ИФВЭ IHEP

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2002–36
ОТФ

Л.Д. Соловьев

МНОГОМОДОВАЯ РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СТРУНА.
КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И КВАНТОВАНИЕ

Направлено в *ТМФ.*

Протвино 2002

УДК 519.25.256 М–24

Аннотация

Соловьев Л.Д. Многомодовая релятивистская струна. Классические решения и квантование: Препринт ИФВЭ 2002–36. – Протвино, 2002. – 28 с., 3 табл., библиогр.: 11.

Найдены все независимые классические решения для трехмодовой струны Намбу–Гото. Рассмотрена геометрия полученных замкнутых кривых. Для части полученных решений проделано каноническое квантование. Рассмотрен спектр полученных квантовых состояний. Он не противоречит экспериментальным массам и квантовым числам мезонов, не описываемых кварк-антикварковой моделью и называемых глюболами. Главная траектория Редже полученных состояний не противоречит имеющимся данным о померонной траектории.

Abstract

Soloviev L.D. Multimode Relativistic String. Classical Solutions and Quantization: IHEP Preprint 2002–36. – Protvino, 2002. – p. 28, tables 3, refs.: 11.

All independent classical solutions for the three-mode Nambu–Goto string are found. Geometry of the obtained closed curves is considered. Canonical quantization of a part of the solutions is performed. The spectrum of the obtained quantum states (glueballs) does not contradict experimental masses and quantum numbers of mesons which are not described by the quark-antiquark string model. The leading Regge trajectory of the obtained states does not contradict the available data on the leading pomeron trajectory.

Введение

Простейшая (одномодовая) конфигурация релятивистской струны была проквантована в работе [1] и успешно применена для описания низших радиальных возбуждений кварк-антикварковых мезонов (открытая струна с кварками на концах) [2] и низших глюболов [3] (замкнутая струна). Представляет интерес рассмотреть более сложные конфигурации струн. В классическом случае интересны их геометрические свойства. В квантовом случае интересна сама возможность их последовательного квантования, воспроизведение одномодовых результатов и феноменология новых состояний.

В данной работе эта задача решается для трехмодовых конфигураций струн. Для определенности рассматриваются только замкнутые струны, хотя полученные результаты без труда переносятся и на открытые струны.

Если одномодовая замкнутая струна представляет собой плоский, вращающийся и пульсирующий эллипс, то следующая по сложности струна дает широкий набор кривых, как правило, пространственных, вращающихся и изменяющих форму, которые в частных случаях сводятся к известным плоским эпи- и гипоциклоидам всех видов (кардиоида, кривая Штейнера, астроида и т.д.).

Для нахождения этих конфигураций были найдены явно все решения струнных связей для трехмодовых струн, т.е. общие решения шести нелинейных уравнений для комплексных векторных коэффициентов разложения координат струны в ряды Фурье.

С помощью гамильтонова формализма и скобок Пуассона найденных независимых переменных рассмотрено каноническое квантование полученных решений. Под каноническим квантованием мы здесь понимаем переход к операторам и их коммутаторам для декартовых классических величин. Для части струнных решений это удалось сделать без труда. Для других же решений область изменения соответствующих декартовых переменных оказалась ограниченной. Если в квантовом случае наложить эти ограничения на средние значения соответствующих операторов по физическим состояниям, то не возникает новых состояний по сравнению с каноническим квантованием вышеупомянутой части решений. В итоге, мы имеем дело со спектром состояний, полученных каноническим квантованием.

Замкнутая струна описывается двумя независимыми наборами коэффициентов Фурье, для которых имеют место идентичные связи. Если имеется несколько типов решений этих связей, как в нашем случае, то классическое решение для замкнутой струны может быть как симметричным, когда оба набора описываются решениями одного типа, так и несимметричным, когда эти типы разные. Симметричные решения допускают каноническое квантование, в то время как для рассмотренных несимметричных решений квантовым условиям удовлетворить не удается (по крайней мере, в области малых масс).

Как и в работе [3], при квантовании струны мы вводим в гамильтониан феноменологическую константу, учитывающую неструнное взаимодействие на малых расстояниях. В данной работе воспроизведены результаты [3] и получены два новых легких дочерних состояния, не противоречащих эксперименту. Предсказаны новые тяжелые состояния. Следует отметить, что массы многих тяжелых состояний близки друг к другу, и влияние на них взаимодействий глюболов является открытым вопросом.

План работы следующий. В разделе 1 приведены общие формулы лагрнажева описания замкнутой струны в ортонормальной калибровке, дополненной калибровкой системы покоя. Последняя, с одной стороны, является универсальной и последовательной, в отличие от калибровки светового конуса [4], а с другой, — дает возможность интерпретировать струну как связанное релятивистское состояние. Для нахождения явной формы струны необходимо решить связи. В разделе 2 рассмотрено их решение в одномодовом приближении, когда этой модой является первая [1] или любая высшая мода. Рассмотрена геометрия и поведение таких простейших струн. Они дают простейший пример несимметричных струн, которые не могут быть проквантованы каноническим образом (по крайней мере, в области малых масс). В разделе 3 найдены двухмодовые решения. Оказывается, что простейшего двухмодового решения, содержащего первую и вторую моды, не существует. Решение с первой и третьей модами существует. В разделе 4 приведено общее решение связей трехмодовой струны (содержащей первую, вторую и третью моды). В разделе 5 проделано гамильтоново описание струны с помощью независимых переменных найденных решений. Для нахождения их скобок Пуассона используется метод первой дифференциальной формы [5]. Проделано каноническое квантование части найденных решений. В разделе 6 обсуждается и сравнивается с экспериментом спектр найденных состояний и их траектории Редже.

Применяется двойная нумерация формул, где первая цифра указывает номер раздела. При ссылках внутри раздела она опускается.

1. Лагранжево описание

Время и координаты точек замкнутой релятивистской струны описываются четырехмерным вектором $x(\sigma,\tau)$, который является функцией релятивистски инвариантных параметров положения σ и эволюции τ. Для замкнутой струны эта функция выбирается периодичной по σ. В качестве периода обычно выбирается 2π и область изменения этого параметра $0 \le \sigma < 2\pi$.

В ортонормальной калибровке уравнение Эйлера–Лагранжа для x, вытекающее из лагранжиана Намбу–Гото, сводится к уравнению д'Аламбера, общее решение которого имеет вид

$$x(\sigma,\tau) = x_0 + \frac{1}{2\pi a}P\tau + \frac{1}{i4\pi a}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}\left(A_n e^{in(\tau+\sigma)} + B_n e^{in(\tau-\sigma)}\right). \tag{1.1}$$

Здесь a — параметр натяжения струны, который мы будем считать совпадающим с натяжением открытой струны, известным в струнной кварковой модели из данных по $q\bar{q}$-мезонам [2].

В ортонормальной калибровке плотность импульса струны равна $a\dot{x}(\sigma,\tau)$ (точка обозначает производную по τ), поэтому P — полный импульс струны и $m = \sqrt{P^2}$ — ее масса.

Четырехмерные комплексные векторы A_n и B_n (n — целое положительное или отрицательное) будем называть амплитудами струны n-ой моды или просто n-ыми модами. Они удовлетворяют условию вещественности x

$$A_{-n} = A_n^*, \ \ B_{-n} = B_n^*, \tag{1.2}$$

поэтому для нумерации мод можно использовать только положительные n. Наконец, x_0 — произвольный постоянный вектор [1].

Заметим, что амплитуды

$$A_n' = e^{in\alpha}A_n, \ \ B_n' = e^{in\beta}B_n, \tag{1.3}$$

где α и β — произвольные постоянные, описывают ту же эволюционную поверхность, что и исходные амплитуды, поскольку переход к ним эквивалентен перепараметризации

$$\sigma' = \sigma + (\alpha-\beta)/2, \ \ \tau' = \tau + (\alpha+\beta)/2, \ \ x_0' = x_0 - \frac{1}{4\pi a}P(\alpha+\beta). \tag{1.4}$$

Форма эволюционной поверхности не меняется и при замене $A \rightleftarrows B$ (перепараметризация $\sigma' = -\sigma$). В дальнейшем мы не будем опускать в амплитудах фазовые множители (3), чтобы учесть возможность рассматривать произвольные начальные данные при заданном интервале параметров.

Важными характеристиками струны являются ее сохраняющиеся псевдоспины [1]

$$L_{A\mu} = \frac{1}{i8\pi am}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}A_n^\rho A_{-n}^\sigma, \ \ L_{B\mu} = \frac{1}{i8\pi am}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}B_n^\rho B_{-n}^\sigma, \tag{1.5}$$

($\epsilon_{0123} = 1$). Спин струны равен их сумме

$$J_\mu = L_{A\mu} + L_{B\mu}. \tag{1.6}$$

Условия ортонормальной калибровки $(\dot{x} \pm x')^2 = 0$ (штрих обозначает производную по σ) накладывают на начальные амплитуды условия (связи)

$$\frac{1}{2}\sum_n A_n A_{k-n} = 0, \ \ \frac{1}{2}\sum_n B_n B_{k-n} = 0, \tag{1.7}$$

где $n, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ и обозначено

$$A_0 = B_0 = P. \tag{1.8}$$

---

[1] Используется метрика $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ и система единиц $\hbar = c = 1$.

Ортонормальная калибровка не полностью фиксирует параметризацию струны. Поэтому необходимо выбрать дополнительное калибровочное условие, в качестве которого выберем условие системы покоя

$$A_nP = B_nP = 0, \quad n \neq 0. \tag{1.9}$$

Это условие эквивалентно

$$P(x(\sigma,\tau) - x_0 - P\tau/(2\pi a)) = 0 \tag{1.10}$$

и, как показано в [4], при $P^2 > 0$ всегда может быть выбрано для имеющих физический смысл эволюционных поверхностей струны. В то же время оно обеспечивает возможность интерпретировать струну как связанную релятивистскую систему. Условием этой интерпретации является существование единого времени для всех точек системы, когда она покоится как целое. Из (10) следует, что в системе покоя струны $\vec{P} = 0$ время различных точек струны

$$t \equiv x^0(\sigma,\tau) - x_0^0 = d\tau, \quad d = m/(2\pi a) \tag{1.11}$$

не зависит от σ и является единым для всех точек струны. Это позволяет интерпретировать замкнутую струну как бесцветное связанное состояние глюонов.

Таким образом, задача явного нахождения струнных конфигураций сводится к решению связей (7) и (9). Решим ее в трехмодовом случае, когда могут быть отличны от нуля амплитуды с $n = 1, 2$ и 3 (и их комплексно сопряженные), а остальные амплитуды равны нулю. Будем обозначать эти решения положительными номерами отличных от нуля мод. Так, решение $\{1\}$ обозначает, что $A_n = 0$ при $n \neq 0, \pm 1$. С учетом амплитуд B одномодовое решение с первыми модами обозначается $\{1;1\}$. Оно является симметричным. Решение $\{1;2\}$ содержит $A_{\pm 1}$ и $B_{\pm 2}$ и также является одномодовым, но не симметричным. Возможно решение типа $\{1,3;2\}$, в котором отличны от нуля $A_{\pm 1}$, $A_{\pm 3}$ и $B_{\pm 2}$ (двухмодовое несимметричное) и т.д. В дальнейшем мы рассмотрим все одномодовые решения, а также все решения вплоть до $\{1,2,3;1,2,3\}$, когда могут быть отличны от нуля $A_{\pm 1}$, $A_{\pm 2}$, $A_{\pm 3}$ и $B_{\pm 1}$, $B_{\pm 2}$, $B_{\pm 3}$.

