “Entscheidungsproblem” era negativa. Demostró, además, que los conceptos de función definible y de función computable en el sentido de Turing eran equivalentes y, en consecuencia, que su tesis y la de Church eran equivalentes.

Kleene, S. (1938), por su parte, demostró: i) que existen funciones parcialmente computables generadas por algoritmos de duración infinita y ii) que en los sistemas deductivos cuyo sistema de axiomas es recursivo, la condición necesaria y suficiente para que una función aritmética (parcial) sea computable es que sea recursiva.

Como corolario de estos teoremas se concluyó que toda función computable (recursiva) es computable por una máquina de Turing. Este resultado permite concluir que, de acuerdo con la tesis de Church-Turing, todo problema irresoluble para una máquina de Turing será irresoluble para cualquier máquina algorítmica, lo cual implica reconocer que las máquinas de Turing y los sistemas algorítmicos poseen la misma capacidad computacional[13].

En términos de la teoría de la computabilidad un algoritmo puede ser definido como un programa computable en una máquina de Turing y el “Entscheidungsproblem”, como la posibilidad de hallar un proceso general que permita decidir, en un número finito de pasos, si una fórmula de la lógica de primer orden es o no un teorema.

Ahora bien, esta afirmación de que los sistemas formales no contienen modelos de sí mismos expresada en la tesis de Church-Turing no ha podido ser demostrada, de modo que, en realidad, la tesis debería ser considerada como una definición y no como un teorema (ver Delahaye, J.P. (1999)).

La demostración de la falsedad de la tesis de Church-Turing (es decir, la demostración de la existencia de un sistema anticipatorio) implicaría la aceptación de la interpretación reduccionista, el reconocimiento de que todo sistema material es un mecanismo y que la explicación de los fenómenos consiste exclusivamente en la búsqueda de una sintaxis. Viceversa, la demostración de su veracidad implicaría el rechazo de la

---

[13] Debe tenerse en cuenta que los algoritmos son universales, es decir, invariantes con respecto al lenguaje de programación.

interpretación reduccionista, el reconocimiento de la existencia de sistemas materiales complejos y la aceptación de que la explicación de los fenómenos asume un aspecto semántico.

Debe tenerse en cuenta que, dada la naturaleza flexible de la sintaxis, no hay forma de demostrar la verdad o falsedad de la tesis de Church-Turing basándose en la evidencia (supóngase, por ejemplo, que se propusiera un programa como capaz de generar todos los teoremas conocidos y de construir la sintaxis necesaria en la teoría de números, la refutación de esta proposición no podría ser obtenida hallando simplemente un teorema que este programa no pudiera formalizar, dado que el programa siempre podría ser extendido y, en consecuencia, la proposición de su capacidad para generar todos los teoremas podría ser renovada). Dado que la categorización de un sistema como no-anticipatorio o complejo implica afirmar que en el mismo existen más relaciones que en cualquiera de sus modelos sintácticos, la demostración en base a la evidencia sería similar a una demostración sobre la existencia de un conjunto infinito en base a la información que proporcionan los conjuntos finitos.

Obsérvese, por otra parte que, si bien la demostración del teorema de Gödel no se basa en la evidencia, dado que considera proposiciones sobre números a partir de números (es decir, que establece referentes numéricos para dichas proposiciones y viceversa) y que, para algunos números (los denominados números de Gödel), crea un referente proposicional que incorpora un ingrediente semántico, tampoco contribuye a la demostración de la tesis.

5. LA COMPLEJIDAD ALGORÍTMICA

A partir de esta conclusión y de acuerdo con los conceptos de la teoría de la información ordinaria como cuantificadora de las nociones de simplicidad y complejidad en función del número de “bits” necesario para codificar la información y de la teoría de la información algorítmica como medida del grado de complejidad algorítmica del conjunto de datos en función de la medida del menor programa necesario para generar el “output” $\omega \in \{0,1\}$ [14], la tesis de Church-Turing puede ser interpretada

[14] Esta medida de complejidad, debida a Solomonoff (1964) anticipó las propuestas de Chaitin, (1975, 1987, 1990) y de Thom (1975) (en Güttinger y Eikemeier, eds., 1979, 1983).

como un intento de demostrar si, dada una máquina de Turing, existe un algoritmo que permita decidir si un programa se detendrá o no (es decir, si la computación es o no convergente)[15].

