ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИФВЭ 2000-54
ОТФ

С. Н. Сторчак

ФАКТОРИЗАЦИЯ МЕРЫ В КОНТИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ПРИ РЕДУКЦИИ В ЗАВИСИМЫХ КООРДИНАТАХ

Протвино 2000

УДК 539.1.01 М–24

Аннотация

Сторчак С.Н. Факторизация меры в континуальных интегралах при редукции в зависимых координатах: Препринт ИФВЭ 2000-54. – Протвино, 2000. – 24 с., библиогр.: 22.

Рассмотрена процедура редукции в континуальных интегралах винеровского типа, описывающих диффузию на гладком компактном римановом многообразии, на котором задано свободное изометрическое действие полупростой компактной унимодулярной группы Ли.

Исследован случай, когда на возникающем главном расслоении, предполагаемом тривиализуемым, вместе с групповыми координатами используются зависимые координаты, определенные при помощи вспомогательной калибровочной поверхности.

Основываясь на стохастическом дифференциальном уравнении оптимальной нелинейной фильтрации, выполнено преобразование континуального интеграла на главном расслоении, факторизующее его меру.

В результате преобразований континуального интеграла получено интегральное соотношение между ядрами исходной и редуцированной полугруппами.

Abstract

Storchak S.N. Path Integral Measure Factorization when Exploiting the Dependent Coordinates Reduction : IHEP Preprint 2000-54. – Protvino, 2000. – p. 24, refs.: 22.

The reduction procedure in the Wiener-type path integrals for the diffusion on a smooth compact Riemannian manifold with the given free isometric action of the compact semi–simple unimodular Lie group is considered.

The investigation is carried out in the case when the dependent coordinates defined by an optional gauge surface and the group coordinates are used in an arising principal fiber bundle that is assumed to be trivial.

The transformation of the path integral on a principle fiber bundle, which factorizes the path integral measure, applies the optimal nonlinear filtering equation from the stochastic theory.

As a result of the path integral transformations the integral relation between the kernels of the original and reduced semigroups are obtained.

Введение

При квантовании калибровочных полей основная проблема — это правильный учет степеней свободы, так как калибровочная инвариантность приводит к тому, что не все степени свободы одинаково необходимы для квантования. В используемых для квантования полей континуальных интегралах отделение лишних степеней свободы осуществляется при помощи метода Фаддеева—Попова [1].

В этом методе исходная мера континуального интеграла, содержащая независимые (инвариантные) и калибровочно зависимые (групповые) степени свободы, сначала преобразуется в произведение мер.

Вклад от интегрирования по групповым степеням свободы сокращается с введенным нормировочным множителем, а остающееся интегрирование по инвариантным степеням свободы преобразуется таким образом, что оно становится представленным континуальным интегралом по всем степеням свободы, который содержит "функциональную" дельта-функцию от калибровок. Дельта–функция ограничивает континуальное интегрирование к поверхности, определяемой калибровками.

В методе Фаддеева—Попова, применяемом для разделения переменных в континуальных интегралах, ничего не говорится о возможности появления якобиана при факторизации меры. Это, однако, может быть существенным как при квантовании калибровочных полей по теории возмущений, так и при изучении глобальной эволюции калибровочных полей в процессе их стохастического квантования.

В связи с тем, что пока понятие меры в континуальных интегралах по калибровочным полям не определено достаточно строгим образом, представляет определенный интерес предварительное исследование вопросов факторизации меры на моделях, которые свободны от характерных трудностей, присущих полевым теориям: необходимости выполнения перенормировок из–за возникающих расходимостей. И хотя распространение полученных результатов таких модельных исследований на калибровочные теории есть, как правило, отдельная теоретическая задача, нельзя исключить возможности того, что результаты исследований позволят взглянуть на проблему с новых точек зрения.

Модельной задачей, обладающей многими геометрическими свойствами калибровочных теорий, является задача о квантовании движения скалярной частицы на многообразии, на котором задано действие группы. Здесь так же, как и в теории калибровочных полей, благодаря симметрии возникает расслоение исходного пространства на орбиты, и в связи с этим можно выделить две группы переменных: инвариантные переменные, связанные с пространством орбит, и "групповые" переменные, задающие координаты на орбите.

Квантование такой задачи методом континуального интегрирования при определении континуальных интегралов через дискретные аппроксимации было рассмотрено в [2,3].

В наших предыдущих работах [4,5] исследовались связанные с этой задачей континуальные интегралы, в которых мера определялась при помощи случайных процессов. В этих работах было найдено, что факторизацию меры в континуальном интеграле можно осуществить, воспользовавшись уравнением оптимальной нелинейной фильтрации из теории случайных процессов.

В теории калибровочных полей для описания эволюции на пространстве орбит обычно используют зависимые переменные, т.е. такие переменные, которые удовлетворяют дополнительному условию (условию калибровки). В каждой локальной окрестности исходного многообразия эти дополнительные условия определяют локальное подмногообразие, которое можно рассматривать как локальное сечение главного расслоения.

В случае, если эти локальные подмногообразия образуют глобальное подмногообразие в исходном многообразии, то это означает, что главное раасслоение является тривиальным.

В теории калибровочных полей было показано ("проблема Грибова"), что, вообще говоря, в ней могут существовать и нетривиализуемые главные расслоения, т.е. в главном расслоении может не существовать глобального сечения. В принципе, такое же обстоятельство может иметь место и в рассматриваемой нами задаче. В связи с этим зависимые координаты вводятся локально: для каждой локальной окрестности — свои зависимые координаты.

Фактически, зависимые координаты есть координаты, заданные на локальном подмногообразии (локальном сечении), определяемом функциями калибровки. А то, что эти координаты можно использовать для описания движения на пространстве орбит, есть следствие локального изоморфизма между исходным главным расслоением и локально тривиальным главным расслоением, образованным орбитами действия той же самой группы над локальным подмногообразием (локальным сечением) [6].

Таким образом, в задачах подобного типа в тотальном пространстве главного расслоения локально вводятся координаты, состоящие из "групповых переменных" и "зависимых переменных".

При квантовании методом континуального интегрирования систем, обладающих калибровочной симметрией, а также им подобных, выбор новых локальных координат (включающих зависимые координаты) приводит к соответствующему преобразованию меры в континуальных интегралах. В результате, если расфакторизовать меру на "групповую меру" и на меру на локальных сечениях, то после факторизации возникает проблема определения глобальной меры, связанной с набором мер, определенных на локальных сечениях.

Недавно было показано [7], что даже если и не существует глобального сечения (т.е. главное расслоение нетривиально), то, тем не менее, можно определить глобальную меру, "склеивая" локальные меры, заданные на локальных окрестностях. Таким образом, вопрос о переходе к зависимым переменным в принципе решается рассмотрением частного случая — когда главное расслоение тривиализуемо.

В континуальных интегралах переход к зависимым переменным ранее изучался в работах [8,9,10]. Поскольку он имел, в основном, эвристический характер, то вопросы, относящиеся к факторизации меры в континуальном интеграле, не получили определенного ответа.

В данной работе, используя стохастический анализ, мы исследуем поведение меры при переходе к зависимым переменным в континуальных интегралах винеровского типа, связанных с квантованием движения скалярной частицы на компактном римановом многообразии (без края), на котором задано свободное изометрическое действие компактной полупростой унимодулярной группы Ли.

Содержание нашей работы следующее.

В I разделе вводятся необходимые определения.

Во II разделе работы рассмотрен переход к зависимым переменным.

В III разделе выполнено преобразование случайного процесса и эволюционной полугруппы.

В IV разделе на основе стохастического дифференциального уравнения оптимальной нелинейной фильтрации изучается вопрос о факторизации меры в континуальном интеграле. Там же выводится интегральное соотношение, связывающее континуальный интеграл, описывающий эволюцию на сечении главного расслоения, с континуальным интегралом, определенным на исходном многообразии.

В V разделе рассмотрен случай редукции на нулевой уровень момента.

В Заключении сформулированы основные результаты работы и обсуждаются остающиеся проблемы.

Приложение содержит необходимый для нашей работы вывод стохастического дифференциального уравнения, определенного на подмногообразии и описанного при помощи переменных объемлющего многообразия.

1. Определения

В работе будут изучаться континуальные интегралы, представляющие решения обратного уравнения Колмогорова:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t_a}+\dfrac{1}{2}\mu^2\kappa\triangle_{\mathcal{P}}(p_a)+\dfrac{1}{\mu^2\kappa m}V(p_a)\right)\psi_{t_b}(p_a,t_a)=0 \\ \psi_{t_b}(p_b,t_b)=\phi_0(p_b), \qquad\qquad (t_b>t_a), \end{cases} \tag{1}$$

заданного на гладком компактном римановом многообразии $\mathcal{P}$.

В уравнении (1) $\mu^2=\frac{\hbar}{m}$, κ – вещественный положительный параметр, $\triangle_{\mathcal{P}}(p_a)$ – оператор Лапласа–Бельтрами на многообразии $\mathcal{P}$, $V(p)$ – инвариантный относительно действия группы потенциал.

На отдельной карте $(\mathcal{U},\varphi^A)$, с координатами $Q^A=\varphi^A(p)$, оператор Лапласа–Бельтрами задается следующим образом:

$$\triangle_{\mathcal{P}}(Q)=G^{-1/2}(Q)\frac{\partial}{\partial Q^A}G^{AB}(Q)G^{1/2}(Q)\frac{\partial}{\partial Q^B},$$

где $G^{AB}(Q)$ – компоненты матрицы, обратной к матрице G_{AB} исходной римановой метрики в координатном базисе $\{\frac{\partial}{\partial Q^A}\}$, $G=det(G_{AB})$.

Связь уравнения (1) с соответствующим уравнением Шрёдингера достигается переходом от обратного уравнения Колмогорова к прямому с последующей подстановкой $\kappa = i$. Фундаментальное решение уравнения (1), при удовлетворении его коэффициентами известных ограничений, служит также и решением прямого уравнения. Однако переход в континуальных интегралах (и в соотношениях между континуальными интегралами) к пределу $\kappa = i$ является отдельной задачей и в работе не рассматривается.

Решение уравнения (1) можно представить в виде континуального интеграла, взятого от начальной функции. Для этого мы воспользуемся методом, развитым в работах [11].

Мы предполагаем, что необходимые условия из работ [11] для существования решения уравнения (1) и его представимости через континуальный интеграл в нашем случае заранее выполнены. Преимущество метода, которым мы собираемся воспользоваться, состоит в том, что в нем глобальная полугруппа, задаваемая континуальным интегралом на многообразии, определяется локальными полугруппами, определенными на отдельных картах многообразия.

Согласно [11], решение уравнения (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\psi_{t_b}(p_a,t_a) &= \mathrm{E}\Big[\phi_0(\eta(t_b))\exp\{\frac{1}{\mu^2\kappa m}\int_{t_a}^{t_b}V(\eta(u))du\}\Big]\\ &= \int_{\Omega_-}d\mu^{\eta}(\omega)\phi_0(\eta(t_b))\exp\{\ldots\},\end{aligned}\tag{2}$$

где $\eta(t)$ – глобальный стохастический процесс на многообразии $\mathcal{P}$, μ^{η} – мера, порожденная этим случайным процессом в пространстве путей, $\Omega_- = \{\omega(t) : \omega(t_a) = 0, \eta(t) = p_a + \omega(t)\}$.