Упомянем два частных струнных решения. Первое, когда амплитуды A_n и B_n отличаются фазовым множителем

$$B_n = e^{in\alpha} A_n. \tag{1.12}$$

При этом псевдоспины L_A и L_B (5) равны, и полный спин равен

$$J = 2L_A, \tag{1.13}$$

т.е. максимален в симметричном случае $L_A^2 = L_B^2$. Струнный вектор (1) при этом разлагается по $\cos n(\sigma - (\alpha/2))$, т.е. струна "схлопывается" в открытую струну, пробегаемую вектором x по крайней мере два раза. Концы этой открытой струны движутся со скоростью света, так как в ортонормальной калибровке условие $\dot{x}^2 = 0$ эквивалентно $x'^2 = 0$, а x' разлагается по $\sin n(\sigma - (\alpha/2))$ и обращается в нуль на концах струны.

Второе решение соответствует

$$B_n = e^{in\beta} A_n^*. \tag{1.14}$$

При этом $L_B = -L_A$ и полный спин равен нулю

$$J = 0. \tag{1.15}$$

Струнный вектор (1) при этом разлагается по $\sin n(\tau + (\beta/2))$, и струна периодически "схлопывается" в точку, проходя ее со скоростью света.

Чтобы удовлетворить условиям (7), (9), введем тетраду векторов e^{μ}_{α}, где $\alpha = 0, a$; $a = 1, 2, 3$ — номер члена тетрады, удовлетворяющих условиям [2]

$$e_\alpha e_\beta = g_{\alpha\beta} \;\; e_0 = P/m, \;\; \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} e^{\mu}_0 e^{\nu}_a e^{\rho}_b e^{\tau}_c = \epsilon_{abc}, \tag{1.16}$$

и разложим четырехмерные векторы по тетраде

$$y = e_\alpha y^\alpha, \;\; y^\alpha = g_{\alpha\alpha} y e_\alpha. \tag{1.17}$$

Для набора компонент $\{y^\alpha\}$ будем применять векторные обозначения

$$\{y^\alpha\} = (y^0, \{y^a\}) = (y^0, \vec{y}), \;\; \{\epsilon_{abc} y^b_1 y^c_2\} = [\vec{y}_1, \bar{y}_2]. \tag{1.18}$$

При этом A_n, B_n, L_A, L_B и J имеют только трехмерные компоненты, а компоненты вектора струны (1) имеют вид

$$\{x^\alpha - x^\alpha_0\} = d(\tau, \vec{q}), \tag{1.19}$$

где пространственная часть вектора в единицах $d = m/(2\pi a)$ имеет вид

$$\vec{q} = \frac{1}{m} \sum_{n>0} \frac{1}{n} Im \left(\vec{A}_n e^{in(\tau+\sigma)} + \vec{B}_n e^{in(\tau-\sigma)} \right). \tag{1.20}$$

Для плотности импульса имеем

$$\{p^\alpha\} = \frac{1}{2\pi}(m, \vec{p}), \tag{1.21}$$

$$\vec{p} = \sum_{n>0} Re \left(\vec{A}_n e^{in(\tau+\sigma)} + \vec{B}_n e^{in(\tau-\sigma)} \right). \tag{1.22}$$

Псевдоимпульсы равны

$$\vec{L}_A = \frac{1}{i4\pi a} \sum_{n>0} \frac{1}{n} \left[\vec{A}_n, \vec{A}_{-n} \right] \tag{1.23}$$

и аналогично для $\vec{L}_B$. Наконец, связи (7) и (9) для амплитуд A_n (для B_n они аналогичны) в трехмодовом случае имеют вид

$$\frac{P^2}{2} = \vec{A}_1 \vec{A}_{-1} + \vec{A}_2 \vec{A}_{-2} + \vec{A}_3 \vec{A}_{-3}\,; \tag{1.24}$$

$$\begin{array}{llll} \vec{A}_2 \vec{A}_{-1} + \vec{A}_3 \vec{A}_{-2} = 0, & (1) & \frac{1}{2}\vec{A}_2 + \vec{A}_3 \vec{A}_1 = 0, & (4) \\ \frac{1}{2}\vec{A}^2_1 + \vec{A}_3 \vec{A}_{-1} = 0, & (2) & \vec{A}_3 \vec{A}_2 = 0, & (5) \\ \vec{A}_2 \vec{A}_1 = 0, & (3) & \vec{A}^2_3 = 0. & (6) \end{array} \tag{1.25}$$

[2] Члены тетрады удовлетворяют релятивистски ковариантным уравнениям, однако решение этих уравнений при фиксированном P не единственно и зависит от пространственного вращения, сохраняющего P. Зафиксируем это вращение и будем рассматривать зависимость e только от P. (Например, $e^\mu_a = \Pi^{\mu 0} \frac{P^a}{P^0+m} - \Pi^{\mu a}$, где $\Pi^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - (P^\mu P^\nu / P^2)$). При лоренцевских преобразованиях $\Lambda\, e(P) = R\, e(\Lambda P)$, где R — пространственное вращение.

Связь (24) выражает модули амплитуд через массу струны. Из нее, в частности, следует, что не существует решения, в котором отличны от нуля только A (или только B) амплитуды. Связи (25) должны быть решены явно.

Для этого введем базисную правую тройку вещественных ортонормированных трехмерных векторов $\vec{n}, \vec{j}, \vec{k}$ и их комплексные комбинации

$$\vec{n}_- = \vec{n} - i\vec{j}, \;\; \vec{n}_+ = \vec{n} + i\vec{j} \tag{1.26}$$

со свойствами

$$\begin{gathered} \vec{n}_-^2 = \vec{n}_+^2 = 0, \;\; \vec{n}_-\vec{n}_+ = 2, \;\; \vec{n}_\pm\vec{k} = 0, \;\; \vec{n}_+ = \vec{n}_-^*, \\ [\vec{n}_-, \vec{n}_+] = 2i\vec{k}, \;\; [\vec{n}_-, \vec{k}] = -i\vec{n}_-, \;\; [\vec{n}_+, \vec{k}] = i\vec{n}_+. \end{gathered} \tag{1.27}$$

Векторы $\vec{n}_-$ и $\vec{n}_+$ можно менять местами, изменяя знак $\vec{k}$. При повороте исходной тройки вокруг $\vec{k}$ на угол μ они умножаются на фазовый множитель и переходят в

$$n_\pm \to e^{\mp i\mu} n_\pm. \tag{1.28}$$

Базисные векторы для амплитуд $\vec{A}_n$ и $\vec{B}_n$ будем различать индексами A и B.

2. Одномодовые решения

Простейшим решением системы связей (1.25) является решение, в котором $\vec{A}_n = \vec{B}_n = 0$ при $n \neq \pm 1$. Связи (1.25) сводятся при этом к уравнениям

$$\vec{C}_1^2 = 0, \tag{2.1}$$

где C обозначает A или B.

Выбирая базисный вектор $\vec{k}_C$ ортогональным $\vec{C}_1$ (т.е. ортогональным плоскости, образованной векторами реальной и мнимой частей $\vec{C}_1$), что всегда можно сделать, имеем общее решение уравнения (1)

$$\vec{C}_1 = x_C \vec{n}_{C-}. \tag{2.2}$$

Вместо $\vec{n}_{C-}$ можно было бы взять $\vec{n}_{C+}$, однако они отличаются лишь поворотом базисной системы. Благодаря возможности включать фазовый множитель в $\vec{n}_{C-}$ всегда можно выбрать

$$x_C > 0. \tag{2.3}$$

Подставляя (2) в (1.24), получаем

$$x_C = m/2, \tag{2.4}$$

поэтому индекс у x_C можно опустить: $x_C = x$.

Псевдоспин (1.23) равен

$$\vec{L}_C = D\vec{k}_C, \tag{2.5}$$

$$D = m^2/(8\pi a). \tag{2.6}$$

Выбранный базис оказался псевдоспиновым.

Масса струны и угол между ее псевдоспинами являются существенными начальными данными, влияющими на форму эволюционной поверхности одномодовой струны.

Спин струны равен

$$\vec{J} = D(\vec{k}_A + \vec{k}_B), \tag{2.7}$$

а его модуль

$$J = 2D \cos\frac{\alpha}{2}, \tag{2.8}$$

где α — угол между псевдоспинами. При фиксированной массе струны модуль ее спина может изменяться в пределах

$$0 \leq J \leq 2D. \tag{2.9}$$

Подстановка $\vec{A}_1$ и $\vec{B}_1$ в выражение для струнного вектора (1.20) (и разложение по тетраде для x^μ (1.17)) дает простейшее решение $\{1;1\}$. Для его записи удобно выбрать единый спиновый базис

$$\vec{k} = \vec{J}/J, \ \ \vec{n} = (\vec{k}_A - \vec{k}_B/|\vec{k}_A - \vec{k}_B|, \ \ \vec{j} = [\vec{k}, \vec{n}]. \tag{2.10}$$

(В предельных случаях $\alpha = \pi(\alpha = 0)$ фиксирован лишь вектор $\vec{n}(\vec{k})$, а векторы $\vec{k}(\vec{n})$ и $\vec{j}$ могут быть выбраны произвольно, ортогонально $\vec{n}(\vec{k})$ и друг другу). Векторы $\vec{n}_{A-}$ и $\vec{n}_{B-}$ имеют вид

$$\vec{n}_{A-} = e^{i\delta_A}(\vec{n}\cos\frac{\alpha}{2} - \vec{k}\sin\frac{\alpha}{2} - i\vec{j}) \tag{2.11}$$

с заменой $\alpha \to -\alpha$ и δ_A на δ_B для $\vec{n}_{B-}$, причем форма эволюционной поверхности не зависит от фаз $\delta_{A,B}$.

Решение в системе покоя (как целого) в единицах d (1.11)

$$\vec{q} = -\sin\frac{\alpha}{2}\sin\sigma'\vec{k}\cos\tau' + \cos\sigma'(\cos\frac{\alpha}{2}\vec{n}\sin\tau' - \vec{j}\cos\tau'), \tag{2.12}$$

$$\tau' = \tau + \frac{1}{2}(\delta_A + \delta_B), \ \ \sigma' = \sigma + \frac{1}{2}(\delta_A - \delta_B) \tag{2.13}$$

представляет собой вращающийся и осциллирующий эллипс [1, 4, 3], периодически стягивающийся в прямую, мгновенная скорость концов которой равна скорости света (эти концы являются особыми точками эволюционной поверхности). В предельном случае $\alpha = \pi$ (минимальный спин) струна представляет собой лежащую в неподвижной плоскости осциллирующую окружность, точки которой периодически проходят через ее неподвижный центр со скоростью света. В другом предельном случае $\alpha = 0$ (максимальный спин) струна сводится к “двойной” прямой, равномерно вращающейся в неподвижной плоскости вокруг неподвижного центра. Концы прямой движутся со скоростью света.

