

Институт ядерной физики  
им. Г.И. Будкера СО РАН

И. А. Котельников

ДВЕ ЗАДАЧИ НА МЕТОД ИЗОБРАЖЕНИЙ

ИЯФ 2001–71

Новосибирск  
2001

# ДВЕ ЗАДАЧИ НА МЕТОД ИЗОБРАЖЕНИЙ

*И. А. Котельников*<sup>1</sup>

Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера  
630090, Новосибирск, Российская Федерация

## Аннотация

Методом изображений решены две задачи классической электродинамики, в которых возникает бесконечная последовательность фиктивных зарядов-изображений. Сначала вычислена сила, действующая на точечный заряд, расположенный между обкладками плоского конденсатора. Затем найдена сила кулоновского взаимодействия двух заряженных проводящих шаров.

В задаче с двумя шарами вычислены емкостные коэффициенты и прямыми вычислениями показано, что найденная сила взаимодействия шаров совпадает с силой, полученной методом виртуальных перемещений.

# TWO PROBLEMS ON METHOD OF IMAGES

*I.A. Kotelnikov*

Budker Institute of Nuclear Physics  
630090, Novosibirsk, Russian Federation

## Abstract

With the method of images used, two problems of classical electrodynamics are solved, in which ones there appear infinite sequences of the image charges. At first, the force acting on a point charge inside a parallel-plate capacitor is computed. Then, the force of a Coulomb interaction of two charged conductive spheres is found.

For the latter problem, the capacitive coefficients are also computed. By direct calculus, it is shown that the Coulomb force between charged conductive spheres coincides with the force obtained by a method of virtual displacements.

©Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера

---

<sup>1</sup>I.A.Kotelnikov@inp.nsk.su

---

## 1. Заряд в конденсаторе

### ► Задача 1

Найти силу, действующую на точечный заряд  $q$ , находящийся на расстоянии  $x$  от середины плоского конденсатора. Обкладки конденсатора заземлены.

**Решение:** Представим обкладки конденсатора в виде двух проводящих пластин, которые расположены в плоскостях  $x = \pm l$ . Будем считать пластины бесконечными и воспользуемся решением задачи о поле точечного заряда  $q$ , расположенного вне проводящей среды, заполняющей полупространство. Как известно (см., например, [1, § 3]), вне проводника поле системы «заряд плюс проводник» равно сумме полей самого заряда и фиктивного точечного заряда  $q' = -q$ , расположенного в точке, представляющей собой зеркальное отражение заряда  $q$  относительно плоской границы проводника. В полупространстве, занятом проводником, поле равно нулю. Этот результат сохраняется, если проводящее полупространство заменить проводящей плоскостью, так как реальный, а не фиктивный экранирующий заряд располагается на поверхности проводника.

Применим метод изображений к рассматриваемой задаче. Наличие двух отражающих поверхностей порождает бесконечную систему фик-

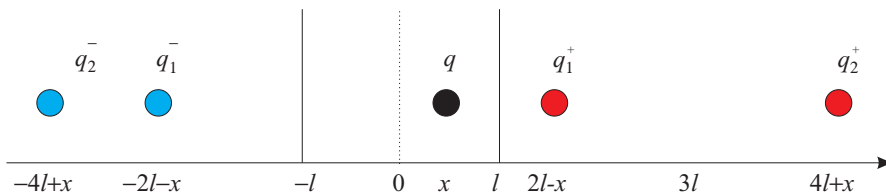


Рис. 1: К решению задачи о заряде в плоском конденсаторе.

тивных зарядов, как показано на Рис. 1. Действительно, фиктивный заряд  $q_n^+$ , полученный отражением относительно плоскости  $x = +l$  и находящийся справа от неё, в свою очередь отражается относительно плоскости  $x = -l$ , формируя фиктивный заряд  $q_{n+1}^- = -q_n^+$ . И наоборот, заряд  $q_n^-$ , расположенный слева от левой обкладки  $x = -l$ , отображается относительно правой обкладки в заряд  $q_{n+1}^+ = -q_n^-$ . Дополним эти соотношения правилами преобразования координат зарядов  $x_n^\pm$ :

$$\begin{aligned} q_{n+1}^+ &= -q_n^-, & x_{n+1}^+ - l &= -(x_n^- - l), \\ q_{n+1}^- &= -q_n^+, & x_{n+1}^- + l &= -(x_n^+ + l). \end{aligned}$$

Приняв во внимание «начальные условия»  $q_0^+ = q_0^- = q$ ,  $x_0^+ = x_0^- = x$ , получаем простые формулы:

$$\begin{aligned} x_{2n}^\pm &= \pm 4nl + x, & q_{2n}^\pm &= q, \\ x_{2n+1}^\pm &= \pm(4n+2)l - x, & q_{2n+1}^\pm &= -q, \end{aligned}$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$

Дальнейшее просто. Искомая сила равна сумме сил, действующих на заряд  $q$ , со стороны каждого заряда-изображения. Суммируя отдельно по нечетным и четным индексам, имеем:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{q^2}{(x_{2n+1}^+ - x)^2} + \frac{-q^2}{(x_{2n+1}^- - x)^2} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{-q^2}{(x_{2n}^+ - x)^2} + \frac{q^2}{(x_{2n}^- - x)^2} \right].$$

После подстановки координат зарядов каждый член второй суммы обращается в нуль, а оставшийся ряд

$$F = \frac{q^2}{l^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)(x/l)}{(2n+1)^2 - (x/l)^2} \quad (1)$$

выражается через через логарифмическую производную  $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$  гамма-функции  $\Gamma(z)$ :

$$F = \frac{q^2}{16l^2} \left[ \psi' \left( \frac{l-x}{2l} \right) - \psi' \left( \frac{l+x}{2l} \right) \right]. \quad (2)$$

Сумма конечного числа членов ряда (1) также выражается через  $\psi(z)$ .

