

Сибирское отделение Российской Академии наук
ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ им. Г.И. Будкера

В.И. Юрченко

К ТЕОРИИ
МНОГОКРАТНОГО РАССЕЙНИЯ II

ИЯФ 2000-69

НОВОСИБИРСК
2000

К теории многократного рассеяния II

В.И. Юрченко

Институт ядерной физики им.Г.И. Будкер

630090 Новосибирск, Россия

Аннотация

Рассмотрены вопросы получения точных и приближенных решений кинетических уравнений в задаче многократного рассеяния. Для сечений, являющихся рациональными функциями от χ^2 , $\chi = 2 \sin(\delta/2)$, δ — угол рассеяния, получены точные решения в виде ряда по полиномам Лежандра.

Уточняются границы применимости кинетического уравнения для функции распределения по переменной $q = 2 \sin(\vartheta/2)$ [1], проведено сравнение решений этого уравнения с точными решениями для сечений Резерфорда и Мотта.

Решён вопрос о сходимости приближенных решений в виде ряда по полиномам Лежандра и ряда по степеням $1/B$. Такие приближения получены и найдены границы их применимости.

To the theory of the multiple scattering II

V.I. Yurchenko

Budker Institute of Nuclear Physics

630090 Novosibirsk, Russia

Abstract

The problem of kinetic equation solution at the multiple scattering are discussed. Exact solutions in Legendre polynomial expansion are derived for the cases of a scattering cross-sections as a rational functions in the variable χ^2 , $\chi = 2 \sin \delta/2$, δ is angle of scattering. More exact bounds of bility are derived for kinetic equation in the variable $q = 2 \sin(\vartheta/2)$ [1]. Approximate solutions in form of Legendre polynomial expansion and power series in $1/B$ are obtained and bounds of its bility are found.

© *Институт ядерной физики
им. Г.И. Будкера СО РАН, Россия*

1 Введение

Эта работа является продолжением работы [1], в которой в связи с задачей многократного рассеяния рассматривалось кинетическое уравнение для угловой функции распределения (обозначения те же, что в [1])

$$\frac{\partial f(\vec{n} \cdot \vec{i}, t)}{\partial t} = N \int \sigma(\vec{n} \cdot \vec{n}') [f(\vec{n}' \cdot \vec{i}, t) - f(\vec{n} \cdot \vec{i}, t)] \frac{d\Omega'}{2\pi}, \quad (1)$$

которое при $f(\cos \vartheta, 0) = \delta(1 - \cos \vartheta)$ имеет решение

$$f(\cos \vartheta, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\cos \vartheta) \exp(-Q_l(t)), \quad (2)$$

$$Q_l(t) = Nt \int_0^{\pi} \sigma(\cos(\delta)) \sin \delta d\delta [1 - P_l(\cos \delta)], \quad (3)$$

где P_l – полиномы Лежандра.

В [1] получено приближенное кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f(q, t)}{\partial t} = N \int \sigma(\chi) [f(|\vec{q} - \vec{\chi}|, t) - f(q, t)] \frac{d\vec{\chi}}{2\pi}, \quad (4)$$

в котором интегрирование проводится по плоской области,

$$q = 2 \sin(\vartheta/2), \quad \chi = 2 \sin(\delta/2).$$

При $f(q, 0) = \delta(1 - \cos \vartheta) = \delta(q)/q$ его решение

$$f(q, t) = \int_0^{\infty} \eta d\eta J_0(\eta q) \exp(-Q(\eta, t)), \quad (5)$$

$$Q(\eta, t) = Nt \int_0^{\infty} \sigma(\chi) \chi d\chi \{1 - J_0(\eta\chi)\} . \quad (6)$$

Такое приближение, в соответствии с условиями его получения [1], можно назвать приближением малых переданных импульсов (малых передач), хотя в пределах найденных в [1] границ применимости метода решение (5), (6) является достаточно точным и при $q \sim 1$. Приближение малых углов не используется, т. е. решение получено для общего случая сечения. В случае сечения Резерфорда его можно представить в виде ряда [1-4]

$$f(q) = \frac{1}{\lambda^2} \left[f^{(0)}(X) + B^{-1} f^{(1)}(X) + B^{-2} f^{(2)}(X) + \dots \right],$$

$$X = q/\lambda, \quad 1/B = \lambda_a^2/\lambda^2, \quad \lambda_a^2 = \bar{n}\chi_a^2,$$

где χ_a – угол обрезания [2], \bar{n} – среднее число столкновений на пути t , λ – характерный размер области многократного рассеяния.

В [1] показано, что уравнение (4) применимо во всей угловой области и проведено сравнение приближенных решений уравнений (1), (4) для сечений Резерфорда и Мотта. Проведенное рассмотрение поставило ряд вопросов, которые состоят в следующем.

1. Ввиду отсутствия точных решений уравнения (1) привлекались приближения, с которыми ряд (2) расходится, что привело к некоторым трудностям методического характера, т. к. результаты в той или иной степени зависят способа обрезания ряда (2).

2. В широком диапазоне значений λ решение (5), представленное в виде ряда по степеням $1/B$ с учетом трех членов разложения, намного точнее в однократной области ($q \gg \lambda$), чем в областях кратного ($q \sim (2 \div 4)\lambda$) и многократного ($0 \leq q \sim \lambda$) рассеяния. Т. е. необходим учёт большего числа членов разложения.

3. К этому следует добавить, что ряд по степеням $1/B$ расходится (см. разд. 4 данной работы), т. е. возникают вопросы с оценкой его точности и границ применимости.

4. По этим причинам не удалось провести в полной мере сравнение решений уравнений (1), (4) ни для одного частного случая сечения, что является принципиальным или, по меньшей мере, желательным для любого приближенного метода. В [1] для контроля приближений привлекался метод Монте-Карло.

Цель работы состоит в решении этих вопросов. Проведено сравнение точных решений уравнения (1) с решениями уравнения (4) для сечений

Резерфорда [2]

$$\sigma_R(\chi) = \frac{2s^2}{(\chi^2 + \chi_a^2)^2} \quad (7)$$

и Мотта

$$\sigma_M(\chi) = \sigma_R(\chi) \left(1 - \frac{1}{4} \beta^2 \chi^2 \right) \quad (8)$$

при учете атомного формфактора (угла обрезания χ_a). Решения уравнения (1) для этих случаев в данной работе получены. Рассмотрены приближённые решения, в том числе и сходящийся ряд по степеням $1/B$, с точки зрения их пригодности при небольшом среднем числе столкновений. Предварительно рассмотрен общий случай сечения

$$\sigma(\chi) = \sigma_R(\chi) \kappa(\chi), \quad (9)$$

где множитель $\kappa(\chi)$ учитывает отличие реального сечения от сечения (7).

2 Общий случай сечения

Покажем, что для сечения (9) общая формула для величины Q_l в (2) имеет вид

$$Q_l = \chi_c^2 \sum_{k=1}^l \varepsilon^{k-1} \left\{ C_{lk} [kA(\varepsilon) + \varepsilon A'(\varepsilon)] - ka_{lk} \right\}, \quad (10)$$

где

$$\chi_c^2 = Nts^2, \quad \varepsilon = \chi_a^2,$$

$$A(\varepsilon) = \int_0^2 \frac{\kappa(\chi)}{\chi^2 + \varepsilon} 2\chi d\chi, \quad A'(\varepsilon) = - \int_0^2 \frac{\kappa(\chi)}{(\chi^2 + \varepsilon)^2} 2\chi d\chi, \quad (11)$$

$$a_{lk} = (-1)^k \frac{1}{2^k} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_{lk}(x) \kappa(x) dx}{(1-x)^{k+1}}, \quad (12)$$

$$\gamma_{lk}(x) = 1 - P_l(x) - \sum_{m=1}^k (-1)^{m+1} C_{lm} \chi^{2m}. \quad (13)$$

В этих формулах $x = \cos \delta$, $\chi^2 = 2(1-x)$, C_{lk} – коэффициенты в представлении $P_l(x)$ в виде гипергеометрического ряда :

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^l (-1)^k C_{lk} \chi^{2k}, \quad (14)$$

$$C_{lk} = \frac{1}{k!2^k 4^k} \prod_{j=0}^{k-1} [l(l+1) - j(j+1)], \quad C_{l0} = 1.$$

С представлением (14) в интеграле (3) имеем

$$1 - P_l(x) = \sum_{k=1}^l (-1)^{k+1} C_{lk} \chi^{2k}. \quad (15)$$

Для сечения (9) вклад k -го слагаемого $(-1)^{k+1} C_{lk} \chi^{2k}$ в этой сумме в интеграл (полагаем $\chi^{2k} = [(\chi^2 + \chi_a^2) - \chi_a^2]^k$ и используем формулу бинома Ньютона), имеет вид

$$\chi_c^2 \left\{ \varepsilon^{k-1} C_{lk} [kA(\varepsilon) + \varepsilon A'(\varepsilon)] + \sum_{j=0}^{k-2} b_j \varepsilon^j \right\}, \quad (16)$$

где b_j – некоторые коэффициенты. Таким образом, величину Q_l можно представить в виде (10) с неизвестными пока (кроме $a_{ll} = 0$) величинами a_{lk} .

Для их определения выделим в сумме (15) первые k слагаемых и запишем Q_l в виде суммы двух интегралов

$$Q_l / \chi_c^2 = \int_0^2 2\chi d\chi g(\chi) \sum_{m=1}^k (-1)^{m+1} C_{lm} \chi^{2m} + \int_0^2 2\chi d\chi g(\chi) \gamma_{lk}(\chi),$$

где $g(\chi) = \kappa(\chi) / (\chi^2 + \chi_a^2)^2$, величина γ_{lk} определяется формулой (13), $\gamma_{l0}(\chi) = 1 - P_l(x)$, $\gamma_{ll}(\chi) = 0$. Первый интеграл, согласно (16), дает степенные слагаемые пропорциональные ε^m с $m \leq k-2$ и слагаемые типа $\varepsilon^{m-1} [mA(\varepsilon) + \varepsilon A'(\varepsilon)]$ с $m \leq k$. С учетом (10) получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^2 2\chi d\chi g(\chi) \gamma_{lk}(\chi) = \\ & -ka_{lk} \varepsilon^{k-1} + \sum_{m=k+1}^l \varepsilon^{m-1} \left\{ C_{lm} [mA(\varepsilon) + \varepsilon A'(\varepsilon)] - ma_{lm} \right\} + \\ & + \text{слагаемые} \sim \varepsilon^m \text{ с } m \leq k-2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{d^{k-1}}{d\varepsilon^{k-1}} \int_0^2 2\chi d\chi g(\chi) \gamma_{lk}(\chi) = -k! a_{lk}$$

и это приводит к формуле (12).