На картах $(\mathcal{U}, \varphi)$ многообразия $\mathcal{P}$ глобальный процесс $\eta(t)$ задается локальными процессами $\varphi(\eta) = \eta_{\varphi}(t) \equiv \{\eta^A(t)\}$, которые являются решениями стохастических дифференциальных уравнений

$$d\eta^A(t) = \frac{1}{2}\mu^2\kappa G^{-1/2}\frac{\partial}{\partial Q^B}(G^{1/2}G^{AB})dt + \mu\sqrt{\kappa}\mathcal{X}^A_{\bar{M}}(\eta(t))dw^{\bar{M}}(t),\tag{3}$$

где $\mathcal{X}^A_{\bar{M}}$ определяются локальным равенством $\sum_{\bar{K}=1}^{n_P}\mathcal{X}^A_{\bar{K}}\mathcal{X}^B_{\bar{K}} = G^{AB}$. Индексами с чертой мы обозначаем евклидовые индексы.

В работах [11] глобальная полугруппа (2), действующая в пространстве гладких и ограниченных функций на $\mathcal{P}$, определяется как предел (при измельчении разбиения временного интервала) суперпозиции локальных полугрупп:

$$\psi_{t_b}(p_a,t_a) = U(t_b,t_a)\phi_0(p_a) = \mathrm{lim}_q\tilde{U}_{\eta}(t_a,t_1)\cdot\ldots\cdot\tilde{U}_{\eta}(t_{n-1},t_b)\phi_0(p_a),\tag{4}$$

где, в свою очередь, каждая локальная полугрупп $\tilde{U}_{\eta}$ связана уже с локальным представителем глобального случайного процесса η.

Следствием определения (4) является то, что преобразования континуального интеграла из правой части формулы (2) фактически сводятся к преобразованиям локальных полугрупп $\tilde{U}_{\eta}$:[1]

$$\tilde{U}_{\eta}(s,t)\phi(p) = \mathrm{E}_{s,p}\phi(\eta(t)),\ \ s\le t,\ \ \eta(s) = p,$$

которые также определяются через континуальные интегралы, но уже по мерам, построенным по локальным представителям $\varphi^{\mathcal{P}}(\eta(t)) = \eta^{\varphi^{\mathcal{P}}}(t) \equiv \{\eta^A(t)\}$ глобального случайного процесса $\eta(t)$.

[1] В дальнейшем рассмотрении мы опускаем потенциальный член как несущественный при наших преобразованиях, и только в окончательных формулах он будет восстановлен.

2. Координаты на главном расслоении

Интерес к рассматриваемой нами задаче связан с исследованием процедуры редукции динамических систем с симметрией. Вследствие симметрии исходная динамическая система приводится к другой системе, которая описывается посредством инвариантных переменных.

Геометрическая сторона такой задачи хорошо изучена [12]. Свободное действие компактной полупростой группы Ли $\mathcal{G}$ на гладком компактном многообразии $\mathcal{P}$ (в нашем случае это еще и изометрическое действие на римановом многообразии) расслаивает многообразие $\mathcal{P}$ на орбиты так, что возникает главное расслоение $P(\mathcal{M},\mathcal{P})$, где многообразие $\mathcal{M}$ есть пространство орбит, образованных в результате действия группы $\mathcal{G}$ на $\mathcal{P}$. В такой картине само многообразие $\mathcal{P}$ является тотальным пространством главного расслоения.

Локально многообразие $\mathcal{P}$ представимо в виде прямого произведения $\pi^{-1}(\mathcal{U}_x) \sim \mathcal{U}_x \times \mathcal{G}$, где $\mathcal{U}_x$ есть окрестность точки $x = \pi(p)$, принадлежащей карте $(\mathcal{U}_x, \varphi_x)$ расслоения. Следовательно, каждую точку p многообразия $\mathcal{P}$ можно задать и с помощью координат главного расслоения. Это означает, что существует локальное взаимно однозначное преобразование, переводящее исходные координаты Q^A точки p в связанные со структурой главного расслоения координаты (x^i, a^α) $(i = 1,\ldots,N_{\mathcal{M}},\ N_{\mathcal{M}} = dim\mathcal{M},\ \alpha = 1,\ldots,N_{\mathcal{G}},$ $N_{\mathcal{G}} = dim\mathcal{G}$, причем, $N_{\mathcal{P}} = N_{\mathcal{M}} + N_{\mathcal{G}})$.

Решая соответствующие дифференциальные уравнения, можно найти, в принципе, необходимое количество функционально независимых и инвариантных относительно действия группы $\mathcal{G}$ функций, которые могли бы быть приняты за инвариантные координаты $x^i(Q)$ (координаты пространства орбит). Однако в связи с тем, что это часто бывает весьма затруднительно сделать, инвариантные координаты на главном расслоении вводятся косвенным путем при помощи “калибровок”.

В этом способе предполагается, что в каждой, достаточно малой, окрестности точки p существует набор функций $\{\chi^\alpha(Q),\ \alpha = 1,\ldots,N_{\mathcal{G}}\}$, которые уравнениями $\chi^\alpha(Q) = 0$ определяют локальное подмногообразие в многообразии $\mathcal{P}$. Функции χ^α выбираются так, что это подмногообразие трансверсально пересекается с каждой орбитой.

Новые координаты на многообразии $\mathcal{P}$ вводятся следующим образом. По условию задачи на многообразии $\mathcal{P}$ задано действие группы $\mathcal{G}$: $\tilde{p} = pa$, или в координатах: $\tilde{Q}^A = F^A(Q^B, a^\alpha)$, Q – координаты точки p. Традиционно считают, что это действие правое, т.е. для $(pa_1)a_2 = p(a_1a_2)$:

$$F(F(Q,a_1),a_2) = F(Q,\Phi(a_1,a_2))$$

(здесь Φ – функция, определяющая групповое умножение в пространстве параметров группы).

Групповые координаты $a^\alpha(Q)$ точки p – есть координаты того элемента из группы $\mathcal{G}$, который переводит точку p на локальное подмногообразие $\{\chi^\alpha(Q) = 0\}$. Они находятся из уравнения:

$$\chi^\alpha(F^A(Q, a^{-1}(Q))) = 0.$$

За инвариантные координаты $x^i(Q)$ точки p принимают независимые координаты той точки, принадлежащей локальному подмногообразию $\{\chi^\alpha(Q) = 0\}$, в которую переходит исходная точка p под действием найденного группового элемента с координатами $a^\alpha(Q)$.

В случае, если подмногообразие $\{\chi^\alpha(Q)=0\}$ можно задать параметрически: $Q^A=Q^{*A}(x^i)$, эти координаты $x^i(Q)$ определяются уравнением:

$$Q^{*A}(x^i)=F^A(Q,a^{-1}(Q)).$$

Такой способ введения координат подробно исследован в [13], где было получено геометрическое обобщение метода преобразования координат Боголюбова из работ [14].

Преобразование континуальных интегралов (и факторизация меры) при переходе к координатам $(x^i(Q),a^\alpha(Q))$ на главном расслоении было ранее рассмотрено в наших работах [5]. Здесь мы изучаем случай, когда точка p многообразия $\mathcal{P}$ локально определяется групповыми координатами a^α и зависимыми координатами $Q^{*A}:\{\chi^\alpha(Q^{*A})=0\}$. Зависимые координаты Q^{*A} являются координатами на локальном подмногообразии $\{\chi^\alpha(Q)=0\}$ исходного многообразия $\mathcal{P}$.

В работе мы предполагаем, что эти локальные подмногообразия образуют глобальное подмногообразие Σ в исходном многообразии $\mathcal{P}$, и, следовательно, наше главное расслоение $P(\mathcal{M},\mathcal{G})$ тривиализуемо. Рассмотрение такого, более простого, случая вызвано тем, что, как уже отмечалось во Введении, достаточно ограничиться случаем тривиальных главных расслоений, поскольку именно он лежит в основе преобразования континуальных интегралов для нетривиальных главных расслоений, если для этого применить конструкцию из [7].

Заметим, что тривиальное главное расслоение $\Sigma\times\mathcal{G}\to\Sigma$ локально изоморфно главному расслоению $P(\mathcal{M},\mathcal{G})$ [6,7]. Поэтому зависимые координаты Q^* также могут служить и для описания движения на базе главного расслоения $P(\mathcal{M},\mathcal{G})$, т.е. на пространстве орбит $\mathcal{M}$.

Связь с исходными координатами Q^A точки p осуществляется согласно уравнению: $Q^A=F^A(Q^{*A},a^\alpha)$, при условии, что $\{\chi^\alpha(Q^*)=0\}$. Далее мы увидим, что кажущаяся неоднозначность таких преобразований будет компенсироваться появлением соответствующих проекторов в геометрических выражениях.

Переход к новым координатам (Q^{*A},a^α) изменяет вид римановой метрики нашего многообразия $\mathcal{P}$. Преобразование исходных координатных векторных полей при таком выборе координат задается следующей формулой:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial Q^B} &= F^C_B(F(Q^*,a),a^{-1})N^A_C(Q^*)\frac{\partial}{\partial Q^{*A}}\\ &+F^E_B(F(Q^*,a),a^{-1})\chi^\mu_E(Q^*)(\Phi^{-1})^\beta_\mu(Q^*)\bar{v}^\alpha_\beta(a)\frac{\partial}{\partial a^\alpha}.\end{aligned}\qquad(5)$$

Здесь $F^C_B(Q,a)\equiv\frac{\partial F^C}{\partial Q^B}(Q,a)$, $\chi^\mu_E\equiv\frac{\partial\chi^\mu}{\partial Q^E}(Q)$, $(\Phi^{-1})^\beta_\mu(Q)$ – матрица, обратная к матрице Фаддеева—Попова:

$$(\Phi)^\beta_\mu(Q)=K^A_\mu(Q)\frac{\partial\chi^\beta(Q)}{\partial Q^A}$$

(K_μ – векторные поля Киллинга для римановой метрики $G_{AB}(Q)$), и, наконец, N^A_C – проектор $(N^A_BN^B_C=N^A_C)$ на подпространство, ортогональное к векторному полю Киллинга:

$$N^A_C(Q)=\delta^A_C-K^A_\alpha(Q)(\Phi^{-1})^\alpha_\mu(Q)\chi^\mu_C(Q).$$

В формуле (5) он взят на подмногообразии $\{\chi^\alpha = 0\}$:

$$\begin{aligned}&N(Q^*) \equiv N(F(Q^*, e)),\\&N_D^M(Q^*) = F_D^B(Q^*, a) N_B^A(F(Q^*, a)) F_A^M(F(Q^*, a), a^{-1}).\end{aligned}$$

Формула (5) аналогична соответствующей формуле из [9,15]. Способ действия с зависимыми переменными описан, например, в [16].