Уместно отметить, что учет зарядов-изображений всего лишь первого порядка  $q_1^\pm$ , даёт весьма хорошее приближение к точному решению. Если

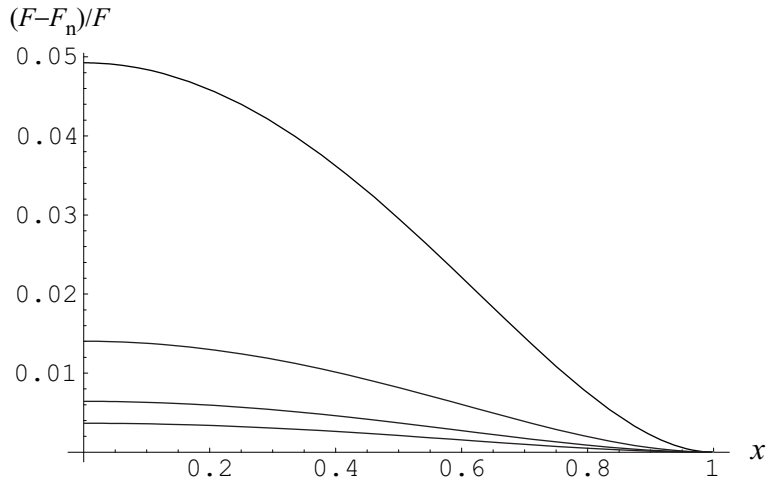


Рис. 2. Относительная погрешность  $(F - F_n)/F$  приближения точного решения (2) первыми членами ряда (1) в зависимости от расстояния  $x$  от центра конденсатора. Число членов ряда  $n + 1$  изменяется от 1 (наибольшая погрешность) до 4 (наименьшая погрешность).

сумму первых  $n + 1$  членов ряда (1) обозначить через  $F_n$ , то относительная погрешность  $(F - F_n)/F$  оказывается максимальной при  $x = 0$ , когда заряд находится в центре конденсатора. График относительной погрешности в зависимости от  $x$  для нескольких значений  $n$  приведен на Рис. 2. При  $x \rightarrow 0$  первый член ряда  $F_0$ , соответствующий сумме сил со стороны зарядов  $q_1^+$  и  $q_1^-$ , даёт  $F = (q^2/l^3)x$ , а согласно точному решению,

$$F = \frac{7}{8} \zeta(3) \frac{q^2}{l^3} x = 1.0518 \frac{q^2}{l^3} x, \quad (3)$$

где  $\zeta(z)$  — дзета-функция Римана. Погрешность можно уменьшить, учитывая фиктивные заряды следующих порядков. При фиксированном числе членов ряда погрешность не улучшается с приближением заряда к центру конденсатора, поскольку при  $x \rightarrow 0$ , вклад пары зарядов  $q_n^-$  и  $q_n^+$  любого порядка  $n$  линеен по  $x$ . Положительный знак коэффициента перед  $x$  означает, что положение заряда в центре конденсатора неустойчиво.

Убедившись в эффективности метода изображений, попытаемся с его помощью решить более сложную задачу.

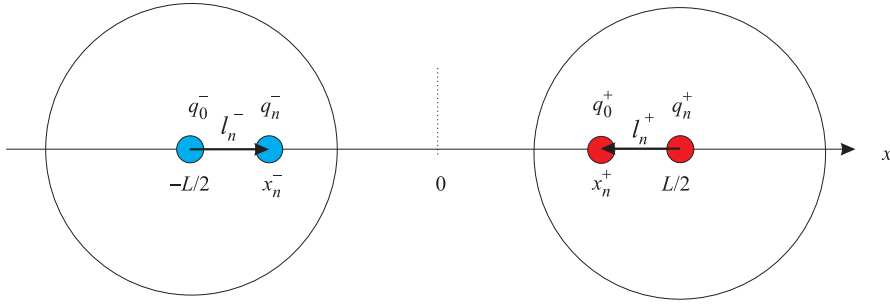


Рис. 3: К решению задачи о притяжении проводящих шаров.

## 2. Заряженные шары

### ► Задача 2

Найти силу взаимодействия двух заряженных одинаковых проводящих шаров радиуса  $R$ , расположенных на расстоянии  $L > 2R$  друг от друга.

**Решение:** В этой задаче также возникает бесконечная последовательность зарядов-изображений, порождаемая двумя отражающими поверхностями. На этот раз их роль выполняют сферические поверхности проводящих шаров.

Вновь воспользуемся решением известной задачи о поле точечного заряда  $q$ , расположенного вне заземленной проводящей сферы радиуса  $R$  на расстоянии  $l > R$  от неё (см., например, [1, § 3]). Поле вне шара равно сумме полей самого заряда и фиктивного точечного заряда  $q' = -qR/l$ , находящегося на расстоянии  $l' = R^2/l$  от центра шара на линии, соединяющей центр шара с зарядом  $q$ . Поле внутри шара и его потенциал равны нулю.