Отметим еще случай, когда

$$\sigma(\chi) = 2s^2 \kappa(\chi) / (\chi^2 + \varepsilon).$$

Т.к. отрицательная производная по ε от этой величины равна сечению (9), интегрируя (10) по ε получим для этого случая

$$Q_l = \chi_c^2 \left\{ a_{l0} - \sum_{k=1}^l \varepsilon^k [C_{lk} A(\varepsilon) - a_{lk}] \right\}. \quad (17)$$

Постоянная интегрирования $a_{l0} = Q_l / \chi_c^2$ при $\varepsilon = 0$, что с учётом (3) приводит к формуле (12) для a_{l0} . Формула (17) позволяет написать решение для сечения $\sigma(\chi) = \sigma_M(\chi) \kappa(\chi)$, т. к.

$$\sigma_M(\chi) = \left(1 + \frac{1}{4} \varepsilon \beta^2 \right) \sigma_R(\chi) - \frac{1}{4} \beta^2 \frac{2s^2}{\chi^2 + \chi_a^2}. \quad (18)$$

Такие же преобразования можно сделать и для решения (5), (6). Используя вместо (14) разложение

$$J_0(\eta\chi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_k(\eta) \chi^{2k}, \quad C_k(\eta) = \frac{1}{k! 2^k 4^k} \eta^{2k}, \quad (19)$$

и повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$Q(\eta) = \chi_c^2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k-1} \left\{ C_k(\eta) [kA(\varepsilon) + \varepsilon A'(\varepsilon)] - k a_k(\eta) \right\},$$

$$a_k(\eta) = (-1)^k \int_0^2 \frac{\gamma_k(\eta\chi)}{\chi^{2(k+1)}} \kappa(\chi) 2\chi d\chi,$$

$$\gamma_k(\eta\chi) = 1 - J_0(\eta\chi) - \sum_{m=1}^k (-1)^{m+1} C_m(\eta) \chi^{2m}.$$

Величины $A(\varepsilon)$, $A'(\varepsilon)$, как и ранее, определяются формулой (11). Отметим, что в случае сечения (7) при переходе в интегралах этих формул

к бесконечному верхнему пределу возникают расходимости в интегралах для $A(\varepsilon)$, $a_k(\eta)$, которые, однако, гасят друг друга.

Формулы (10) - (14) дают общее решение задачи. Это структурные формулы, показывающие, например, что слагаемые в (2) зависят от двух констант $A(\varepsilon)$ и $A'(\varepsilon)$, величины a_{lk} не зависят от угла обрезания χ_a и т. д. Эти формулы могут быть использованы для получения точных или, с учетом малости величины ε , приближенных решений.

3 Сечения Резерфорда и Мотта

При $\kappa(x) = 1$ интеграл в формуле (12) найден в приложении **A** и

$$a_{lk} = 2C_{lk}(S_l - S_k), \quad S_l = \sum_{k=1}^l \frac{1}{k}, \quad S_0 = 0, \quad A(\varepsilon) = \ln \frac{4+\varepsilon}{\varepsilon}, \quad \varepsilon A'(\varepsilon) = -\frac{4}{4+\varepsilon}.$$

Для сечения Резерфорда (7) получаем

$$Q_l^R = \chi_c^2 \sum_{k=1}^l \varepsilon^{k-1} k C_{lk} \left[\ln \frac{4+\varepsilon}{\varepsilon} - 2(S_l - S_k) - \frac{1}{k} \frac{4}{4+\varepsilon} \right]. \quad (20)$$

Для сечения Мотта (8), с учётом (17), (18), найдем

$$Q_l^M = \left(1 + \frac{\varepsilon \beta^2}{4} \right) Q_l^R - \frac{\chi_c^2 \beta^2}{4} \left\{ \ln \frac{4+\varepsilon}{\varepsilon} - \sum_{k=0}^l \varepsilon^k C_{lk} \left[\ln \frac{4+\varepsilon}{\varepsilon} - 2(S_l - S_k) \right] \right\}.$$

Итак, ряд (2), (20) является решением уравнения (1) для сечения (7), ряд (2), (21) – для сечения (8). Использованное в [1] приближение Гудсмита и Сандерсона для сечения Резерфорда

$$Q_l^R \approx \chi_c^2 C_{l1} \left[\ln \frac{4}{\varepsilon} - 2(S_l - S_1) - 1 \right]$$

– это, с несущественными отличиями ($\varepsilon \ll 1$), первый член разложения в формуле (20), включающий слагаемые с нулевой степенью множителя ε^k , а полученное в [1] приближение для сечения Мотта

$$Q_l^M \approx \chi_c^2 \left\{ C_{l1} \left[\ln \frac{4}{\varepsilon} - 2(S_l - S_1) - 1 \right] - \frac{1}{2} \beta^2 S_l \right\}$$

– это слагаемые с нулевой степенью множителя ε^k в формуле (21).

С найденными решениями можно проверить и уточнить различные приближения. Имеется также возможность сравнения решений уравнений (1), (4).

Для сечения (7) формула (6) приводится к виду

$$Q^R(\eta) = \frac{\chi_c^2}{\chi_a^2} \left\{ 1 + \zeta \frac{d}{d\zeta} \int_0^\infty \frac{J_0(x)x dx}{x^2 + \zeta^2} \right\}, \quad \zeta = \chi_a \eta.$$

Интеграл равен $K_0(\zeta)$ и с учетом $K_0'(\zeta) = -K_1(\zeta)$ получаем

$$Q^R(\eta) = \frac{\chi_c^2}{\chi_a^2} \left\{ 1 - \chi_a \eta K_1(\chi_a \eta) \right\}. \quad (22)$$

Представляя K_1 в виде ряда, получим

$$Q^R(\eta) = \chi_c^2 \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k-1} k C_k(\eta) \left[\ln \frac{4}{\varepsilon} - 2(S(\eta) - S_k) - \frac{1}{k} \right], \quad (23)$$

$$S(\eta) = \ln \eta + C, \quad C_k(\eta) = \frac{1}{k! 2^k} \eta^{2k},$$

где C – постоянная Эйлера, $C_k(\eta)$ – коэффициенты в разложении (19). Формула (20) переходит в (23) при

$$C_{ik} \rightarrow C_k(\eta), \quad S_l \rightarrow S(\eta), \quad \ln \frac{4+\varepsilon}{\varepsilon} \rightarrow \ln \frac{4}{\varepsilon}, \quad \frac{4}{4+\varepsilon} \rightarrow 1. \quad (24)$$

В случае сечения Мотта интеграл (6) расходится, если не обрезать сечение при $\chi = 2$. Формулу типа (21) можно получить с некоторыми приближениями. Представим в (18)

$$1/(\chi^2 + \chi_a^2) = [1/(\chi^2 + \chi_a^2) - 1/\chi^2] + 1/\chi^2.$$

Первое слагаемое здесь дает сходящийся интеграл, равный

$$\chi_c^2 \left\{ \ln(4/\varepsilon) - 2K_0(\chi_a \eta) - 2(\ln \eta + C) \right\},$$

интеграл от второго приближённо [1]

$$2\chi_c^2 \int_0^2 \frac{1 - J_0(\eta\chi)}{\chi^2} \chi d\chi \approx 2\chi_c^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_\epsilon^2 \frac{d\chi}{\chi} - \int_\epsilon^\infty \frac{J_0(\eta\chi)}{\chi} d\chi \right\} = 2\chi_c^2 (\ln \eta + C).$$

С учетом этого

$$Q^M(\eta) \approx \left(1 + \frac{\varepsilon\beta^2}{4}\right) Q^R(\eta) - \frac{\chi_c^2\beta^2}{4} \left\{ \ln \frac{4}{\varepsilon} - 2K_0(\chi_a\eta) \right\}.$$

С представлением K_0 в виде ряда получим

$$Q_l^M \approx \left(1 + \frac{\varepsilon\beta^2}{4}\right) Q_l^R - \frac{\chi_c^2\beta^2}{4} \left\{ \ln \frac{4}{\varepsilon} - \sum_{k=0}^l \varepsilon^k C_k(\eta) \left[\ln \frac{4}{\varepsilon} - 2(S(\eta) - S_k) \right] \right\}. \quad (25)$$

Т.е. с принятыми приближениями здесь, как и для сечения Резерфорда, получается соответствие с решением (21) при учете формул (24).

С использованием полученных формул можно найти решения уравнений (1), (4) для сечений $\sigma(\chi)$, являющихся рациональными функциями от χ^2 . С учётом, например, при $k = 1, 2$

$$\frac{1}{(\chi^2 + \varepsilon)^k (\chi^2 + a)^m} = \frac{(-1)^{m+k-2}}{(m-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial \varepsilon^{k-1}} \frac{\partial^{m-1}}{\partial a^{m-1}} \frac{1}{a-\varepsilon} \left(\frac{1}{\chi^2 + \varepsilon} - \frac{1}{\chi^2 + a} \right),$$

получаются решения для сечений $\sigma_R(\chi) \kappa(\chi)$, $\sigma_M(\chi) \kappa(\chi)$, в которых

$$\kappa(\chi) = \sum_m \frac{b_m}{(\chi^2 + a_m)^m}.$$

Множитель такого типа обрезает сечение в области $\chi^2 > a_m$ и это позволяет, например, получить решение с приближенным учётом ядерного формфактора. Как видно, фактически нужны решения для сечений $\sigma \sim 1/(\chi^2 + \varepsilon) - 1/(\chi^2 + a)$. В случае ряда по полиномам Лежандра они получаются с помощью формулы (17), в которой $a_{lk} = 2C_{lk}(S_l - S_k)$.