Общее одномодовое симметричное решение $\{u;u\}$, когда отличны от нуля лишь $\vec{A}_{\pm u}$, $\vec{B}_{\pm u}$, находится аналогично. Формулы (2), (4) верны для $\vec{C}_u$. Струнный вектор u раз пробегает струну $\{1;1\}$, уменьшенную в u раз. Фактор $1/u$ возникает в правых частях формул (5), (7), (8) и (9) для угловых моментов. При фиксированных спине и угле между псевдоспинами масса струны $\{u;u\}$ в $\sqrt{u}$ больше, чем струны $\{1;1\}$.

В классической механике струны существуют и несимметричные одномодовые решения $\{u;v\}$, $u \neq v$. Формулы (2) и (4) верны для $\vec{A}_u$ и $\vec{B}_v$. В формуле (5) для $\vec{L}_A$ справа фактор $1/u$, для $\vec{L}_B$ — фактор $1/v$. Полный спин равен

$$\vec{J} = \vec{L}_A + \vec{L}_B, \tag{2.14}$$

а его величина
$$J = (L_A^2 + 2L_A L_B \cos\alpha + L_B^2)^{1/2} \tag{2.15}$$
(α — угол между $\vec{k}_A$ и $\vec{k}_B$) меняется в пределах
$$|L_A - L_B| \le J \le L_A + L_B, \tag{2.16}$$
$$L_A = D/u, \;\; L_B = D/v. \tag{2.17}$$
Спин в этом случае всегда отличен от нуля (при ненулевой массе).

Выберем базис
$$\vec{k} = \vec{J}/J, \;\; \vec{n} = \frac{1}{\sin\alpha}(\cos\alpha_B \vec{k}_A - \cos\alpha_A \vec{k}_B), \;\; \vec{j} = [\vec{k}, \vec{n}], \tag{2.18}$$
где $\alpha_A(\alpha_B)$ — угол между $\vec{k}_A(\vec{k}_B)$ и $\vec{k}$:
$$\cos\alpha_A = (L_A + L_B\cos\alpha)/J, \;\; \sin\alpha_A = (L_B \sin\alpha)/J, \tag{2.19}$$
а $\cos\alpha_B$ и $\sin\alpha_B$ получаются отсюда обменом индексов A и B. В предельных случаях $\alpha = \pi$ и $\alpha = 0$ векторы $\vec{n}$ и $\vec{j}$ выбираются произвольно, образуя правую тройку с $\vec{k}$.

Векторы $\vec{n}_{A-}$ и $\vec{n}_{B-}$ имеют вид
$$\vec{n}_{A-} = e^{i\delta_A}(\vec{n}\cos\alpha_A - \vec{k} sin\alpha_A - i\vec{j}) \tag{2.20}$$
с заменой α_A на $-\alpha_B$ и δ_A на δ_B для $\vec{n}_{B-}$. Пространственная часть струнного вектора (в единицах d)
$$\vec{q} = Im\left(\frac{1}{u}\vec{n}_{A-}e^{iu(\tau+\sigma)} + \frac{1}{v}\vec{n}_{B-}e^{iv(\tau-\sigma)}\right) \tag{2.21}$$
в общем случае описывает пространственную кривую, неравномерно вращающуюся и меняющую форму при вращении.

Для минимального ($\alpha = \pi$) и максимального ($\alpha = 0$) спина струна представляет собой плоскую кривую
$$\vec{q} = \frac{1}{u}\vec{f}(s_1(u\tau + u\sigma + \delta_A)) + \frac{1}{v}\vec{f}(s_2(v\tau - v\sigma + \delta_B), \tag{2.22}$$
где
$$\vec{f}(z) = \vec{n}\sin z - \vec{j}\cos z \tag{2.23}$$
— вектор единичной окружности, $s_{1,2}$ — знаковые множители: для $\alpha = \pi$
$$s_1 = -s_2 = \frac{v-u}{|v-u|}, \tag{2.24}$$
для $\alpha = 0$
$$s_1 = s_2 = 1. \tag{2.25}$$
Струна представляет собой сумму двух векторов в плоскости, постоянной, но различной длины, вращающихся с разными скоростями в противоположные стороны (минимальный спин) или в одну сторону (максимальный спин). Струна (22), (23) равномерно вращается вокруг центра координат как целое с угловой скоростью
$$\omega = \frac{2uv}{|u \mp v|} \tag{2.26}$$

(верхний знак для минимального спина, нижний — для максимального) по отношению ко времени τ (это лабораторная скорость в системе покоя в единицах d^{-1} (1.11)). Скорость вращения кривой при минимальном спине наибольшая.

Для получения формулы (26) заметим, что она соответствует скорости вращения вектора струны постоянной длины, без учета движения точек вдоль струны. Фиксируем в начальный момент вектор $\vec{q}$ в точке σ_0 и найдем в момент τ точку $\sigma(\tau, \sigma_0)$, в которой вектор сохранил свою длину

$$\vec{q}^2(\sigma_0, 0) = \vec{q}^2(\sigma(\tau, \sigma_0), \tau). \tag{2.27}$$

Подставляя сюда выражения (22), (23), находим

$$\sigma(\tau.\sigma_0) = \sigma_0 - \frac{s_1 u - s_2 v}{s_1 u + s_2 v}\tau. \tag{2.28}$$

Отсюда и из (22)

$$\vec{q}(\sigma(\tau, \sigma_0), \tau) = \frac{1}{u}\vec{f}(s_1 u \sigma_0 + s_1 \delta_A + \omega\tau) + \frac{1}{v}\vec{f}(-s_2 v \sigma_0 + s_2 \delta_B + \omega\tau), \tag{2.29}$$

где ω дается (26). Сравнивая это выражение с $\vec{q}(\sigma_0, 0)$, видим равномерное вращение $\vec{f}$ и $\vec{q}$ с угловой скоростью ω.

Струна (22), (23) при всех τ содержит особые точки типа “клюва” или “луча” (точки возврата, или каспы), направленные внутрь струны (“клювы” для минимального спина) или наружу (“лучи” для максимального спина) и движущиеся со скоростью света. В нашей калибровке они соответствуют условию $(\vec{q}\,')^2 = 0$, или

$$\cos((u \pm v)\tau + (u \mp v)\sigma + \delta_A \pm \delta_B) = \mp 1 \tag{2.30}$$

(верхние знаки — для минимального спина, нижние — для максимального). При $\tau = -(\delta_A + \delta_B)/(u+v)$ для минимального спина особые точки соответствуют

$$\sigma = \frac{(2k+1)}{|u-v|}, \;\; k = 0, 1, 2, ..., \tag{2.31}$$

при $\tau = -(\delta_A - \delta_B)/(u-v)$ для максимального спина точки сингулярности даются

$$\sigma = \frac{2k\pi}{u+v}, \;\; k = 0, 1, 2, ... \tag{2.32}$$

Так, для решения $\{1;2\}$ струна при минимальном спине представляет собой кардиоиду с одним “клювом”, при максимальном — “звезду” с тремя “лучами” (кривая Штейнера). Для $\{1;3\}$ имеем два “клюва” или четыре “луча” (астроида). Для $\{2;3\}$ имеем “клюв” и одно самопересечение или пять “лучей” и пять самопересечений.

В общем случае струна $\{u;v\}$ с минимальным спином представляет собой эпициклоиду [6] с радиусом неподвижной окружности $R = |\frac{1}{u} - \frac{1}{v}|$, радиусом внешней катящейся окружности $r = \min\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right)$ и модулем $M = \frac{\min(u,v)}{|u-v|}$ [3]. Максимальный спин соответствует

[3]Заметим, что выражения (22), (23) для эпициклоиды соответствуют кривой, вычерчиваемой точкой, диаметрально противоположной точке стандартного случая [6]. Сдвиг стандартного аргумента на π и поворот системы координат на угол $M\pi$ переводят стандартную формулу [6] в (22), (23).

гипоциклоиде с радиусом неподвижной окружности $R = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$ и радиусом внутренней катящейся окружности $r = \frac{1}{v}$ (или $\frac{1}{u}$) и модулем $M = \frac{u}{u+v}$ (или $\frac{v}{u+v}$, модулям M и $1-M$ соответствует одна и та же кривая).

Для произвольного спина условие на особые точки эволюционной поверхности $(\vec{q}\,')^2 = 0$ имеет вид

$$\cos\varphi\cos\psi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\psi = 1, \tag{2.33}$$

где

$$\varphi = u\tau + u\sigma + \delta_A, \quad \psi = v\tau - v\sigma + \delta_B \tag{2.34}$$

и α — угол между псевдоспинами. Это уравнение при $\cos\alpha \neq \pm 1$ имеет решения не при всех τ. Решениями являются точки эволюционной поверхности

$$\tau = f + g; \quad \sigma = f - g, \tag{2.35}$$

где

$$f = \frac{1}{4u}((2k+1)\pi - 2\delta_A); \quad g = \frac{1}{4v}((2l+1)\pi - 2\delta_B) \tag{2.36}$$

и k и l — целые числа одной четности.

Ниже мы увидим, что несимметричные одномодовые решения $\{u; v\}$, $u \neq v$ не могут быть проквантованы: операторные уравнения для псевдоспинов не имеют решения ни для каких физических достаточно легких состояний.

3. Двухмодовые решения

Простейшего двухмодового решения $\{1,2\}$ для амплитуд A и B не существует. В самом деле, полагая в связях (1.25) $\vec{A}_3 = 0$ и выбирая базис, где $\vec{k}$ ортогонален $\vec{A}_2$, из уравнения (4) этих связей получаем $\vec{A}_2 = zn_-$, где по предположению $z \neq 0$. Подставляя

$$\vec{A}_1 = a\vec{n}_- + b\vec{n}_+ + c\vec{k} \tag{3.1}$$

в уравнение (3) связей, получаем $b = 0$. Из уравнения (1) связей $a = 0$. Наконец, из уравнения (2) $c = 0$, т.е. первая мода равна нулю.

Аналогично показывается, что не существует и решения $\{2,3\}$.

Двухмодовое решение $\{1,3\}$ существует. Полагая в (1.25) $\vec{A}_2 = 0$ и выбирая базис, где $\vec{k}$ ортогонален $\vec{A}_3$, получаем

$$\vec{A}_3 = -e^{i\alpha_3}x_3\vec{n}_-, \quad \vec{A}_1 = -e^{i\alpha_1}x_1\vec{n}_- + 2se^{i(\alpha_3-\alpha_1)/2}(x_1x_3)^{1/2}\vec{k}, \tag{3.2}$$

где

$$x_{1,3} \geq 0 \tag{3.3}$$

и s — знаковый фактор

$$s = \pm 1 \tag{3.4}$$

(отражающий возможность выбора как правого, так и левого базиса). Перейдем к повернутому вокруг $\vec{k}$ базису

$$\vec{n}'_- = e^{i(3\alpha_1-\alpha_3)/2}\vec{n}_-, \quad \vec{k}' = \vec{k} \tag{3.5}$$

и обозначим

$$\delta = (\alpha_3 - \alpha_1)/2. \tag{3.6}$$

Тогда общее решение $\{1,3\}$ имеет вид

$$\vec{A}_1 = e^{i\delta}(x_1\vec{n}'_-, \ \ +2s(x_1x_3)^{1/2}\vec{k}'), \ \ \vec{A}_3 = -e^{3i\delta}x_3\vec{n}'_-. \tag{3.7}$$

Из связи (1.24)

$$x_1 + x_3 = m/2. \tag{3.8}$$

В этом базисе решение имеет простой вид, однако он не является псевдоспиновым. Псевдоспин (1.23) равен

$$\vec{L} = \frac{1}{2\pi a}\left[\left(x_1^2 + \frac{x_3^2}{3}\right)\vec{k}' - sx_1^{3/2}x_3^{1/2}(n'_- + n'_+)\right]. \tag{3.9}$$

Его модуль

$$L = \frac{1}{2\pi a}\left[\left(x_1^2 + \frac{x_3^2}{3}\right)^2 + 4x_1^3x_3\right]^{1/2} \tag{3.10}$$

при фиксированной массе заключен в пределах

$$kD < L < D, \tag{3.11}$$

где D — параметр (2.6) и

$$k = \frac{1}{80}\left[10(123 - 7\sqrt{105}\right]^{1/2} \simeq 0.283. \tag{3.12}$$

Минимальное значение L меньше, чем $D/3$, что соответствовало бы состоянию $\{3\}$. Минимальному значению L соответствует

$$x_1 = \frac{\sqrt{105}-5}{40}\frac{m}{2} \simeq 0.131\frac{m}{2}. \tag{3.13}$$

Максимальному L отвечают $x_3 = 0$, т.е. состояние $\{1\}$.

