

United Nations Educational Scientific and Cultural Organization
and
International Atomic Energy Agency
THE ABDUS SALAM INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

**QUELQUES PROPRIETES DES METRIQUES D'EINSTEIN
SUR LES GROUPES DE LIE RESOLUBLES REVISITEES**

Hamid-Reza Fanaï

The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

Abstract

By using the formula for the Ricci tensor of a standard solvmanifold, we prove some properties of the application which defines the semidirect product between the abelian part and the nilpotent part when our manifold is Einstein.

ext-2000-221
01/11/2000



MIRAMARE – TRIESTE

July 2000

Nous étudions dans cette note certains aspects des métriques invariantes à gauche d'Einstein sur les groupes de Lie résolubles. Nous rappelons que tous les exemples connus de variétés homogènes d'Einstein non-compactes et non-plates sont isométriques aux solvariétés d'Einstein (S, Q_0) où S désigne un groupe de Lie résoluble simplement connexe muni d'une métrique invariante à gauche d'Einstein Q_0 . Essentiellement nous étudions les algèbres de Lie résolubles métriques (\mathfrak{s}, Q) . Une telle algèbre de Lie métrique est appelée *standard* ([H]) si $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]^\perp$ est abélien. On note $\mathfrak{n} := [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ (la partie nilpotente) et $\mathfrak{a} := \mathfrak{n}^\perp$. Soit $H_Q \in \mathfrak{s}$ le vecteur défini par

$$Q(H_Q, X) = \text{tr ad}_X \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{s}.$$

Dans la formule de ric_Q (voir la partie suivante) l'application ad_{H_Q} apparaît de manière décisive. Nous étudions quelques propriétés de cette application. Dans la première partie nous présentons une propriété importante trouvée par J. Heber : soit $(\mathfrak{s}, [,])$ une algèbre de Lie non-unimodulaire résoluble munie d'une métrique d'Einstein standard Q_0 . Alors d'après le théorème 4.10 de [H], D_{H_0} la partie symétrique de $\text{ad}_{H_0} \in \text{End}(\mathfrak{s})$ est aussi une dérivation (et définie positive sur \mathfrak{n}), où $H_0 = H_{Q_0}$ est non nul (par hypothèse de non-unimodularité). En d'autre terme, $(\mathfrak{s}, [,], Q_0)$ est isométrique à un espace *de type Iwasawa*. Ceci implique que ad_{H_0} est un opérateur *normal* de (\mathfrak{s}, Q_0) . La propriété qui nous intéresse est la suivante : pour une telle algèbre de Lie $(\mathfrak{s}, [,], Q_0)$ il existe un multiple positif unique $H_1 = \lambda H_0$ tel que l'opérateur normal $\text{ad}_{H_1}|_{\mathfrak{n}}$ a des valeurs propres dont les parties réelles $\mu_1 < \dots < \mu_m$ sont des entiers sans diviseur commun ([H], théorème 4.14). Les μ_i sont les valeurs propres de $D_{H_1}|_{\mathfrak{n}}$. Si $d_i, i = 1, \dots, m$ désignent les multiplicités correspondantes, alors on appelle le $2m$ -uplet

$$(\mu_1 < \dots < \mu_m; d_1, \dots, d_m)$$

le *type de valeur propre* de solvariété d'Einstein standard associée ([H]). Dans la première partie nous présentons la preuve de ce résultat (en imitant celle de Heber) de manière très simple. Dans la deuxième partie, nous supposons que \mathfrak{n} est nilpotente de rang deux et que $\dim \mathfrak{a} = 1$. L'application ad_{H_0} étant une dérivation, il est clair que celle-ci préserve \mathfrak{c} le centre de \mathfrak{n} . Dans le chapitre 4 de [KH], un premier théorème de réduction montre que cette application préserve aussi le supplémentaire orthogonal de \mathfrak{c} dans \mathfrak{n} . Ceci résulte aussi du fait que ad_{H_0} est un opérateur normal. Par la suite dans le chapitre 7, un deuxième théorème de réduction montre que cet opérateur laisse invariants $\mathfrak{c}_1 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ et \mathfrak{c}_2 son supplémentaire orthogonal dans \mathfrak{c} . Grâce à la formule de ric_Q nous donnons une preuve (inspirée par celle de Kass) de ces propriétés dans cette partie. Nous donnons également la preuve du fait que les valeurs propres de $D_{H_0}|_{\mathfrak{n}}$ sont toutes positives en admettant que celle-ci est bien une dérivation.