Возможности рядов для получения Q_l , $Q(\eta)$, вообще говоря, ограничены. Для $Q(\eta)$, например, при $\chi_a\eta \gg 1$ необходимы асимптотические разложения. Для Q_l , при больших значениях l , нужно с заменой [1]¹

$$P_l(\cos(\delta)) \rightarrow J_0(\eta\chi), \quad \eta = \sqrt{l(l+1)}$$

¹Это можно обосновать в квазиклассическом приближении, если исходное уравнение для P_l записать в переменной χ . Это уравнение гласит

$$\frac{1}{\chi} \frac{d}{d\chi} \chi \left(1 - \frac{\chi^2}{4}\right) \frac{d}{d\chi} P_l = -l(l+1)P_l$$

и в квазиклассическом приближении даёт $P_l(\cos(\delta)) \approx J_0(\eta\chi)$. С этим соотношением при приведении ряда (2) к интегралу (5), как и при получении уравнения (4) (см. об этом в [1]), не возникает необходимости в малоугловом приближении для сечения. Сечение остаётся точным, чем, на наш взгляд, и обеспечивается применимость решения (5), (6) во всей области углов.

перейти к интегралу

$$Q_l = Nt \int_0^2 \sigma(\chi) \chi d\chi \{1 - J_0(\eta\chi)\} \rightarrow \bar{n} - Nt \int_0^\infty J_0(\eta\chi) \sigma(\chi) \chi d\chi,$$

где $\bar{n} = Nt\sigma_t$ – среднее число столкновений для обрезанного при $\chi=2$ сечения. Т. е. для получения точных решений, если суммирование в (2) осуществляется до $l \sim 1/\chi_a$, необходимо привлечение аналитических результатов для задачи (4) - (6).

Основное внимание далее уделено сечению Резерфорда. Результаты сравнения приближенных решений с точными обсуждаются в разделе 6.

4 Ряд по степеням $1/B$. Функции $f^{(n)}(X)$

Решение (5), (22) зависит от параметров χ_a^2 , χ_c^2/χ_a^2 . Второй из них равен среднему числу столкновений

$$\bar{n} = \chi_c^2/\chi_a^2,$$

т.к. полное сечение $\sigma_t = s^2/\chi_a^2$. Далее используются параметры λ , B . Наряду с B используется также более наглядный малый параметр

$$\varkappa = \chi_a^2/\lambda^2.$$

Величины B , λ определим посредством [1,3,4]

$$B - \ln B = \ln \bar{n} - 2C + 1, \quad \lambda^2 = \bar{n} B \chi_a^2, \quad (26)$$

при этом

$$\bar{n} \varkappa B = 1,$$

и перейдем в (5), (22) к переменным

$$u = \lambda\eta, \quad X = q/\lambda.$$

Ряд (23) получит вид (индекс R далее опускаем, в качестве аргумента используем величину p)

$$Q(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!^2} \varkappa^{k-1} p^k \left\{ 1 - \frac{1}{B} \left(\ln p - 2S_k + \frac{k+1}{k} \right) \right\}, \quad p = \frac{u^2}{4}. \quad (27)$$

С этими преобразованиями (с учётом $B = B(\bar{n})$ и $\varkappa = 1/(\bar{n}B)$) фактически осуществляется переход к параметрам λ, \bar{n} . Функция распределения для сечения Резерфорда получает простой вид

$$f(q) = \psi(X, \bar{n})/\lambda^2 \quad \text{или} \quad f(q) q dq = \psi(X, \bar{n}) X dX, \quad (28)$$

где функция ψ зависит от λ только через относительную величину $X = q/\lambda$.

Считаем среднее число столкновений \bar{n} достаточно большим, так что $1/B \ll 1$ и $\varkappa = 1/(\bar{n}B) \ll 1$. С учетом этого оставим в (27) только первый член разложения. Тогда

$$Q(p) \approx p \left(1 - \frac{\ln p}{B} \right), \quad (29)$$

и, представляя $\exp(-Q)$ и решение (5) в виде ряда по степеням $1/B$, получим

$$f(q) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{n=0}^{n_m} B^{-n} f^{(n)}(X), \quad X = q/\lambda, \quad (30)$$

$$f^{(n)}(X) = \frac{2}{n!} \int_0^\infty e^{-p} [p \ln p]^n J_0(2\sqrt{p} X) dp. \quad (31)$$

Отметим, что параметр λ интерпретируется, как характерный размер области многократного рассеяния (диффузионной области), в которой распределение частиц близко к гауссовому ($f^{(0)}(X) = 2 \exp(-X^2)$) и где сосредоточена большая часть рассеянных частиц.

Найдем для функций $f^{(n)}(X)$ представления в виде рядов и их асимптотические разложения. В промежуточных формулах сделаем замену

$$f^{(n)}(X) \rightarrow f^{(n)}(z), \quad z = X^2.$$

Подставляя в (31) разложение (19), получим вспомогательный ряд

$$f^{(n)}(z) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1) \dots (k+n)}{k!} h_n(k+n+1) z^k,$$

$$h_n(\nu+1) = \frac{1}{n!, (\nu+1)} \int_0^\infty e^{-p} p^\nu (\ln p)^n dt = \frac{1}{n!, (\nu+1)} \frac{d^n}{d\nu^n}, (\nu+1).$$

Формулы для h_n приведены в приложении В.

Ряд пригоден в расчетах лишь до $X \sim 3$. С помощью соотношения $h_n(\nu+1) = h_{n-1}(\nu)/\nu + h_n(\nu)$, к которому приводит производная n -го порядка от $(\nu+1) = \nu$, (ν) , преобразуем его к виду

$$f^{(n)}(z) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)\dots(k+n-1)}{k!} h_{n-1}(k+n) z^{k+n} + 2n! h_n(n) - 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)\dots(k+n)}{k!} \left(\frac{z^{k+1}}{k+1} + n \frac{z^{k+1}}{(k+1)^2} \right) h_n(k+n+1).$$

Нетрудно видеть, что написано соотношение

$$f^{(n)}(z) = f^{(n-1)}(z) + 2n! h_n(n) - \int_0^z f^{(n)}(\eta) d\eta - n \int_0^z \frac{d\eta}{\eta} \int_0^\eta f^{(n)}(\xi) d\xi.$$

С учетом $\frac{1}{2} \int_0^\infty f^{(n)}(\xi) d\xi = \delta_{on}$ (приложение **C**), для функции

$$F_n = \frac{1}{2} \int_z^\infty f^{(n)}(\xi) d\xi$$

получим уравнение $F_n'' + F_n' + \frac{n}{z} F_n = F_{n-1}''$

с начальными условиями

$$F_n(0) = 0, \quad F_n'(0) = -n! h_n(n+1).$$

Это позволяет последовательно искать функции $F_n(z)$, $f^{(n)}(z)$ со всё более высокими значениями n (см. приложение **D**).

Аналогичный поход можно применить для получения функций более общего вида с $m > n$

$$f_m^{(n)}(X) = \frac{2}{n!} \int_0^\infty e^{-p} p^m (\ln p)^n J_0(2\sqrt{p} X) dp.$$

Необходимость в этих функциях возникает при построении приближенных решений. Формулы для них получаются фактически те же, что и в случае $m = n$. Уравнение для

$$F_{nm}(z) = \frac{1}{2} \int_z^\infty f_m^{(n)}(\xi) d\xi,$$

например, имеет вид $F''_{nm} + F'_{nm} + \frac{m}{z}F_{nm} = F''_{n-1,m-1}$. При небольших m для получения $f_m^{(n)}(X)$ можно использовать соотношение

$$f_{m+1}^{(n)}(z) = -\frac{d}{dz}z \frac{d}{dz}f_m^{(n)}(z).$$

Далее для $m=0, 1, 2$ потребуются функции

$$f_m^{(0)}(z) = 2m! e^{-z} L_m(z),$$

$$L_0(z) = 1, \quad L_1(z) = 1-z, \quad L_2(z) = 1-2z+z^2/2.$$

Для функций F_n можно получить аналитическую рекуррентную формулу. Напишем

$$F_n(z) = n! h_n(n+1) e^{-z} L_n^{-1}(z) + \Delta(z),$$

где L_n^{-1} – полином Лаггера L_n^j при $j = -1$, первое слагаемое – решение однородного уравнения для F_n . Для $\Delta(z)$ получим уравнение с нулевыми начальными условиями, интегрируя которое последовательно k раз в пределах от 0 до z , найдем

$$z \Delta_k'' + (z-k) \Delta_k' + (n-k) \Delta_k = s_k,$$

где Δ_k, s_k – k -кратные интегралы в пределах от 0 до z , от Δ и $s = zF_{n-1}''$. Решая это уравнение при $k = n$, получим

$$F_n(z) = n! h_n(n+1) e^{-z} L_n^{-1}(z) + \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{ z^n e^{-z} \int_0^z e^{t-n-1} s_n(t) dt \right\}.$$

То есть функцию F_n можно выразить через определенные интегралы от F_{n-1} . В случае $n = 1$, например,

$$L_1^{-1}(z) = -z, \quad s_1 = z e^{-z}, \quad h_1(2) = 1 - C,$$

$$F_1(z) = e^{-z} - 1 + z e^{-z} [Ei(z) - \ln z],$$

и для $f^{(1)}$ получаем известную формулу [3,4] (переходим к аргументу X)

$$f^{(1)}(X) = 2 e^{-z} (z-1) [Ei(z) - \ln z] - 2(1-2e^{-z}).$$

Получающиеся из уравнения для F_n ряды (приложение **D**)

$$F_n(X) = n! e^{-z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k,$$

$$f^{(n)}(X) = 2n! e^{-z} \left[-a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \frac{z^k}{k!} \right],$$

пригодны до² $z \sim 100$ и сшиваются с асимптотическими рядами

$$F_n(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k! z^{k+n}} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{n-j}(k+n+1) \frac{\ln^j z}{j!},$$

$$f^{(n)}(X) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k! z^{k+n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{n-j}(k+n+1) \frac{\ln^j z}{j!}.$$

Функции $f^{(n)}(X)$ показаны на рис. 1. При $n \geq 2$ свойства этих функций медленно меняются с возрастанием номера n . Функции $f^{(0)}, f^{(1)}$ выделены тем, что $f^{(0)}$ определяет поведение функции распределения на малых, а $f^{(1)}$ – на больших углах.