При фиксированной величине псевдоспина L для двухмодовой струны

$$L < D < \frac{1}{k}L, \ \ \frac{1}{k} \simeq 3,5, \tag{3.14}$$

т.е. ее масса больше, чем для первой моды (2.5), (2.6).

Введем псевдоспиновый базис, в котором

$$\vec{L} = L\hat{k}, \tag{3.15}$$

$$\hat{k} = c\vec{k}' + \frac{b}{2}(\vec{n}'_- + \vec{n}'_+), \tag{3.16}$$

$$c = N\left(x_1^2 + \frac{x_3^2}{3}\right), \ \ b = -2sNx_1^{3/2}x_3^{1/2}, \ \ N = (2\pi aL)^{-1}, \tag{3.17}$$

$$c^2 + b^2 = 1. \tag{3.18}$$

Дополнением вектора (16) до базиса являются

$$\hat{n}_- = -b\vec{k}' + \frac{c+1}{2}\vec{n}_- - +\frac{c-1}{2}\vec{n}'_+, \ \ \hat{n}_+ = \hat{n}^*_-. \tag{3.19}$$

Обратные формулы имеют вид

$$\vec{k}' = c\hat{k} - \frac{b}{2}(\hat{n}_- + \hat{n}_+),$$
$$\vec{n}'_- = b\hat{k} + \frac{c+1}{2}\hat{n}_- + \frac{c-1}{2}\hat{n}_+, \;\; \vec{n}'_+ = \vec{n}'^*_-. \tag{3.20}$$

Решение в псевдоспиновом базисе получается подстановкой (20) в (7), $j = 1, 3$

$$\vec{A}_j = e^{ij\delta}(a_{j-}\hat{n}_- + a_{j+}\hat{n}_+ + a_{jk}\hat{k}), \tag{3.21}$$

$$a_{1\mp} = x_1\frac{c \pm 1}{2} - sb(x_1x_3)^{1/2}, \;\; a_{1k} = x_1 b + 2sc(x_1x_3)^{1/2},$$
$$a_{3\mp} = -x_3\frac{c \pm 1}{2}, \;\; a_{3k} = -x_3 b. \tag{3.22}$$

Чтобы записать полное струнное решение $\{1, 3; 1, 3\}$, нужно восстановить индекс A у всех величин в вышеприведенных формулах и выписать аналогичные выражения для амплитуд $\vec{B}_j$ с индексами B. Теперь, вообще говоря, $x_{Aj} \neq x_{Bj}$, хотя равны их суммы в силу (8), и $L_A \neq L_B$. Вводя в формуле (1.20) для струнного вектора

$$\tau = \tau' - \frac{1}{2}(\delta_A + \delta_B), \;\; \sigma = \sigma' - \frac{1}{2}(\delta_A - \delta_B), \tag{3.23}$$

можно опустить δ_A и δ_B в (21) и аналогичной формуле для $\vec{B}_j$.

Спин струны, его модуль и спиновый базис даются формулами (2.14)–(2.16), (2.18), (2.19). Псевдоспиновые базисы для амплитуд $\vec{A}_j$ и $\vec{B}_j$ можно записать в виде

$$\hat{n}_{A-} = e^{i\mu_A}(\vec{n}\cos\alpha_A - \vec{k}\sin\alpha_A - ij), \;\; \hat{n}_{A+} = \hat{n}^*_{A-},$$
$$\hat{k}_A = \vec{n}\sin\alpha_A + \vec{k}\cos\alpha_A, \tag{3.24}$$

а выражения для $\hat{n}_{B-}$ и $\hat{k}_B$ получаются отсюда заменой μ_A на μ_B и α_A на $-\alpha_B$.

Фазы μ_A и μ_B, в отличие от одномодового случая, теперь существенными образом влияют на эволюционную поверхность.

Вектор струны в системе покоя в единицах d имеет вид

$$\vec{q} = \frac{1}{m} Im\left(\vec{A}'_1 e^{i(\tau'+\sigma')} + \frac{1}{3}\vec{A}'_3 e^{3i(\tau'+\sigma')} + \vec{B}'_1 e^{i(\tau'-\sigma')} + \frac{1}{3}\vec{B}'_3 e^{3i(\tau'-\sigma')}\right),$$
$$\vec{A}'_j = a_{j-}\hat{n}_{A-} + a_{j+}\hat{n}_{A+} + a_{jk}\hat{k}_A, \tag{3.25}$$
$$\vec{B}'_j = b_{j-}\hat{n}_{B-} + b_{j+}\hat{n}_{B+} + b_{jk}\hat{k}_B,$$

где величины a и b даются формулами (22) с индексами A и B в правых частях, соответственно.

Рассмотрим далее симметричное решение $\{1, 3; 1, 3\}_c$, когда

$$x_{Ai} = x_{Bi}, \;\; L_A = L_B, \tag{3.26}$$

а также знаковые факторы (4) равны $s_A = s_B$. При этом коэффициенты a и b в (25) равны $b_{j\mp,k} = a_{j\mp,k}$. Для минимального спина $\alpha = \pi$ вектор струны можно записать в виде

$$\vec{q} = \frac{2}{m}\Bigg[(a_{1k}\cos\tau'\sin\sigma' + \frac{1}{3}a_{3k}\cos 3\tau'\sin 3\tau')\vec{n} - a_{1-}\cos\tau_+\vec{f}_+(\sigma_+) +$$
$$+a_{1+}\cos\tau_-\vec{f}_-(\sigma_-) - \frac{1}{3}a_{3-}\cos 3\tau'_+\vec{f}_+(3\sigma'_+) + \frac{1}{3}a_{3+}\cos 3\tau'_- f_-(3\tau'_-)\Bigg], \tag{3.27}$$

где

$$\vec{f}_\pm(z) = \vec{j}\cos z \pm \vec{k}\sin z \tag{3.28}$$

— единичные векторы, пробегающие окружность в противоположных направлениях,

$$\tau_\pm = \tau' \pm \mu_+,\ \ \sigma_\pm = \sigma' \pm \mu_-,\ \ \mu_\pm = \frac{1}{2}(\mu_A \pm \mu_B),$$
$$\tau'_\pm = \tau' \pm \frac{1}{3}\mu_+, \sigma'_\pm = \sigma' \pm \frac{1}{3}\mu_-. \tag{3.29}$$

При $\mu_+ = 0$ струна при $\tau' = \frac{\pi}{2}(2k+1))$ стягивается в точку $\vec{q} = 0$, которая проходится со скоростью света.

Для максимального спина $\alpha = 0$ имеем

$$\vec{q} = \frac{2}{m}[(a_{1k}\sin\tau'\cos\sigma' + \frac{1}{3}a_{3k}\sin 3\tau'\cos 3\sigma')\vec{k} + a_{1-}\cos\sigma_+\vec{g}_-(\tau_+) +$$
$$+a_{1+}\cos\sigma_-\vec{g}_+(\tau_-) + \frac{1}{3}a_{3-}\cos 3\sigma'_+\vec{g}_-(3\tau'_+) + \frac{1}{3}a_{3+}\cos 3\sigma'_-\vec{g}_+(3\tau'_-), \tag{3.30}$$

$$\vec{g}_\pm(z) = \vec{n}\sin z \pm \vec{j}\cos z. \tag{3.31}$$

При $\mu_- = 0$ вектор зависит только от $\cos n\sigma'$, т.е. струна складывается в двойную открытую кривую, концы которой $\sigma' = 0$ и π движутся со скоростью света.

У струны имеется большое число несимметричных двухмодовых решений. Это решение (25) при $x_{Ai} \neq x_{Bi}$, а также комбинации двухмодового решения для $\vec{A}_i$ и одномодового для $\vec{B}_i$ $\{1, 3; n\}$. Для этих решений $L_A \neq L_B$

4. Трехмодовые решения

Рассмотрим, наконец, решения системы (1.25), когда ни один из векторов $\vec{A}_i$, $i = 1, 2, 3$ не равен нулю. Выбирая орт $\vec{k}'$ ортогональным $\vec{A}_3$, из уравнения (6) системы (1.25) имеем

$$\vec{A}_3 = z_3\vec{n}'_+. \tag{4.1}$$

(Штрихованные векторы имеют свойства (1.27)). Разлагая $\vec{A}_2$ по ортам $\vec{n}'_\pm, \vec{k}'$ и используя (1.25(5)), получаем

$$\vec{A}_2 = z_{2+}\vec{n}'_+ + z_{2k}\vec{k}'. \tag{4.2}$$

Разлагая

$$\vec{A}_1 = z_{1-}\vec{n}'_- + z_{1+}\vec{n}'_+ + z_{1k}\vec{k}', \tag{4.3}$$

получаем систему четырех уравнений для шести комплексных чисел

$$\begin{array}{lr} 2z_{2+}z_{1+}^* + z_{2k}z_{1k}^* + 2z_3z_{2+}^* = 0 & (1) \\ 4z_{1-}z_{1+} + z_{1k}^2 + 4z_3z_{1+}^* = 0 & (2) \\ 2z_{2+}z_{1-} + z_{2k}z_{1k} = 0 & (3) \\ z_{2k}^2 + 4z_3z_{1-} = 0 & (4) \end{array} \tag{4.4}$$

Рассмотрим сначала решения, когда $z_{2+} = 0$. Тогда $z_{2k} \neq 0$ и из уравнения (3) этой системы $z_{1k} = 0$. Уравнение (1) при этом выполняется.