Если рассматривать координатное векторное поле $\frac{\partial}{\partial Q^{*A}}$ как оператор, то его действие на функции определено согласно правилу:

$$\frac{\partial}{\partial Q^{*A}} \varphi(Q^*) = (P_\perp)_A^D(Q^*) \frac{\partial \varphi(Q)}{\partial Q^D}\bigg|_{Q=Q^*},$$

где $P_\perp$ – проектор на касательную плоскость к подмногообразию, заданному калибровками:

$$(P_\perp)_B^A = \delta_B^A - \chi_B^\alpha (\chi\chi^\top)^{-1\beta}_{\ \ \alpha} (\chi^\top)_\beta^A.$$

$(\chi^\top)_\beta^A$ – это транспонированная матрица:

$$(\chi^\top)_\mu^A = G^{AB} \gamma_{\mu\nu} \chi_B^\nu, \ \ \gamma_{\mu\nu} = K_\mu^A G_{AB} K_\nu^B.$$

Введенные проекторы удовлетворяют следующим свойствам:

$$(P_\perp)_B^{\tilde{A}} N_{\tilde{A}}^C = (P_\perp)_B^C, \qquad N_B^{\tilde{A}} (P_\perp)_{\tilde{A}}^C = N_B^C.$$

Метрика G_{AB} в новых координатах принимает вид:

$$\tilde{G}_{\mathcal{AB}}(Q^*, a) = \left(\begin{array}{cc} G_{CD}(Q^*)(P_\perp)_A^C (P_\perp)_B^D & G_{CD}(Q^*)(P_\perp)_A^D K_\mu^C \bar{u}_\alpha^\mu(a) \\ G_{CD}(Q^*)(P_\perp)_A^C K_\nu^D \bar{u}_\beta^\nu(a) & \gamma_{\mu\nu}(Q^*) \bar{u}_\alpha^\mu(a) \bar{u}_\beta^\nu(a) \end{array}\right), \tag{6}$$

где $P_\perp$ зависят от Q^*, т.е. взяты на подмногообразии, $G_{CD}(Q^*) \equiv G_{CD}(F(Q^*, e))$:

$$G_{CD}(Q^*) = F_C^M(Q^*, a) F_D^N(Q^*, a) G_{MN}(F(Q^*, a)).$$

"Обратной" матрицей, или, точнее, псевдообратной к матрице $\tilde{G}_{\mathcal{AB}}$, будет:

$$\tilde{G}^{\mathcal{AB}}(Q^*, a) = \left(\begin{array}{cc} G^{EF} N_E^C N_F^D & G^{SD} N_S^C \chi_D^\mu (\Phi^{-1})_\mu^\nu \bar{v}_\nu^\sigma \\ G^{CB} \chi_C^\gamma (\Phi^{-1})_\gamma^\beta N_B^D \bar{v}_\beta^\alpha & G^{CB} \chi_C^\gamma (\Phi^{-1})_\gamma^\beta \chi_B^\mu (\Phi^{-1})_\mu^\nu \bar{v}_\beta^\alpha \bar{v}_\nu^\sigma \end{array}\right). \tag{7}$$

В матрице (7) все компоненты зависят от Q^*, кроме $\bar{v}_\nu^\sigma \equiv \bar{v}_\nu^\sigma(a)$. Матрица $\tilde{G}^{\mathcal{AB}}$ обратна к $\tilde{G}_{\mathcal{BC}}$ в том смысле, что

$$\tilde{G}^{\mathcal{AB}} \tilde{G}_{\mathcal{BC}} = \left(\begin{array}{cc} (P_\perp)_B^C & 0 \\ 0 & \delta_\beta^\alpha \end{array}\right).$$

Детерминант матрицы (6) равен:

$$\begin{aligned}(\det \tilde{G}_{\mathcal{AB}}) = &\det G_{AB}(Q^*) \det \gamma_{\alpha\beta}(Q^*) (\det \chi\chi^\top)^{-1}(Q^*) (\det \bar{u}_\nu^\mu(a))^2 \\ &\times (\det \Phi_\beta^\alpha(Q^*))^2 \det (P_\perp)_B^C(Q^*).\end{aligned}$$

3. Преобразования случайного процесса и полугруппы

Замена координат на главном расслоении приводит к новому представлению для локальных случайных процессов $\eta^A(t)$. Построив (по методам из [11]) из преобразованных локальных процессов новый глобальный процесс $\zeta(t)$, мы тем самым совершим преобразование глобального случайного процесса $\eta(t)$.

Глобальный случайный процесс $\zeta(t)$ в его локальном представлении имеет компоненты двух видов: $(Q^{*A}(t), a^\alpha(t))$. Одни компоненты описывают стохастическую эволюцию, перенесенную на тотальное пространство главного расслоения из группы $\mathcal{G}$, другие — с подмногообразия Σ.

Несмотря на то, что процесс $Q^{*A}(t)$, связанный с подмногообразием Σ, описывается зависимыми координатами, переход от локального процесса $\eta^A(t)$ к случайному процессу $\zeta^{\mathcal{A}}(t) = (Q^{*A}(t), a^\alpha(t))$ есть, по сути, фазовое преобразование случайного процесса $\eta^A(t)$, поскольку переменные Q^{*A} ограничены дополнительным условием: $\chi^\alpha(Q^*) = 0$, и это условие выполняется также и для случайных процессов.

Но при фазовых преобразованиях случайных процессов, как мы знаем, сохраняются вероятности. Это означает, что действие локальной полугруппы $\tilde{U}_\eta$ на функцию $\varphi_0(p)$ равно математическому ожиданию по процессу $\zeta^{\mathcal{A}}(t)$ от преобразованной функции. Если рассмотреть этот переход на картах многообразия $\mathcal{P}$, то он происходит следующим образом.

Локальная полугруппа

$$\tilde{U}_\eta(s,t)\phi_0(p) = \mathrm{E}_{s,p}\phi_0(\eta(t)), \;\; s \leq t, \;\; \eta(s) = p$$

для локализованного на карте $(\mathcal{V}_p, \varphi^{\mathcal{P}})$ процесса $\eta(t)$,

$$\varphi^{\mathcal{P}}(\eta(t)) = \eta^{\varphi^{\mathcal{P}}}(t) \equiv \{\eta^A(t)\},$$

переписывается в виде:

$$\tilde{U}_\eta(s,t)\phi_0(p) = \mathrm{E}_{s,\varphi^{\mathcal{P}}(p)}\phi_0\left((\varphi^{\mathcal{P}})^{-1}(\eta^{\varphi^{\mathcal{P}}}(t))\right), \;\; \eta^{\varphi^{\mathcal{P}}}(s) = \varphi^{\mathcal{P}}(p).$$

Фазовое преобразование локальных случайных процессов

$$\eta^A(t) = F^A(Q^{*B}(t), a^\alpha(t))$$

переводит полугруппу $\tilde{U}_\eta$ в

$$\tilde{U}_\eta(s,t)\phi_0(p) = \mathrm{E}_{s,\tilde{\varphi}^{\mathcal{P}}(p)}\phi_0\left((\tilde{\varphi}^{\mathcal{P}})^{-1}(\zeta^{\tilde{\varphi}^{\mathcal{P}}}(t))\right) = \mathrm{E}_{s,\tilde{\varphi}^{\mathcal{P}}(p)}\tilde{\phi}_0\left(\zeta^{\tilde{\varphi}^{\mathcal{P}}}(t)\right),$$

где $(\tilde{\varphi}^{\mathcal{P}})^{-1} = (\varphi^{\mathcal{P}})^{-1} \circ F$ и $\tilde{\phi}_0 = \phi_0 \circ (\tilde{\varphi}^{\mathcal{P}})^{-1}$.

Заметим, что возможность введения на многообразии $\mathcal{P}$, тотальном пространстве расслоения, карт, связанных с подмногообразием Σ, есть следствие локального изоморфизма главного расслоения $P(\mathcal{M}, \mathcal{G})$ и тривиального главного расслоения $P_\Sigma = \Sigma \times \mathcal{G} \to \Sigma$ [6,7].

Таким образом, в наших локальных полугруппах, вместо усреднения по локальному случайному процессу $\eta^A(t)$, мы теперь имеем усреднение по локальному процессу $\zeta^{\tilde{\varphi}^{\mathcal{P}}}(t) = (Q^{*A}(t), a^\alpha(t))$. При условии, что эти локальные процессы ведут себя согласованным образом на пересечениях локальных карт, исходя из методов [11], можно определить глобальный процесс и глобальную эволюционную полугруппу.

Согласованность случайных процессов можно проверить, рассматривая преобразование локальных стохастических дифференциальных уравнений, решениями которых являются локальные случайные процессы. Кроме этого, стохастические дифференциальные уравнения необходимы для определения производящих генераторов эволюционных полугрупп. Поэтому перейдем теперь к выводу соответствующих стохастических дифференциальных уравнений.

4. Стохастические дифференциальные уравнения

Рассмотрим сначала стохастическое дифференциальное уравнение для компоненты Q^{*A} локального случайного процесса $\zeta^{\mathcal{A}}(t) = (Q^{*A}(t), a^{\alpha}(t))$. Мы предполагаем, что стохастическое дифференциальное уравнение для этой компоненты имеет следующий вид:

$$dQ^{*A}(t) = b^{*A}(t)dt + c^{*A}_{\bar{B}}(t)dw^{\bar{B}}(t), \tag{8}$$

где нам нужно еще определить явным образом коэффициенты сноса и диффузии.

Удовлетворяющая условию $\chi^{\alpha}(Q^*) = 0$ координата Q^{*A} есть функция от координаты Q^A:

$$Q^{*A} = F^A(Q, a^{-1}(Q)).$$

Такую же зависимость от случайной переменной $\eta^A(t)$ имеет и случайная переменная $Q^{*A}(t)$.

Можно, следовательно, воспользоваться формулой Ито, применив ее к случайной переменной $Q^{*A}(t)$ и тем самым переписав левую часть уравнения (8) в виде:

$$dQ^{*A}(t) = \frac{\partial Q^{*A}}{\partial Q^E} d\eta^E(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Q^{*A}}{\partial Q^E \partial Q^C} < d\eta^E(t) d\eta^C(t) > . \tag{9}$$

Или, подставляя в (9) вместо стохастического дифференциала $d\eta^A(t)$ его выражение из стохастического дифференциального уравнения (3), получим:

$$\begin{aligned} dQ^{*A}(t) = \frac{\partial Q^{*A}}{\partial Q^E}\Big(&-\frac{1}{2}\mu^2\kappa G^{PB}(\eta(t))\,\Gamma^E_{PB}(\eta(t))dt \\ &+ \mu\sqrt{\kappa}\mathcal{X}^E_{\bar{M}}(\eta(t))dw^{\bar{M}}(t)\Big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Q^{*A}}{\partial Q^E\partial Q^C} < d\eta^E(t)d\eta^C(t) >, \end{aligned} \tag{10}$$

где Γ^E_{PB} — коэффициенты Кристоффеля для исходной римановой метрики G_{AB}.

В уравнении (10) можно выразить случайные переменные $\eta^A(t)$ через переменные $Q^{*A}(t)$ и $a^{\alpha}(t)$ по формуле $\eta^A(t) = F^A(Q^{*B}(t), a^{\alpha}(t))$. Тогда коэффициент, стоящий в полученном выражении перед dt, будет коэффициентом сноса. А коэффициентом диффузии уравнения (8) будет выражение, имеющее в качестве сомножителя случайный дифференциал $dw(t)$.

Выполнив такое преобразование, мы получим:

$$\begin{aligned} dQ^{*A}(t) = \frac{1}{2}\mu^2\kappa\Big[&N^A_C N^R_M (G(Q^*(t))^{-1/2}\frac{\partial}{\partial Q^{*R}}\Big(G(Q^*(t))^{1/2}G^{CM}(Q^*(t))\Big) \\ &+N^A_{CL}G^{CL} - G^{PC}N^K_C K^M_{\mu M}(\Phi^{-1})^{\mu}_{\nu}\chi^{\nu}_P + G^{PC}N^A_C K^E_{\mu P}(\Phi^{-1})^{\mu}_{\nu}\chi^{\nu}_E \\ &+G^{PB}N^A_C K^C_{\mu B}(\Phi^{-1})^{\mu}_{\nu}\chi^{\nu}_P\Big]dt + \mu\sqrt{\kappa}N^A_C\tilde{\mathcal{X}}^C_{\bar{M}}(Q^*(t))dw^{\bar{M}}(t). \end{aligned} \tag{11}$$

В этой формуле все переменные зависят от $Q^*(t)$, а "лишние" индексы у переменных означают, что берутся соответствующие производные. Так, например, $N^A_{CL}(Q^*) = \frac{\partial}{\partial Q^L} N^A_C(Q)|_{Q=Q^*}$.