В случае больших n для этих функций можно получить достаточно точные приближения. Фурье-образы этих функций

$$f_n(p) = \frac{1}{n!} e^{-p} [p \ln p]^n \quad (32)$$

имеют максимум при $p > 1$ (рис. 2). Область этого максимума при достаточно больших n вносит основной вклад. Запишем приближённо

$$f_n(p) \approx f_{n,max} [(1-\beta)g_m(p) + \beta g_{m+1}(p)], \quad (33)$$

$$g_m(p) = (p/p_{n0})^m \exp[-m(p/p_{n0} - 1)],$$

где $f_{n,max}$ – значение f_n в максимуме, точка максимума p_{n0} определяется решением трансцендентного уравнения

$$p_{n0} = n(1 + 1/\ln p_{n0}). \quad (34)$$

²При вычислении членов ряда, например, для F_n по формуле

$$\exp\{\ln |a_k| - \ln k! + k \ln z - z + \ln n!\}.$$

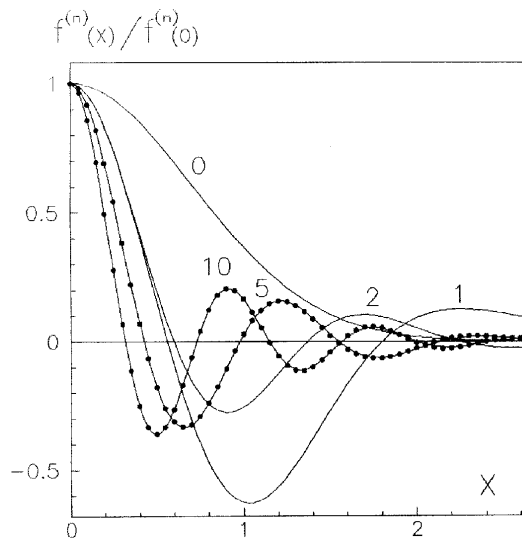


Рис. 1: Функции $f^{(n)}(X)$. Номера возле кривых показывают значения n . Точки – приближение (35).

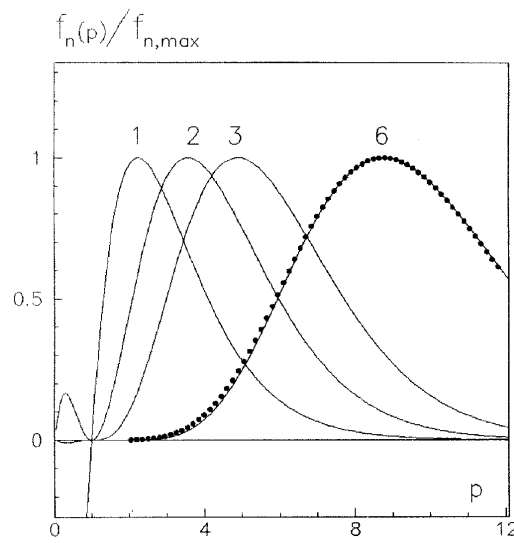


Рис. 2: Функции $f_n(p)$. Номера возле кривых показывают значения n . Точки – приближение (33).

В формуле (33) точки максимумов функций слева и справа и их значения в максимумах совпадают. Условие совпадения вторых производных при $p=p_{n0}$ имеет вид

$$\mu = m + \beta = n (1 + \ln^{-1} p_{n0} + \ln^{-2} p_{n0}).$$

Величины m, β определяются отсюда условием $m < \mu < m + 1$.

С учётом этого имеем

$$f^{(n)}(X) \approx f_{n, \max} \{ a_1 e^{-\alpha_1 z} L_m(\alpha_1 z) + a_2 e^{-\alpha_2 z} L_{m+1}(\alpha_2 z) \}, \quad z = X^2, \quad (35)$$

$$\alpha_1 = \frac{p_{n0}}{m}, \quad \alpha_2 = \frac{p_{n0}}{m+1}, \quad a_1 = \frac{2(1-\beta)m!\alpha_1}{e^{-m}m^m}, \quad a_2 = \frac{2\beta(m+1)!\alpha_2}{e^{-m-1}(m+1)^{m+1}}.$$

Параметры $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ зависят от n , индекс n для краткости опущен. Приближённые значения функций $f_n, f^{(n)}$ показаны на рис. 1,2 точками.

Покажем в заключение, что ряд (30) расходится. Возьмем $q=0$, когда

$$f^{(n)}(0) = \frac{2}{n!} \frac{d^n}{d\nu^n} (\nu+1) \Big|_{\nu=n}.$$

При достаточно больших ν , $'(\nu+1) = (\nu+1)\psi(\nu+1) \approx (\nu+1) \ln \nu$. Оставляя в каждом дифференцировании в множителе при ν , $(\nu+1)$ наибольшее слагаемое, получим $(d^n/d\nu^n) (\nu+1) \sim (\nu+1) \ln^n \nu$. Т. е. $f^{(n)}(0) \sim 2 \ln^n n$, общий член разложения в (30) пропорционален $[\ln n/B]^n$ и ряд, очевидно, расходится.

Таким образом, нужно учитывать либо конечное (какое?) число членов разложения, либо найти сходящийся ряд по степеням $1/B$. Для этого необходима сходимость исходного интеграла (5), который с приближением (29) расходится.

5 Обрезание интегралов и рядов.

Сходящийся ряд по степеням $1/B$

В формуле (27) выражение в фигурных скобках при достаточно большом значении p становится отрицательным, поэтому при учёте m членов разложения $\lim_{p \rightarrow \infty} Q(p) \rightarrow -\infty$ и интеграл (5) расходится. Учтём следующий $(m+1)$ -й член разложения и, считая величину $1/B$ малой, опустим в нем слагаемое $\sim 1/B$. Получим

$$Q(p) \approx \sum_{k=1}^m \dots + x^m \frac{m+1}{(m+1)!^2} p^{m+1}, \quad (36)$$

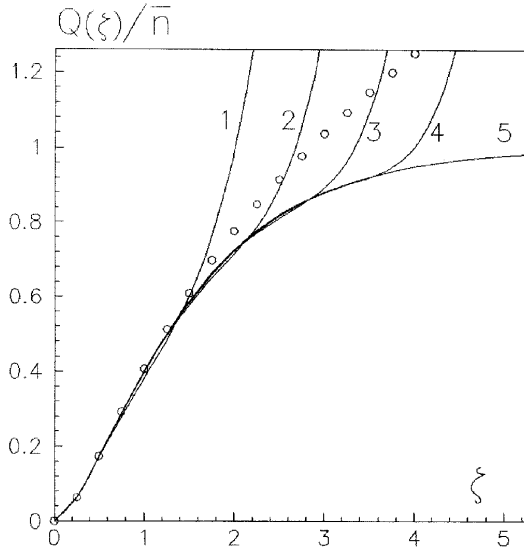


Рис. 3: Различные приближения для $Q(\zeta)$, $\zeta = \chi_a \eta$ при $\bar{n} = 5$: 1 - 4 - формула (36) при $m = 1 \div 4$; 5 - формула (22); Точки - значения \tilde{Q} по формулам (40), (22).

где знак суммы обозначает обрезанный по m -му слагаемому ряд (27). Это улучшает точность приближения в области характерных значений $p \sim 1$ ($\eta \sim 1/\lambda$) и, кроме того, обеспечивает сходимость интеграла (5).

Подобная процедура соответствует объединению слагаемых в (27), имеющих одинаковую суммарную степень произведений малых величин ε и $1/B$, т.е. слагаемых, пропорциональных ε^i и ε^{i-1}/B , и учету после этого конечного числа членов разложения. Члены такого разложения с возрастанием p стремятся к бесконечности, т.е. большие значения p обрезаются (рис. 3) и интеграл сходится. Приближение с $m=0$, например, соответствует первому члену такого разложения (с $i=0$), равному p , и описывает гауссово распределение. Для Q_i аналогичное приближение получается при переходе в (36) к исходным переменным ε, η и использовании формул соответствия (24). Получаем обрезанный ряд (20) :

$$Q_i \approx \chi_c^2 \left\{ \sum_{k=1}^m \dots + (m+1)C_{l,m+1} B \varepsilon^m \right\}. \quad (37)$$

При $m > l$ ряд фактически обрывается при $m=l$, т.к. при $m > l$ $C_{lm} = 0$.

Т. е. величина Q_l при $l \leq m$ имеет точные значения. Таким образом, при $m \geq 1$, нормировка и величина $\overline{q^2}$, которые определяются слагаемыми с $l=0, 1$ в (2), будут точными.

Возникает вопрос с интерпретацией таких приближений, т.к. они не содержат нерассеянных частиц, т.е. фактически принято, что вклад этих частиц в решение пренебрежимо мал.

В связи с этим полезно отметить, что уравнениям типа (1), (4) подчиняется определенный класс систем, переходы между состояниями которых образуют цепь Маркова. Пусть система подвергается некоторой случайной последовательности воздействий и $\rho_n(\lambda) d\lambda$ – вероятность обнаружения системы в интервале состояний $d\lambda$ после n -го акта воздействия. Тогда

$$\rho_n(\lambda) = \int W(\lambda, \lambda') \rho_{n-1}(\lambda') d\lambda'$$

(уравнение Смолуховского), где $W(\lambda, \lambda') d\lambda$ – вероятность перехода в результате одного акта воздействия в интервал $d\lambda$ из начального состояния λ' . Вероятность того, что к моменту времени t (или на пути t) произойдет n актов подчиняется распределению Пуассона со средним значением \overline{n} числа актов за время t . По истечении этого времени функция распределения равна в среднем

$$f(\lambda, \overline{n}) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\overline{n}} \frac{\overline{n}^n}{n!} \rho_n(\lambda).$$

Дифференцируя это соотношение по \overline{n} , после элементарных выкладок получим

$$\frac{\partial f(\lambda, \overline{n})}{\partial \overline{n}} = -f(\lambda, \overline{n}) + \int W(\lambda, \lambda') f(\lambda', \overline{n}) d\lambda'.$$

Это уравнение того же типа, что и (1), (4) (достаточно перейти в уравнениях от пройденного пути t и сечения σ к $\overline{n} = Nt\sigma_t$ и $W = \sigma/\sigma_t$). Как видно, решения этих уравнений — это средние по распределению Пуассона и при заданном значении \overline{n} следует представить

$$f(q, \overline{n}) = e^{-\overline{n}} f_\delta(q) + (1 - e^{-\overline{n}}) f_s(q, \overline{n}),$$

где $f_\delta(q) = \delta(q)/q$, $f_s(q, \overline{n})$ – функции распределения нерассеянных с $n=0$ и рассеянных с $n \geq 1$ частиц, $1 - e^{-\overline{n}}$ – вероятность рассеяния.