Если $z_{1+} = 0$, то уравнение (2) удовлетворяется и из (4)

$$z_{2k} = 2s(-z_3z_{1-})^{1/2}, \tag{4.5}$$

где $s = \pm 1$ — знаковый фактор. Положим

$$z_{1-} = e^{i\alpha_1}x_1, z_3 = -e^{i\alpha_3}x_3, \tag{4.6}$$

где $x_{1,3} > 0$. Переходя к повернутому базису

$$\vec{n}'_{\pm} = e^{\pm i(3\alpha_1 - \alpha_3)/4}\vec{n}_{\pm}, \;\; \vec{k}' = \vec{k} \tag{4.7}$$

и обозначая

$$\delta = (\alpha_1 + \alpha_3)/4, \tag{4.8}$$

получаем <u>первое</u> трехмодовое решение $\{1, 2, 3(1)\}$

$$\vec{A}_1 = e^{i\delta}x_1\vec{n}_-, \;\; \vec{A}_2 = e^{2i\delta}2s(x_1x_3)^{1/2}\vec{k}, \;\; \vec{A}_3 = -e^{3i\delta}x_3\vec{n}_+. \tag{4.9}$$

Из связи (1.24)

$$x_1 + x_3 = m/2. \tag{4.10}$$

Псевдоспин (1.23) для этого решения равен

$$\vec{L} = \frac{1}{2\pi a}\left(x_1^2 - \frac{1}{3}x_3^2\right)\vec{k}. \tag{4.11}$$

Выбранный базис оказался псевдоспиновым. Модуль псевдоспина при фиксированной массе или масса при фиксированном псевдоспине ограничены неравенствами

$$0 < L < D, \;\; D > L, \tag{4.12}$$

где D дается (2.6). Минимальному L соответствует

$$x_1 = m(\sqrt{3} - 1)/4 \simeq 0.35m/2, \;\; x_3 = x_1\sqrt{3} \tag{4.13}$$

(трехмодовая конфигурация). Максимальному псевдоспину отвечает $x_3 = 0$ (одномодовая конфигурация с первой модой).

Пусть теперь $z_{1+} \neq 0$. Тогда из (4(2)) и (4(4))

$$z_{1-} = -z_3z_{1+}^*/z_{1+}, \;\; z_{2k} = 2s_1z_3(z_{1+}^*/z_{1+})^{1/2} \tag{4.14}$$

(s_1 — знаковый фактор). Положим

$$z_{1+} = s x_1 e^{i\alpha_1}, \;\; z_3 = x_3 e^{i\alpha_3}, \tag{4.15}$$

где s — независимый знаковый фактор и $x_{1,3} > 0$. Переходя к базису

$$\vec{n}'_{\mp} = e^{\mp i(\alpha_3 - 3\alpha_1)/2}\vec{n}_{\pm}, \;\; \vec{k}' = -\vec{k} \tag{4.16}$$

и обозначая

$$\delta = (\alpha_3 - \alpha_1)/2, \tag{4.17}$$

получаем <u>второе</u> трехмодовое решение $\{1, 2, 3(2)\}$

$$\vec{A}_1 = e^{i\delta}(s x_1 \vec{n}_- - x_3 \vec{n}_+), \;\; \vec{A}_2 = e^{2i\delta} 2 s_1 x_3 \vec{k}, \;\; \vec{A}_3 = e^{3i\delta} x_3 \vec{n}_-. \tag{4.18}$$

Из (1.24) и (1.23)

$$x_1^2 + 4x_3^2 = m^2/4, \tag{4.19}$$

$$\vec{L} = \frac{1}{2\pi a}(x_1^2 - \frac{2}{3}x_3^2)\vec{k}. \tag{4.20}$$

При фиксированной массе модуль псевдоспина ограничен неравенствами (12), где минимальному L соответствует

$$x_1 = m/(2\sqrt{7}) \simeq 0,378m/2, \;\; x_3 = x_1\sqrt{3/2} \tag{4.21}$$

(трехмодовая конфигурация), максимальному — $x_3 = 0$ (одномодовая конфигурация).

Рассмотрим теперь $z_{2+} \neq 0$.

Если $z_{1-} = 0$, то из уравнения (4(4)) $z_{2k} = 0$, и уравнение (4(3)) выполняется. Из уравнений (4(1,2))

$$z_3 = -z_{1+}^* z_{2+}/z_{2+}^*, \;\; z_{1k} = 2s z_{1+}^*(z_{2+}/z_{2+}^*)^{1/2}. \tag{4.22}$$

Положим

$$z_{1+} = x_1 e^{i\alpha_1}, \;\; z_{2+} = s_1 x_2 e^{i\alpha_2}, \tag{4.23}$$

где $x_{1,2} > 0$. Перейдем к базису

$$\vec{n}'_+ = e^{i(\alpha_2 - 2\alpha_1)}\hat{n}_-, \;\; \vec{k} = -\hat{k}. \tag{4.24}$$

Обозначая

$$\delta = \alpha_2 - \alpha_1, \tag{4.25}$$

получаем <u>третье</u> трехмодовое решение $\{1, 2, 3(3)\}$

$$\vec{A}_1 = e^{i\delta}x_1(\hat{n}_- - 2s\hat{k}), \;\; \vec{A}_2 = e^{2i\delta}s_1 x_2 \hat{n}_-, \;\; \vec{A}_3 = -e^{3i\delta}x_1\hat{n}_-. \tag{4.26}$$

Из связи (1.24)

$$4x_1^2 + x_2^2 = m^2/4. \tag{4.27}$$

Псевдоспин и его модуль равны

$$\vec{L} = \frac{1}{2\pi a}\left[\left(\frac{4}{3}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2\right)\hat{k} + 2s x_1^2(\hat{n}_- + \hat{n}_+)\right], \tag{4.28}$$

$$L = \frac{1}{2\pi a}\left[\left(\frac{4}{3}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2\right)^2 + 4x_1^4\right]^{1/2}. \tag{4.29}$$

Базис теперь не псевдоспиновый. Однако формула (28) того же типа, что и формула (3.9) двухмодового случая. Поэтому псевдоспиновый базис вводится по формулам (3.16), (3.19) и (3.20) с соответствующими значениями для c, b и L, которые легко определяются из (28), (29).

При фиксированной массе или при фиксированном псевдоспине

$$D(9/40)^{1/2} < L < D(13/36)^{1/2}, L(36/13)^{1/2} < D < L(40/9)^{1/2}. \tag{4.30}$$

Параметр квадрата массы при фиксированном псевдоспине ограничен значениями (приблизительно) $1,7L$ и $2,1L$. Минимальное значение псевдоспина соответствует

$$x_1 = (3/40)^{1/2}m/2 \simeq 0,274m/2,\ \ x_2 = 0,7^{1/2}m/2 \cong 0,837m/2 \tag{4.31}$$

(трехмодовая конфигурация), максимальное —

$$x_1 = m/4,\ \ x_2 = 0 \tag{4.32}$$

(двухмодовая конфигурация).

Пусть, наконец, $z_{1-} \neq 0$. Полагая

$$z_{1-} = x_1 e^{i\alpha_1},\ \ z_{2+} = s_1 x_2 e^{i\alpha_2},\ \ z_3 = -x_3 e^{i\alpha_3}, \tag{4.33}$$

где $x_{1,2,3} > 0$, из уравнений (4(4,3,1)) получаем

$$\begin{gathered} z_{2k} = 2s_1 s'(x_1 x_3)^{1/2} e^{i(\alpha_1+\alpha_3)/2},\ \ z_{1k} = -s' x_2 (x_1/x_3)^{1/2} e^{i(\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)/2}, \\ z_{1+} = (x_1 + x_3) e^{i(2\alpha_2-\alpha_3)}. \end{gathered} \tag{4.34}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (4(2)), получаем

$$4x_1(x_1+x_3) + x_2^2\frac{x_1}{x_3} - 4x_3(x_1+x_3)e^{i(3\alpha_3-4\alpha_2-\alpha_1)} = 0, \tag{4.35}$$

откуда

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 - 3\alpha_3 = 2k\pi \tag{4.36}$$

(при $(2k+1)\pi$ уравнение (35) для реальной части не имеет решения) и

$$x_2 = 2(x_3(x_3^2 - x_1^2)/x_1)^{1/2}, \tag{4.37}$$

$$x_3 \geq x_1. \tag{4.38}$$

Полагая

$$\vec{n}'_- = e^{i(3\alpha_2-2\alpha_3)}\vec{n}_+,\ \ \vec{k}' = -\vec{k} \tag{4.39}$$

и обозначая

$$\delta = \alpha_3 - \alpha_2, \tag{4.40}$$

получаем четвертое трехмодовое решение $\{1,2,3(4)\}$

$$\vec{A}_1 = e^{i\delta}\left[(x_1+x_3)\vec{n}_- + x_1\vec{n}_+ + 2s(x_3^2 - x_1^2)^{1/2}\vec{k}\right],$$

$$\vec{A}_2 = 2e^{2i\delta} s_1 \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{1/2} \left[(x_3^2 - x_1^2)^{1/2}\vec{n}_- - s x_1 \vec{k}\right], \tag{4.41}$$

$$\vec{A}_3 = -e^{3i\delta} x_3 \vec{n}_-.$$

Здесь s_1 и $s = s' e^{ik\pi}$ — знаковые факторы.

Из связи (1.24)

$$4x_3^2 \left(1 + \frac{x_3}{x_1}\right) = \frac{m^2}{4}. \tag{4.42}$$

При фиксированной массе

$$0 < x_1 \leq x_3 < m/\sqrt{32}. \tag{4.43}$$

При $x_3 \to 0$ и $x_1 \to 16x_3^3/m^2$ решение переходит в одномодовое решение $\{2\}\vec{A}_2 = \frac{m}{2}\vec{n}_-$.

Псевдоспин равен

$$\vec{L} = \frac{x_3^2}{\pi a} \left(\frac{2}{3} + \frac{x_3}{x_1}\right) \vec{k}. \tag{4.44}$$

При фиксированной массе его модуль ограничен условиями

$$\frac{5}{12} D < L < \frac{1}{2} D. \tag{4.45}$$

Минимальное значение L соответствует $x_1 = x_3 = m/\sqrt{32}$, максимальное — $x_3 = 0$ (одномодовое решение со второй модой). При фиксированном псевдоспине

$$2L < D < 2,4L. \tag{4.46}$$

Итак, существуют четыре, вообще говоря, различных трехмодовых решения для амплитуд A и B $\{1, 2, 3(i)\}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Трехмодовые решения для струнного вектора $\{1, 2, 3(i); N\}$, где N — одно-, двух- или трехмодовое решения для амплитуды B, строятся в спиновом базисе подобно тому, как это было сделано в предыдущем разделе. Как и двухмодовое решение, трехмодовое решение при фиксированных массе, L_A и J зависит от фаз $\delta_{A,B}$.

5. Гамильтоново описание и каноническое квантование

Для канонического квантования найденных конфигураций струны нужно использовать гамильтонов формализм, когда струна описывается координатой $x(\sigma, \tau)$ и сопряженным ей импульсом (плотностью импульса)

$$p(\sigma, \tau) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}(\sigma, \tau)}, \tag{5.1}$$

где $\mathcal{L}$ — плотность лагранжиана Намбу–Гото для замкнутой струны. Разложим периодические по σ функции в ряды Фурье

$$x(\sigma, \tau) = r(\tau) + \sum_{n>0} \left(q_n(\tau) \cos n\sigma + \bar{q}_n(\tau) \sin n\sigma\right) =$$
$$= r(\tau) + \frac{1}{i4\pi a} \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n} \left(A_n(\tau) e^{in\sigma} + B_n(\tau) e^{-in\sigma}\right), \tag{5.2}$$

$$p(\sigma,\tau) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2}P + \sum_{n>0}(p_n(\tau)\cos n\sigma + \bar{p}_n(\tau)\sin n\sigma)\right) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\sum_n \left(A_n(\tau)e^{in\sigma} + B_n(\tau)e^{-in\sigma}\right), \tag{5.3}$$

где $A_n(\tau)$ и $B_n(\tau)$ удовлетворяют условию вещественности (1.2), P — полный импульс, используется обозначение (1.8),

$$\begin{aligned} A_n &= p_n + \pi a n\bar{q}_n + i(\pi a n q_n - \bar{p}_n), \\ B_n &= p_n - \pi a n\bar{q}_n + i(\pi a n q_n + \bar{p}_n) \end{aligned} \tag{5.4}$$

есть осцилляторные переменные струны и a — параметр натяжения струны.