Nous étudions un problème de décomposabilité de \mathfrak{n} dans la troisième partie lorsque $\dim \mathfrak{a} = 1$ (par exemple $\mathfrak{a} = \langle H \rangle$ avec H de norme 1) et prouvons que si

$$(\langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2, [,], Q_0)$$

est d'Einstein où les algèbres \mathfrak{n}_1 et \mathfrak{n}_2 sont orthogonales et $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2] = \{0\}$, alors D_{H_0} préserve \mathfrak{n}_1 et \mathfrak{n}_2 . Il en résulte que $(\langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}_i, [\cdot, \cdot]_i, Q_0)$ pour $i = 1, 2$ est aussi d'Einstein où $[\cdot, \cdot]_1$ et $[\cdot, \cdot]_2$ sont obtenus à partir de $[\cdot, \cdot]$ en modifiant ad_{H_0} . Pour ce dernier nous appliquons les arguments de [W] que nous avons déjà utilisés dans [F1] et [F2]. Finalement dans la dernière partie, nous revenons sur le type de valeur propre et considérons le cas particulier de $(1 < 2; d_1, d_2)$ où \mathfrak{n} est nécessairement nilpotente de rang deux et $\dim \mathfrak{a} = 1$. C'est dans ce cadre que Damek et Ricci ont trouvé leurs exemples harmoniques. Récemment dans [GK] une famille continue de solvariétés d'Einstein de courbure sectionnelle négative a été obtenue dans ce cas. Il est intéressant d'étudier les obstructions possibles sur d_1 et d_2 lorsqu'il existe une solvariété d'Einstein de type de valeur propre égal à $(1 < 2; d_1, d_2)$. Nous montrons que si d_1 et d_2 sont premiers entre eux, alors la partie nilpotente d'une telle solvariété est indécomposable.

1 Type de valeur propre

Soit S un groupe de Lie résoluble connexe et simplement connexe. On note \mathfrak{s} son algèbre de Lie et B sa forme de Killing. On désigne par $\text{Der}(\mathfrak{s}) \subset \text{End}(\mathfrak{s})$ l'algèbre de Lie de toutes les dérivations de \mathfrak{s} .

Supposons que \mathfrak{s} est munie d'un produit scalaire (défini positif) Q qui induit la norme $|\cdot|$ et prenons $\{e_i\}$ une base orthonormée quelconque de (\mathfrak{s}, Q) . Comme nous avons défini auparavant, le vecteur H_Q est déterminé par $Q(H_Q, X) = \text{tr ad}_X$ pour tout $X \in \mathfrak{s}$. Il est clair que H_Q est perpendiculaire à l'algèbre dérivée $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$. Nous rappelons que S (ou \mathfrak{s}) est appelé unimodulaire si $\text{tr ad}_X = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{s}$, ou de manière équivalente si le vecteur H_Q s'annule (pour tout Q).

Le produit scalaire Q induit une métrique riemannienne invariante à gauche sur S que l'on note toujours Q . Si le tenseur de courbure de Ricci $\text{ric}(v, w) = \text{tr } R(\cdot, v)w$ défini à partir de R le tenseur de courbure de Riemann est un multiple de la métrique Q , alors Q est appelée d'Einstein. Si Q_0 est une métrique d'Einstein sur $(\mathfrak{s}, [\cdot, \cdot])$, la constante de proportionnalité est non-positive puisque S est non-compact ([B]). De plus, si ric_{Q_0} s'annule alors (S, Q_0) est une variété plate (voir par exemple [BB]). Nous considérons donc le cas

$$\text{ric}_{Q_0}(v, w) = -c \cdot Q_0(v, w)$$

avec $c > 0$. La courbure scalaire est alors égale à $sc(Q_0) = -c \cdot \dim S$. La formule de ric_Q dans le cas général est donnée dans la section 2 de [DM] (comparer avec 7.38 de [B]) :

$$\begin{aligned} \text{ric}_Q(X, X) &= -Q(\text{ad}_{H_Q} X, X) - 1/2B(X, X) \\ &\quad - 1/2 \text{tr ad}_X \circ \text{ad}_X^* + 1/4 \sum_{i,j} Q([e_i, e_j], X)^2 \end{aligned}$$

où $*$ désigne l'adjoint par rapport à Q . Si $[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]^\perp$ (relatif à Q) est abélien, nous appelons (\mathfrak{s}, Q) une algèbre de Lie standard ([H]).

Maintenant nous prouvons la propriété de rationalité concernant les valeurs propres de D_{H_0} mentionnée auparavant dès qu'une métrique d'Einstein standard Q_0 est fixée. Nous donnons tout d'abord une preuve simple du lemme crucial suivant (voir le lemme 4.13 de [H]) :

Lemme 1.1 *Avec les notations précédentes, si $(\mathfrak{s}, [,], Q_0)$ est une algèbre de Lie non-unimodulaire résoluble munie d'une métrique d'Einstein standard Q_0 , alors pour toute dérivation symétrique $A \in \text{Der}(\mathfrak{s})$, nous avons*

$$c \cdot \text{tr}_{\mathfrak{n}} A = \text{tr}_{\mathfrak{n}}(D_{H_0} \circ A).$$

Remarque. En fait $\text{tr}_{\mathfrak{n}} A = \text{tr} A$ car A s'annule nécessairement sur \mathfrak{a} ([H]).