Нерассеянные частицы можно отделить в решениях (2), (5). Например, в (22) при $\zeta \gg 1$

$$K_1(\zeta) \approx \sqrt{\pi/2\zeta} \exp(-\zeta) \quad \text{и} \quad \lim_{\eta \rightarrow \infty} Q(\eta) = \bar{n}.$$

В общем случае, если сечение не содержит δ -образных особенностей, его фурье-образ при $\eta \rightarrow \infty$ стремится к нулю, т. е. формулы (3), (6) приводят к пределу $\lim_{\eta, l \rightarrow \infty} Q = \bar{n}$. Этот предел соответствует нерассеянным частицам, которые можно отделить с помощью замены $e^{-Q} \rightarrow e^{-Q} - e^{-\bar{n}}$ и учёта в решении слагаемого $e^{-\bar{n}} f_\delta(q)$. Получающиеся формулы для функции f_s , в отличие от решений (2), (3) и (5), (6), корректны в практических расчётах, т. к. не содержат δ -образной особенности.

Для рассеянных частиц имеем

$$f_s(\cos \vartheta, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\cos \vartheta) \exp(-\tilde{Q}_l(t)), \quad (38)$$

$$f_s(q, t) = \int_0^{\infty} \eta d\eta J_0(\eta q) \exp(-\tilde{Q}(\eta, t)), \quad (39)$$

$$e^{-\tilde{Q}} = (e^{-Q} - e^{-\bar{n}})/(1 - e^{-\bar{n}}). \quad (40)$$

Отметим, что отсюда при $\bar{n} \ll 1$, когда $Q \ll 1$ и $e^{-\tilde{Q}} \approx 1 - Q/\bar{n}$, с учётом (3), (6), следует одинаковый для уравнений (1), (4) и достаточно понятный результат $f_s(q, t) \approx \sigma(q)/\sigma_t$. При $q \gg \lambda$, когда в фурье-разложении существенны малые η , $l \ll 1/\lambda$ и $Q \ll 1$,

$$e^{-\tilde{Q}} \approx 1 - Q/(1 - e^{-\bar{n}}),$$

тем же образом (с отбрасыванием ненужных здесь слагаемых $\sim \delta(q)$), получим в однократной области

$$f_s(q, t) \approx \frac{\bar{n}}{1 - e^{-\bar{n}}} \frac{\sigma(q)}{\sigma_t}, \quad f(q, t) \approx \bar{n} \frac{\sigma(q)}{\sigma_t}.$$

Вернёмся к приближениям (36), (37). Множитель $e^{-\tilde{Q}}$ в (38), (39) обрезает большие значения η, l ($e^{-\tilde{Q}} \rightarrow 0$ при $\eta, l \rightarrow \infty$) и, в этом смысле, приближения (36), (37) можно использовать для рассеянных частиц, т. е. принять $\tilde{Q} \approx Q$. Сделаем уточнение

$$\tilde{Q} \approx Q/(1 - e^{-\bar{n}}). \quad (41)$$

Это соотношение, справедливое для малых $\eta, l \ll 1/\lambda$, когда $\tilde{Q}, Q \ll 1$, уточняет функцию распределения на больших углах, если с его учётом определяются величины B, λ . Для этого полагаем

$$Q = \gamma Q_s, \quad B = 1/(\bar{n}_s \varkappa), \quad \bar{n}_s = \bar{n}/\gamma, \quad \gamma = 1 - e^{-\bar{n}}. \quad (42)$$

Ряд для Q_s в зависимости от $p = u^2/4$ примет вид

$$Q_s(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!^2} \varkappa^{k-1} p^k \left\{ 1 - a_s - \frac{1}{B} \left(\ln p - 2S_k + \frac{k+1}{k} \right) \right\}, \quad (43)$$

$$a_s = \frac{1}{B} (B + 2C + \ln \varkappa - 1). \quad (44)$$

Определим величины B , λ из соотношений

$$B - \ln B = \ln \bar{n}_s - 2C + 1, \quad \lambda^2 = \bar{n}_s B \chi_a^2. \quad (45)$$

При этом $a_s = 0$ и ряд для $Q_s(p)$ совпадает с (27).

В итоге имеем приближение $Q \approx Q_s$, более точное в сравнении с $\tilde{Q} \approx Q$ при малых η и приближённо обрезающее большие значения η . При $m = 1$ в (36) получим вместо (29)

$$\tilde{Q}(p) \approx p \left(1 - \frac{\ln p}{B} \right) + \frac{1}{2} \varkappa p^2.$$

Как и ранее можно сделать разложение по степеням $1/B$ и получить ряд (30) с функциями $\tilde{f}^{(n)}(\varkappa, X)$, которые определены формулой (31) с обрезающим множителем под интегралом, равным $\exp(-\varkappa p^2/2)$. Нормировка этих функций остаётся той же, что и в случае $\varkappa = 0$ (приложение С). Эти функции, однако, зависят от двух переменных и неудобны в приложениях.

Запишем разложение в виде

$$e^{-\tilde{Q}(p)} = \sum_{n=0}^{n_m} \frac{1}{n!} e^{-\alpha p} v^n(p), \quad v(p) = \alpha p - \tilde{Q}(p) = -a p(p-1) + \frac{p \ln p}{B},$$

$$\alpha = 1 + a, \quad a = \varkappa/2.$$

Функция $v(p)$ равна нулю в точках $p = 0$, $p = p_2 = 1$ и при значении $p = p_3 > 1$, определяемом из уравнения

$$p_3/2 \bar{n}_s - \ln(p_3/2 \bar{n}_s) = \ln \bar{n}_s + \ln 2 + 1/2 \bar{n}_s.$$

Сравнение с (45) показывает, что $p_3 \sim 2 \bar{n}_s B$. При $p > p_3$ $v(p) < 0$ и $\tilde{Q}(p) > \alpha p_3 \sim 2 \bar{n}_s B$. Для $\bar{n} > 10$ $p_3 \gg 1$. Поэтому ограничим вначале область интегрирования условием $p < p_3$. В этой области ряд для $e^{-\tilde{Q}(p)}$

сходится равномерно и можно перейти в (39) к почленному интегрированию.

С учётом $p-1 \approx \ln p$ при $p \sim 1$, считаем в этой области достаточно точным для $n \geq 2$ приближение

$$\frac{1}{n!} e^{-\alpha p} v^n(p) \approx B^{-n} a_n f_n(c_n p), \quad c_n = p_{n0}/p_n,$$

где $c_n \approx 1$, p_{n0} – точка максимума функции $f_n(p)$ (см. (32), (34)), p_n – точка максимума n -го члена разложения. Функции слева и справа имеют максимум при $p = p_n$, $p_2 < p_n < p_3$. Величину a_n определим из условия совпадения их максимальных значений. При переходе к оригиналу получим

$$f_s(q) = \frac{1}{\chi^2} \left\{ a_{01} f_1^{(0)}(k_0 X) + a_{02} f_2^{(0)}(k_0 X) + \sum_{n=0}^{n_m} B^{-n} a_n c_n^{-1} f^{(n)}(X/\sqrt{c_n}) \right\}, \quad (46)$$

$$a_{01} = (a - B^{-1} \ln \alpha) / \alpha^2, \quad a_{02} = -a/\alpha^3, \quad k_0 = 1/\sqrt{\alpha};$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1/\alpha, \quad c_0 = c_1 = \alpha.$$

Здесь мы снова перешли к бесконечному верхнему пределу в фурье-интегралах. С учётом того, что значение p_n лежит слева от точки $p = p_{max}$, являющейся корнем уравнения $v'(p) = 0$, и при $n \rightarrow \infty$ $p_n \rightarrow p_{max}$, получим при больших n

$$B^{-n} a_n \rightarrow \frac{1}{n! f_{n,max}} e^{-\alpha p_{max}} v^n(p_{max}), \quad f_{n,max} \sim \frac{e^{-n} n^n}{n!} \ln^n p_{n0} \sim \ln^n n,$$

что обеспечивает сходимость ряда (46).

Функции $f_m^{(0)}$ при $m = 1, 2$ приведены в предыдущем разделе и являются по существу элементарными. В границах применимости этого приближённого ряда достаточно взять $n_m = 15$, используя при $n > 5$ приближение (33), (35). Нормировка функции $f_s(q)$ определяется слагаемым с $n=0$ и равна 1. Асимптотическое поведение определяется слагаемым с $n=1$. При $q \gg \lambda$

$$f_s(q) \approx \frac{1}{1-e^{-\bar{n}}} \frac{2 \chi_c^2}{q^4}, \quad f(q) \approx \frac{2 \chi_c^2}{q^4}.$$

Появление здесь множителя $1/(1-e^{-\bar{n}})$ связано с предпринятыми выше уточнениями (41) - (45).