Лагранжиан струны в гамильтоновой форме равен

$$L = F - H, \tag{5.5}$$

где с точностью до полной производной по τ

$$F = -\int_0^{2\pi} p\dot{x}d\sigma = -P\dot{r} - \sum_{n>0}(p_n\dot{q}_n + \bar{p}_n\ \dot{\bar{q}}_n) =$$
$$= -P\dot{r} + \frac{1}{i8\pi a}\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}(A_n\dot{A}_{-n} + B_n\dot{B}_{-n}) \tag{5.6}$$

есть первая дифференциальная форма (поделенная на $d\tau$), определяющая скобки Пуассона [5], и

$$H = 2\pi\int_0^{2\pi}\left[f_A(p+ax')^2 + f_B(p-ax')^2\right]d\tau =$$
$$= 2\sum_k\left(f_{Ak}\varphi_{Ak}(\tau) + f_{Bk}\varphi_{Bk}(\tau)\right) \tag{5.7}$$

есть гамильтониан струны, равный линейной комбинации связей [8, 4, 9]. Функции $f_{A,B}(\sigma)$ — множители Лагранжа, $f_{A,Bk}$ — их коэффициенты Фурье. Функции $\varphi_{A,Bk}(\tau)$ — связи, выражения для которых даются левыми частями соотношений (1.7).

Из (6) получаем ненулевые скобки Пуассона

$$\{P_\mu(\tau), r_\nu(\tau)\} = g_{\mu\nu}, \tag{5.8}$$
$$\{A_n^\mu(\tau), A_m^\nu(\tau)\} = \{B_n^\mu(\tau), B_m^\nu(\tau)\} = -i4\pi a n g^{\mu\nu}\delta_{m,-n}. \tag{5.9}$$

Величины, имеющие нулевые скобки с гамильтонианом (7), не зависят от τ и выбора параметризации. Такими величинами являются полный импульс струны P, ее масса $m = \sqrt{P^2}$, псевдоспины $L_{A,B\mu}$ (1.5) и спин струны (1.6). Скобки Пуассона спина и импульса в силу (8), (9) имеют вид, соответствующий группе Пуанкаре.

На поверхности связей сохраняются нулевые связи

$$\varphi_{C0} = \frac{1}{2}\sum_n C_nC_{-n},\ \ C = A, B \tag{5.10}$$

для любых, в том числе конечномодовых, конфигураций струны.

Перейдем к ортонормальной калибровке и ограничимся в (2) конечным числом членов (мод). В этой калибровке импульс (3) имеет то же число мод, а множители Лагранжа $f_{A,B}$ в (7) (после варьирования) равны

$$f_C = f_{C0} = -1/(8\pi a), \;\; C = A, B. \tag{5.11}$$

При конечном числе мод связи $\varphi_{A,Bk}$ при $k \neq 0$ являются связями второго рода и должны быть решены явно, для чего воспользуемся результатами предыдущих разделов. Используя калибровку центра масс (1.9), вводя тетраду (1.16) и разлагая по ней амплитуды $A_n(\tau)$ и $B_n(\tau)$ (формулы разложения (1.17), (1.18)) и псевдоспины (1.23), перепишем гамильтониан (7) в виде

$$H = 2 \sum_{C=A,B} f_{C0} \left(\frac{P^2}{2} - \sum_{n>0} \vec{C}_n \vec{C}_{-n} \right). \tag{5.12}$$

При этом явно должны быть решены связи (1.25). Связь же (1.24) возникает как гамильтоново уравнение (в квантовом случае — как ограничение на физические состояния).

Дифференциальная форма (6) имеет вид

$$F = -P\dot{r} + \sum_{A,B} (F_C^0 + \bar{F}_C), \tag{5.13}$$

где для $C = A$ или B,

$$F_C^0 = \frac{i}{4\pi a} \sum_{n>0} \frac{1}{n} \vec{C}_n \vec{C}_{-n}, \tag{5.14}$$

$$\bar{F}_C = \frac{1}{i4\pi a} \sum_{n>0} \frac{1}{n} C_n^a C_{-n}^b \Gamma_{ab\nu} \dot{P}^\nu = \frac{1}{2} \epsilon_{abc} L_C^c \Gamma_{ab\nu} \dot{P}^\nu, \tag{5.15}$$

поскольку величина

$$\Gamma_{ab\nu} = e_a^\mu \frac{\partial e_{b\mu}}{\partial P\nu} \tag{5.16}$$

антисимметрична по индексам a и b (e_a^ν — ортонормированные векторы тетрады). Поэтому дифференциальная форма имеет вид

$$F = z\dot{P} + F_A^0 + F_B^0, \tag{5.17}$$

где

$$z_\nu = r_\nu + \frac{1}{2} \epsilon_{abc} J^c \Gamma_{ab\nu} \tag{5.18}$$

есть новая координата, зависящая от полного спина $\vec{J}$. В форму (14) нужно подставить решения связей, что дает дифференциальную форму, а следовательно, скобки Пуассона, независимых переменных.

<u>Одномодовое решение $\{u; v\}$.</u> В соответствии с разделом 2

$$\vec{A}_u = x_A \vec{n}_{A-}, \;\; \vec{B}_v = x_B \vec{n}_{B-}, \tag{5.19}$$

$$\vec{L}_A = \frac{x_A^2}{2\pi a u} \vec{k}_A, \;\; \vec{L}_B = \frac{x_B^2}{2\pi a v} \vec{k}_B. \tag{5.20}$$

Подставим (19) в форму (14). Получаем с точностью до полной производной

$$\vec{A}_u\ \dot{\vec{A}}_{-u} = x_A \vec{n}_{A-} (x_A \vec{n}_{A+})^{\cdot} = x_A^2 \vec{n}_{A-}\ \dot{\vec{n}}_{A+} = -2ix_A^2 \vec{j}_A\ \dot{\vec{n}}_{A+} =$$
$$= -2ix_A^2 \left[\vec{k}_A, \vec{n}_A\right]\ \dot{\vec{n}}_A = -4i\pi au \left[\vec{L}_A, \vec{n}_A\right]\ \dot{\vec{n}}_A, \qquad (5.21)$$

откуда

$$F_A^0 = \left[\vec{L}_A, \vec{n}_A\right]\ \dot{\vec{n}}_A\ . \qquad (5.22)$$

F_B^0 получается отсюда заменой A на B. Из (17) получаем ненулевые скобки Пуассона независимых переменных ($C = A, B$)

$$\{P^\mu, z^\nu\} = g^{\mu\nu}, \ \ \{L_C^a, L_C^b,\} = \epsilon_{abc} L_C^c, \ \ \{L_C^a, n_C^b,\} = \epsilon_{abc} n_C^c. \qquad (5.23)$$

(Запись (22) через независимые переменные и вывод (23) из (22) см. в Приложении.)

Гамильтониан (12) равен

$$H = 2f_{A0}\left(\frac{1}{2}P^2 - 4\pi au\sqrt{\vec{L}_A^2}\right) + 2f_{B0}\left(\frac{1}{2}P^2 - 4\pi av\sqrt{\vec{L}_B^2}\right), \qquad (5.24)$$

где после варьирования следует использовать (11). Уравнения движения

$$\dot{z} = \{z, H\} = \frac{1}{2\pi a}P, \qquad (5.25)$$

$$\dot{n}_{A-}^a = \{n_{A-}^a, H\} = u\epsilon_{abc} k_A^b n_{A-}^c, \ \ \dot{n}_{B-}^a = \{n_{B-}^a, H\} = v\epsilon_{abc} k_B^b n_{B-}^c, \qquad (5.26)$$

$$\dot{\vec{L}}_A = \dot{\vec{L}}_B = 0, \qquad (5.27)$$

$$\frac{1}{2}P^2 - 4\pi au\sqrt{\vec{L}_A^2} = 0, \ \ \frac{1}{2}P^2 - 4\pi av\sqrt{\vec{L}_B^2} = 0 \qquad (5.28)$$

воспроизводят зависимость от времени лагранжева описания в разделах 1 и 2. Так, решение первого уравнения (26) дает

$$\vec{n}_{A-}(\tau) = e^{iu\tau}\vec{n}_{A-}(0), \ \ i\vec{n}_{A-}(0) = [\vec{k}_A, \vec{n}_{A-}(0)] \qquad (5.29)$$

и т.д.

Для квантования заменим независимые декартовы переменные операторами, скобки Пуассона (23) — коммутаторами $\{,\} \to -i[,]$;[4] а связи (28) — уравнениями для волновой функции

$$\left(\frac{1}{8\pi a}P^2 - u\sqrt{\vec{L}_A^2} + b\right)\psi = 0, \ \ \left(\frac{1}{8\pi a}P^2 - v\sqrt{\vec{L}_B^2} + b\right)\psi = 0, \qquad (5.30)$$

где b — феноменологическая константа, простейшим образом учитывающая неструнное взаимодействие на малых расстояниях [3], а также, возможно, вакуумные флуктуации высших струнных мод. Эти уравнения означают, что для целых $l_{A,B}$, не равных нулю (устойчивость классического решения [3]), должно выполняться равенство

$$u\sqrt{l_A(l_A+1)} = v\sqrt{l_B(l_B+1)}, \qquad (5.31)$$

[4]Заметим, что классические условия $\vec{L}\vec{n} = 0$, $\vec{n}^2 = 1$ сохраняются и для операторов, так как не противоречат их коммутационным соотношениям.

удовлетворить которому при целых u, v, l_A, l_B, бо́льших или равных единице, возможно только при

$$u = v, \;\; l_A = l_B = l \;^{5}. \tag{5.32}$$

Поэтому будем рассматривать квантование лишь симметричных конфигураций (32).

В представлении, где P и $\vec{n}_{A,B}$ диагональны, внутренняя волновая функция струны (глюбола) со спином j, его проекцией M и псевдоспинами l имеет вид

$$\psi_{jMl}(\vec{n}_A, \vec{n}_B) = \sum_{m_A+m_B=M} C(jM; lm_A, lm_B) Y_{lm_A}(\vec{n}_A) Y_{lm_B}(\vec{n}_B), \tag{5.33}$$

где C — коэффициенты Клебша–Гордана, $l = 1, 2, 3, ...$ и $j = 0, 1, 2, ..., 2l$.

Глюболы пространственно четны. Их квантовые числа равны

$$I^G j^{PC} = 0^+ j^{++}. \tag{5.34}$$

Их массовый спектр определяется значениями псевдоспина

$$D = u\sqrt{l(l+1)} - b. \tag{5.35}$$

(D дается формулой (2.6)).