Коэффициент сноса можно представить также и в другом виде, выразив его через геометрические величины, характерные для рассматриваемой задачи. Для определения этих величин воспользуемся разложением исходного лапласиана из работы [3]:

$$\frac{1}{2}\triangle_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\Big({}^{\perp}G^{AB}\nabla_A\nabla_B - K^A_\mu\gamma^{\mu\nu}(\nabla_A K^B_\nu)\nabla_B + K^A_\alpha\gamma^{\alpha\beta}\nabla_B K^B_\beta\nabla_B\Big), \tag{12}$$

где ${}^{\perp}G^{AB} = G^{AB} - K^A_\alpha\gamma^{\alpha\beta}K^B_\beta$, а ∇_A – ковариантная производная, построенная при помощи символов Кристоффеля для исходной римановой метрики $G_{AB}(Q)$.

Если в (12) сделать замену переменной Q на (Q^*, a), то можно показать, что коэффициент сноса $b^{*A}(Q^*)$ из (11) будет равен сумме двух членов $b^A_I(Q^*)$ и $b^A_{II}(Q^*)$. Они являются коэффициентами при членах с первыми производными по Q^*, полученными из первого и второго слагаемых уравнения (12) в результате замены. В третьем слагаемом уравнения (12) членов с производными $\frac{\partial}{\partial Q^*}$ после замены переменной не будет.

Проделав необходимые выкладки, можно выяснить, что коэффициент $b^A_{II}(Q^*)$ есть компонента проекции нормали средней кривизны орбиты

$$j^D(Q)\frac{\partial}{\partial Q^D} = \frac{1}{2}\Pi^D_A(Q)\gamma^{\alpha\beta}(Q)\left[\nabla_{K_\alpha(Q)}K_\beta(Q)\right]^A\frac{\partial}{\partial Q^D}$$

на подмногообразие $\{\chi^\alpha = 0\}$. Эта проекция осуществляется при помощи преобразованной метрики $\tilde{G}^{\mathcal{AB}}$:

$$\tilde{G}^{SL}\tilde{G}\left(j^D\frac{\partial}{\partial Q^D}, \frac{\partial}{\partial Q^{*S}}\right)\frac{\partial}{\partial Q^{*L}},$$

где нужно предварительно выразить $j^D\frac{\partial}{\partial Q^D}$ через переменные Q^* и a.

В результате мы будем иметь для коэффициента $b^A_{II}(Q^*)$ следующее выражение:

$$b^A_{II}(Q^*) = \frac{1}{2}G^{EU}N^A_E N^D_U\left[\gamma^{\alpha\beta}G_{CD}(\tilde{\nabla}_{K_\alpha}K_\beta)^C\right],$$

в котором все функции справа зависят от Q^*, и через $(\tilde{\nabla}_{K_\alpha}K_\beta)^C(Q^*)$ мы обозначили

$$K^A_\alpha(Q^*)\left.\frac{\partial}{\partial Q^A}K^C_\beta(Q)\right|_{Q=Q^*} + K^A_\alpha(Q^*)K^B_\beta(Q^*)\tilde{\Gamma}^C_{AB}(Q^*),$$

где

$$\tilde{\Gamma}^C_{AB}(Q^*) = \frac{1}{2}\,G^{CE}(Q^*)\left(\frac{\partial}{\partial Q^{*A}}G_{EB}(Q^*) + \frac{\partial}{\partial Q^{*B}}G_{EA}(Q^*) - \frac{\partial}{\partial Q^{*E}}G_{AB}(Q^*)\right).$$

Перейдем теперь к выяснению геометрического смысла коэффициента $b^A_I(Q^*)$, происходящего из первого слагаемого в разложении лапласиана (12).

При проекции на пространство орбит $\mathcal{M}$ (которое изоморфно Σ), т.е., когда $Q^A = Q^{*A}(x)$, первое слагаемое в (12) переходит в оператор Лапласа–Бельтрами многообразия $(\mathcal{M}, h_{ij})$, с индуцированной метрикой

$$h_{ij}(x) = Q^{*A}_{\ i}(x)\,G^H_{AB}(Q^*(x))\,Q^{*B}_{\ j}(x).$$

Можно поэтому сказать, что многообразие орбит является подмногообразием в $(\mathcal{P}, G^H_{AB}(Q))$ — римановом многообразии с вырожденной метрикой.

Диффузия на многообразии орбит описывается локально стохастическим дифференциальным уравнением

$$dx^i(t) = -\frac{1}{2}\mu^2\kappa h^{kl}(x(t))\Gamma^i_{kl}(x(t))dt + \mu\sqrt{\kappa}X^i_{\bar{m}}(x(t))dw^{\bar{m}}(t),$$

в котором коэффициенты Кристоффеля построены по римановой метрике $h_{ij}(x)$.

Но, кроме стандартного описания посредством внутренних переменных, заданных на подмногообразии, эту диффузию можно также описывать и при помощи стохастических дифференциальных уравнений в переменных объемлющего многообразия.

В работах [17] был рассмотрен случай, когда подмногообразие вложено в евклидово пространство. Очевидным образом такой подход распространяется и на тот случай, когда имеется подмногообразие в произвольном римановом многообразии (см. Приложение А).

Для нашей задачи соответствующее стохастическое дифференциальное уравнение можно получить, если повторить все выкладки, проделанные в Приложении А.

Заметим только, что у нас метрика объемлющего многообразия G^H_{AB} является вырожденной метрикой. Поэтому аналогом соотношения (A.4) из Приложения А между коэффициентами Кристоффеля будет:

$$h^{kl}(x)\Gamma^i_{kl} = G^H_{AB}\left(Q^{*A}_{\ \ kl}h^{kl} + {}^H\Gamma^A_{CD}Q^{*C}_{\ \ k}Q^{*D}_{\ \ l}h^{kl}\right)h^{im}Q^{*B}_{\ \ m},$$

где произведение $G^H_{AB}(Q^*(x))\ {}^H\Gamma^B_{CD}(Q^*(x))$ определено следующим образом:

$$G^H_{AB}\ {}^H\Gamma^B_{CD} = \frac{1}{2}\left(G^H_{AC,D} + G^H_{AD,C} - G^H_{CD,A}\right). \tag{13}$$

В этой формуле производные справа понимаются как $\left.\frac{\partial G^H_{AC}(Q)}{\partial Q^D}\right|_{Q=Q^*(x)}$.

Еще заметим, что из уравнения (13) сами коэффициенты Кристоффеля ${}^H\Gamma^B_{CD}$ определяются только с точностью до членов T^B_{CD}, удовлетворяющих уравнению $G^H_{AB}T^B_{CD} = 0$.

Можно показать, что коэффициент сноса в полученном стохастическом дифференциальном уравнении совпадает с коэффициентом, стоящим при первой производной по Q^* в члене первого слагаемого разложения лапласиана (12) после замены переменной. Следовательно, этот коэффициент сноса совпадает также и с коэффициентом b_I. Это означает, что коэффициент b_I должен быть связан с геометрическими величинами, характеризующими пространство орбит.

Описанные выше преобразования приводят в итоге к следующему выражению для коэффициента b_I:

$$b^A_I\left(Q^*(x)\right) = -\frac{1}{2}G^{EM}\left(Q^*(x)\right)N^C_E\left(Q^*(x)\right)N^B_M\left(Q^*(x)\right)\ {}^H\Gamma^A_{CB}\left(Q^*(x)\right) + j^A_I,$$

где j_I – средняя кривизна многообразия орбит, которая может быть вычислена по формуле:

$$j^A_I = \frac{1}{2}\left(\delta^A_B - N^A_B\left(Q^*(x)\right)\right)h^{ij}(x)\left[Q^{*B}_{\ \ ij} + Q^{*P}_{\ \ i}Q^{*L}_{\ \ j}\ {}^H\Gamma^B_{PL}\left(Q^*(x)\right)\right].$$

Поскольку средняя кривизна есть, в общем случае, функция, заданная на подмногообразии, то подобно тому, как это было сделано в Приложении А, в стохастическом дифференциальном уравнении для $Q^*(x(t))$ мы можем переопределить случайную переменную $Q^*(x(t))$, введя вместо нее новую случайную переменную, которую мы обозначим такой же буквой: $Q^*(t)$.

Таким образом, в результате преобразования уравнения (8) мы получим следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dQ^{*A}(t) = \mu^2\kappa\Big(-\frac{1}{2}G^{EM}N^C_E N^B_M\,{}^H\Gamma^A_{CB} + j^A_I + j^A_{II}\Big)dt + \mu\sqrt{\kappa}N^A_C\mathcal{X}^C_{\bar{M}}dw^{\bar{M}}, \tag{14}$$

где справа все функции зависят от $Q^*(t)$, и для единообразия мы переобозначили коэффициент b^A_{II} через j^A_{II}.

Стохастическое дифференциальное уравнение для компоненты $a^\alpha(t)$ групповой случайной переменной можно получить таким же образом, каким было получено уравнение для случайной переменной $Q^{*A}(t)$.

Для нахождения коэффициентов сноса b^α и диффузии $\mathcal{Y}^\alpha_{\bar{M}}$ этого уравнения

$$da^\alpha(t) = b^\alpha(t)dt + \mathcal{Y}^\alpha_{\bar{M}}(t)dw^{\bar{M}}(t)$$

распишем по формуле Ито (ввиду того, что $a^\alpha = a^\alpha(Q)$) его левую часть:

$$da^\alpha = \frac{\partial a^\alpha}{\partial Q^A}d\eta^A + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a^\alpha}{\partial Q^B\partial Q^C} < d\eta^B d\eta^C > \tag{15}$$

и затем перейдем в ней к случайным переменным $(Q^{*A},\ a^\alpha)$. Тогда коэффициент сноса b^α будет определяться выражением, стоящим в (15) перед dt, а коэффициент диффузии — соответствующим выражением перед $dw(t)$.

Проделав эти преобразования, мы найдем, что стохастическое дифференциальное уравнение для случайной компоненты $a^\alpha(t)$ будет:

$$\begin{aligned}
da^\alpha = -\frac{1}{2}\mu^2\kappa\Big[&G^{RS}\tilde{\Gamma}^B_{RS}(Q^*)\Lambda^\beta_B\bar{v}^\alpha_\beta + G^{RP}\Lambda^\sigma_R\Lambda^\beta_B K^B_{\sigma P}\bar{v}^\alpha_\beta \\
&-G^{CA}N^M_C\frac{\partial}{\partial Q^{*M}}\Big(\Lambda^\beta_A\Big)\bar{v}^\alpha_\beta - G^{MB}\Lambda^\epsilon_M\Lambda^\beta_B\bar{v}^\nu_\epsilon\frac{\partial}{\partial a^\nu}(\bar{v}^\alpha_\beta)\Big]dt \\
&+\mu\sqrt{\kappa}\bar{v}^\alpha_\beta\Lambda^\beta_B\mathcal{X}^B_{\bar{M}}dw^{\bar{M}}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь все коэффициенты зависят от Q^*, кроме $\bar{v} \equiv \bar{v}(a)$. А коэффициент $\tilde{\Gamma}^B_{RS}(Q^*)$ получается из коэффициента связности Кристоффеля $\Gamma^A_{BC}(Q)$, если расписать в последнем все производные по формуле (5).

Также в (16) для сокращения записи введено обозначение:

$$\Lambda^\alpha_B = (\Phi^{-1})^\alpha_\mu \chi^\mu_B.$$

Таким образом, стохастический процесс $\zeta(t)$ локально описывается стохастическими дифференциальными уравнениями (14) и (16). Совокупность решений таких уравнений на локальных картах определяет локальное стохастическое эволюционное семейство отображений многообразия $\mathcal{P}$, рассматриваемого как тотальное пространство главного расслоения. Из этих локальных семейств можно построить, как и в [11], глобальный случайный процесс $\zeta(t)$, который, в соответствии с выбранным способом введения координат на главном расслоении, состоит из двух компонент. Одна из компонент описывает локальную стохастическую эволюцию на подмногообразии Σ (на калибровочной поверхности), а другая — на орбите главного расслоения.