Démonstration. Remarquons comme dans le lemme 2.2 de [H] que pour tout $X \in \mathfrak{s}$, $\text{tr} \text{ad}_{A(X)} = \text{tr}[A, \text{ad}_X] = 0$ ce qui implique que $A(X)$ est perpendiculaire à H_0 et donc $A(H_0) = 0$. Il en résulte que A commute avec ad_{H_0} et sa partie symétrique D_{H_0} . Supposons que $\{e_i\}$ est une base orthonormée de \mathfrak{s} formée par des vecteurs propres de D_{H_0} et de A . Supposons que sur \mathfrak{n} : $D_{H_0}(e_i) = \mu_i e_i$ et $A(e_i) = \alpha_i e_i$. Nous utilisons la formule de $\text{ric}_{Q_0}(e_i, e_i)$ pour $e_i \in \mathfrak{n}$:

$$\begin{aligned} \text{ric}_{Q_0}(e_i, e_i) &= -Q_0(D_{H_0}(e_i), e_i) - 1/2 B(e_i, e_i) \\ &\quad - 1/2 \sum_j Q_0([e_i, e_j], [e_i, e_j]) + 1/4 \sum_{j,k} Q_0([e_j, e_k], e_i)^2 \end{aligned}$$

et puisque $\mathfrak{n} \subset \ker(B)$ (voir [Bou] ou [SW]) obtenons donc l'égalité suivante :

$$c - \mu_i = 1/2 \sum_{j,k} (c_{ij}^k)^2 - 1/4 \sum_{j,k} (c_{jk}^i)^2$$

où $c_{ij}^k = Q_0([e_i, e_j], e_k)$ pour tous i, j, k . Nous avons alors comme dans le lemme 3.3 de [H] :

$$\begin{aligned} c \cdot \text{tr}_{\mathfrak{n}} A - \text{tr}_{\mathfrak{n}}(D_{H_0} \circ A) &= c \cdot \sum_i \alpha_i - \sum_i \mu_i \cdot \alpha_i \\ &= \sum_i \left\{ 1/2 \sum_{j,k} (c_{ij}^k)^2 - 1/4 \sum_{j,k} (c_{jk}^i)^2 \right\} \cdot \alpha_i \\ &= -1/4 \sum_{i,j,k} (\alpha_k - \alpha_i - \alpha_j) \cdot (c_{ij}^k)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

la dernière égalité vient du fait que A est une dérivation car si $c_{ij}^k \neq 0$ alors $\alpha_k = \alpha_i + \alpha_j$. \square

Remarque. La dérivation symétrique D_{H_0} est caractérisée par cette propriété qui reste valable pour une dérivation quelconque A . Notons que le cas $A = D_{H_0}$ donne $c = \text{tr} D_{H_0}^2 / \text{tr} \text{ad}_{H_0}$.

Maintenant, supposons que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$ sont les valeurs propres distinctes de $D_{H_0}|_{\mathfrak{n}}$ de multiplicités $d_j = \dim \mathfrak{n}_j$ et \mathfrak{n}_j les espaces propres associés dans \mathfrak{n} . Dans la partie suivante nous donnerons une preuve du fait que toutes les λ_j sont bien positives lorsque \mathfrak{n} est nilpotente de rang deux et $\dim \mathfrak{a} = 1$. Soit $A : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}$ définie par $A|_{\mathfrak{n}_j} = \alpha_j \text{Id}$ pour $1 \leq j \leq m$ avec $\alpha_i + \alpha_j = \alpha_k$ si $0 \neq [\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_j] \subset \mathfrak{n}_k$. Il est clair que A devient une dérivation symétrique de \mathfrak{s} en posant $A|_{\mathfrak{a}} = 0$. D'après le lemme précédent, nous avons

$$\sum_{j=1}^m d_j \cdot (c - \lambda_j) \cdot \alpha_j = 0.$$

Soit ℓ le nombre de α_i qui peuvent être indépendants des autres. Soit $L = \{\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_\ell}\}$ un tel choix. Alors en posant $X_j = \lambda_j/c$, nous obtenons

$$\sum_{s=1}^{\ell} P_{i_s}(X_{i_1}, \dots, X_{i_\ell}) \cdot \alpha_{i_s} = 0$$

où P_i est un polynôme de degré 1 de ℓ variables à coefficients rationnels. L'égalité ci-dessus étant valable pour toutes valeurs de α_{i_s} , il en résulte que

$$P_{i_s}(X_{i_1}, \dots, X_{i_\ell}) = 0 \text{ pour } 1 \leq s \leq \ell.$$

Il est facile de vérifier que ce système nous donne une unique solution pour les X_{i_s} , d'après la remarque précédente. Ceci implique que les λ_{i_s}/c sont toutes rationnelles ce qui prouve que toutes les λ_i/c sont rationnelles. Nous avons donc montré le