De modo que, dada una máquina de Turing, MTU, la complejidad algorítmica, $K_{MTU}(\omega)$, será tal que:

$$K_{MTU}(\omega)=\begin{cases}\infty & \textit{sino existe ningun programa} \\ & P \textit{ tal que } MTU(P)=\omega \\ \min\{|P|: MTU(P)=\omega\} & \textit{en cualquier otro caso}\end{cases}$$

donde P denota la medida del menor programa necesario en una MTU para producir el "output" $\omega \in \{0,1\}$ (y detenerse). En el primer caso se dice que el "output" ω es de alta complejidad (o caótico o, en el límite, aleatorio)[16], en el segundo se dice que es de baja complejidad.

Se demuestra que esta definición es invariante respecto de la selección de la máquina de Turing: dadas dos máquinas de Turing universales (MTU y MTU^*), para todo $\omega \in \{0,1\}$, se verifica que $K_{MTU}(\omega) \leq K_{MTU^*}(\omega)+c_{MTU^*}$, donde c_{MTU^*} es una constante independiente de ω.

Martin-Löf (1969) demostró que si $f(\bullet): N \to N$ es una función computable tal que $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-f(n)}=\infty$ entonces, para toda sucesión binaria $x=(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, se verifica que

---

[15] Problema conocido como *de la detención de Turing.*

[16] Kolmogorov (1956) propuso considerar como aleatoria (o caótica) o irreducible toda sucesión de alta complejidad (ver Copeland, 1997).

$K(x(n)) < n - f(n)$ para todo n. En particular, este teorema se cumple para $f(n) = \ln(n)$, lo que demuestra que para valores muy por debajo de su propia medida, $n - \ln(n)$, una sucesión binaria se detendrá infinitamente a menudo y, en consecuencia, que existen relativamente muy pocos "outputs" ω que sean de baja complejidad con respecto a los de alta complejidad (aparentemente aleatorios).

Ahora bien, dada una máquina a la cual se le proporciona un "input" p, podría suceder que en primer término registrara este "input" en su totalidad para determinar su medida, $|p| = n$ y, en segundo término, comenzara la computación sobre p "bit" a "bit". En este caso la complejidad de ω podría ser igual a $n + \ln(n)$, en vez de n. A fin de evitar esta paradoja Chaitin, G. (1975) propuso reemplazar en la definición de Martin-Löf la condición de máquina universal por la de máquina universal de prefijo libre la cual, por construcción, es autolimitada. Esta máquina leerá la cinta del programa sólo hacia la derecha, deteniéndose en el último "bit" de p.

En virtud de esta sustitución postuló que la medida de la complejidad de una sucesión finita ω, respecto de la máquina de Turing universal de prefijo libre MTU^*, puede ser definida como $C_{MTU^*}(\omega) = \min\{|P| : MTU^*(P, \Lambda) = \omega\}$ y que, en consecuencia, se puede concluir que una sucesión $x = \{x_1, x_2, ...\} \in \Sigma^*$ es irreducible (o caótica) cuando satisface la desigualdad de Kraft-Chaitin, es decir cuando existe una constante c tal que $C(x(n)) \geq n - c$ para todo n, donde $x(n) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ (ver Rozenberg y Salomaa, 1994; Calude, 1994; Calude y Grozea, 1996)[17].