Выполненное преобразование исходного случайного процесса $\eta(t)$ приводит к соответствующему преобразованию глобальной полугруппы (4). Теперь наша полугруппа будет определяться при помощи суперпозиции локальных полугрупп $\tilde{U}_{\zeta^{\varphi^P}}$:

$$\psi_{t_b}(p_a,t_a)=\lim_q \tilde{U}_{\zeta^{\varphi^P}}(t_a,t_1)\cdot\ldots\cdot\tilde{U}_{\zeta^{\varphi^P}}(t_{n-1},t_b)\tilde{\phi}_0(Q^*_a,\theta_a), \tag{17}$$

где

$$\tilde{U}_{\zeta^{\varphi^P}}(s,t)\tilde{\phi}_0(Q^*_0,\theta_0)=\mathrm{E}_{s,(Q^*_0,\theta_0)}\tilde{\phi}_0(Q^*(t),a(t)),\;\; Q^*(s)=Q^*_0,\;\; a(s)=\theta_0.$$

В символьной записи уравнение (17) (с учетом потенциального члена) можно представить следующим образом:

$$\psi_{t_b}(p_a,t_a)=\mathrm{E}\Big[\tilde{\phi}_0(\xi_\Sigma(t_b),a(t_b))\exp\{\frac{1}{\mu^2\kappa m}\int_{t_a}^{t_b}\tilde{V}(\xi_\Sigma(u))du\}\Big],$$

где $\xi_\Sigma(t_a)=Q^*_a$, $a(t_a)=\theta_a$ и $\varphi^P(p_a)=(Q^*_a,\theta_a)$.

Исходя из стохастических дифференциальных уравнений (14) и (16), нетрудно найти координатное выражение для производящего генератора полугруппы, связанной со случайным процессом $\zeta(t)$:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mu^2\kappa\Big(G^{CD}N^A_C N^B_D\frac{\partial^2}{\partial Q^{*A}\partial Q^{*B}}-G^{CD}N^A_C N^B_D\,{}^H\Gamma^E_{AB}\frac{\partial}{\partial Q^{*E}}+j^A_I\frac{\partial}{\partial Q^{*A}}\\&+j^A_{II}\frac{\partial}{\partial Q^{*A}}+G^{AB}\Lambda^\alpha_A\Lambda^\beta_B\bar{L}_\alpha\bar{L}_\beta-G^{RS}\tilde{\Gamma}^B_{RS}\Lambda^\alpha_B\bar{L}_\alpha-G^{RP}\Lambda^\sigma_R\Lambda^\alpha_B K^B_{\sigma P}\bar{L}_\alpha\\&+G^{CA}N^M_C\frac{\partial}{\partial Q^{*M}}\left(\Lambda^\alpha_A\right)\bar{L}_\alpha+2G^{BC}N^A_C\Lambda^\alpha_B\bar{L}_\alpha\frac{\partial}{\partial Q^{*A}}\Big)+\frac{1}{\mu^2\kappa m}\tilde{V}.\end{aligned}$$

В этом выражении все величины, кроме $\bar{L}$, зависят от Q^*.

5. Факторизация меры

В работах [4,5] был предложен новый способ факторизации меры в континуальных интегралах, служащих для описания диффузии (или квантового движения) в редуцируемых динамических системах. В данном разделе мы рассмотрим реализацию этого способа в нашем случае, то есть когда для описания движения вместе с групповыми переменными используются зависимые переменные, которые удовлетворяют условиям $\chi^\alpha(Q^*)=0$.

Главная идея работы [4] состояла в применении в рассматриваемом случае движения на главном расслоении стохастического дифференциального уравнения оптимальной нелинейной фильтрации [18,19]. Теория нелинейной фильтрации предназначена для извлечения информации из полученных в экспериментах данных. В каждом "эксперименте" необходимо связать наблюдаемые данные (у нас это – случайный процесс $Q^*(t)$) с тем сигнальным процессом, для исследования которого ставится эксперимент (случайный процесс a^α). Однако по наблюдаемым данным мы можем лишь только делать более или менее точные оценки исследуемого сигнала.

Для количественной характеристики исследуемого сигнала в теории нелинейной фильтраци используется условное математическое ожидание сигнала по отношению к σ–алгебре, порожденной наблюдаемым случайным процессом. При определенных предположениях, ограничивающих поведение наблюдаемого и сигнального случайных процессов, для условного математического ожидания можно получить так называемое уравнение оптимальной нелинейной фильтрации.

Напомним вкратце, как связано это уравнение с порождающими его стохастическими дифференциальными уравнениями.

Если, например, Y и Z есть, соответственно, наблюдаемый и сигнальный процессы, которые удовлетворяют стохастическим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{cases} dY = \phi_1(Y,Z,t)dt + X(Y,t)dw \\ dZ = \phi(Y,Z,t)dt + X(Y,Z,t)dw, \end{cases}$$

то уравнением оптимальной нелинейной фильтрации для условного математического ожидания $\hat{f}(t) = \mathrm{E}[f(Z,t)|\tilde{\mathcal{Y}}^t_{t_0}]$ (здесь $\tilde{\mathcal{Y}}^t_{t_0}$—$\sigma$-алгебра, порожденная наблюдаемым процессом $Y(t)$) будет [19]:

$$\begin{aligned} d\hat{f} = &\mathrm{E}\left[f_t + f_z\phi + \frac{1}{2}f_{zz}\left(XX^\top\right)\Big|\tilde{\mathcal{Y}}^t_{t_0}\right]dt \\ &+\mathrm{E}\left[f\{\phi_1 - \hat{\phi}_1\} + f_z\left(XX^\top\right)\Big|\tilde{\mathcal{Y}}^t_{t_0}\right](XX^\top)^{-1}(dY - \hat{\phi}_1 dt), \end{aligned}$$

где $\hat{\phi}_1 = \mathrm{E}[\phi_1(Y_t,Z_t,t)|\tilde{\mathcal{Y}}^t_{t_0}]$.

Чтобы воспользоваться подобным уравнением в нашем случае мы, основываясь на свойствах условных математических ожиданий для марковских процессов, сначала преобразуем каждую локальную полугруппу $\tilde{U}_{\zeta\varphi^P}$ из уравнения (17) следующим образом:

$$\tilde{U}_{\zeta\varphi^P}(s,t)\tilde{\phi}(Q^*_0,\theta_0) = \mathrm{E}\Big[\mathrm{E}[\tilde{\phi}(Q^*(t),a(t)) \mid (\mathcal{F}_{Q^*})^t_s]\Big]. \tag{18}$$

Такое преобразование континуального интеграла является аналогом перехода от кратного интеграла к повторному в обычном интегрировании.

Но теперь условное математическое ожидание

$$\hat{\tilde{\phi}}(Q^*(t)) \equiv \mathrm{E}\Big[\tilde{\phi}(Q^*(t),a(t)) \mid (\mathcal{F}_{Q^*})^t_s\Big],$$

стоящее в “повторном” интеграле, должно удовлетворять стохастическому дифференциальному уравнению оптимальной нелинейной фильтрации. Наши стохастические дифференциальные уравнения (14) и (16) приводят к следующему уравнению оптимальной нелинейной фильтрации:

$$\begin{aligned} d\hat{\tilde{\phi}} = &-\frac{1}{2}\mu^2\kappa\Big(G^{RS}\tilde{\Gamma}^B_{RS}\Lambda^\beta_B + G^{RP}\Lambda^\sigma_R\Lambda^\beta_B K^B_{P\sigma} - G^{CA}N^M_C\frac{\partial}{\partial Q^{*M}}(\Lambda^\beta_A)\Big) \\ &\times\mathrm{E}[\bar{L}_\beta\tilde{\phi} \mid (\mathcal{F}_{Q^*})^t_s]dt + \frac{1}{2}\mu^2\kappa G^{CB}\Lambda^\nu_C\Lambda^\kappa_B\mathrm{E}[\bar{L}_\nu\bar{L}_\kappa\tilde{\phi} \mid (\mathcal{F}_{Q^*})^t_s]dt \\ &+\mu\sqrt{\kappa}\Lambda^\beta_C\Pi^C_K\tilde{X}^K_{\bar{M}}\mathrm{E}[\bar{L}_\beta\tilde{\phi} \mid (\mathcal{F}_{Q^*})^t_s]dw^{\bar{M}}, \end{aligned} \tag{19}$$

где $\bar{L}_\mu = \bar{v}^\alpha_\beta(a)\frac{\partial}{\partial a^\mu}$ — правоинвариантное векторное поле.

Дальнейшее преобразование уравнения (19) состоит в том, чтобы отделить групповые переменные от пространственных. Это можно сделать, если разложить функцию $\widetilde{\phi}$ в ряд по матричным элементам $D^{\lambda}_{pq}(a)$ неприводимого представления группы $\mathcal{G}$:

$$\tilde{\phi}(Q^*, a) = \sum_{\lambda,p,q} c^{\lambda}_{pq}(Q^*) D^{\lambda}_{pq}(a)$$

$(\sum_q D^{\lambda}_{pq}(a) D^{\lambda}_{qn}(b) = D^{\lambda}_{pn}(ab))$.

Тогда, благодаря свойствам условного математического ожидания:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\tilde{\phi}(Q^*(t), a(t)) \mid (\mathcal{F})_{Q^*})^t_s] &= \sum_{\lambda,p,q} c^{\lambda}_{pq}(Q^*(t))\, \mathrm{E}[D^{\lambda}_{pq}(a(t)) \mid (\mathcal{F}_{Q^*})^t_s] \\
&\equiv \sum_{\lambda,p,q} c^{\lambda}_{pq}(Q^*(t))\, \hat{D}^{\lambda}_{pq}(Q^*(t)),
\end{aligned}$$

из уравнения (19) выводится уравнение для условного среднего $\hat{D}^{\lambda}_{pq}$:

$$\begin{aligned}
&d\hat{D}^{\lambda}_{pq}(Q^*(t)) = \\
&-\frac{1}{2}\mu^2\kappa \Big\{ \Big[G^{RS}\tilde{\Gamma}^B_{RS}\Lambda^{\mu}_B + G^{RP}\Lambda^{\sigma}_R\Lambda^{\mu}_B K^B_{P\sigma} - G^{CA} N^M_C \frac{\partial}{\partial Q^{*M}}(\Lambda^{\beta}_A) \Big] \\
&\times (J_\beta)^{\lambda}_{pq'} \hat{D}^{\lambda}_{q'q}(Q^*(t)) - G^{CB}\Lambda^{\alpha}_C\Lambda^{\nu}_B\ (J_\alpha)^{\lambda}_{pq'}(J_\nu)^{\lambda}_{q'q''}\hat{D}^{\lambda}_{q''q}(Q^*(t)) \Big\} dt \\
&+\mu\sqrt{\kappa}\Lambda^{\nu}_C \Pi^C_K (J_\nu)^{\lambda}_{pq'} \hat{D}^{\lambda}_{q'q}(Q^*(t)) \tilde{X}^K_{\bar{M}}(Q^*(t)) dw^{\bar{M}}(t),
\end{aligned} \tag{20}$$

в котором $(J_\mu)^{\lambda}_{pq} \equiv \left(\frac{\partial D^{\lambda}_{pq}(a)}{\partial a^{\mu}}\right)\Big|_{a=e}$ — генераторы представления $D^{\lambda}(a)$:

$$\bar{L}_{\mu} D^{\lambda}_{pq}(a) = \sum_{q'} (J_\mu)^{\lambda}_{pq'} D^{\lambda}_{q'q}(a).$$

Заметим, что условные математические ожидания $\hat{D}^{\lambda}_{pq}(Q^*(t))$, вообще говоря, зависят также и от граничных значений случайных процессов, то есть от $Q^*_0 = Q^*(s)$ и $\theta^{\alpha}_0 = a^{\alpha}(s)$. Но, чтобы не усложнять обозначений, эта зависимость в выписанных выше выражениях была опущена.