Théorème 1.2 (Heber) *Il existe une constante positive ω , telle que les valeurs propres de $D_{H_0} : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}$ appartiennent à $\omega \cdot \mathbb{N}$.*

Ceci implique qu'il existe un multiple positif unique $H_1 = \lambda H_0$ tel que l'opérateur $\text{ad}_{H_1}|_{\mathfrak{n}}$ a des valeurs propres dont les parties réelles $\mu_1 < \dots < \mu_m$ sont des entiers positifs sans diviseur commun. Les μ_i sont les valeurs propres de $D_{H_1}|_{\mathfrak{n}}$. Si d_i désignent les multiplicités correspondantes, alors on appelle le $2m$ -uplet

$$(\mu_1 < \dots < \mu_m; d_1, \dots, d_m)$$

le type de valeur propre de solvariété (non-unimodulaire) d'Einstein standard $(\mathfrak{s}, [,], Q_0)$. À l'aide du théorème précédent nous obtenons des obstructions à l'existence d'une telle métrique Q_0 sur $(\mathfrak{s}, [,])$ avec $\dim \mathfrak{a} = 1$, dès qu'un type de valeur propre est fixé. En effet l'espace $\mathfrak{a} = \langle H \rangle$ étant de dimension 1, nous pouvons parler de type de valeur propre sans fixer une métrique d'Einstein. Dans ce cas les valeurs propres dans un type donné sont celles de ad_H (pour quelques exemples voir [H] 5.3). Nous allons considérer dans la dernière partie, le type de valeur propre $(1 < 2; d_1, d_2)$ pour $\mathfrak{s} = \langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}$.

2 Deux théorèmes de réduction pour ad_{H_0}

Nous utilisons toujours les mêmes notations. Dans cette partie nous supposons que \mathfrak{n} est nilpotente de rang deux et $\dim \mathfrak{a} = 1$. Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée de \mathfrak{s} formée par $\{H\}$ et une base de \mathfrak{n} où $H = H_0/|H_0|$. Posons $f = \text{ad}_H|_{\mathfrak{n}}$. Quitte à changer H par $-H$, nous pouvons supposer que $\text{tr } f > 0$. Il est clair que f préserve \mathfrak{c} le centre de \mathfrak{n} . Soit \mathfrak{m} le supplémentaire orthogonal de \mathfrak{c} dans \mathfrak{n} . La matrice de f dans des bases orthonormées de \mathfrak{c} et \mathfrak{m} est la suivante

$$f = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Nous prouvons que $C = 0$. Ceci a déjà été démontré dans [KH]. Nous donnons une preuve similaire en utilisant la formule de ric_{Q_0} . Réécrivons la formule

$$\begin{aligned} \text{ric}_{Q_0}(X, Y) &= -Q_0(D_{H_0}X, Y) - 1/2B(X, Y) - 1/2 \sum_i Q_0([X, e_i], [Y, e_i]) \\ &\quad + 1/4 \sum_{i,j} Q_0(X, [e_i, e_j]) \cdot Q_0(Y, [e_i, e_j]). \end{aligned}$$

Appliquons cette formule pour $X \in \mathfrak{c}$ et $Y \in \mathfrak{m}$. Avec $\text{ad}_{H_0} = (\text{tr } f)f$, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= -1/2(\text{tr } f)Q_0((f + f^t)X, Y) - 1/2Q_0(f(X), f(Y)) \\ &\quad + 1/2 \sum_j Q_0(X, f(Y_j)) \cdot Q_0(Y, f(Y_j)) \end{aligned}$$

où $\{Y_j\}$ est la base orthonormée choisie de \mathfrak{m} . Nous obtenons alors

$$(\text{tr } f)Q_0(f^t X, Y) + Q_0(f^t f X, Y) - \sum_j Q_0(f^t X, Y_j) \cdot Q_0(f^t Y, Y_j) = 0$$