6 Обсуждение

С результатами разд. 3 можно провести сравнение решений (38), (39) кинетических уравнений (1) и (4). Для сечения Резерфорда (7) такое сравнение для данных таблицы 1, взятой из работы [1], представлено на рис. 4. В области значений q , где характерным размером можно считать величину λ , найденные в [1] оценки относительной погрешности $\xi(q)$ решения уравнения (4), возникающей вследствие перехода от сферической к плоской области интегрирования, достаточно точны. Это область значений q/λ меньше или порядка нескольких единиц (области кратного и многократного рассеяния, рис. 4а). Здесь имеем

$$\xi(q) \sim \begin{cases} -0.3\lambda^2/2, & q < q_0, \\ 0, & q \approx q_0 = \sqrt{2}\lambda, \\ \lambda^2/2, & q > q_0. \end{cases}$$

Таблица 1. Сечение Резерфорда. π -мезоны. Золото.

$$E_{kin} = 50 \text{ МэВ}, \quad \chi_a = 2.77 \cdot 10^{-4}.$$

N°	ρt г/см ²	λ	B	\bar{n}	$\xi(0)$ %	ξ_{max} %	$\xi(2)$ %	$\xi_{calc. (2)}$ %
1	0.00375	$3.51 \cdot 10^{-3}$	4.93	32.7	-0.096	0.61	0.002	0.002
2	0.015	$8.14 \cdot 10^{-3}$	6.61	131	0.003	0.13	0.007	0.008
3	0.060	$1.81 \cdot 10^{-2}$	8.21	523	-0.002	0.05	0.030	0.032
4	0.24	$3.96 \cdot 10^{-2}$	9.77	$2.09 \cdot 10^3$	-0.013	0.11	0.12	0.13
5	0.4	$5.26 \cdot 10^{-2}$	10.34	$3.49 \cdot 10^3$	-0.024	0.20	0.20	0.22
6	2	0.127	12.11	$1.74 \cdot 10^4$	-0.14	1.28	1.01	1.07
7	4	0.185	12.86	$3.49 \cdot 10^4$	-0.30	2.88	2.07	2.15
8	10	0.304	13.85	$8.71 \cdot 10^4$	-0.80	8.46	5.59	5.37

В области $q \gg \lambda$ погрешность оценивается формулой

$$\xi(q) \sim \frac{a^2}{4\sigma(q)} \frac{1}{q} \frac{d}{dq} \frac{q^3}{4} \frac{d}{dq} \sigma(q),$$

где

$$a^2 \sim \overline{q^2} = Nt \int_0^2 \chi^2 \sigma(\chi) \chi d\chi.$$

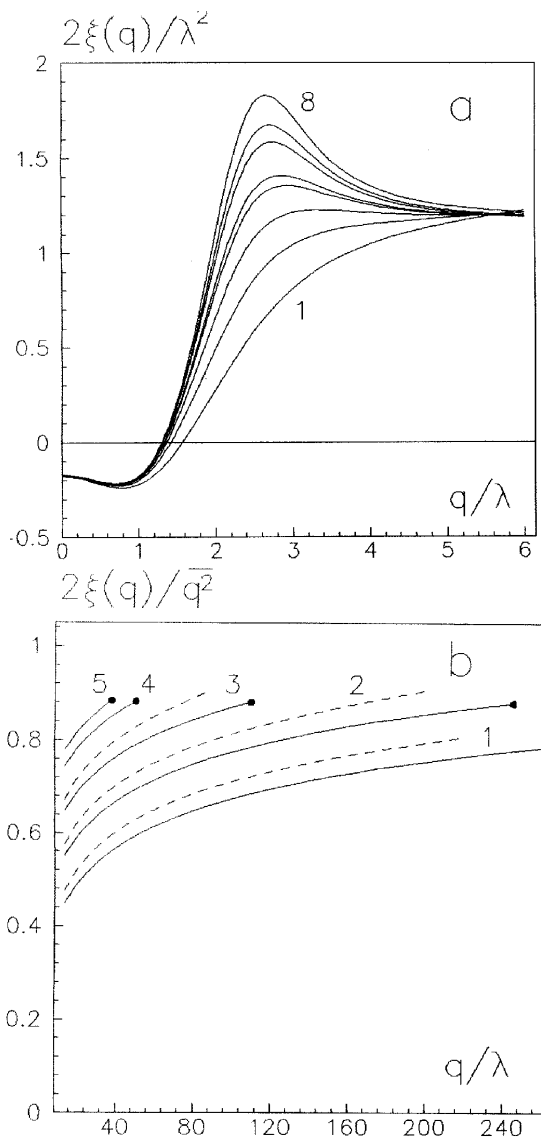


Рис. 4: Зависимости $\xi = \xi(q)$ – относительной погрешности решения (39), (40), (22) в сравнении с (38), (40), (20). Номера возле кривых означают номер варианта в табл. 1. Точки на кривых рис. 4b соответствуют значению $q=2$, пунктирные кривые – оценке $\xi_{calc.}(q)$ (разд. 6) для вариантов 1 ÷ 3 табл. 1.

При получении этой оценки в работе [1] рассматривались две существенные области интегрирования: окрестность максимума сечения с центром в точке \vec{n} и окрестность максимума функции распределения с центром в точке \vec{i} (рис. 1 в [1]), и осуществлялось интегрирование по этим областям, причём интегрирование в том и другом случае осуществлялось по всей сферической поверхности. С более точным подходом пределы интегрирования нужно ограничить, т.к. интегрирование по Ω' должно быть однократным. Как видно из рис. 1 в [1], при интегрировании в окрестности точки \vec{n} ($d\Omega' = \chi d\chi d\varphi$) и в окрестности \vec{i} ($d\Omega' = q' dq' d\varphi$) пределы по переменным χ , q' для оценок можно взять равными

$$\chi_m = \chi_m(q) = 2 \sin(\vartheta/4),$$

что соответствует вектору \vec{n}' , направленному по биссектрисе угла ϑ . Тогда

$$a^2(q) = Nt \int_0^{\chi_m} \chi^2 \sigma(\chi) \chi d\chi.$$

С учётом этого для сечения Резерфорда получим для больших углов более точную, как видно из рис. 4b (пунктирные кривые), оценку

$$\xi_{culc.}(q) = a^2(q)/2.$$

В практических случаях поправки к сечению Резерфорда (сечение Мотта, ядерный формфактор) существенны лишь в однократной области, поэтому в области значений q/λ , показанных на рис. 4a, основное влияние остаётся за резерфордовской частью сечения и оценки погрешности остаются прежними. В однократной области погрешность решения оценивается в соответствии с зависимостью $\sigma = \sigma(\chi)$. Для сечения Мотта

$$\xi_{culc.}(q) = \frac{1}{2} a^2(q) / (1 - \beta^2 q^2/4).$$

В табл. 1 приведены значения $\xi(q)$ для ряда (46) в сравнении с (38), (40), (20). ξ_{max} – максимальная погрешность в интервале $0 < q < 6\lambda$. Примерно при $\lambda > 4 \cdot 10^{-2}$ погрешность ряда связана с приближенным характером уравнения (4) и соответствует рис. 4, при меньших значениях – с погрешностью приближения (36) и следующего из него при $m=1$ ряда (46).

Данные для сечения Мотта [1] с учётом (21) приведены в табл. 2, в которой q_e – значение q при $\vartheta = 150^\circ$. Как видно, оценки при $q \gg \lambda$ достаточно надёжны, вопрос можно считать исчерпанным.

Таблица 2. Сечение Мотта. Электроны. Алюминий.
 $E_{kin} = 15$ МэВ, $\chi_a = 6.89 \cdot 10^{-4}$.

N°	ρt г/см ²	λ	B	\bar{n}	$\xi(0)$ %	ξ_{max} %	$\xi(q_e)$ %	$\xi_{culc.}(q_e)$ %
1	0.00375	$9.10 \cdot 10^{-3}$	5.01	34.8	-0.079	0.56	0.20	0.17
2	0.015	$2.10 \cdot 10^{-2}$	6.68	139	-0.002	0.12	0.81	0.66
3	0.030	$3.15 \cdot 10^{-2}$	7.49	278	-0.01	0.08	1.59	1.32
4	0.06	$4.68 \cdot 10^{-2}$	8.28	556	-0.02	0.11	3.08	2.64
5	0.12	$6.93 \cdot 10^{-2}$	9.06	$1.11 \cdot 10^3$	-0.05	0.26	5.95	5.28
6	0.24	0.102	9.84	$2.23 \cdot 10^3$	-0.10	0.63	11.3	10.6
7	0.4	0.135	10.41	$3.71 \cdot 10^3$	-0.18	1.24	18.0	17.6
8	1	0.224	11.42	$9.28 \cdot 10^3$	-0.47	5.23	39.1	44.0

Данные для приближения (37) приведены в табл. 3. Ввиду представления (28) достаточно найти величину погрешности в зависимости от среднего числа столкновений \bar{n} . Поэтому значение λ фиксировано, а параметры χ_c^2, χ_a^2 определяются по значениям \bar{n}, λ . С увеличением m точность приближения возрастает, но при небольших значениях \bar{n} затем начинает уменьшаться (вариант с $\bar{n}=10$). Нужно отметить, что при описании рассеянных частиц значение m не должно быть слишком большим, т.к. в пределе $m \rightarrow \infty$ приближение (37) приводит к δ -образной особенности в решении. Связанное с этим искажение решения в области малых углов будет тем больше, чем меньше \bar{n} . При $\bar{n}=5$ точность с увеличением m не улучшается. Т. е. приближение (37), как и приближение (36), вместе с полученным из него при $m=1$ рядом (46), имеют естественный предел применимости при $\bar{n} \approx 10$. Подчеркнём, что параметр α ещё достаточно мал и этот предел определяется не какими-либо физическими ограничениями, а связан с тем, что формулы (41), (36), (37) – это приближение для величины Q/γ , а не \tilde{Q} , как это ясно видно из рис. 3, и при $\bar{n}=5$ приближение становится грубым в области $\eta > 1/\chi_a$.

Для рядов (30) и (46) результаты приведены в правой части табл. 3. Если считать граничным значение $\xi \sim 5\%$, то ряд (30) с $n_m=2$ пригоден до $\bar{n} \approx 100$ (здесь подбирая n_m для каждого значения \bar{n} можно увеличить точность для $\xi(0)$, но не для ξ_{max}), ряд (46) – до $\bar{n} \approx 10$.

Таблица 3

Относительная погрешность $\xi(q)$ ряда по полиномам Лежандра (38), (41), (37) с различными значениями m в зависимости от среднего числа столкновений \bar{n} . $\lambda = 10^{-2}$. В правой части таблицы приведены данные для ряда (46) — первая строка данных, и ряда (30) с $n_m = 2$ — вторая строка данных.