Решением матричного линейного стохастического дифференциального уравнения (20) будет [20]:

$$\hat{D}^{\lambda}_{pq}(Q^*(t)) = (\overleftarrow{\exp})^{\lambda}_{pn}(Q^*(t), t, s)\, \mathrm{E}[D^{\lambda}_{nq}(a(s)) \mid (\mathcal{F}_{Q^*})^t_s], \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned}
&(\overleftarrow{\exp})^{\lambda}_{pn}(Q^*(t), t, s) = \overleftarrow{\exp} \int_s^t \Big\{ \frac{1}{2}\mu^2\kappa \Big[\bar{\gamma}^{\sigma\nu}(Q^*(u))(J_\sigma)^{\lambda}_{pr}(J_\nu)^{\lambda}_{rn} \\
&-\Big(G^{RS}\tilde{\Gamma}^B_{RS}\Lambda^{\beta}_B + G^{RP}\Lambda^{\sigma}_R\Lambda^{\beta}_B K^B_{P\sigma} - G^{CA} N^M_C \frac{\partial}{\partial Q^{*M}}(\Lambda^{\beta}_A) \Big)\ (J_\beta)^{\lambda}_{pn} \Big] du \\
&+\mu\sqrt{\kappa}\Lambda^{\beta}_C (J_\beta)^{\lambda}_{pn} \Pi^C_K \tilde{X}^K_{\bar{M}} dw^{\bar{M}} \Big\}
\end{aligned} \tag{22}$$

— мультипликативный стохастический интеграл. Этот интеграл есть предел последовательности упорядоченных по времени экспоненциальных множителей, получающихся при разбиении временного интервала $[s,t]$. Направление стрелки указывает на порядок расположения этих сомножителей: от меньших времен к большим.

Воспользовавшись полученным в (21) и (22) представлением для $\hat{D}^{\lambda}_{pq}$, мы перепишем нашу локальную полугруппу (18) следующим образом:

$$\tilde{U}_{\zeta^{\varphi^P}}(s,t)\tilde{\phi}(Q^*_0,\theta_0)=\sum_{\lambda,p,q,q'}\mathrm{E}[c^{\lambda}_{pq}(Q^*(t))(\overleftarrow{\exp})^{\lambda}_{pq'}(Q^*(t),t,s)]D^{\lambda}_{q'q}(\theta_0), \tag{23}$$

где было учтено, что

$$\mathrm{E}[D^{\lambda}_{nq}(a(s))\mid(\mathcal{F}_{Q^*})^t_s]=D^{\lambda}_{nq}(a(s))=D^{\lambda}_{nq}(\theta_0).$$

Для получения глобальной полугруппы нужно, действуя так же, как и в [11], разбить временной интервал $[t_a,t_b]$ и для данного разбиения взять суперпозицию локальных полугрупп, подобных (23). Тогда в результате перехода к пределу, при измельчении разбиения временного интервала, из последовательности этих суперпозиций должна получаться глобальная полугруппа для глобального случайного процесса.

Предельное соотношение между глобальными полугруппами запишем символически в виде:

$$\psi_{t_b}(p_a,t_a)=\sum_{\lambda,p,q,q'}\mathrm{E}[c^{\lambda}_{pq}(\xi_{\Sigma}(t_b))(\overleftarrow{\exp})^{\lambda}_{pq'}(\xi_{\Sigma}(t),t_b,t_a)]D^{\lambda}_{q'q}(\theta_a) \tag{24}$$

$(\xi_{\Sigma}(t_a)=\pi|_{\Sigma}\circ p_a)$,
где $\xi_{\Sigma}(t)$—глобальный случайный процесс на подмногообразии Σ. Локально этот процесс описывается уравнениями (14).

Таким образом, исходный континуальный интеграл записывается в виде суммы матричных полугрупп (континуальных интегралов), заданных на подмногообразии Σ.

Производящим генератором (оператором Гамильтона) этих матричных полугрупп будет:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\mu^2\kappa\Biggl\{\Biggl[G^{CD}N^A_C N^B_D\frac{\partial^2}{\partial Q^{*A}\partial Q^{*B}}-G^{CD}N^E_C N^M_D\,{}^H\Gamma^A_{EM}\frac{\partial}{\partial Q^{*A}}\\&+\left(j^A_I+j^A_{II}\right)\frac{\partial}{\partial Q^{*A}}\Biggr](I^{\lambda})_{pq}+2N^A_C G^{CP}\Lambda^{\alpha}_P(J_{\alpha})^{\lambda}_{pq}\frac{\partial}{\partial Q^{*A}}\\&-\left(G^{RS}\tilde{\Gamma}^B_{RS}\Lambda^{\alpha}_B+G^{RP}\Lambda^{\sigma}_R\Lambda^{\alpha}_B K^B_{P\sigma}-G^{CA}N^M_C\frac{\partial}{\partial Q^{*M}}(\Lambda^{\alpha}_A)\right)(J_{\alpha})^{\lambda}_{pq}\\&+G^{SB}\Lambda^{\alpha}_B\Lambda^{\sigma}_S(J_{\alpha})^{\lambda}_{pq'}(J_{\sigma})^{\lambda}_{q'q}\Biggr\}\end{aligned} \tag{25}$$

($(I^{\lambda})_{pq}$ — единичная матрица).

Этот оператор действует в пространстве сечений $\Gamma(\Sigma,V^*)$ ковекторного расслоения, которое ассоциировано с главным тривиальным расслоением $\pi:\Sigma\times\mathcal{G}\to\Sigma$. Скалярное произведение в этом пространстве сечений определено следующим образом:

$$\begin{aligned}(\psi_n,\psi_m)\;&=\;\int_{\Sigma}\langle\psi_n,\psi_m\rangle_{V^*_{\lambda}}\frac{\det^{1/2}G_{AB}(Q^*)\det\Phi^{\alpha}_{\beta}(Q^*)\det^{1/2}\gamma_{\mu\nu}(Q^*)}{\det^{1/2}(\chi\chi^{\top})(Q^*)}\\&\quad\times|\det P_{\perp}(Q^*)|\;dQ^{*1}\wedge\ldots\wedge dQ^{*N_{\mathcal{P}}}.\end{aligned} \tag{26}$$

В этой формуле $|\det P_\perp|$ служит характеристической функцией: он отличен от нуля и равен единице только на множестве $\{Q^*:\ \chi(Q^*)=0\}$. Поэтому в $|\det P_\perp|\, dQ^{*1}\wedge\ldots\wedge dQ^{*N_{\mathcal P}}$ на самом деле имеется лишь $\dim\Sigma$–сомножителей.

Заметим, что так как $\det(\chi\chi^\top)\equiv\det(\chi^\mu_A G^{AB}\chi^\nu_B)\cdot\det\gamma_{\mu\nu}$, то мера в правой части уравнения (26) не зависит от $\det^{1/2}\gamma_{\mu\nu}$.

Можно, следовательно, переписать правую часть (26) в виде:

$$\int_\Sigma\langle\psi_n,\psi_m\rangle_{V^*_\lambda}\frac{\det\Phi^\alpha_\beta}{\det^{1/2}(\chi^\mu_A G^{AB}\chi^\nu_B)}\,dv_\Sigma,$$

где dv_Σ — риманова мера на поверхности Σ, содержащая $\det^{1/2}(G_\Sigma)_{AB}$ от метрики $(G_\Sigma)_{AB}(Q^*)=(P_\perp)^C_A(Q^*)G_{CD}(Q^*)(P_\perp)^D_B(Q^*)$.

Преобразуя последний интеграл, можно представить скалярное произведение (26) также и как

$$(\psi_n,\psi_m)=\int_\Sigma\langle\psi_n,\psi_m\rangle_{V^*_\lambda}\det\Phi^\alpha_\beta\prod_{\alpha=1}^{N_{\mathcal G}}\delta(\chi^\alpha(Q^*))\det{}^{1/2}G_{AB}\,dQ^{*1}\wedge\ldots\wedge dQ^{*N_{\mathcal P}}.$$

Чтобы выразить полугруппы (или континуальные интегралы), стоящие под знаком суммы в формуле (24), через исходную полугруппу (исходный континуальный интеграл), заданную на многообразии $\mathcal P$, нужно обратить формулу (24). Как и в предыдущей работе [5], это нетрудно сделать для ядер соответствующих полугрупп, переходя к локальной картине.

Полугруппа из левой части формулы (24) представима (при выполнении необходимых аналитических условий) в виде:

$$\psi_{t_b}(p_a,t_a)=\int G_{\mathcal P}(p_b,t_b;p_a,t_a)\phi_0(p_b)dv_{\mathcal P}(p_b). \tag{27}$$

Если взять разбиение единицы, подчиненное конечному локальному покрытию многообразия $\mathcal P$, которое, ввиду изоморфизма с тривиальным главным расслоением $P_\Sigma(\Sigma,\mathcal G)$, преобразуется отображением изоморфизма в $\varphi^\Sigma_{\alpha_b}(\mathcal U^\Sigma_{\alpha_b})\times\mathcal G$, то правая часть формулы (27) будет равна:

$$\sum_{\alpha_b}\int_{\varphi^\Sigma_{\alpha_b}(\mathcal U^\Sigma_{\alpha_b})\times\mathcal G}\tilde{\tilde\mu}_{\alpha_b}(x_b)G_{\mathcal P}(\alpha_b,F(Q^*_b,\theta_b),t_b;\beta_a,F(Q^*_a,\theta_a),t_a)\tilde\phi_0(Q^*_b,\theta_b)dv(Q^*_b)d\mu(\theta_b), \tag{28}$$

где $dv(Q^*)$ — такая же мера, как и в (26), а $d\mu(\theta)=\det\bar u^\alpha_\beta(\theta)\,d\theta^1\ldots d\theta^{N_{\mathcal G}}$ — мера Хаара.

Правая часть формулы (24) также может быть представлена локальным образом:

$$\sum_{\alpha_b}\int_{\varphi^\Sigma_{\alpha_b}(\mathcal U^\Sigma_{\alpha_b})}\tilde\rho_{\alpha_b}(x_b)\sum_{\lambda,p,q,q'}G^\lambda_{q'p}(\alpha_b,Q^*_b,t_b;\beta_a,Q^*_a,t_a)c^\lambda_{pq}(Q^*_b)D^\lambda_{q'q}(\theta_a)dv(Q^*_b). \tag{29}$$

Переходя к отдельной карте и сравнивая (28) и (29), мы получаем соотношение между локальными функциями Грина

$$\int_{\mathcal G}G_{\mathcal P}(\alpha_b,F(Q^*_b,\theta_b),t_b;\beta_a,F(Q^*_a,\theta_a),t_a)D^\lambda_{pq}(\theta_b)d\mu(\theta_b)=$$
$$\sum_{q'}G^\lambda_{q'p}(\alpha_b,Q^*_b,t_b;\beta_a,Q^*_a,t_a)D^\lambda_{q'q}(\theta_a),$$

которое, с учетом унимодулярности группы $\mathcal{G}$, уже легко обратимо:

$$G^{\lambda}_{mn}(\alpha_b, Q^*_b, t_b; \beta_a, Q^*_a, t_a) = \int_{\mathcal{G}} G_P(\alpha_b, Q^*_b, \theta, t_b; \beta_a, Q^*_a, e, t_a) D^{\lambda}_{nm}(\theta) d\mu(\theta). \tag{30}$$

В этой формуле e – единица группы $\mathcal{G}$, и

$$G_P(\alpha_b, Q^*_b, \theta_b, t_b; \beta_a, Q^*_a, \theta_a, t_a) \equiv G_{\mathcal{P}}(\alpha_b, F(Q^*_b, \theta_b), t_b; \beta_a, F(Q^*_a, \theta_a), t_a).$$

Поскольку мы ограничились в работе случаем тривиального главного расслоения, то склеивание этих локальных функций Грина в глобальные осуществляется при помощи функций преобразования координат, определенных для карт многообразия.