mais cette dernière somme étant égale à $Q_0(f^t X, f^t Y)$, nous avons donc $(\text{tr } f)C^t = DC^t - C^t A$ et en conséquence $(\text{tr } f)\|C\|^2 = \text{tr}(C^t C D - C C^t A)$. Choisissons $\{Y_j\}$ et la base orthonormée $\{X_i\}$ de \mathfrak{c} telles que S_A et S_D les parties symétriques de A et D soient diagonales. Posons $S_A = \text{diag}(a_i)$ et $S_D = \text{diag}(d_j)$. Nous montrons maintenant que $a_i \geq d_j$ pour tous i, j . Dans ce cas, l'inégalité $\text{tr } C^t C D \leq \text{tr } C C^t A$ entraîne $\|C\| = 0$. Nous utilisons la formule de $\text{ric}_{Q_0}(Y, Y)$ avec $Y = Y_{j_0}$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} -c &= -(\text{tr } f)d_{j_0} - 1/2Q_0(f(Y), f(Y)) - 1/2 \sum_j Q_0([Y, Y_j], [Y, Y_j]) \\ &\quad + 1/2 \sum_j Q_0(Y, f(Y_j))^2 \end{aligned}$$

notons que $Q_0(f(Y), f(Y)) = \sum_j Q_0(Y, f(Y_j))^2 + R$ avec $R \geq 0$ car la partie symétrique de D est diagonale. Nous obtenons donc $(\text{tr } f)d_{j_0} \leq c$. Maintenant nous utilisons la formule de $\text{ric}_{Q_0}(X, X)$ avec $X = X_{i_0}$:

$$\begin{aligned} -c &= -(\text{tr } f)a_{i_0} - 1/2Q_0(f(X), f(X)) + 1/2 \sum_k Q_0(X, f(e_k))^2 \\ &\quad + 1/4 \sum_{j,j'} Q_0(X, [Y_j, Y_{j'}])^2 \end{aligned}$$

notons que $\sum_k Q_0(X, f(e_k))^2 = Q_0(f(X), f(X)) + L$ avec $L \geq 0$ car la partie symétrique de A est diagonale. Nous obtenons donc $c \leq (\text{tr } f)a_{i_0}$. En combinant les deux inégalités obtenues nous avons $d_{j_0} \leq a_{i_0}$ et nous terminons ainsi la preuve de $C = 0$.

Nous pouvons maintenant prouver que les d_j sont positives. Si pour un j_0 , $d_{j_0} < 0$, puisqu'il existe un j_1 tel que $[Y_{j_0}, Y_{j_1}] \neq 0$ nous obtenons que $d_{j_0} + d_{j_1} = a_{i_0}$ pour un i_0 . Ce qui est impossible car $d_{j_1} \leq a_{i_0}$. Ceci montre que $d_j \geq 0$ pour tout j . Supposons que pour un j_0 , $d_{j_0} = 0$. Dans ce cas $d_{j_1} = a_{i_0}$ pour un j_1 et un i_0 , ce qui montre que nous sommes dans le cas d'égalité dans les inégalités $(\text{tr } f)d_{j_1} \leq c \leq (\text{tr } f)a_{i_0}$. Alors il est facile de voir que nous avons $\Omega_{X_{i_0}} = 0$ où pour tout $X \in \mathfrak{c}$ l'opérateur $\Omega_X : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}$ est défini de la manière suivante

$$Q_0(\Omega_X(Y), Y') = Q_0(X, [Y, Y']) \quad \text{pour tous } Y, Y' \in \mathfrak{m}$$

ce qui implique $X_{i_0} \in [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]^\perp \cap \mathfrak{c}$ (voir le chapitre 4 de [KH]). Mais nous savons comment réduire l'étude du cas général au cas où $\mathfrak{c} = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ comme nous avons expliqué dans [F1]. En effet, il suffit de modifier la norme de H et éventuellement les valeurs propres de D_{H_0} juste en multipliant celles-ci par des constantes convenables, ce qui laisse inchangé $d_{j_0} = 0$, d'où le résultat recherché.

Maintenant supposons que $\mathfrak{c}_1 = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ et \mathfrak{c}_2 le supplémentaire orthogonal de \mathfrak{c}_1 dans \mathfrak{c} . Il est clair que f préserve \mathfrak{c}_1 . Alors nous pouvons donner une preuve du fait que f préserve aussi \mathfrak{c}_2 , ce qui a été prouvé dans [KH]. Ceci se fait exactement de la même manière que la preuve de $C = 0$, i.e. il suffit d'appliquer la formule de ric_{Q_0} pour les trois cas différents. Nous évitons d'écrire les détails. La matrice A dans des bases orthonormées de \mathfrak{c}_1 et \mathfrak{c}_2 s'écrit donc de la manière suivante

$$A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$$

maintenant nous pouvons prouver également que la partie symétrique de A'' est un multiple de l'identité (comme c'est prouvé aussi dans [KH]). Si $\{Z_j\}$ est une base orthonormée de \mathfrak{c}_2 pour laquelle la partie symétrique de A'' est diagonale, alors la formule de ric_{Q_0} implique facilement $c = Q_0(D_{H_0}Z_j, Z_j)$ d'où le résultat. Nous résumons tout cela en forme du théorème suivant