---

[17] Es estos términos, el criterio de Leibniz podría ser expresado de la siguiente forma: si una teoría es de la misma medida en "bits" que los datos que intenta explicar, entonces no sirve. Por otra parte, debe tenerse en cuenta que, de acuerdo con el teorema de Waerden (en Calude, 2000) según el cual, dada una sucesión binaria, siempre es posible hallar una

A partir de la desigualdad de Kraft-Chaitin y considerando la condición de von Mises-Wald-Church (según la cual se podría considerar como aleatoria toda sucesión que cumpliera simplemente con una ley de aleatoriedad, por ejemplo la ley débil de los grandes números) como insuficiente, Ville (1939) propuso una definición de sucesión aleatoria "típica" como aquella que satisface todas las leyes de este tipo, más precisamente como aquella que satisface con probabilidad igual a uno todas las propiedades que ocurran en el conjunto de todas las sucesiones binarias Σ^*. Pero, teniendo en cuenta que no todas las sucesiones que no observan regularidades computables cumplen con la ley de los grandes números, se puede concluir que este criterio tampoco es adecuado para caracterizar la aleatoriedad (ver Lambalgen, 1987; Chaitin, 1987, 1988).

Por su parte, basándose en su desigualdad, Martin-Löf (1969) definió una medida de probabilidad μ, sobre Σ^*, tal que se puede asegurar la condición necesaria y suficiente para que un subconjunto $N \subset \Sigma^*$ sea μ-nulo es que, para todo $\varepsilon > 0$ racional, exista una sucesión de "outputs" $\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, ...\}$ en $\{0,1\}$, tales que: i) $N \subset \bigcup_{k \geq 1} \Gamma_{\omega_k}$ y ii) $\sum_{k \geq 1} \mu(\Gamma_{\omega_k}) < \varepsilon$ (donde los $\Gamma_{\omega_k} = \{x \in \Sigma^* : x = \omega_k y\}$ denotan los conjuntos que forman la cobertura de un conjunto nulo en Σ^*). Estableció, además, que un conjunto N es efectivamente μ-nulo si, para todo $\varepsilon > 0$ racional y para todo $k \geq 0$, existe un algoritmo que produce un "output" ω_k que satisface las condiciones anteriores (la definición de la medida efectiva μ-unitaria se obtiene como complemento de la anterior). Se dice que una medida μ es computable si, para todo $\varepsilon > 0$ racional y todo "output" ω en $\{0,1\}$, existe una función

medida para la cual uno de los dos símbolos ocurrirá de acuerdo con una progresión geométrica, asimilar el concepto de aleatoriedad al criterio Leibniziano de ausencia de una ley que permita explicar su comportamiento (es decir, la ausencia absoluta de regularidades no-triviales en su trayectoria) implicaría la imposibilidad de considerar una sucesión como aleatoria.

computable de una máquina de Turing, $F(\varepsilon,\omega)$, tal que $\left|F(\varepsilon,\omega)-\mu(\Gamma_\omega)\right|\leq\varepsilon$.

A partir de estas definiciones y considerando como "típicas" aquellas sucesiones binarias que no presentan características distintivas, Martin-Löf (1969) demostró que, dada una medida de probabilidad, μ-computable, la intersección de los conjuntos de medida efectiva μ no es vacía y es de medida efectiva μ-unitaria. De modo que se puede concluir que la identificación de los conjuntos de las sucesiones aleatorias y de las sucesiones μ-típicas es consistente, es decir se puede asegurar que una sucesión que pertenece a todos los conjuntos de medida efectiva μ-unitaria (para una medida computable) es aleatoria en el sentido de Martin-Löf.

Como corolario de este teorema, se puede concluir que la condición necesaria y suficiente para que una sucesión x sea μ-típica y, por lo tanto, irreducible o aleatoria en el sentido de Martin-Löf, es que $\mu(\{x\})>0$.

Un resultado fundamental completamente válido en el ámbito de la matemática clásica pero inaceptable desde un punto de vista constructivista, según el cual sólo se puede asegurar que un objeto matemático existe si es posible establecer algún procedimiento para su construcción.