Следовательно, равенство (30) можно продолжить с локальных карт на многообразия в целом и мы получаем соотношение между функциями Грина, заданными на многообразиях:

$$G^{\lambda}_{mn}(\pi_{\Sigma}(p_b), t_b; \pi(p_a), t_a) = \int_{\mathcal{G}} G_{\mathcal{P}}(p_b\theta, t_b; p_a, t_a) D^{\lambda}_{nm}(\theta) d\mu(\theta). \tag{31}$$

Континуальный интеграл, который соответствует левой части этого равенства, символически можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&G^{\lambda}_{mn}(\pi_{\Sigma}(p_b), t_b; \pi_{\Sigma}(p_a), t_a) = \\
&\tilde{\mathrm{E}}_{\substack{\xi_{\Sigma}(t_a)=\pi_{\Sigma}(p_a)\\ \xi_{\Sigma}(t_b)=\pi_{\Sigma}(p_b)}} \left[(\overleftarrow{\exp})^{\lambda}_{mn}(\xi_{\Sigma}(t), t_b, t_a) \exp\left\{ \frac{1}{\mu^2\kappa m} \int_{t_a}^{t_b} \tilde{V}(\xi_{\Sigma}(u)) du \right\} \right] \\
&= \int\limits_{\substack{\xi_{\Sigma}(t_a)=\pi_{\Sigma}(p_a)\\ \xi_{\Sigma}(t_b)=\pi_{\Sigma}(p_b)}} d\mu^{\xi} \exp\left\{ \frac{1}{\mu^2\kappa m} \int_{t_a}^{t_b} \tilde{V}(\xi_{\Sigma}(u)) du \right\} \\
&\times \overleftarrow{\exp} \int_{t_a}^{t_b} \Big\{ \frac{1}{2}\mu^2\kappa \Big[\gamma^{\sigma\nu}(\xi_{\Sigma}(u)) (J_{\sigma})^{\lambda}_{pr} (J_{\nu})^{\lambda}_{rn} \\
&- \Big(G^{RS}\tilde{\Gamma}^B_{RS}\Lambda^{\beta}_B + G^{RP}\Lambda^{\sigma}_R\Lambda^{\beta}_B K^B_{P\sigma} - G^{CA} N^M_C \frac{\partial}{\partial Q^{*M}}(\Lambda^{\beta}_A) \Big) \, (J_{\beta})^{\lambda}_{pn} \Big] du \\
&+ \mu\sqrt{\kappa}\Lambda^{\beta}_C (J_{\beta})^{\lambda}_{pn} \Pi^C_K \tilde{X}^K_{\bar{M}} dw^{\bar{M}} \Big\}.
\end{aligned} \tag{32}$$

Полугруппы, определяемые этим ядром, действуют в пространстве эквивариантных функций

$$\tilde{\psi}_n(pg) = D^{\lambda}_{mn}(g)\tilde{\psi}_m(p),$$

которые изоморфны функциям ψ_n из пространства сечений $\Gamma(\Sigma, V^*)$ ассоциированного ковекторного расслоения:

$$\tilde{\psi}_n(F(Q^*, e)) = \psi_n(Q^*).$$

Способ, которым было получено интегральное соотношение между G^{λ}_{mn} и $G_{\mathcal{P}}$, можно рассматривать как реализацию процедуры редукции в континуальных интегралах для динамических систем, обладающих симметрией.

Редукция на уровень нулевого момента, т.е. когда $\lambda = 0$, устанавливает связь между континуальными интегралами, описывающими квантовые движения скалярных частиц на исходном многообразии $\mathcal{P}$ и на редуцированном многообразии $\mathcal{M}$ — пространстве орбит.

В том случае, который исследуется в работе, для представления движения на пространстве орбит используется вспомогательная калибровочная поверхность Σ, где соответствующая диффузия задается случайным процессом ξ_Σ с локальными стохастическими уравнениями (14).

Из этих уравнений видно, что в них присутствует "лишний" член j_{II}, который непосредственно не связан с пространством орбит. Если избавиться от этого члена, то мы получим случайный процесс, который уже будет полностью соответствовать диффузии на пространстве орбит $\mathcal{M}$.

В континуальном интеграле такой переход от случайного процесса ξ_Σ, с локальными уравнениями (14), к случайному процессу $\tilde{\xi}_\Sigma$, чьи локальные стохастические дифференциальные уравнения есть

$$dQ^{*A}(t)=\mu^2\kappa\Big(-\frac{1}{2}G^{EM}N^C_E N^B_M\,{}^H\Gamma^A_{CB}+j^A_I\Big)dt+\mu\sqrt{\kappa}N^A_C\mathcal{X}^C_{\bar{M}}dw^{\bar{M}}, \tag{33}$$

можно сделать при помощи преобразования Гирсанова.

Это преобразование в основном применяется в случае невырожденной матрицы диффузии. Из–за того, что в диффузионных частях уравнений (14) и (33) присутствуют проекторы, мы имеем случай вырожденных диффузий, поэтому стандартная формула Гирсанова не применима.

Но если остаться в рамках той неоднозначности, которая предопределена используемыми проекторами, то, исходя из единственности (по модулю этой неоднозначности) решения рассматриваемого параболического дифференциального уравнения с оператором, равным диагональной части оператора (25), при помощи стохастического дифференцирования Ито и формулы

$$(G^{AB}N^C_A N^D_B)((P_\perp)^E_D G^H_{EM}(P_\perp)^M_L)=(P_\perp)^C_L$$

можно найти, чему будет равна производная Радона–Никодима меры μ^{ξ_Σ} по мере $\mu^{\tilde{\xi}_\Sigma}$:

$$\frac{d\mu^{\xi_\Sigma}}{d\mu^{\tilde{\xi}_\Sigma}}(\tilde{\xi}_\Sigma(t))=\exp\int_{t_a}^{t}\Big[-\frac{1}{2}\mu^2\kappa\left((P_\perp)^L_A G^H_{LK}(P_\perp)^K_E\right)j^A_{II}j^E_{II}dt$$
$$+\mu\sqrt{\kappa}G^H_{LK}(P_\perp)^L_A j^A_{II}\mathcal{X}^K_{\bar{M}}dw^{\bar{M}}\Big].$$

Сделав такую замену переменной в том континуальном интеграле, который получается в случае редукции $\lambda=0$, мы придем к следующему интегральному соотношению:

$$G_\Sigma(Q^*_b,t_b;Q^*_a,t_a)=\int_{\mathcal{G}}G_{\mathcal{P}}(p_b\theta,t_b;p_a,t_a)d\mu(\theta),$$

где ядро G_Σ представлено континуальным интегралом

$$G_\Sigma(Q^*_b,t_b;Q^*_a,t_a)=\int_{\substack{\tilde{\xi}_\Sigma(t_a)=Q^*_a\\ \tilde{\xi}_\Sigma(t_b)=Q^*_b}}d\mu^{\tilde{\xi}_\Sigma}\exp\left\{\frac{1}{\mu^2\kappa m}\int_{t_a}^{t_b}\tilde{V}(\tilde{\xi}_\Sigma(u))du\right\}$$
$$\times\exp\int_{t_a}^{t_b}\Big\{-\frac{1}{8}\mu^2\kappa G^{AB}N^D_A N^L_B\left[\gamma^{\alpha\beta}G_{DC}(\tilde{\nabla}_{K_\alpha}K_\beta)^C\right]$$
$$\times\left[\gamma^{\mu\nu}G_{LE}(\tilde{\nabla}_{K_\mu}K_\nu)^E\right]dt+\frac{1}{2}\mu\sqrt{\kappa}N^D_P\left[\gamma^{\alpha\beta}G_{CD}(\tilde{\nabla}_{K_\alpha}K_\beta)^C\right]\mathcal{X}^P_{\bar{M}}dw^{\bar{M}}\Big\}$$
$$(Q^*=\pi_\Sigma(p)).$$

Полугруппа, определяемая этим континуальным интегралом, действует в пространстве скалярных функций на Σ.

Отличие от аналогичной формулы из предыдущей работы [5] состоит в том, что якобиан редукции содержит дополнительный стохастический интеграл. В принципе, от этого интеграла можно избавиться при помощи соответствующего аналога тождества Ито [21]. Но получение такого тождества и проверка возможности его применения в нашем случае требует отдельного рассмотрения.

Заключение

Проделанное в работе исследование показало, что способ факторизации меры в континуальном интеграле, основанный на уравнении оптимальной нелинейной фильтрации, применим и в случае, когда для описания "квантового" движения частицы на редуцированном многообразии используются зависимые переменные.

Основной результат работы — это интегральные соотношения между функциями Грина (формулы (31) и (32) и аналогичные формулы для случая $\lambda = 0$), полученные при помощи преобразования континуальных интегралов.

Преобразование континуальных интегралов показало, что при редукции мера в континуальном интеграле не остается инвариантной.

Полученный якобиан редукции имеет интересную структуру и выражается через среднюю кривизну многообразия орбиты. После преобразования переменных интегрирования в континуальном интеграле эта кривизна, вместе со средней кривизной многообразия орбит, появляется в стохастическом дифференциальном уравнении (14).

В связи с этим можно высказать предположение, и это требует дополнительного исследования, что сумма двух средних кривизн возникает вследствие расщепления средней кривизны многообразия $\mathcal{P}$, если считать, что оно исходно вложено в многообразие большей размерности.

Найденное представление стохастического дифференциального уравнения, содержащего геометрические величины, может быть полезно, по-видимому, при исследовании вопроса о структуре рядов по теории возмущений в калибровочных теориях.

Еще один из результатов, который получен в данной работе, есть установленная связь между редуцированными континуальными интегралами, определенными на пространстве орбит $\mathcal{M}$ (см. формулы из предыдущей статьи [5]), и континуальными интегралами на вспомогательной поверхности Σ (в случае тривиальных главных расслоений). Эта связь есть следствие того, что в обоих случаях мы имеем одинаковые правые части в полученных интегральных соотношениях.

Имея в виду распространение данного метода факторизации меры на континуальные интегралы из калибровочных теорий, необходимо также сказать и о некоторых не решенных в работе проблемах.

В работе рассматривался ограниченный случай, когда на исходном многообразии действовала компактная группа. Как следствие, объемы получающихся орбит были конечными. Возможно, что переход к некомпактным группам подскажет, как преодолеть неизбежные трудности, связанные с бесконечностями, с которыми придется иметь дело при неформальном распространении метода факторизации на континуальные интегралы калибровочных теорий.

Еще одним ограничением является то, что мы рассмотрели такое действие группы на многообразии, при котором полученное главное расслоение тривиально. Только в этом случае можно считать, что калибровочные функции определяют подмногообразие в $\mathcal{P}$.

Вместе с тем, содержание проблемы Грибова в калибровочных теориях состоит в том, что такой калибровочной поверхности (или глобального сечения главного расслоения) не существует.

В предложенном способе квантования калибровочных теорий методом континуального интегрирования в работах [7] используется конечный набор таких калибровочных поверхностей, и глобальная эволюция организована путем "сшивания" (при помощи склеивающих функций) эволюций, заданных на отдельных калибровочных поверхностях.

Если считать, что топологические эффекты при этом не существенны (что, вообще говоря, может быть и не так и требует отдельного исследования), то, воспользовавшись методами из работ [7], можно распространить полученные в нашей работе результаты и на случай нетривиальных главных расслоений.