Théorème 2.1 *Soit $(\langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}, [\cdot, \cdot], Q_0)$ une algèbre de Lie non-unimodulaire résoluble d'Einstein avec \mathfrak{n} nilpotente de rang deux. Soient \mathfrak{m} le supplémentaire orthogonal de \mathfrak{c} (le centre de \mathfrak{n}) dans \mathfrak{n} et \mathfrak{c}_2 le supplémentaire orthogonal de $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ dans \mathfrak{c} . Alors ad_{H_0} laisse invariants \mathfrak{m} et \mathfrak{c}_2 . La partie symétrique de $\text{ad}_{H_0}|_{\mathfrak{c}_2}$ est un multiple de l'identité. Si nous admettons que D_{H_0} est une dérivation de \mathfrak{s} , alors elle est définie positive sur (\mathfrak{n}, Q_0) .*

3 Problème de décomposabilité

Dans cette partie nous considérons une algèbre de Lie non-unimodulaire résoluble d'Einstein $(\mathfrak{s}, [\cdot, \cdot], Q_0)$ avec $\dim \mathfrak{a} = 1$ et supposons que $\mathfrak{n} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ est décomposable orthogonalement en somme directe de deux sous-algèbres $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$ avec $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2] = \{0\}$. Nous examinons le problème de savoir si chaque composante $(\langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}_i, [\cdot, \cdot]_i, Q_0)$ est d'Einstein où $[\cdot, \cdot]_i$ est obtenu à partir de $[\cdot, \cdot]$ en modifiant éventuellement ad_{H_0} sur \mathfrak{n}_i . Nous prouvons que D_{H_0} préserve les \mathfrak{n}_i et répondons donc affirmativement au problème.

Tout d'abord nous pouvons supposer sans perdre de généralité que ad_{H_0} est une dérivation symétrique de \mathfrak{s} . Ceci est possible grâce au théorème 4.10 de [H]. Soit $\{e_i\}$ une base orthonormée de \mathfrak{s} formée par $\{H\}$ et des bases orthonormées de \mathfrak{n}_1 et \mathfrak{n}_2 (comme avant $H = H_0/|H_0|$). Supposons que $X \in \mathfrak{n}_1$ et $Y \in \mathfrak{n}_2$ sont deux vecteurs quelconques. Nous appliquons une nouvelle fois la formule de $\text{ric}_{Q_0}(X, Y)$. Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} Q_0(\text{ad}_{H_0}X, Y) &= -1/2 \sum_i Q_0([X, e_i], [Y, e_i]) \\ &\quad + 1/4 \sum_{i,j} Q_0(X, [e_i, e_j]) \cdot Q_0(Y, [e_i, e_j]) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$Q_0(\text{ad}_{H_0} X, Y) = -1/2 Q_0([H, X], [H, Y]) + 1/2 \sum_i Q_0([H, e_i], X) \cdot Q_0([H, e_i], Y).$$

Posons $[H, X] = \sum_i \alpha_i e_i$ et $[H, Y] = \sum_j \beta_j e_j$. Nous avons alors

$$Q_0([H, X], [H, Y]) = \sum_k \alpha_k \beta_k.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} & \sum_k Q_0([H, e_k], X) \cdot Q_0([H, e_k], Y) \\ &= \sum_k Q_0(e_k, [H, X]) \cdot Q_0(e_k, [H, Y]) \\ &= \sum_k \alpha_k \beta_k \end{aligned}$$

et nous obtenons $Q_0(\text{ad}_{H_0} X, Y) = 0$. Ceci montre que $\text{ad}_{H_0}(\mathfrak{n}_i) \subset \mathfrak{n}_i$ pour $i = 1, 2$. Le lemme 1.4(3) de [W] montre que dans ce cas en modifiant ad_{H_0} sur chaque \mathfrak{n}_i , l'espace $(\langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}_i, [,]_i, Q_0)$ devient d'Einstein où $[,]_i$ est le crochet de Lie modifié. Rappelons ce lemme

Lemme 3.1 *Soit $(\langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}, Q)$ une algèbre de Lie résoluble métrique. Si ad_{H_Q} est symétrique, alors pour tout vecteur $X \in \mathfrak{s}$*

$$\text{ric}_{\mathfrak{s}}(X, X) = \text{ric}_{\mathfrak{n}}(X, X) - Q(\text{ad}_{H_Q} X, X).$$