Переходя к нашей задаче, обозначим через  $q_n^-$  и  $q_n^+$  фиктивные заряды, расположенные соответственно слева и справа от начала координат; см. Рис. 3. Нетрудно видеть, что все заряды расположены внутри шаров. Обозначим через  $l_n^\pm$  расстояние от заряда  $q_n^\pm$  до центра «своего» шара. Тогда расстояние до центра «чужого» шара равно  $L - l_n^\pm$ . Вследствие симметрии задачи расстояния  $l_n^-$  и  $l_n^+$  одинаковы, но мы сохраним индексы «+» и «-», предполагая в дальнейшем рассмотреть случай шаров разного радиуса [3].

Условимся, что заряд  $q_{n+1}^+$  получается отражением заряда  $q_n^-$  относительно поверхности правого шара, а заряд  $q_{n+1}^-$  — отражением заряда  $q_n^+$

относительно левого шара. Используя решение задачи о поле точечного заряда и заземленной сферы, получаем рекуррентные соотношения:

$$l_{n+1}^{\pm} = R^2 / (L - l_n^{\mp}), \quad (4a)$$

$$q_{n+1}^{\pm} = -q_n^{\mp} R / (L - l_n^{\mp}). \quad (4b)$$

Из первой рекурсии (4a) легко найти точку сгущения фиктивных зарядов, т.е. их положение при  $n \rightarrow \infty$ . Приравнявая  $l_{n+1}^{\pm}$  к  $l_n^{\mp}$  получаем, что  $l_{\infty}^{\pm} = L/2 - \mu$ , где  $\mu = \sqrt{(L/2)^2 - R^2}$  есть половина расстояния между правой и левой точками сгущения. Найденное значение  $\mu$  даёт ключ к преобразованию рекуррентных соотношений к такой форме, которая позволит их явно просуммировать.

Введём систему координат с началом на середине отрезка прямой линии, соединяющей центры шаров, как показано на Рис. 3. Выразим координату

$$x_n^{\pm} = \mu y_n^{\pm} \quad (5)$$

заряда  $q_n^{\pm}$  в этой системе координат через  $\mu$  и новую безразмерную переменную  $y_n^{\pm}$ . Как ясно из предыдущего,  $l_n^{\pm} = L/2 \mp \mu y_n^{\pm}$ ,  $y_n^+ = -y_n^-$ ,  $y_{\infty}^{\pm} = \pm 1$ . В новых обозначениях рекуррентные соотношения для координат зарядов

$$y_{n+1}^{\pm} = -\frac{y_n^{\mp} \mp (2\mu/L)}{1 \mp (2\mu/L) y_n^{\mp}},$$

с точностью до общего знака совпадают с теоремой сложения гиперболических тангенсов:

$$\text{th}(a \pm b) = \frac{\text{th}(a) \pm \text{th}(b)}{1 \pm \text{th}(a) \text{th}(b)}.$$

Следовательно,

$$\text{arc th}(y_{n+1}^{\pm}) = -\text{arc th}(y_n^{\mp}) \pm \text{arc th}(2\mu/L).$$

Замечая, что  $y_0^{\pm} = \pm L/2\mu$ ,  $\text{arc th}(L/2\mu) = \pi i/2 + \text{arc th}(2\mu/L)$ ,  $\text{th}(z + \pi i/2) = \text{cth}(z)$ , находим координаты зарядов:

$$y_n^{\pm} = \pm \text{cth}[(n+1)\alpha], \quad (6)$$

где

$$\alpha = \text{arc th}(2\mu/L) = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - (2R/L)^2}}{1 - \sqrt{1 - (2R/L)^2}} \right].$$

После подстановки найденных координат в рекуррентные формулы для зарядов (4b), те легко удается разрешить, так как при последовательном применении рекурсии на каждом шаге сокращается по одному множителю в числителе и знаменателе. Результат записывается в компактном виде

$$q_n^\pm = [(-1)^n Q_0 \pm q_0] \frac{\text{sh}[\alpha]}{\text{sh}[(n+1)\alpha]}, \quad (7)$$

если ввести обозначения  $Q_0 = (q_0^+ + q_0^-)/2$  и  $q_0 = (q_0^+ - q_0^-)/2$ . Неизвестные значения фиктивных зарядов  $q_0^\pm \equiv Q_0 \pm q_0$ , расположенных в центрах шаров, выражаются через заряды шаров, но не равны им. Заряд каждого шара равен сумме фиктивных зарядов внутри него. Если обозначить заряды правого и левого шаров через  $q_+ \equiv Q + q$  и  $q_- \equiv Q - q$  соответственно, то из условия  $q_\pm = \sum_{n=0}^{\infty} q_n^\pm$  находим  $Q_0$  и  $q_0$ :

$$Q_0 = Q R/C_-, \quad q_0 = q R/C_+, \quad (8)$$

где

$$C_\pm = R \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{\text{sh}[\alpha]}{\text{sh}[(n+1)\alpha]}. \quad (9)$$

Теперь имеется всё необходимое для вычисления силы взаимодействия шаров. Искомая сила равна сумме сил взаимодействия каждого заряда  $q_n^+$  с каждым зарядом  $q_m^-$ :

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{q_n^+ q_m^-}{(x_n^+ - x_m^-)^2}.$$

Используя формулы (5), (6), (7), после несложных преобразований получаем

$$F = \frac{4Q_0^2}{L^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \text{ch}^2[\alpha] \text{sh}[(m+1)\alpha] \text{sh}[(n+1)\alpha] / \text{sh}^2[(m+n+2)\alpha] \\ - \frac{4q_0^2}{L^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \text{ch}^2[\alpha] \text{sh}[(m+1)\alpha] \text{sh}[(n+1)\alpha] / \text{sh}^2[(m+n+2)\alpha].$$