En este sentido, la propuesta de Martin-Löf puede ser implementada en términos de un test secuencial de aleatoriedad, consistente en una sucesión recursivamente numerable de intervalos $\{I_m^n\}_{n\geq1}$ tales que, para cada m, se verifica que $\mu(I_m^n)<2^{-m}=\varepsilon$. La aplicación de este test a una sucesión x implica seleccionar un nivel de confiabilidad m (ó ε) y verificar si $x\in I_m^n$ para un $m>1$. Si se verifica esta condición, se considera que, a un nivel de confiabilildad m, x puede ser considerada no-aleatoria. Viceversa, si a partir de cierto nivel de confiabilidad dicha condición no se verifica, se considera que x satisface la condición de aleatoriedad. En resumen, se dice que una sucesión puede ser considerada típica, irreducible o aleatoria en el sentido de Martin.Löf si satisface todos los tests de aleatoriedad secuenciales con un nivel de confiabilidad m (ver Dellacherie, 1978).

Dado que no se han hallado contraejemplos, ésta, aunque inevitablemente insuficiente, puede ser considerada como la definición instrumental de aleatoriedad más apropiada en términos de inferencia inductiva.

6. EL NÚMERO Ω

Un ejemplo de sucesión aleatoria en el sentido de Martin-Löf es la que integra el número Ω de Chaitin con respecto a una máquina de Turing (ver Chaitin, 1966), definido como la suma infinita $\Omega = \sum_{\{p \in \Sigma : MT(p,\Lambda) < \infty\}} \frac{1}{2^{p}}$ sobre todos los "inputs" $p \in \Sigma$, sobre los cuales la máquina MTU converge (cada "input" p para el cual la computación MTU es convergente agrega un 1 al p-ésimo "bit" del desarrollo binario de Ω). Obviamente, como la detención de $MTU(p)$ se verificará para un "input" dado, será $\Omega > 0$. Por otra parte, de acuerdo con la desigualdad de Kraft-Chaitin, será $\Omega \leq 1$ y, como la detención de $MTU(p)$ no se verificará para todos los "inputs", será $\Omega < 1$ (ver Rozenberg y Salomaa, 1994).

Este número Ω define la probabilidad de que una máquina de Turing, a la cual se le ha proporcionado un "input" seleccionado al azar (es decir, formado por una serie de "bits" tal que el valor de cada "bit" está determinado por el resultado a obtener al arrojar una moneda simétrica) se detenga[1(no continua)]. De modo que el cálculo de los primeros N dígitos de $\Omega(N)$ no puede ser calculado utilizando un programa de medida $n < N$; en otros términos, Ω es un objeto "algorítmicamente aleatorio" formado por un número infinito de "bits" irreducibles: dado un programa de medida

---

[1] Debe tenerse en cuenta que, si bien el valor numérico de Ω depende de la selección del lenguaje de computación, sus propiedades permanecen invariantes con respecto a distintos lenguajes.

$n < \infty$, existe un número infinito de bits que el programa no puede computar. Si se tiene en cuenta que los infinitos bits de Ω representan las proposiciones matemáticas lógicamente irreducibles, queda demostrado que, contrariamente a la proposición de Hilbert, dado un sistema finito de axiomas, existe un número infinito de proposiciones verdaderas que son indemostrables[2].

Obviamente, si los n primeros dígitos (es decir, el prefijo) de $\Omega(n)$ son conocidos, todos los problemas de detención para programas codificables en menos de n "bits" quedan resueltos. Luego, un prefijo de $\Omega(n)$ suficientemente grande, una fórmula f perteneciente a un sistema axiomático A y las máquinas de Turing $MTU(A, f)$ y $MTU(A, \neg f)$, mediante la verificación de todas las demostraciones posibles en el sistema A, decidirán, respectivamente, si f o $\neg f$ es o no un teorema, es decir, si f es demostrable, no-demostrable o independiente de A. Ahora bien, dado que la medida del prefijo es una función de la medida de la expresión reducida de la correspondiente función computable de $MTU(F)$ y de f y, teniendo en cuenta que el tiempo de computación, $t(n)$, que requiere hallar todos los programas de medida menor que n que convergen, crece a mayor velocidad que cualquier función computable, el hecho de conocer $\Omega(n)$ no resulta de utilidad práctica en la resolución del problema de la demostrabilidad.