Grâce à ce lemme, sachant que la courbure de Ricci $\text{ric}_{\mathfrak{n}}$ s'écrit comme la somme directe des $\text{ric}_{\mathfrak{n}_i}$, il suffit de poser

$$[H_0, \cdot]_i := \sqrt{\frac{\text{tr}_{\mathfrak{n}} \text{ad}_{H_0}}{\text{tr}_{\mathfrak{n}_i} \text{ad}_{H_0}}} \cdot \text{ad}_{H_0}|_{\mathfrak{n}_i}$$

ce qui est possible car toutes les valeurs propres de ad_{H_0} sont positives. Nous avons donc terminé la preuve du théorème suivant

Théorème 3.2 *Soit $(\langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}, [,], Q_0)$ une algèbre de Lie non-unimodulaire résoluble d'Einstein. Supposons que \mathfrak{n} se décompose orthogonalement en somme directe de deux sous-algèbres \mathfrak{n}_1 et \mathfrak{n}_2 avec $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2] = \{0\}$. Alors D_{H_0} préserve les \mathfrak{n}_i . En particulier, les espaces $(\langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}_i, [,]_i, Q_0)$ sont d'Einstein où $[,]_i$ sont obtenus à partir de $[,]$ en modifiant ad_{H_0} sur chaque \mathfrak{n}_i .*

4 Type de valeur propre ($1 < 2; d_1, d_2$)

Nous considérons ici le type de valeur propre ($1 < 2; d_1, d_2$) pour $\mathfrak{s} = \langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}$. Dans la partie (E) 5.3 de [H], il y a déjà un exemple d'une telle \mathfrak{s} de type en question qui n'admet pas de métrique d'Einstein. Notre résultat fournit une condition d'indécomposabilité lorsque d_1 et d_2 sont premiers entre eux. En effet, nous allons montrer que si $(\mathfrak{s}, [,])_{\mathfrak{s}}$ admet une métrique d'Einstein Q_0 , alors $\mathfrak{n} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}]$ est indécomposable. Rappelons qu'une algèbre de Lie $(\mathfrak{n}, [,])_{\mathfrak{n}}$ est dite décomposable s'il existe deux sous-algèbres non triviales \mathfrak{n}_1 et \mathfrak{n}_2 telles que $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$ et $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2] = \{0\}$.

Maintenant nous commençons à prouver le

Théorème 4.1 Soit $(\mathfrak{s} = \langle H \rangle \oplus \mathfrak{n}, [\cdot, \cdot])$ une algèbre de Lie résoluble non-unimodulaire de type de valeur propre $(1 < 2; d_1, d_2)$ où d_1 et d_2 sont premiers entre eux. Si \mathfrak{s} admet une métrique d'Einstein Q_0 , alors \mathfrak{n} est indécomposable.

Démonstration. Supposons que $(\mathfrak{s}, [\cdot, \cdot])$ est munie d'une métrique d'Einstein Q_0 . Tout d'abord, nous remarquons que le type de valeur propre est un invariant d'isométrie, i.e. deux solvariétés d'Einstein standards isométriques ont même type de valeur propre. Grâce au théorème 4.10 de [H] que nous avons rapidement expliqué au début de la note, nous sommes sûrs que les deux espaces $(\mathfrak{s}, [\cdot, \cdot], Q_0)$ et $(\mathfrak{s}, [\cdot, \cdot]^+, Q_0)$ sont isométriques, où $[\cdot, \cdot]^+ = [\cdot, \cdot]$ sur \mathfrak{n} et $[H_0, \cdot]^+ = D_{H_0}$. Par conséquent, ils ont même type de valeur propre. Ceci nous permet donc de supposer sans perdre de généralité que ad_{H_0} est une dérivation symétrique de \mathfrak{s} .

Nous écrivons maintenant $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus^\perp \mathfrak{n}_2$ où $\dim \mathfrak{n}_i = d_i$ et $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_2] = \{0\}$, $0 \neq [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1] \subset \mathfrak{n}_2$ ce qui est possible car nous avons

$$\text{ad}_{H_0}|_{\mathfrak{n}_i} = i\mu \text{Id}$$

avec $i = 1, 2$ pour une constante μ . Notons que ceci entraîne que $(\mathfrak{n}, [\cdot, \cdot])$ est nilpotente de rang deux. Nous montrons qu'en fait $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1] = \mathfrak{n}_2$. Si ceci n'est pas le cas, alors $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_1 \oplus [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1]) \oplus^\perp \mathfrak{n}_0$ où $0 \neq \mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}_2$ est abélien. En appliquant le lemme 3.1 pour $X \in \mathfrak{n}_0$ nous obtenons $c = 2\mu$. D'autre part l'égalité $c = \text{tr } D_{H_0}^2 / \text{tr } \text{ad}_{H_0}$ donne $c = \mu \cdot (d_1 + 4d_2) / (d_1 + 2d_2)$ ce qui contredit l'égalité précédente.