Заменим суммирование по  $m$  и  $n$  суммами по  $p = m+n$  и  $r = m-n$ , где  $p$  пробегает значения от 0 до  $\infty$ , а  $r$  от  $-p$  до  $+p$  через единицу, т.е.  $r = -p +$



$2k$ ,  $k = 0, 1, \dots, p$ . Суммы по  $r$  легко вычисляются, а оставшиеся суммы по  $p$  выражаются через производные от введенных ранее коэффициентов  $C_{\pm}$ :

$$F = \frac{2Q_0^2}{L^2} \frac{\text{ch}^2[\alpha]}{\text{sh}[\alpha]} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{C_-}{R} + \frac{2q_0^2}{L^2} \frac{\text{ch}^2[\alpha]}{\text{sh}[\alpha]} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{C_+}{R}. \quad (10)$$

Выразив  $Q_0$  и  $q_0$  через  $Q$  и  $q$  при помощи (8), найденную силу можно переписать в виде

$$F = -\frac{\partial}{\partial L} \left[ \frac{Q^2}{C_-} + \frac{q^2}{C_+} \right], \quad (11)$$

так как  $\text{ch}[\alpha] = L/2R$ , а  $dL = 2R \text{sh}[\alpha] d\alpha$ . Формула (10) пригодится при решении других задач.

Далее будет показано, что параметры  $C_{\pm}$  связаны с емкостными коэффициентами системы, а сила (11) может быть получена методом виртуальных перемещений с меньшим количеством выкладок.

### ► Задача 3

Найти емкостные коэффициенты системы двух одинаковых проводящих шаров радиуса  $R$ , расположенных на расстоянии  $L > 2R$  друг от друга, и вычислить силу их кулоновского взаимодействия.

**Решение:** Считая, что заряды шаров заданы, найдем их потенциалы  $\phi_{\pm}$ . Рассмотрим сначала правый шар. Все величины, относящиеся к нему, по-прежнему будем метить индексом «+», сохранив индекс «-» для левого шара. Заметим, что сумма потенциалов фиктивного заряда  $q_n^-$  и его отражения  $q_{n+1}^+$  относительно поверхности правого шара равна нулю как раз на поверхности этого шара, поскольку отражение строилось в предположении, что поверхность заземлена. Таким образом, потенциалы всех зарядов, кроме  $q_0^+$  сокращаются. Следовательно,  $\phi_+ = q_0^+/R$ . Аналогично для левого шара имеем:  $\phi_- = q_0^-/R$ . Используя формулы (7) и (8) из решения предыдущей задачи, получаем уравнения

$$\phi_+ = \frac{Q}{C_-} + \frac{q}{C_+}, \quad (12)$$

$$\phi_- = \frac{Q}{C_-} - \frac{q}{C_+}, \quad (13)$$

где  $Q = (q_+ + q_-)/2$ ,  $q = (q_+ - q_-)/2$ , а коэффициенты  $C_{\pm}$  определены в (9). По определению, потенциальными коэффициентами называется набор величин  $S_{\alpha\beta}$ , таких что  $\phi_{\alpha} = S_{\alpha\beta} q_{\beta}$ . В данном случае индексы  $\alpha, \beta$

пробегают значения  $+$ ,  $-$ . Переписывая последнее уравнение в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{++} & S_{+-} \\ S_{-+} & S_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_+ \\ q_- \end{pmatrix},$$

находим матрицу потенциальных коэффициентов:

$$S_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2C_-} + \frac{1}{2C_+} & \frac{1}{2C_-} - \frac{1}{2C_+} \\ \frac{1}{2C_-} - \frac{1}{2C_+} & \frac{1}{2C_-} + \frac{1}{2C_+} \end{pmatrix}, \quad (14)$$

Обратная ей матрица  $C_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}^{-1}$  называется матрицей емкостных коэффициентов:

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{C_- + C_+}{2} & \frac{C_- - C_+}{2} \\ \frac{C_- - C_+}{2} & \frac{C_- + C_+}{2} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Её принято записывать в виде

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} C_1 + C & -C \\ -C & C_2 + C \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — паразитные ёмкости (т.е. «ёмкости на бесконечность») первого и второго проводников соответственно, а  $C$  — их взаимная ёмкость. Сравнивая (15) и (16), находим ёмкости для случая двух одинаковых шаров:

$$C_1 = C_2 = C_-, \quad C = (C_+ - C_-)/2 = R \sum_{k=0}^{\infty} \text{sh}[\alpha] / \text{sh}[(2k+2)\alpha]. \quad (17)$$

Графики зависимости емкостных коэффициентов от отношения  $2R/L$  показаны на Рис. 4. На нем хорошо видно, что производные коэффициентов  $C_+$  и  $C_-$  всегда имеют противоположные знаки. Обращаясь к формуле (11) с учетом этого факта, нетрудно заключить, что при любом расстоянии между шарами можно выбрать такую пропорцию между зарядами шаров, что сила их кулоновского взаимодействия будет в точности равна нулю, при том что ни один из зарядов не равен нулю. Если же один из зарядов равен нулю (но не оба одновременно), то шары, очевидно, притягиваются.