7. DEMOSTRABILIDAD, ALEATORIEDAD Y CAOS

De los resultados obtenidos por Gödel, Church, Turing, Kolmogorov, Ville, Chaitin y Martin-Löf se puede concluir que existe un abismo insuperable entre la verdad y la "demostrabilidad" de una proposición y, por lo tanto,

---

[2] Chaitin, 1936: "*El número* Ω es irreducible. Para obtener sus primeros n 'bits' se necesita una teoría de n 'bits', es decir una teoría de complejidad igual al fenómeno que se quiere estudiar. Lo cual implica que el razonamiento no contribuye en nada a la explicación del mismo".

que la aleatoriedad de una sucesión es indemostrable. Sin embargo, a partir de la consideración de procesos dinámicos caóticos es posible generar un vínculo entre la noción de complejidad de Chaitin y la tesis de Church-Turing.

La característica más importante de un sistema dinámico es su conjunto atractor, es decir, el subconjunto de puntos de su espacio de estados en el cual la trayectoria evoluciona cuando $t \to \infty$. La dinámica del sistema está condicionada por la naturaleza del conjunto atractor. Obviamente, es posible que a partir de diferentes estados iniciales el sistema transcurra a distintos atractores, pero a cada punto del espacio de estados le corresponde un único atractor que condicionará la dinámica del sistema. Los sistemas dinámicos clásicos obedecen a dos tipos alternativos de atractores: puntuales o ciclos límite (el primero está definido por un punto fijo del espacio de estados, el segundo está definido por una curva cerrada de modo que, cuando la trayectoria del sistema ingresa en el atractor, permanece orbitando de acuerdo con dicha curva). Estos dos atractores clásicos pueden ser, a su vez, estables o inestables según que, cuando un punto del atractor experimente una perturbación infinitesimal hacia un punto externo al atractor, la trayectoria a partir del punto perturbado retorne hacia el atractor o sea repelida por éste.

Existen otros dos tipos de atractores: el atractor extraño o caótico, formado por la combinación de órbitas periódicas inestables y órbitas no-periódicas, y el atractor quasi- periódico, que constituye el vínculo entre el ciclo límite y las trayectorias caóticas y que está formado por la combinación de ciclos límite que se intersectan frecuentemente.

Según se concluyó de las consideraciones sobre la complejidad, existen sucesiones computables de complejidad arbitrariamente grande. En términos de la teoría de atractores, el teorema de Chaitin demuestra que, en un conjunto infinito de sucesiones binarias computables, siempre es posible hallar una sucesión cuyo atractor es caótico. Por su parte, el teorema de Levin-Schnorr-Chaitin demuestra que, en particular, la condición necesaria y suficiente para que una sucesión binaria pueda ser considerada aleatoria (típica en el sentido de Martin-Löf) con respecto a la distribución $b\left(n, \frac{1}{2}\right)$ es que sea caótica con respecto a dicha distribución.

Luego, se puede concluir que la aceptación de la existencia de atractores caóticos y la interpretación de la aleatoriedad como límite del grado de complejidad de un atractor pueden ser considerados como los únicos argumentos capaces de reducir la distancia entre la afirmación sobre la aleatoriedad de una sucesión y su “demostrabilidad” y, en consecuencia, de aproximar a una justificación de la teoría de los colectivos de von Mises.

En una segunda parte de este trabajo se analizará la determinación del grado de complejidad compatible con los postulados del test secuencial de aleatoriedad de Martin-Löf.

BIBLIOGRAFÍA

Bar-Hillel, H.; Wagenaar, W. A. (1991). “The perception of randomness”. *Advanced in Applied Mathematics*, vol. 12.

Bennett, D. J. (1998). *Randomness.* Harvard UniversityPress.

Calude, C. S. (2000). “Who is afraid of randomness?”. http:www.cs.auckland.ac.nz/staff-cgi-bin/mjd/secondcgi.pl.