Supposons maintenant que \mathfrak{n} est décomposable. Nous pouvons écrire dans ce cas

$$\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}' \oplus \mathfrak{n}'', \mathfrak{n}_2 = [\mathfrak{n}', \mathfrak{n}'] \oplus [\mathfrak{n}'', \mathfrak{n}'']$$

où $[\mathfrak{n}', \mathfrak{n}'] = \{0\}$ et $\dim \mathfrak{n}' = d' > 0$, $\dim \mathfrak{n}'' = d'' > 0$ ($d' + d'' = d_1$) et $\dim[\mathfrak{n}', \mathfrak{n}'] = \ell' > 0$, $\dim[\mathfrak{n}'', \mathfrak{n}''] = \ell'' \geq 0$ ($\ell' + \ell'' = d_2$). Soit $A : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}$ définie par $A(H_0) = 0$, $A|_{\mathfrak{n}'} = \alpha_1 \text{Id}$, $A|_{\mathfrak{n}''} = \alpha_2 \text{Id}$, $A|_{[\mathfrak{n}', \mathfrak{n}']} = 2\alpha_1 \text{Id}$ et si $\ell'' > 0$, $A|_{[\mathfrak{n}'', \mathfrak{n}'']} = 2\alpha_2 \text{Id}$. Il est clair que A est une dérivation de \mathfrak{s} . Si $\ell'' = 0$, la version forte du lemme 1.1 (lemme 4.13 de [H]) nous donne

$$d'(c - \mu)\alpha_1 + d''(c - \mu)\alpha_2 + 2d_2(c - 2\mu)\alpha_1 = 0$$

et puisque α_1 et α_2 sont quelconques, nous obtenons $c - \mu = c - 2\mu = 0$ une contradiction. Si $\ell'' > 0$, alors le même argument implique

$$d'(c - \mu)\alpha_1 + d''(c - \mu)\alpha_2 + 2\ell'(c - 2\mu)\alpha_1 + 2\ell''(c - 2\mu)\alpha_2 = 0$$

et nous obtenons $d'/d'' = \ell'/\ell''$ ou bien $d'/(d_1 - d') = \ell'/(d_2 - \ell')$ et donc $d'd_2 = d_1\ell'$. Maintenant d_2 divise $d_1\ell'$ et puisque d_1 et d_2 sont premiers entre eux, d_2 divise ℓ' , impossible car $d_2 > \ell'$. \square

Il est facile de voir que l'existence d'une métrique d'Einstein Q_0 impose la condition $d_2 \leq d_1(d_1 - 1)/2$. De même si d_1 est impaire, alors d_2 ne peut pas être égal à 1 ou 2 ni égal à $d_1(d_1 - 1)/2 - 1$ ou $d_1(d_1 - 1)/2 - 2$ ([GK]). D'autres obstructions ne sont pas connues à ce

sujet. Par contre, pour les cas possibles, il y a des exemples, comme le cas $d_2 = 2r$ et $d_1 = kd_2$, pour tous r, k .

Remerciements. Je remercie le Centre International Abdus Salam de Physique Théorique et Mathématiques pour son soutien.

References

- [BB] Bérard Bergery L., *Sur la courbure des métriques riemanniennes invariantes des groupes de Lie et des espaces homogènes*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. (4) 11, 543-576 (1978).
- [B] Besse A., *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1987).
- [Bou] Bourbaki N., *Elements of Mathematics : Lie Groups and Lie Algebras*, Berlin Heidelberg New York, Springer (1989).
- [DM] Dotti Miatello I. *Ricci curvature of left-invariant metrics on solvable unimodular Lie groups*, Math. Z. 180, 257-263 (1982).
- [F1] Fanaï H.-R., *Espaces homogènes d'Einstein non-compacts*, Geom. Dedicata 80, 187-200 (2000).
- [F2] Fanaï H.-R., *Variétés homogènes d'Einstein de courbure scalaire négative : Construction à l'aide de certains modules de Clifford*, ICTP Preprint IC/2000/48, soumis à manuscripta mathematica.
- [GK] Gordon C. S. et Kerr M. M., *New homogeneous Einstein metrics of negative Ricci curvature*, Preprint.
- [H] Heber J., *Noncompact homogeneous Einstein spaces*, Invent. Math. 133, 279-352 (1998).
- [KH] Kass-Hengesch D., *Exemples de variétés homogènes d'Einstein à courbure scalaire négative*, Thèse de Doctorat, Université Henri Poincaré-Nancy I, France (1996).
- [SW] Sagle A. et Walde R., *Introduction to Lie groups and Lie algebras*, New York London, Academic Press (1973).
- [W] Wolter T., *Einstein metrics on solvable groups*, Math. Z. 206, 457-471 (1991).