\bar{n}	$\bar{x} \cdot 10^2$	B	m	$\xi(0)\%$	$\xi_{max}\%$	$\xi(0)\%$	$\xi_{max}\%$
130	0.117	6.60	1	$3.0 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-2}$	0.001 -1.4	0.24 2.8
30	0.692	4.82	1	-0.12	-0.24	-0.13	0.72
			2	$-2.0 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-3}$	-3.3	6.3
20	1.16	4.30	1	-0.48	-0.48	-0.50	1.0
			2	$-1.4 \cdot 10^{-2}$	$-1.4 \cdot 10^{-2}$	-4.6	8.3
15	1.70	3.92	1	-1.3	-1.3	-1.3	1.4
			2	-0.12	-0.12	-5.9	10.4
			3	$-2.4 \cdot 10^{-2}$	$-2.4 \cdot 10^{-2}$		
10	2.98	3.36	1	-4.7	-4.7	-4.7	-4.7
			2	-1.4	-1.4	-9.7	14.7
			3	-0.44	-0.44		
			5	0.29	0.30		
			7	0.80	0.80		
5	8.67	2.29	1	-14.1	-14.1	-13.5	-13.9
			2	-2.3	7.2	-14.6	-37.5
			3	7.0	8.4		
			4	16.1	16.1		

Приближение (37) не намного сложнее решения Гоудсмита и Сандерсона, как и ряд (46) — ряда (30). Эти приближения применимы для $\bar{n} \sim 10 \div 100$, что соответствует количеству вещества $\sim 1 \div 10$ мг/см². Для меньших значений \bar{n} необходимо более точное, чем (46), приближение для функции $f_s(q)$.

7 Заключение

В первой части работы с учётом угла обрезания χ_a найдены структурные формулы решений для сечений $\sigma(\chi) = \sigma_R(\chi)\kappa(\chi)$ и $\sigma(\chi) = \sigma_M(\chi)\kappa(\chi)$, где $\chi = 2 \sin(\delta/2)$, δ — угол рассеяния, множитель $\kappa(\chi)$ учитывает отличия реальных сечений от сечений Резерфорда σ_R и Мотта σ_M . Это позволяет получить как точные, так и приближенные решения.

Для сечений Резерфорда и Мотта найдены решения в виде ряда по полиномам Лежандра, что позволяет получить решения для сечений, являющихся рациональными функциями от χ^2 .

Дано сравнение этих решений с решениями приближенного кинетического уравнения, полученного в работе [1], причём для сечения Резерфорда – без привлечения каких-либо дополнительных приближений. С учётом этого завершён вопрос о границах применимости этого уравнения, оценки которых даны в работе [1].

Результаты второй части относятся к решению принципиальных вопросов : получению сходящегося ряда по степеням $1/B$ и функций этого ряда $f^{(n)}$. Выяснено, что ряд по степеням $1/B$, даже с суммированием значительного числа членов разложения, пригоден до минимального среднего числа столкновений $\bar{n} \sim 10$. При этом необходим учет еще одного, в сравнении с работами [3, 4], члена разложения $\sim \chi_a^2$ для получения сходящегося ряда как по степеням $1/B$, так и обрзанного ряда по полиномам Лежандра.

Приложения

A. Рассмотрим интеграл

$$I_k = \int_{-1}^1 \frac{\gamma_k(x)}{(1-x)^{k+1}} dx$$

с некоторой исходной функцией $\gamma_k(x)$ (индекс l у $\gamma_{lk}(\chi)$ для краткости опущен), удовлетворяющей, согласно определению (13) условиям

$$\gamma_k(x) = O[(1-x)^{k+1}], \quad (\text{a1})$$

$$\gamma_k(x) = \sum_{i=0}^l A_i P_i(x), \quad (\text{a2})$$

$$A_i = \begin{cases} C_{lk}/C_{kk}, & i = k, \\ 0, & i = k+1, \dots, l-1, \\ -1, & i = l. \end{cases} \quad (\text{a3})$$

Формула (a3) следует из того, что в разложении χ^{2k} по полиномам Лежандра P_l наибольшее значение индекса l равно k , коэффициент разложения при P_k , как следует из (14), равен $(-1)^k/C_{kk}$.

Интегрируя по частям, получим

$$\frac{\gamma_k(x)}{k(1-x)^k} \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{2k} \int_{-1}^1 \frac{2g'_k(x)}{(1-x)^k} dx.$$

Первое слагаемое, согласно (a1), равно

$$-\frac{1}{2^k k} \gamma_k(-1). \quad (\text{a4})$$

В интеграле пишем

$$\frac{2}{(1-x)^k} = \frac{1-x^2}{(1-x)^{k+1}} + \frac{1}{(1-x)^{k-1}},$$

и интегрируя по частям получим

$$\begin{aligned} -\frac{(1-x^2) \gamma'_k(x)}{2k^2(1-x)^k} \Big|_{-1}^1 + \frac{1}{2k^2} \int_{-1}^1 \frac{[(1-x^2) \gamma'_k(x)]'}{(1-x)^k} dx - \\ - \frac{\gamma_k(x)}{2k(1-x)^{k-1}} \Big|_{-1}^1 + \frac{k-1}{2k} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_k(x)}{(1-x)^k} dx. \end{aligned}$$

Первое слагаемое равно нулю, т.к.

$$\gamma'_k(x) = O[(1-x)^k]. \quad (\text{a5})$$

Третье слагаемое сокращается с (a4). В итоге приходим к формулам

$$I_k = \frac{1}{2k^2} I_{k-1}, \quad I_{k-1} = \int_{-1}^1 \frac{\gamma_{k-1}(x)}{(1-x)^k} dx,$$

$$\gamma_{k-1}(x) = O[(1-x)^k],$$

$$\gamma_{k-1}(x) = -\sum_{i=0}^l [i(i+1) - (k-1)k] A_i P_i(x),$$

где исходное выражение для $\gamma_{k-1}(x)$ имеет вид

$$\gamma_{k-1}(x) = k(k-1) \gamma_k(x) + [(1-x^2) \gamma'_k(x)]',$$

и учтены формулы (a1), (a5), (a2) и $[(1-x^2) P'_i(x)]' = -i(i+1)P_i(x)$.

Последовательное применение этих формул дает

$$I_k = \frac{1}{2^k k!^2} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_0(x)}{1-x} dx,$$

$$\gamma_0(x) = (-1)^{k+1} \sum_{i=0}^l \prod_{j=0}^{k-1} [i(i-1) - j(j-1)] A_i [1 - P_i(x)].$$

Здесь в формуле для $\gamma_0(x)$ сделана замена $P_i(x) \rightarrow P_i(x)-1$, что возможно, ввиду $\gamma_0(1) = 0$ и $P_i(1) = 1$. Учитывая, что в сумме слагаемые с $i < k$ равны нулю, а также формулы (а3), (14) и [4]

$$\int_{-1}^1 \frac{1-P_l(x)}{1-x} dx = 2S_l, \quad S_l = \sum_{k=1}^l \frac{1}{k},$$

получим окончательно $I_k = (-1)^k 2^{k+1} C_{lk} (S_l - S_k)$.

В. Для определения величины

$$h_n(m, \nu+1) = \frac{1}{n! [\nu+1]^m} \frac{d^n}{d\nu^n} [(\nu+1)]^m,$$

возьмём производную $(n-1)$ -го порядка от соотношения

$$d[(\nu+1)]^m/d\nu = m [(\nu+1)]^{m-1} \psi(\nu+1).$$

Здесь и далее $\psi(\nu+1)$ – гамма-функция, $\psi(\nu+1)$ – пси-функция, $\zeta(m, \nu+1)$ – дзета-функция Римана. (Сведения по использованным в работе функциям см. в [5]). С учетом

$$\frac{1}{(i-1)!} \psi^{(i-1)}(\nu+1) = (-1)^i \zeta(i, \nu+1), \quad i = 2, 3, \dots$$

и доопределением $\zeta(1, \nu+1) = -\psi(\nu+1)$, получаем рекуррентную формулу

$$h_n(m, \nu+1) = \frac{m}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^i h_{n-i}(m, \nu+1) \zeta(i, \nu+1)$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad h_0(m, \nu+1) = 1.$$

В случае $m=1$ $h_n(\nu+1) \equiv h_n(1, \nu+1)$. Для небольших n (ν – целое):

$$h_1(\nu+1) = \psi(\nu+1), \quad \psi(\nu+1) = -C + \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k},$$

$$h_2(\nu+1) = \frac{1}{2} [\psi^2(\nu+1) + \zeta(2, \nu+1)], \quad \zeta(2, \nu+1) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k^2},$$

и т.д. С увеличением n явные формулы становятся всё более сложными и необходимо использовать рекуррентную формулу.

При $m=2$ рекуррентная формула определяет величину $h_n(2, \nu+1)$, необходимую в асимптотических формулах для $F_n, f^{(n)}$.

С. С разложением $f(q) = \int_0^\infty f_\eta J_0(q\eta) \eta d\eta$ нормировочный интеграл для функции $f(q)$ получается сразу, если учесть

$$f_\eta = \int_0^\infty f(q) J_0(q\eta) q dq.$$

Полагая $\eta=0$, получаем

$$\int_0^\infty f(q) q dq = f_\eta \Big|_{\eta=0} \quad \text{и} \quad \int_0^\infty f^{(n)}(X) X dX = \delta_{on}.$$

Действуя на f_η оператором

$$\widehat{L} = \frac{1}{\eta} \frac{d}{d\eta} \eta \frac{d}{d\eta}$$

и учитывая $\widehat{L} J_0(q\eta) = -q^2 J_0(q\eta)$, получим формулу для второго момента

$$\overline{q^2} = \int_0^\infty f(q) q^3 dq = -\widehat{L} f_\eta \Big|_{\eta=0}.$$

Отсюда

$$\int_0^\infty f^{(n)}(X) X^3 dX = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \infty, & n = 1 \\ 0, & n \geq 2 \end{cases}$$

Т. е. величина $\overline{q^2}$ в интервале $0 \leq q \leq 2$ определяется в основном функциями с $n=0, 1$.