Отметим также, что паразитная ёмкость с поразительной точностью 2% аппроксимируется простейшей функцией

$$C_- \approx \frac{R}{1 + (1/\ln 2 - 1)R/L}.$$

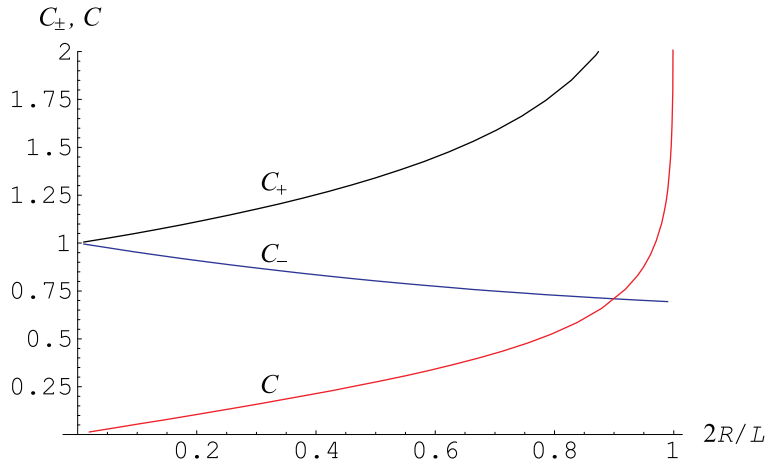


Рис. 4. Зависимость емкостных коэффициентов от безразмерного параметра  $2R/L$ . Все ёмкости нормированы на радиус шаров  $R$ .

Энергия электрического поля системы проводников вычисляется по формулам  $W = \frac{1}{2}S_{\alpha\beta}q_{\alpha}q_{\beta}$  или  $W = \frac{1}{2}C_{\alpha\beta}\phi_{\alpha}\phi_{\beta}$ . Если заданы заряды проводников, то силу их взаимодействия можно найти, варьируя энергию системы по расстоянию  $L$  между проводниками при фиксированных зарядах проводников:

$$\mathbf{F} = -\frac{\delta S_{\alpha\beta}}{\delta \mathbf{L}} \frac{q_{\alpha}q_{\beta}}{2}. \quad (18)$$

Если проводники находятся под заданными потенциалами, силу их взаимодействия следует вычислять, варьируя энергию электрического поля при фиксированных потенциалах:

$$\mathbf{F} = \frac{\delta C_{\alpha\beta}}{\delta \mathbf{L}} \frac{\phi_{\alpha}\phi_{\beta}}{2}. \quad (19)$$

Следует обратить внимание на отсутствие знака « $-$ » в последней формуле. Это связано с учетом работы внешних сил на поддержание потенциалов проводников. На языке термодинамики правило выбора знаков в формулах (18) и (19) формулируется следующим образом (см. [1, §10]): термодинамическим потенциалом по отношению к зарядам проводников является свободная энергия системы  $\mathcal{F} = \mathcal{U}$ , а по отношению к потенциалам — сопряженная ей функция  $\tilde{\mathcal{F}} = -\mathcal{U}$ . Термодинамические потенциалы  $\mathcal{F}$  и  $\tilde{\mathcal{F}}$  имеют в равновесии минимум по отношению к изменениям

состояния, происходящим соответственно при постоянных зарядах и потенциалах проводников.

Подставляя (14) в (18), вновь приходим к формуле (11).

### 3. Заключение

В настоящей заметке с помощью метода изображений решены две задачи классической электродинамики, в которых возникает бесконечная последовательность фиктивных зарядов-изображений. Разумеется, число «две» здесь условно. Можно предложить множество вариаций рассмотренных задач, некоторые из которых приведены далее в разделе А. Отметим в частности тот факт, что в разложении силы взаимодействия заряженных шаров на больших расстояниях отсутствует дипольный и квадрупольный члены (задача 10). Это означает, что при помощи проводящих шариков взаимодействие точечных зарядов моделируется с очень хорошей точностью. Интересно также, что полученные ряды удается просуммировать и в том случае, когда шары соприкасаются или почти соприкасаются (задачи 9, 11, 12).

Развитый метод суммирования рядов в задаче с двумя одинаковыми проводящими шарами может быть обобщен на случай шаров произвольных размеров, расположенных на некотором расстоянии друг от друга либо вложенных один внутри другого. Такое обобщение будет изложено в другой статье [3]. Следует отметить, что в литературе известен способ вычисления емкостных коэффициентов системы двух проводящих шаров, основанный на решении уравнения Лапласа разделением переменных в бисферических координатах. Этот способ даёт ответ в виде формальных рядов [2, задача 211], однако связь этих рядов с суммированием по фиктивным зарядам-изображениям до настоящего времени была скрыта. Что же касается задачи о заряде в плоском конденсаторе, то возможность представления суммы ряда по зарядам-изображениям через спецфункцию, как кажется, вообще была не известна.

#### А. Дополнительные задачи

► **Задача 4**

*Получить формулу (18).*

► **Задача 5**

*Получить формулу (19).*

► **Задача 6**

*Найти силу взаимодействия двух одинаковых проводящих шариков, один из которых заряжен, а другой нет.*

► **Задача 7**

*Найти силу взаимодействия двух одинаковых проводящих шариков, один из которых заряжен, а другой заземлён.*

► **Задача 8**

*Найти разложение емкостных коэффициентов двух одинаковых проводящих шариков, находящихся на большом расстоянии друг от друга.*

► **Задача 9**

*Два одинаковых проводящих шара соприкасаются. Найти емкость системы.*

► **Задача 10**

*Найти силу взаимодействия двух одинаковых проводящих шариков, находящихся на большом расстоянии друг от друга с учетом дипольного и квадрупольного членов разложения.*

► **Задача 11**

*Два одинаковых проводящих шарика находятся на малом расстоянии друг от друга, так что их поверхности почти соприкасаются. Найти силу отталкивания шариков, если их заряды в точности равны.*

► **Задача 12**

*Два одинаковых проводящих шарика находятся на малом расстоянии друг от друга, так что их поверхности почти соприкасаются. Найти силу притяжения шариков, если их заряды равны по величине, но противоположны по знаку.*

## Список литературы

- [1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Сер. Теоретическая физика, т. VIII. М.: «Наука», 1982.
- [2] В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин. Сборник задач по электродинамике. М.: «Наука», 1970.
- [3] И.А. Котельников, В.И. Яковлев. Емкостные коэффициенты системы двух проводящих шаров. М.: В печати, 2001.