Вводя $k = 0, 1, 2, ...$ для главной, первой, второй,... траектории Редже

$$j = 2l - k, \tag{5.36}$$

получаем k-ую основную траекторию

$$\sqrt{(j+k)/j+k+2)} = \frac{1}{u}\left(2b + \frac{1}{4\pi a} m^2\right). \tag{5.37}$$

Дочерние траектории возникнут ниже.

Построенная квантовая теория, как и те, которые будут получены ниже каноническим квантованием, является релятивистски инвариантной, так как коммутаторы операторов углового момента и импульса имеют структуру их классических скобок Пуассона, поскольку при переходе в скобках к операторам не возникает проблемы упорядочения операторов.

Одномодовые амплитуды (19) нормированы в том смысле, что выбраны базисные векторы $\vec{n}_{A,B-}$ при $\tau = 0$. Выражения (19) не содержат зависящего от времени фазового множителя, поэтому форма (22) не вырождена. В соответствии с этим в дальнейшем многомодовые решения будут нормированы на амплитуду первой моды (с точностью до не зависящего от времени поворота).

Двухмодовое решение. Подставляя (3.7), где теперь все величины (кроме s) могут зависеть от времени, в форму (14), получаем (индекс A справа опущен)

$$2\pi a F_A^0 = \frac{i}{2}\left(x_1^2 + \frac{1}{3}x_3^2\right)\vec{n}'_- \;\dot{\vec{n}}'_+ + isx_1^{3/2}x_3^{1/2}(\vec{n}'_- - \vec{n}'_+)\;\dot{\vec{k}}' + (x_1+x_3)^2\dot{\delta}. \tag{5.38}$$

[5]При малых $l_{A,B}$ это нетрудно проверить численно. Заметим, что при квазиклассическом квантовании, когда вместо $\sqrt{l(l+1)}$ используется l, этого ограничения не возникает.

Эта форма упрощается при переходе к псевдоспиновому базису (3.14)–(3.19), который следует повернуть вокруг $\hat{k}$ для нормировки на одномодовые решения

$$\vec{k} = \hat{k}, \;\; \vec{n}_- = e^{i\mu}\hat{n}_-, \;\; \vec{n}_+ = e^{-i\mu}\hat{n}_+. \tag{5.39}$$

Имеем (с точностью до полной производной)

$$-2i[\vec{k},\vec{n}]\,\dot{\vec{n}} = \vec{n}_-\,\dot{\vec{n}}_+ = N\left[\left((x_1^2 + \frac{1}{3}x_3^2\right)\vec{n}'_-\,\dot{\vec{n}}'_+ + 2sx_1^{3/2}x_3^{1/2}(\vec{n}'_- - \vec{n}'_+)\,\dot{\vec{k}}'\right] - 2i\dot{\mu}, \tag{5.40}$$

где N дается формулами (3.16), (3.10). Отсюда

$$F_A^0 = [\vec{L},\vec{n}]\,\dot{\vec{n}} + Q\dot{\delta} - L\dot{\mu}, \tag{5.41}$$

где

$$Q = \frac{1}{2\pi a}(x_1 + x_3)^2, \;\; L = \frac{1}{2\pi a}\left[\left(x_1^2 + \frac{1}{3}x_3^2\right)^2 + 4x_1^3x_3\right]^{1/2}. \tag{5.42}$$

Эти формулы отображают первый квадрант плоскости x_1, x_3 на двулистный угол плоскости Q, L:

$$0 < x_3 \leq \frac{1}{2}(3 + \sqrt{105})x_1, \;\; L < Q \leq \frac{1}{k}L, \tag{5.43}$$

$$x_3 > \frac{1}{2}(3 + \sqrt{105})x_1 > 0, \;\; 3L < Q \leq \frac{1}{k}L, \tag{5.44}$$

где k дается формулой (3.12). Для нормировки на амплитуду первой моды следует выбрать

$$\mu = \delta. \tag{5.45}$$

Заметим, что двухмодовая струна переходит в первую моду в области (43) при $x_3 \to 0$.

В нормировке (45)

$$F_A^0 = [\vec{L},\vec{n}]\,\dot{\vec{n}} + R\dot{\delta}, \tag{5.46}$$

где R — новая функция

$$R = Q - L. \tag{5.47}$$

В силу (43)

$$0 < R \leq \left(\frac{1}{k} - 1\right)L. \tag{5.48}$$

Из (46) в дополнение к скобкам (23) имеем ненулевые скобки

$$\{\delta_C, R_C\} = 1, \;\; C = A, B. \tag{5.49}$$

Гамильтониан равен

$$H = 2\sum_{C=A,B} f_{C0}\left(\frac{1}{2}P^2 - 4\pi a(L_C + R_C)\right). \tag{5.50}$$

Вытекающее из него значение квадрата массы дается ротационным (L_C) и осцилляторным (R_C) вкладами. В терминах потенциальных моделей осцилляторный вклад соответствует радиальному возбуждению ротационного вклада. В данном случае третья мода является ответственной за “радиальное” возбуждение, хотя в общем случае обе моды дают вклад в оба слагаемых спектра.

Перейдем к каноническому квантованию, не учитывая ограничения сверху (48). Это квантование понадобится в дальнейшем.

Перейдем от R и δ к осцилляторным переменным

$$c = \sqrt{R}e^{-i\delta}, \;\; c^* = \sqrt{R}e^{i\delta}, \;\; R = c^* c, \tag{5.51}$$

$$\{c, c^*\} = -i. \tag{5.52}$$

В квантовом случае

$$R = c^+ c, \tag{5.53}$$

$$[c, c^+] = 1, \tag{5.54}$$

$$\left(\frac{1}{8\pi a}P^2 - \sqrt{\vec{L}_C^2} - R_C + b\right)\psi = 0, \;\; C = A, B. \tag{5.55}$$

Оператор R_C определен с точностью до константы, которая может быть включена в константу b. Отсюда получаем для собственных значений

$$l_A = l_B = l, \;\; n_A = n_B = n, \tag{5.56}$$

где l и n — целые положительные, не равные одновременно нулю.

В представлении, где $P, \vec{n}_{A,B}$ и $R_{A,B}$ диагональны, волновая функция со спином j, его проекцией M, псевдоспином l и числом заполнения n имеет вид

$$\psi_{jMln}(\vec{n}_A, \vec{n}_B) = \sum_{m_A + m_B = M} C(jM; lm_A, lm_B) Y_{lm_A}(\vec{n}_A) Y_{lm_B}(\vec{n}_B) (c_A^+ c_B^+)^n |0> . \tag{5.57}$$

Массовый спектр определяется значениями псевдоспина и числа заполнения

$$D = \sqrt{l(l+1)} + n - b. \tag{5.58}$$

Для нормировки на третью моду, в которую двухмодовое решение переходит в области (44) при $x_1 \to 0$,

$$\mu = 3\delta, \tag{5.59}$$

и в форме (46)

$$R = Q - 3L, \tag{5.60}$$

$$0 < R < \left(\frac{1}{k} - 3\right) L. \tag{5.61}$$

Без ограничения (61) получаем более жесткий спектр

$$D = 3\sqrt{l(l+1)} + n - b. \tag{5.62}$$

Здесь “радиальные” возбуждения ротационных состояний вызваны первой модой. С физической точки зрения это обстоятельство делает нормировку (59) менее предпочтительной.

Вследствие ограничений (48) или (61) каноническое квантование двухмодовой струны затруднено. Не исключено, что оно невозможно, и эта конфигурация струны не реализуется глюонным полем на квантовом уровне [9, 2]. Для оценки состояний, которые могли бы быть потеряны при исключении двухмодовой струны из рассмотрения на квантовом уровне, предположим, что ограничения (48) или (61) можно учесть как ограничения на средние значения операторов по физическим состояниям. В этом случае возникает ограничение на спектр (58)

$$n \le \left(\frac{1}{k} - 1\right) \sqrt{l(l+1)}, \tag{5.63}$$

или на спектр (62)

$$n < \left(\frac{1}{k} - 3\right) \sqrt{l(l+1)}. \tag{5.64}$$

При $n = 0$ эти ограничения отсутствуют, квантование каноническое, но это одномодовый случай, рассмотренный выше. При $n > 0$ эти ограничения не дают новых состояний по сравнению с теми, которые получены ниже каноническим квантовавнием.

Трехмодовые решения. Техника гамильтонова описания и квантования аналогична двухмодовому случаю. Для всех решений раздела 4 имеем дифференциальную форму (41), где μ — угол поворота псевдоспинового базиса вокруг псевдоспина. Выпишем функции Q и L для различных решений.

(1) Решение (4.9)

$$Q = \frac{1}{2\pi a}(x_1 + x_3)^2, \;\; L = \frac{1}{2\pi a}|x_1^2 - \frac{1}{3}x_3^2|, \tag{5.65}$$

$$0 < x_3 \le \sqrt{3}x_1, \;\; L < Q, \tag{5.66}$$

$$x_3 > \sqrt{3}x_1 > 0, \;\; 3L < Q. \tag{5.67}$$

(2) Решение (4.18)

$$Q = \frac{1}{2\pi a}(x_1^2 + 4x_3^2), \;\; L = \frac{1}{2\pi a}|x_1^2 - \frac{2}{3}x_3^2|, \tag{5.68}$$

$$0 < x_3 \le \sqrt{3/2}x_1, \;\; L < Q, \tag{5.69}$$

$$x_3 > \sqrt{3/2}x_1 > 0, \;\; 6L < Q. \tag{5.70}$$

(3) Решение (4.26)

$$Q = \frac{1}{2\pi a}(4x_1^2 + x_2^2), \;\; L = \frac{1}{2\pi a}\left[\left(\frac{4}{3}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2\right)^2 + 4x_1^4\right]^{1/2}, \tag{5.71}$$

$$0 < x_2 \le 2\sqrt{7/3}x_1, \;\; \frac{6}{\sqrt{13}}L < Q \le \frac{2\sqrt{10}}{3}L, \tag{5.72}$$

$$x_2 \ge 2\sqrt{7/3}x_1 > 0, \;\; 2L < Q < \frac{2\sqrt{10}}{3}L. \tag{5.73}$$

(4) Решение (4.41)

$$Q = \frac{2x_3^2}{\pi a}(1 + \frac{x_3}{x_1}), \;\; L = \frac{x_3^2}{\pi a}\left(\frac{2}{3} + \frac{x_3}{x_1}\right). \tag{5.74}$$

Отображение однолистное:

$$x_3 \ge x_1 > 0, \;\; 2L < Q \le 2,4L. \tag{5.75}$$

Для решений (1) и (2) условие нормировки на одномодовые решения совпадает с (45). Выполняются соотношения (46) и (47), однако теперь в силу (66) и (69) ограничений на R и L нет

$$R > 0, \quad L > 0. \tag{5.76}$$

Квантование каноническое. Волновая функция струны дается (57) и спектр — (58).

Все три моды участвуют в образовании этого спектра, однако можно сказать, что вторая и третья моды ответственны за возникновение осцилляторного вклада — "радиальных" (в терминологии потенциальных моделей) возбуждений ротационных состояний.

Рассмотрим нормировку решения (1) на третью моду (при $x_1 \to 0$ в области (67) оно переходит в третью моду). Получаем формулы (59), (60), однако теперь при значениях $L < Q$ функция R может быть отрицательной. Если ограничиться областью (67), то каноническое квантование возможно. Оно дает спектр (62), который соответствует возникновению "радиальных" возбуждений за счет первой и второй мод, что физически менее предпочтительно. Кроме того, в области $x_3 > 0$, $x_1 > 0$ нормировка оказывается разрывной.