Cantelli, F. P. (1935). “Consideration sur la convergence dans le calcul des probabilités”. *Annales de l’Institut Henri Poincaré*, vol. V.

Casti, J. L.; Karlqvist, A. (1990a). *Beyond belief*. CRC Press.

Chaitin, G.J. (1966). “On the length of programs for computing finite binary sequences”. *Journal Association Computing Machinery*, vol. 13.

Chaitin, G. J. (1975). “A theory of program size formally identical to information theory”. *Journal ACM*, vol. 22.

Chaitin, G. J. (1987). *Algorithmic information theory*. Cambridge University Press.

Chaitin, G. J. (1988). “Randomness in arithmnetic”. *Scientific American*, vol. 259.

Chaitin, G. J. (1990). *Information, randomness, and incompletness.* World Scientific, 2da. edición.

Church, A. (1934). “An unsolvable problem of elementary number theory”. *American Journal of Mathematics*, vol. 58.

Church, A. (1936). "A note on the Entscheidungsproblem". *Journal of Symbolic Logic*, vol. 1.

Church, A. (1936). "An unsolvable problem of elementary number theory". *American Journal of Mathematics*, vol. 58.

Copeland, B. J. (1997). "The Church-Turing thesis". Stanford Encyclopedia of Philosophy, http://www.plato.stanford.edu/.

Davies, M. (2000). "The universal computer: The road from Leibniz to Turing". W.W. Norton & Co.

Delahaye, J. P. (1999). "Information, complexité et hasard". Hermès.

Dellacherie, C. (1978). "Nombres au hazard: De Borel à Martin-Löf". *Gazette des Mathematiciens*, vol. 11.

Fefferman, S. (2000). "Mathematical intuition vs mathematical monsters". *Synthese*, vol. 125.

Fry, T.C. (1928). *Probability and its engineering uses*. Van Nostrand.

Güttinger, W.; Eikemeier, H. (eds.) (1979). *Structural stability in physics*. Springer.

Herken, R (ed.) (1988). *The universal Turing machine*. Oxford University Press.

Hofstadter, D. (1979). *Gödel, Escher, Bach: An eternal golden braid*. Basic Books.

Keynes, J. M. (1963). *A treatise onprobability*. MacMillan.

Kleene, S. (1935). "A theory of positive integers in formal logic". *American Journal of Mathematics*, vol. 57.

Knuth, D. E. (1985). "Algoritmic thinking and mathematical thinking". *American Mathematical Monthly*, vol. 92.

Kolmogorov, A.N. (1956). *Foundations of the theory of probability*. Chelsea.

Martin-Löf, P. (1969). "The literature on von Mises revisited". *Theoria*, vol. XXXV.

Nagel, E.; Newman, J. R. (1958). *Gödel's proof*. New York University Press.

Rosen, R. (1985). *Anticipatory systems*. Pergamon.

Rozenberg, G.; Salomaa, A. (1994). *Cornerstones of undecidability*. Prentice Hall.

Shanker, S. (ed.) (1988). *Gödel's theorem infocus*. Croom & Helm.

Soare, R. (1996). "Computability and recursion". *Bulletin of Symbolic Logic*, vol. 2.

Spinadel, Vera W. de (2009). "Caracterización de la transición al caos en economía". *Cuadernos del CIMBAGE*, vol. 11.

Thom, R. (1975). *Structural stability and morphogenesis*. Benjamin.

Thom, R. (1983): *Mathematical models of morphogenesis*. Horwood

Turing, A. (1936). "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem". *Proceedings London Mathematical Society*, Serie 2, vol. 42.

Von Mises, R. (1961). *Probability, statistics and truth*. MacMillan. 2da. edición inglesa, Allen & Urwin,.

Von Mises, R. (1919). *Grundlagen der Ewahrscheinlichkeitsrechnung*. Reeditado en von Mises, R. (1964b).

Von Mises, R. (1964). *Selecta II*. American Mathematical Society.