## Ответы к задачам

4 Зарядим проводники, а затем отключим их от источника электричества, поддерживая тем самым их заряды постоянными. Между проводниками возникнут силы притяжения. Обозначим через  $\mathbf{F}$  одну из них — силу действующую на какой-либо из проводников. Остальные проводники закрепим. Сила  $\mathbf{F}$  уравновешивается внешней силой  $\mathbf{F}' = -\mathbf{F}$ . Если нарушить равновесие, бесконечно мало изменив внешнюю силу  $\mathbf{F}'$ , то выбранный проводник начнет бесконечно медленно перемещаться. Кинетическую энергию возникшего движения можно не учитывать, так как процесс можно проводить бесконечно медленно (квазистатически) и достаточно долго. Тогда сила  $\mathbf{F}'$  будет отличаться от силы  $\mathbf{F}$  бесконечно мало, а поэтому с точностью до бесконечно малых высшего порядка работы этих  $\delta A'$  и  $\delta A$  будут равны по величине и противоположны по знаку:  $\delta A' = -\delta A$ , причём  $\delta A = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{L}$ , где  $\delta \mathbf{L}$  — вектор перемещения проводника. Процесс может сопровождаться выделением или поглощением теплоты. Будем эту теплоту отводить, чтобы температура системы оставалась постоянной. Тогда работа внешней силы  $\mathbf{F}'$  пойдет на приращение свободной энергии системы:  $\delta A' = \delta \mathcal{F}$ , или

$$\delta A + \delta \mathcal{F}_{T,q} = 0.$$

Значки  $q$  и  $T$  указывают, что приращение свободной энергии должно быть вычислено при постоянных зарядах и температуре. Пренебрегая изменением свободной энергии из-за деформации проводника в электрическом поле, заключаем, что это приращение связано с изменением потенциальных коэффициентов  $\delta S_{\alpha\beta}$ , а именно:  $\delta \mathcal{F}_{T,q} = \delta S_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta / 2$ . Отсюда находим:

$$\mathbf{F} = -\frac{\delta S_{\alpha\beta}}{\delta \mathbf{L}} \frac{q_\alpha q_\beta}{2}.$$

5 По сравнению с предыдущей задачей необходимо учесть дополнительную работу  $\phi_\alpha \delta q_\alpha$  по перемещению зарядов внешним источником, который поддерживает потенциалы проводников:

$$-\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{L} + \phi_\alpha \delta q_\alpha = \phi_\alpha \delta C_{\alpha\beta} \phi_\beta / 2.$$

Перемещенные заряды находим, приравнявая нулю вариацию потенциалов проводников:

$$0 = S_{\alpha\beta} \delta q_\beta + \delta S_{\alpha\beta} q_\beta.$$

Отсюда  $\delta q_\alpha = -S_{\alpha\mu}^{-1} \delta S_{\mu\nu} q_\nu = -C_{\alpha\mu} \delta S_{\mu\nu} C_{\nu\beta} \phi_\beta$ .

Линеаризуя тождество  $C_{\alpha\mu} S_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\nu}$ , получаем уравнение  $\delta C_{\alpha\mu} S_{\mu\nu} + C_{\alpha\mu} \delta S_{\mu\nu} = 0$ . Умножая его на  $S_{\nu\beta}^{-1} = C_{\nu\beta}$ , находим связь между вариацией емкостных и потенциальных коэффициентов:  $\delta C_{\alpha\beta} = -C_{\alpha\mu} \delta S_{\mu\nu} C_{\nu\beta}$ . Следовательно,  $\delta q_\alpha = \delta C_{\alpha\beta} \phi_\beta$ . Этот результат означает, что работа по перемещению зарядов ровно в 2 раза больше изменения свободной энергии системы. Подставляя найденные значения  $\delta q_\alpha$  в первое уравнение, получаем окончательный ответ:

$$\mathbf{F} = \frac{\delta C_{\alpha\beta}}{\delta \mathbf{L}} \frac{\phi_\alpha \phi_\beta}{2}.$$

**6** Пусть  $q_- = 0$ . Тогда  $Q = q = q_+/2$ . Подставив эти значения  $Q$  и  $q$  в формулу (11), получаем:

$$F = -\frac{q_+^2}{4} \frac{\partial}{\partial L} \left[ \frac{1}{C_-} + \frac{1}{C_+} \right].$$

**7** Обозначим заряд изолированного шара через  $q_+$ . Неизвестный заряд заземленного шара  $q_-$  находим из условия, что его потенциал

$$\phi_- = S_{-+} q_+ + S_{--} q_-$$

равен нулю. Используя представление матрицы потенциальных коэффициентов в виде (14), получаем:

$$q_- = -q_+ \frac{C_+ - C_-}{C_+ + C_-}.$$

Теперь можно воспользоваться формулами (8), чтобы выразить заряды  $Q_0$  и  $q_0$  через  $Q = (q_+ + q_-)/2$  и  $q = (q_+ - q_-)/2$ , и затем подставить их в формулу (10), полученную прямым суммированием сил между фиктивными зарядами.