Решение (2) ни при каких значениях параметров не переходит в третью моду. Нормировка его на эту моду (59), (60) в области (69) приводит к отрицательным R, а в области (70) — к ограничению $R > 3L$ и трудностям квантования. Нормировка оказывается разрывной.

Решение (3) при $x_1 \to 0$ переходит в двухмодовое, однако нормировка его на вторую или какую либо другую моду оставляет ограничения на R и L и трудности квантования. Подобным свойством обладает и решение (4). При $x_1 = cx_3^3$, $x_3 \to 0$ (c — константа) оно переходит во вторую моду. При $x_1 = x_3$ оно переходит в решение (3), если в этом последнем положить $x_1 = 2x_3$. Это говорит в пользу единой нормировки этих решений. Будем предполагать, что решения (3) и (4) не реализуются глюонным полем на квантовом уровне.

6. Спектр и редже́вские траектории глюболов. Сравнение с экспериментом

Каноническое квантование одномодовой и трехмодовой замкнутой струны Намбу–Гото в конфигурациях, которые допускают такое квантование, дает для масс квантовых состояний соотношение

$$m^2 = 8\pi a(u\sqrt{l(l+1)} + n - b), \tag{6.1}$$

где $u = 1, 2, 3, ...,$ — номер моды одномодовой струны, $l = 0, 1, 2, ...,$ — значение псевдоспина, $n = 0, 1, 2, ...$ — значение числа заполнения, причем l и n не равны нулю одновременно. При $u > 1$ эта формула получена лишь при $n = 0$. Спин состояния $j = 0, 1, 2, ..., 2l$. При $j \neq 0$ спектр вырожден по спину. Изоспин и четности равны

$$I^G j^{PC} = 0^+ j^{++}. \tag{6.2}$$

Параметр натяжения струны определен из спектра кварк-антикварковых мезонов в работах [2]

$$a = (0,176 \pm 0,02) \text{ ГэВ}^2. \tag{6.3}$$

Таким образом, струнная модель глюболов содержит один параметр b, который в [3] был определен из данных по $f_0(1500)$-мезону ($b = a_0/2$, где a_0 — константа работы [3])

$$b = 0,905 \pm 0,02. \tag{6.4}$$

Это позволяет вычислить из (1) массы других глюболов, собранные в табл. 1, а также реджевские траектории глюболов.

Таблица 1. Предсказания масс (в ГэВ) и квантовых чисел легких (легче 4 ГэВ) глюболов. n — число заполнения, $n > 1$ соответствуют дочерним траекториям. Спин-четности $I^G j^{PC} = 0^+ j^{++}$. Неприведенные ошибки предсказаний, связанные с ошибками в параметрах (3), (4), оцениваются двумя-тремя единицами последнего указанного разряда.

Псевдоспин l	Спин	Номер моды $u = 1$					u=2	u=3
		n=0	n=1	n=2	n=3	n=4		
0	0		0,65± 0,07	2,20	3,04	3,70		
1	0,1,2	1,50	2,58	3,33	3,94	> 4	2,92	3,22
2	0,1,..,4	2,61	3,35	3,96	> 4	> 4	> 4	> 4
3	0,1,..., 6	3,36	3,97	> 4	> 4	> 4	> 4	> 4
4	0,1,..., 8	3,97	> 4	> 4	> 4	> 4	> 4	> 4

С ростом масс глюболов увеличивается число глюболов с близкими массами и совпадающими квантовыми числами. Учет их взаимодействий может привести к заметному сдвигу их масс.

Сравнение предсказаний с имеющимися данными о глюболах, т.е. мезонах, которые в струнной модели [2] не являются кварк-антикварковыми, приведено в табл. 2.

Таблица 2. Сравнение предсказаний модели с имеющимися данными о мезонах, которые могут быть интерпретированы как глюболы (т.е. не описываются струнной моделью кварк-антикварковых состояний [2]).

Струнная модель		Эксперимент [10]		
0^+0^{++}	650 ± 70	0^+0^{++}	400-1200	$f_0(400-1200)$
0^+0^{++}	1500	0^+0^{++}	1500 ± 10	$f_0(1500)$
0^+1^{++}	1500	0^+1^{++}	1518 ± 5	$f_1(1510)$
0^+2^{++}	1500	0^+2^{++}	1544 ± 17	$f_2(1565)$
0^+0^{++}	2200	0^+0^{++}	2197 ± 17	$f_0(2200)$

Важно уточнить данные о $f_1(1510)$-, $f_2(1565)$- и $f_0(2200)$-мезонах и получить информацию о тяжелых мезонах в области масс 2600; 3000; 3300; 3700 и 3900 МэВ.

Вводя номер реджевской траектории $k = 0, 1, 2, ...$ (главная, первая, вторая,...)

$$j = 2l - k, \tag{6.5}$$

получаем из (1) формулу для траектории $j = j(m^2; u, k, n)$

$$\sqrt{(j+k)(j+k+2)} = \frac{2}{u}\left(b + \frac{1}{8\pi a} m^2 - n\right). \tag{6.6}$$

При больших j они имеют наклон, зависящий только от u и обратно пропорциональный u

$$j' = \frac{dj}{dm^2} \longrightarrow \frac{1}{u4\pi a} = \frac{1}{u}(0,452 \pm 0,005) \text{ ГэВ}^{-2}, \ \ m^2 \to \infty. \tag{6.7}$$

Главными являются траектории $j(m^2;u) = j(m^2;u,0,0)$. Для $u = 1$ главная траектория рассмотрена в [3]. Для $u > 1$ вычисления аналогичны. Значения и наклоны главных траекторий при $m^2 = 0$ собраны в табл. 3.

Таблица 3. Пересеченияя с осью m^2=0 и наклоны при m^2=0 главных реджевских траекторий при различных номерах мод.

u	$j(o;u)$	$j'(o;u)$, ГэВ$^{-2}$
1	$1,07 \pm 0,03$	$0,395 \pm 0,005$
2	$0,35 \pm 0,01$	$0,151 \pm 0,006$
3	$0,168 \pm 0,007$	$0,078 \pm 0,003$

Большее единицы пересечение главной траектории первой моды не противоречит данным по высокоэнергетическому рассеянию адронов [11].

Автор благодарен А.В. Разумову за стимулирующие обсуждения и В.А. Петрову за поддержку.

Приложение

Основная дифференциальная форма в независимых переменных

Выразим дифференциальную форму (5.22) через независимые переменные. Опуская индекс A, запишем псевдоспин и два ортогональных ему вектора в сферической системе

$$\vec{L} = L\vec{k} = L(\sin\Theta\cos\varphi, sin\Theta\sin\varphi, \cos\Theta), \tag{П.1}$$

$$\vec{k}_0 = (-\cos\Theta\cos\varphi, -cos\Theta\sin\varphi, \sin\Theta), \tag{П.2}$$

$$\vec{k}_2 = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0). \tag{П.3}$$

Векторы $\vec{k}_0, \vec{k}_2, \vec{k}$ образуют правый ортонормированный базис. Вектор $\vec{n}$, ортогональный $\vec{k}$, может быть представлен в виде

$$\vec{n} = \vec{k}_0\cos\beta + \vec{k}_2\sin\beta, \tag{П.4}$$

откуда

$$\vec{j} = [\vec{k}, \vec{n}] = \vec{k}_2\cos\beta - \vec{k}_0\sin\beta, \tag{П.5}$$

$$\vec{n}_- = \vec{n} - i\vec{j} = e^{i\beta}\vec{k}_-, \tag{П.6}$$

$$\vec{k}_- = \vec{k}_0 - i\vec{k}_2. \tag{П.7}$$

Отсюда

$$F^0 = [\vec{L}, \vec{n}] \dot{\vec{n}} = L\vec{j} \dot{\vec{n}} = \frac{i}{2} L \vec{n}_- \dot{\vec{n}}_+ = L\left(\dot{\beta} + \frac{i}{2}\vec{k}_- \dot{\vec{k}}_+\right) =$$

$$= L(\dot{\beta} - \vec{k}_0 \dot{\vec{k}}_2) = L(\dot{\beta} + \cos\Theta\dot{\varphi}). \tag{П.8}$$

Таким образом,

$$F^0 = L\dot{\beta} + M\dot{\varphi}, \tag{П.9}$$

где

$$M = L\cos\Theta. \tag{П.10}$$

Эта форма дает ненулевые скобки Пуассона

$$\{\beta, L\} = 1, \ \ \{\varphi, M\} = 1. \tag{П.11}$$

Отсюда нетрудно получить скобки Пуассона декартовых компонент псевдоспина (П.1), приведенные в тексте (5.23).

Список литературы

[1] *Г.П. Пронько, А.В. Разумов.* // ТМФ. 1983. Т.56. С.192.

[2] *Л.Д. Соловьев.* // ТМФ. 1998. Т.116. С.225; ЯФ. 1999. Т.62. С.534; // Phys. Rev.D. 2000. V.61. P. 015009.

[3] *Л.Д. Соловьев.* // ТМФ. 2001. Т.126. № 2. С.247.

[4] *Г.П. Пронько, А.В. Разумов, Л.Д. Соловьев.* // ЭЧАЯ. 1983. Т.14. С.558.

[5] *L. Faddeev, R. Jackiw.* // Phys. Rev. Lett. 1988. V.60. P. 1692.

[6] *А.А. Савелов.* Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. (Справочное руководство). – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1960.

[7] *П. Дирак.* Лекции по квантовой механике. – М.: Мир. 1968; *P.G. Bergman.* Helv. Phys. Acta Suppl. 1956. V.IV. P.79.

[8] *А.В. Разумов, Л.Д. Соловьев.* Введение в классическую механику систем со связями. – Препринты ИФВЭ 86-212, 86-213, 86-214. Серпухов, 1986.

[9] *L.D. Soloviev.* String model of confinement. In: Proc. of the X Int. Conference. Problems of Quantum Field theory (Alushta, Ukraine, May 13-18, 1996). Dubna, 1996. P.75; Hadrons and Strings. In: Proc. of the XIX Workshop on High Energy Physics and Field Theory. Problems of High Energy Physics and Field Theory. Protvino, June 25-27, 1996. Protvino, 1997. P.127.

[10] *D.E. Groom et al.* Particle Data Group: Review of Particle Physics. The European Physical Journal. C. 2000. V.15. P.P.405-406, 451-453, 456-457, 482.

[11] *V.A. Petrov, A.V. Prokudin.* Regge eikonal approach and its off-shell extension versus experimental data. – In: Proc. of the Int. Conf. (VIIIth Blois Workshop) on Elastic and Diffractive Scattering (Protvino, 1999). Singapore: World Scientific, 2000. P.95.

Рукопись поступила 23 октября 2002 г.

Л.Д. Соловьев.
Многомодовая релятивистская струна. Классические решения и квантование.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы **LaTeX.**
Редактор Н.В. Ежела. Технический редактор Н.В. Орлова.

Подписано к печати 24.10.2002. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.
Печ.л. 3,37. Уч.-изд.л. 2,8. Тираж 130. Заказ 165. Индекс 3649.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2002–36, И Ф В Э, 2002