Д. Представим в уравнении для $F_n(z)$

$$F_n(z) = e^{-z} \varphi_n(z), \quad \varphi_n(z) = n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!} z^k.$$

Для φ_n получим уравнение

$$\varphi_n'' - \varphi_n' + \frac{n}{z} \varphi_n = \varphi_{n-1}'' - 2 \varphi_{n-1}' + \varphi_{n-1}$$

с начальными условиями $\varphi_n(0) = 0$, $\varphi_n'(0) = -f^{(n)}(0)/2$. Для коэффициентов a_k получим

$$a_1 = -h_n(n+1), \quad a_{k+1} = \frac{k-n}{k} a_k + c_k,$$

$$c_k = \frac{1}{n} [a_{k+1} - 2a_k + a_{k-1}]_{n-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где c_k определяется по значениям a_k для φ_{n-1} .

При $n=0$

$$f^{(0)}(z) = 2e^{-z}, \quad F_0(z) = e^{-z}, \quad \varphi_0 = 1.$$

Т. е. при $n=1$ $c_k = \delta_{k1}$ и, с учётом $h_1(2) = \psi(2) = 1 - C$, имеем $a_1 = -(1 - C)$, $a_2 = 1$ и т. д. В итоге

$$F_1(z) = e^{-z} \left[(C-1)z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{(k-1)k!} \right].$$

Дальнейшее применение формул не встречает затруднений : в формуле для c_k $a_0 = 0$, формулы для $h_n(n+1)$ даны в приложении **В**.

Для получения асимптотических формул представим

$$f^{(n)}(X) = (d^n/d\nu^n)I(\nu, z)|_{\nu=n},$$

$$I(\nu, z) = \frac{2}{n!} \int_0^{\infty} e^{-t} J_0(2\sqrt{zt}) t^\nu dt = \frac{2}{n!}, (\nu+1) e^{-z} {}_1F_1(-\nu, 1; z).$$

При больших значениях z

$$I(\nu, z) = -\frac{2 \sin(\nu\pi)}{\pi n!} z^{-(\nu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+\nu+1)}{k! z^k}.$$

После дифференцирования получим асимптотическую формулу для $f^n(X)$, в которой

$$\beta_l(k+n+1) = (-1)^l \sum_{i=1}^l h_{l-i}(2, k+n+1) b_i, \quad b_i = (-1)^{(i+1)/2} \pi^{i-1} / i!,$$

где суммирование осуществляется по нечетным значениям i , величины $h_n(2, \nu+1)$ определяются согласно приложению **В**. При небольших значениях l (ν - целое)

$$\beta_1(\nu+1) = 1, \quad \beta_2(\nu+1) = -2\psi(\nu+1), \quad \beta_3(\nu+1) = 2\psi^2(\nu+1) - \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k^2}.$$

Коэффициенты α_l в асимптотическом выражении для F_n можно найти по простой рекуррентной формуле (следствие $dF_n(z)/dz = -f^{(n)}(z)/2$)

$$\alpha_l = \frac{1}{k+n} (\beta_l - \alpha_{l-1}), \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha_0 = 0.$$

Сделаем некоторые дополнения.

Отметим, что аналитическая рекуррентная формула, следующая из уравнения для $\varphi_n(z)$, имеет вид

$$\varphi_n(z) = L_n^{-1}(z) \int_0^z [L_n^{-1}(t)]^{-2} e^t dt \int_0^t L_n^{-1}(\xi) F_{n-1}''(\xi) d\xi + h_n(n+1)L_n^{-1}(z).$$

При $n=1$, например, получим $\varphi_1(z) = 1 - e^z + z(Ei(z) - \ln z)$, и отсюда следует аналитическая формула для $f^{(1)}(z) = 2e^{-z} [\varphi_1(z) - \varphi_1'(z)]$.

Укажем ещё один способ построения быстроходящегося ряда, который можно использовать для контроля вычислений. Используя в формуле

$$f^{(n)}(X) = \frac{2}{n!} \int_0^\infty e^{-t} J_0(2\sqrt{zt}) [t \ln t]^n dt$$

разложение J_0 по полиномам Лагерра: $J_0(2\sqrt{zt}) = e^{-z} \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!} L_k(t)$.

Получаем ряд $f^{(n)} = 2n! e^{-z} \sum_{k=0}^\infty g_k^{(n)} \frac{z^k}{k!}$, где

$$g_k^{(n)} = \frac{1}{n!^2} \frac{d^n}{d\nu^n} I_k(\nu+1) \Big|_{\nu=n}, \quad I_k(\nu+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^\nu L_k(t) dt.$$

Умножая на $e^{-t} t^\nu$ рекуррентную формулу

$$t \frac{d}{dt} L_k(t) = (k+1)L_{k+1}(t) - (k+1)L_k(t) + tL_k(t),$$

после интегрирования получим $(k+1)I_{k+1}(\nu+1) = (k-\nu)I_k(\nu+1)$. Отсюда для производных m -го порядка по ν при $\nu=n$ найдем

$$(k+1)I_{k+1}^{(m)}(n+1) = (k-n)I_k^{(m)}(n+1) - mI_k^{(m-1)}(n+1), \quad I_j^{(i)}(n+1) = \frac{d^i}{d\nu^i} I_j(\nu+1) \Big|_{\nu=n}.$$

Для величин

$$g_k^{(m)} = \frac{1}{m!n!} I_k^{(m)}(n+1)$$

это приводит к рекуррентным формулам

$$(k+1)g_{k+1}^{(0)} = (k-n)g_k^{(0)}, \quad g_0^{(0)} = h_0(n+1) = 1,$$

$$(k+1)g_{k+1}^{(m)} = (k-n)g_k^{(m)} - g_k^{(m-1)}, \quad g_0^{(m)} = h_m(n+1),$$

позволяющим найти $g_k^{(n)}$, полагая последовательно $m=0, 1, 2, \dots, n$.

Приведём, наконец, ещё один способ получения уравнения для F_n . В выражении

$$f^{(n)}(X) = \int_0^\infty C_n(u) J_0(Xu) u du, \quad C_n(u) = \frac{1}{n!} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) \left[\frac{u^2}{4} \ln \frac{u^2}{4}\right]^n$$

полагаем $J_0(Xu) = -\frac{1}{u^2} \frac{1}{X} \frac{\partial}{\partial X} X \frac{\partial}{\partial X} J_0(Xu)$, умножаем его на X и интегрируем в пределах от 0 до X . Получим

$$\int_0^\infty \frac{1}{u} C_n(u) X \frac{\partial}{\partial X} J_0(Xu) du = F_n(X).$$

В левой части пишем

$$X \frac{\partial}{\partial X} J_0(Xu) = u \frac{\partial}{\partial u} J_0(Xu),$$

интегрируем по частям и учитываем

$$-\frac{d}{du} C_n(u) = \frac{1}{2} C_n(u) u - 2n \frac{1}{u} C_n(u) - \frac{1}{2} C_{n-1}(u) u.$$

Получаем

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{X} \frac{d}{dX} F_n(X) - 2n \int_0^\infty \frac{1}{u} C_n(u) J_0(Xu) du + \frac{1}{2} \frac{1}{X} \frac{d}{dX} F_{n-1}(X) = F_n(X).$$

Действуем на это соотношение оператором $X \frac{d}{dX}$ и переходим к переменной $z = X^2$. Приходим к уравнению

$$F_n'' + F_n' + \frac{n}{z} F_n = F_{n-1}.$$

Е. Приведём некоторые подробности расчётов.

Полиномы Лежандра вычислялись по матричной рекуррентной формуле

$$\begin{pmatrix} P_{l+1} \\ \varepsilon_{l+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - q^2 \frac{1+A_l}{2} & A_l \\ -q^2 \frac{1+A_l}{2} & A_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_l \\ \varepsilon_l \end{pmatrix},$$

$$A_l = \frac{l}{l+1}, \quad \varepsilon_l = P_l - P_{l-1}, \quad \varepsilon_0 = 0, \quad P_0 = 1.$$

Собственные числа матрицы перехода, как это можно показать, по модулю меньше единицы и формула устойчива к ошибкам округления.

В расчётах интеграла (39) функция Бесселя $J_0(z)$ вычислялась следующим образом.

При $z \leq 16$ использовалось разложение [5]

$$J_0(2\sqrt{yx}) = e^{-y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} L_k(x), \quad y = \frac{z^2}{4x},$$

с $x = 2$, $L_k(x)$ – полиномы Лагерра, которые вычислялись, как и полиномы Лежандра, по матричной рекуррентной формуле с $\alpha = 0$

$$\begin{pmatrix} L_{k+1}^\alpha \\ \varepsilon_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{k+1} & \frac{k+\alpha}{k+1} \\ -\frac{x}{k+1} & \frac{k+\alpha}{k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_k^\alpha \\ \varepsilon_k \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_0 = 1, \quad L_0^\alpha = 1.$$

При $z > 16$ использовалась асимптотическая формула для $J_0(z)$, которая приводит к алгоритму

$$J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{z\pi}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right],$$

$$a_0 = \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right), \quad a_k = -a_{k-1} \frac{[(4k-3)(4k-1)]^2}{(4z)^2 (4k-2) 4k},$$

$$b_0 = \frac{1}{8z} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right), \quad b_k = -b_{k-1} \frac{[(4k-1)(4k+1)]^2}{(4z)^2 4k (4k+2)}.$$

Литература

- [1] В.И. Юрченко. ЖЭТФ **116**, 418 (1999). (Препринт ИЯФ 99-29).
- [2] G. Moliere, Z. Naturforsch. **2a**, 133 (1947).
- [3] G. Moliere, Z. Naturforsch. **3a**, 78 (1948).
- [4] H.A. Bethe. Phys. Rev., **89**, 256 (1953).
- [5] И.С. Градштейн и И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, Москва (1963).

В.И. Юрченко

К теории многократного рассеяния II

V.I. Yurchenko

To the theory of the multiple scattering II

ИЯФ 2000-69

Ответственный за выпуск А.М. Кудрявцев

Работа поступила 30.08.2000 г.

Сдано в набор 18.09.2000 г.

Подписано в печать 19.09.2000 г.

Формат бумаги 60×90 1/16 Объем 2.8 печ.л., 2.3 уч.-изд.л.

Тираж 100 экз. Бесплатно. Заказ № 69

Обработано на IBM PC и отпечатано на

ротапринте ИЯФ им. Г.И. Будкера СО РАН

Новосибирск, 630090, пр. академика Лаврентьева, 11.