Если решать задачу методом виртуальных перемещений, следует использовать формулу (18). Она получена в предположении, что заряды проводников постоянны. В рассматриваемой задаче заряд заземленного проводника, разумеется, меняется при виртуальном смещении любого из проводников, однако производимая сторонними силами работа  $\phi_- \delta q_-$  по перемещению заряда с «земли» на заземленный же проводник равна нулю. При любом способе решения получаем:

$$F = -q_+^2 \frac{\partial}{\partial L} \{C_+ + C_-\}^{-1}.$$

**8** Для получения искомого разложения из (9) удобно воспользоваться соотношением

$$\operatorname{sh}[(n+1)\alpha] = \operatorname{sh}[\alpha] \sum_{k=0}^{[n/2]} 2^{n-k} \binom{n-k}{k} \operatorname{ch}^{n-2k}[\alpha],$$

где  $\binom{n-k}{k}$  — биномиальный коэффициент, и учесть, что  $\operatorname{ch}[\alpha] = L/2R$ .

Удерживая несколько первых членов разложения по малому параметру  $2R/L$ , получаем:

$$C_{\pm} = R \pm \frac{R^2}{L} + \frac{R^3}{L^2} \pm \frac{R^4}{L^3} + \frac{2R^5}{L^4} \pm \frac{3R^6}{L^5} + \frac{5R^7}{L^6} \pm \frac{9R^8}{L^7} + \dots$$

Паразитная ёмкость каждого шара равна  $C_-$ , а взаимная ёмкость  $-C = (C_+ - C_-)/2$ , т.е.

$$C = \frac{R^2}{L} + \frac{R^4}{L^3} + \frac{3R^6}{L^5} + \frac{9R^8}{L^7} + \dots$$

**9** Ёмкость системы равна удвоенной паразитной ёмкости  $C_-$ . При  $L = 2R$  имеем  $\alpha = 0$ . Переходя к пределу  $\alpha \rightarrow 0$  под знаком суммы в (9), получаем:

$$2C_- = 2R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 2R \ln(2).$$

Такой же результат получен в задаче №215 из сборника задач [2].

Вычисленную ёмкость не следует путать со взаимной ёмкостью шаров  $C = (C_+ + C_-)/2$ , которая стремится к бесконечности при сближении шаров. Расчет показывает (см. задачу 12), что  $C \approx \frac{R}{4} \ln\left(\frac{R}{L-2R}\right)$ .

**10** Дипольный и квадрупольный члены разложения отсутствуют. Первый ненулевой член разложения, следующий за кулоновским, — октупольный:

$$F = -\frac{(q^2 - Q^2)}{L^2} - \frac{4(q^2 + Q^2)R^3}{L^5} - \frac{6(q^2 + Q^2)R^5}{L^7} - \frac{14(q^2 - Q^2)R^6}{L^8} + \dots$$

Для получения этого разложения из (11) удобно воспользоваться решением задачи 8. Отсутствие дипольного и квадрупольного членов разложения означает, что для моделирования точечных зарядов с хорошей точностью можно использовать небольшие проводящих шары.

При заданном расстоянии  $L$  существует состояние равновесия, когда сила взаимодействия шаров равна нулю. Такое состояние имеет место при выполнении условия

$$q_+ q_- \approx 2(q_-^2 + q_+^2) \frac{R_-^3}{L^3},$$

которое осуществимо для зарядов одного знака. Варьируя силу относительно положения равновесия, нетрудно показать, что оно неустойчиво.

**11** Полагая в общей формуле (11)  $q = 0$ , имеем

$$F = -\frac{\partial Q^2}{\partial L C_-}, \quad (\text{A1})$$



где  $Q$  — заряд каждого шара. В соответствии с (9)

$$C_- = R \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sh}[\alpha]}{\operatorname{sh}[(n+1)\alpha]},$$

причём  $\alpha = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - (2R/L)^2}}{1 - \sqrt{1 - (2R/L)^2}} \right]$ . Шары соприкасаются, если  $L \rightarrow 2R$ . При этом  $\alpha \approx \sqrt{1 - (2R/L)^2}$  стремится к нулю. Осуществив предельный переход под знаком суммы, легко вычислить значение  $C_- = R \ln 2$  при  $\alpha = 0$ , так как в получившемся ряду без труда распознается разложение функции  $\ln(1+x)$  в ряд Тэйлора при  $x = 1$ . Однако для вычисления производной такой ряд бесполезен.

Построим представление  $C_-$  в виде другого ряда, удобного для разложения по малым значениям  $\alpha$ . Введем функцию  $G(x) = \operatorname{sh}[\alpha]/\operatorname{sh}[(x+1)\alpha]$  и её преобразование Лапласа  $g(t)$ , такое что  $G(x) = \int_0^{\infty} dt g(t) e^{-xt}$ , если вещественная часть  $x$  положительна,  $\operatorname{Re}[x] > 0$ . Заметим, что  $C_-/R = \sum_{n=0}^{\infty} F(n) \cos[\pi n]$ . Далее имеем:

$$\begin{aligned} C_- &= R \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dt g(t) e^{-nt} \frac{1}{2} [e^{i\pi n} + e^{-i\pi n}] = \\ &= R \int_0^{\infty} dt g(t) \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-nt+i\pi n} + e^{-nt-i\pi n}] = \\ &= \int_0^{\infty} dt g(t) \frac{1}{1 + e^{-t}}. \end{aligned}$$