Заметим, однако, что практические вычисления в калибровочных теориях выполняются локально, предполагая, что заданы тривиальные главные расслоения.

В заключение необходимо заметить, что для решения других, не связанных с факторизацией проблем, возникающих при квантовании калибровочных теорий, возможно, также было бы весьма полезно привлечение уравнений, являющихся следствиями основного уравнения оптимальной нелинейной фильтрации, особенно уравнений, описывающих стохастическую эволюцию произведений случайных величин.

Благодарности

Автор выражает свою благодарность А.В. Разумову за многочисленные обсуждения геометрических проблем, возникающих в процессе работы, а также В.О. Соловьеву и В.И. Бородулину за полезные советы и помощь на ранних стадиях работы.

Список литературы

[1] Faddeev L.D., Popov V.N. // *Phys. Lett.* **25B** (1967) 30;
Фаддеев Л.Д. // *ТМФ* **1** (1969) 3.

[2] Landsman N.P., Linden N. // *Nucl. Phys.* **B365** (1991) 121;
Tanimura S., Tsutsui I. // *Mod. Phys. Lett.* **A34** (1995) 2607;
McMullan D., Tsutsui I. // *Ann. Phys.* **237** (1995) 269.

[3] Kunstatter G. // *Class. Quant.Grav.* **9** (1992) 1466.

[4] Storchak S.N. *Path integral on manifold with group action.* — IHEP Preprint 96–110, Protvino, 1996.

[5] Storchak S.N. *Bogolubov transformation in path integrals on manifold with a group action.* — IHEP Preprint 98–1, Protvino, 1998.

[6] Mitter P.K., Viallet C.M. // *Comm. Math. Phys.* **79** (1981) 457.

[7] Hüffel H., Kelnhofer G. // *Ann. of Phys.* **266** (1998) 417;
Ann. of Phys. **270** (1998) 231.

[8] Jaskolski Z. // *Comm. Math. Phys.* **111** (1987) 439.

[9] Falck N.K., Hirshfeld A.C. // *Ann. Phys.* **144** (1982) 34;
Gavedzki K. // *Phys. Rev.* **D26** (1982) 3593.

[10] Ellicott P., Kunstatter G. and Toms D.J. // *Mod. Phys. Lett.* **A4**, № 24 (1989) 2397.

[11] Белопольская Я.И., Далецкий Ю.Л. // *УМН* **37**, № 3 (1982) 95;
Далецкий Ю.Л. // *УМН* **38**, № 3 (1983) 87;
Далецкий Ю.Л., Белопольская Я.И. *Стохастические уравнения и дифференциальная геометрия.* — Киев: Выща школа, 1989.

[12] Abraham R., Marsden J.E. *Foundation of Mechanics, 2nd Ed.* — Addison-Wesley Redwood City, 1985.

[13] Khrustalev O.A., Razumov A.V., Taranov A.Yu. // *Nucl. Phys.* **B172** (1980) 44;
Разумов А.В., Таранов А.Ю. // *ТМФ* **52** (1982) 34;
Разумов А.В. Преобразование Боголюбова и квантовая теория систем со связями. *Докторская диссертация.* — Протвино, 1991.

[14] Солодовникова Е.П., Тавхелидзе А.Н., Хрусталев О.А. // *ТМФ* **10** (1972) 162; *ТМФ* **11** (1972) 317; *ТМФ* **12** (1972) 164.

[15] Creutz M., Muzinich I.J. and Tudron Th.N. // *Phys. Rev.* **D19**, № 2 (1979) 531.

[16] Plyushchay M.S., Razumov A.V. // *Int. J. Mod. Phys.* **A11**, № 8 (1996) 1427.

[17] Lewis J.T. // *Bull. London Math. Soc.* **18** (1986) 616.

[18] Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. *Статистика случайных процессов.* — М.: Наука, 1974.

[19] Пугачев В.С., Синицын И.Н. *Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация.* — М.: Наука, 1990.

[20] Далецкий Ю.Л., Тетерина Н.И. // *УМН* **27**, № 2 (1972) 167;
Далецкий Ю.Л. // *УМН* **30**, № 2 (1975) 209;
Stroock D.W. // *Com. Pure Appl. Math.* **23** (1970) 447.

[21] Ватанабэ С., Икеда Н. *Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.* — М.: Наука, 1986;
Сторчак С.Н. // *ТМФ* **75** (1988) 403.

[22] Betounes D.E. // *Phys. Rev.* **D33**, № 12 (1980) 3634;
Chen Bang-yen. *Geometry of Submanifold.* — Marsel Deccer, N.Y., 1973.

Рукопись поступила 24 ноября 2000 г.

Приложение A
Стохастические дифференциальные уравнения на подмногообразии

Если в конечномерное риманово (компактное) гладкое многообразие с римановой метрикой $G_{AB}(Q)$ вложено подмногообразие $\mathcal{M}$, с координатоами x^i так, что локально подмногообразие задается уравнениями $Q^A = Q^A(x^i)$, то на подмногообразии $\mathcal{M}$ индуцируется риманова метрика $h_{ij}(x) = Q_i^A(x)Q_j^B(x)G_{AB}(Q(x))$.

На подмногообразии $\mathcal{M}$ случайный процесс $\xi(t) = \{x^i(t)\}$, с производящим генератором $1/2\,\triangle_{\mathcal{M}}$ ($\triangle_{\mathcal{M}}$–оператор Лапласа–Бельтрами), описывается следующим локальным стохастическим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned}&dx^k(t) = -\frac{1}{2}h^{ij}(x(t))\Gamma^k_{ij}(x(t))dt + X^k_{\bar{m}}(x(t))dw^{\bar{m}}(t),\\ &(\textstyle\sum_{\bar{m}} X^k_{\bar{m}}X^l_{\bar{m}} = h^{kl}).\end{aligned} \tag{A.1}$$

Пусть локальное стохастическое дифференциальное уравнение, описывающее тот же самый процесс на подмногообразии, но в переменных Q^A, будет:

$$dQ^A(t) = a^A dt + \tilde{\mathcal{X}}^A_{\bar{M}} dw^{\bar{M}}(t), \tag{A.2}$$

где коэффициенты a^A и $\tilde{\mathcal{X}}^A_{\bar{M}}(t)$ – пока неопределенные функции от $Q(t)$. От процесса, записанного в переменных $Q^A(t)$, также требуется, чтобы в начальный момент времени он находился на подмногообразии.

Для нахождения коэффициентов уравнения (A.2) продифференцируем по формуле Ито уравнения $Q^A = Q^A(x^i(t))$, считая при этом, что случайные переменные $x^i(t)$ удовлетворяют уравнению (A.1). То, что получится после дифференцирования, приравняем правой части уравнения (A.2).

Тогда найдем, что коэффициент a^A равен:

$$a^A = -\frac{1}{2}Q^A_i(x(t))h^{kl}(x(t))\Gamma^i_{kl}(x(t)) + \frac{1}{2}Q^A_{ij}(x(t))h^{ij}(x(t)). \tag{A.3}$$

Но

$$\begin{aligned}h^{kl}(x)\Gamma^i_{kl}(x) = G_{AB}(Q(x))\,(Q^A_{kl}(x)+\\ +\,\Gamma^A_{CD}(Q(x))Q^C_k(x)Q^D_l(x))\,h^{im}(x)Q^B_m(x)h^{kl}(x)\end{aligned} \tag{A.4}$$

(см., например, [22]).

С учетом этой формулы и при помощи проекторов на касательное пространство к подмногообразию $\mathcal{M}$:

$$N^C_B(Q(x)) = G_{BA}(Q(x))Q^A_i(x)h^{ij}(x)Q^C_j(x),$$

(A.3) преобразуется в

$$a^A = -\frac{1}{2}N^A_P h^{ij}Q^C_i Q^D_j \Gamma^P_{CD} - \frac{1}{2}N^A_P Q^P_{kl}h^{kl} + \frac{1}{2}Q^A_{kl}h^{kl}. \tag{A.5}$$

Но поскольку компоненты нормали средней кривизны подмногообразия равны

$$
\begin{aligned}
j^D &= \frac{1}{2}(\delta^D_B - N^D_B)h^{ij}\left[\nabla_{Q^P_i\frac{\partial}{\partial Q^P}}\left(Q^L_j\frac{\partial}{\partial Q^L}\right)\right]^B \\
&= \frac{1}{2}h^{ij}(Q^A_iQ^B_j\Gamma^D_{AB} + Q^D_{ij} - N^D_CQ^A_iQ^B_j\Gamma^C_{AB} - N^D_CQ^C_{ij}),
\end{aligned}
$$

то (A.5) переписывается в виде:

$$
a^A(Q(x)) = -\frac{1}{2}G^{EM}(Q(x))N^C_E(Q(x))N^B_M(Q(x))\Gamma^A_{CB}(Q(x)) + j^A. \tag{A.6}
$$

В связи с тем, что нормаль средней кривизны может быть определена также и бескоординатным образом, например через отображение Вейнгартена, то j^A в формуле (A.6) являются на самом деле функциями на подмногообразии, т.е. $j^A \equiv j^A(Q(x))$.

Прежде чем вычислять коэффициенты диффузии $\tilde{\mathcal{X}}^A_{\bar{M}}(t)$ заметим, что коэффициенты диффузии уравнений (A.1) и (A.2) определены с точностью до ортогональных преобразований.

Из равенства

$$
\tilde{\mathcal{X}}^A_{\bar{M}}dw^{\bar{M}} = Q^A_iX^i_{\bar{m}}dw^{\bar{m}},
$$

полученного из (A.2) после применения формулы Ито, следует, что

$$
\sum_{\bar{M}}\tilde{\mathcal{X}}^A_{\bar{M}}\tilde{\mathcal{X}}^B_{\bar{M}} = \sum_{\bar{m}}Q^A_iX^i_{\bar{m}}Q^B_jX^j_{\bar{m}} = h^{ij}Q^A_iQ^B_j = G^{CD}N^A_CN^B_D.
$$

Откуда можно найти $\tilde{\mathcal{X}}^A_{\bar{M}}$:

$$
\tilde{\mathcal{X}}^A_{\bar{M}} = N^A_C\mathcal{X}^C_{\bar{M}}, \quad (\sum_{\bar{M}}\mathcal{X}^D_{\bar{M}}\mathcal{X}^C_{\bar{M}} = G^{CD}).
$$

Таким образом, приняв координаты $Q^A(x(t))$ за новые координаты $Q^A(t)$ случайного процесса (вместе с требованием, чтобы в начальный момент времени процесс находился на подмногообразии), мы получим, что локальное стохастическое дифференциальное уравнение для компонент Q^A, описывающее случайный процесс на подмногообразии, имеет следующий вид:

$$
dQ^A(t) = \left(-\frac{1}{2}G^{EM}N^C_DN^D_M\Gamma^A_{CD} + j^A\right)dt + N^A_C\mathcal{X}^C_{\bar{M}}dw^{\bar{M}}, \tag{A.7}
$$

где все функции справа теперь зависят от $Q(t)$.

С.Н.Сторчак
Факторизация меры в континуальных интегралах при редукции в зависимых координатах.

Оригинал-макет подготовлен с помощью системы LaTeX.
Редактор Л.Ф.Васильева. Технический редактор Н.В.Орлова.

Подписано к печати 28.11.2000. Формат $60 \times 84/8$. Офсетная печать.
Печ.л. 3. Уч.-изд.л. 2,4. Тираж 130. Заказ 250. Индекс 3649.
ЛР №020498 17.04.97.

ГНЦ РФ Институт физики высоких энергий
142284, Протвино Московской обл.

Индекс 3649

П Р Е П Р И Н Т 2000–54, И Ф В Э, 2000