Преобразование Лапласа

$$g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} dx G(x) e^{xt}$$

вычисляется как интеграл по контуру  $Br$  в комплексной плоскости  $x$ , проходящему правее всех особенностей подынтегрального выражения. Функция  $G(x) = \operatorname{sh}[\alpha]/\operatorname{sh}[(x+1)\alpha]$  имеет полюса первого порядка в точках  $x = -1 + i\pi k/\alpha$ , где  $k$  — целое число. Интеграл по контуру равен сумме вычетов подынтегрального выражения в этих полюсах, помноженной на  $2\pi i$ :

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} e^{-t+i\pi kt/\alpha}.$$

Таким образом,

$$C_- = R \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k a_k,$$

где

$$a_k = \int_0^\infty dt e^{i\pi kt/\alpha} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}.$$

Нулевой член вновь полученного ряда, легко вычисляется:

$$a_0 = \int_0^\infty dt \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} = \ln 2.$$

Остальные члены при малых  $\alpha$  с необходимой точностью можно найти, выполнив несколько раз интегрирование по частям. При первом интегрировании получаем:

$$a_k = \frac{\alpha}{\pi ik} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} \Big|_0^\infty - \frac{\alpha}{\pi ik} \int_0^\infty dt e^{i\pi kt/\alpha} \frac{d}{dt} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}.$$

Первый член в правой части не равен нулю только на нижнем пределе  $t = 0$ . Второй член в правой части можно снова проинтегрировать по частям. При этом добавится ещё один член, который будет содержать дополнительный малый множитель  $\frac{\alpha}{\pi ik}$  по сравнению с первым членом. Повторение процедуры приведет к разложению коэффициентов ряда по степеням  $\alpha$ :

$$a_k = \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{\alpha}{\pi ik}\right)^{m+1} \frac{d^m}{dt^m} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} \Big|_{t=0} \quad (k \neq 0).$$

Просуммировав члены ряда при одинаковых степенях  $\alpha$  получим разложение емкостного коэффициента  $C_-$  в ряд Тэйлора относительно  $\alpha = 0$ :

$$C_- = R \left[ \ln 2 - \frac{\alpha^2}{24} - \frac{7\alpha^4}{2880} - \frac{31\alpha^6}{60480} - \dots \right] \frac{\text{sh } \alpha}{\alpha}.$$

Подставляя первые члены ряда в (A1), находим силу отталкивания:

$$\begin{aligned} F &\approx \frac{4 \ln(2) - 1}{24 \ln^2(2)} \frac{Q^2}{R^2} - \frac{5 - 23 \ln(2) + 96 \ln^2(2)}{1440 \ln^3(2)} \left(1 - \frac{4R^2}{L^2}\right) \frac{Q^2}{R^2} \\ &\approx 0,153725 \frac{Q^2}{R^2} - 0,0733619 \left(1 - \frac{4R^2}{L^2}\right) \frac{Q^2}{R^2} \end{aligned}$$

Из-за расталкивания одноименных зарядов, она почти в 1,6 раза меньше, чем сила  $F = Q^2/4R^2$  отталкивания точечных зарядов той же величины, находящихся в центрах шаров.

**12** Полагая в общей формуле (11)  $Q = 0$ , имеем

$$F = -\frac{\partial}{\partial L} \frac{q^2}{C_+}, \quad (\text{A2})$$

где  $\pm q$  — заряды шаров. В соответствии с (9)

$$C_+ = R \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\text{sh}[\alpha]}{\text{sh}[(n+1)\alpha]},$$

причём  $\alpha = \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - (2R/L)^2}}{1 - \sqrt{1 - (2R/L)^2}} \right]$ . Шары соприкасаются, если  $L \rightarrow 2R$ . При этом  $\alpha \approx \sqrt{1 - (2R/L)^2}$  стремится к нулю, а ряд расходится. Это отражает тот факт, что взаимная ёмкость неограниченно увеличивается при сближении обкладок конденсатора.

Для вычисления ряда при малых, но конечных значениях  $\alpha$  заменим его интегралом:

$$\begin{aligned} C_+ &\approx R \int_0^{\infty} dx \frac{\text{sh}[\alpha]}{\text{sh}[(x+1)\alpha]} \\ &= R \frac{\text{sh}[\alpha]}{\alpha} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{\text{sh}[x]} \\ &\approx -R \ln(\alpha) \\ &\approx \frac{R}{2} \ln \left( \frac{R}{L-2R} \right). \end{aligned}$$

Подставляя  $C_+$  в (A1), находим силу притяжения:

$$F = -\frac{2q^2}{(L-2R)R} \ln^{-2} \left( \frac{R}{L-2R} \right).$$

При сближении шаров сила неограниченно возрастает несколько медленнее, чем обратно пропорционально расстоянию  $L-2R$  между поверхностями шаров.

Найденная асимптотика силы на малых расстояниях между шарами доминирует практически при любом соотношении их зарядов. Как следует из вывода формулы (11), в общем случае величина  $q$  равна полуразности зарядов шаров. Исключение составляет случай точного равенства зарядов и по величине, и по знаку, когда сила остается конечной величиной (см. задачу 11).

*I.A. Kotelnikov*

**Two problems on method of images**

*И. А. Котельников*

**Две задачи на метод изображений**

ИЯФ 2001-71

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 1.11.2001 г.

---

Сдано в набор 5.11.2001 г.

Подписано в печать 5.11.2001 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 1.5 печ.л., 1.2 уч.-изд.л.

Тираж 120 экз. Бесплатно. Заказ № 71

---

Обработано на IBM PC и отпечатано

на ротапринтере ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН

*Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.*