

Е.Б.Левичев, П.А.Пиминов

ВЛИЯНИЕ КРАЕВОГО ПОЛЯ
КВАДРУПОЛЬНОЙ ЛИНЗЫ НА
НЕЛИНЕЙНЫЙ СДВИГ БЕТАТРОННОЙ
ЧАСТОТЫ
ИЯФ 2000-14

НОВОСИБИРСК
1999

**Влияние краевого поля квадрупольной линзы
на нелинейный сдвиг бетатронной частоты**

Е.Б.Левичев, П.А.Пимин

Институт ядерной физики им. Г.И.Будкера
630090, Новосибирск, Россия

Аннотация

Получены аналитические выражения зависимости частоты бетатронных колебаний от амплитуды для краевого поля квадрупольной линзы. Величина эффекта сравнивается с другими источниками нелинейности: секступольными линзами, компенсирующими хроматизм, октупольными ошибками магнитного поля и кинематическими слагаемыми для e^+e^- коллайдера *ВЭПП-4М*.

**Analytic estimation of the nonlinear tune shift
due to the quadrupole magnet fringe field**

E.B.Levichev, P.A.Piminov

Budker Institute of Nuclear Physics
630090, Novosibirsk, Russia

Abstract

Analytic expressions for the amplitude-dependent tune shift driven by the quadrupole magnet fringe field have been obtained. The magnitude of the effect is compared with other sources of non-linearity such as chromatic sextupoles, octupole errors of the main quadrupole magnetic field and kinematic terms. For the numerical example, the lattice of the e^+e^- collider *VEPP-4M* was applied.

1. Введение

Для циклического ускорителя основными источниками зависимости частоты бетатронных колебаний от амплитуды являются главные нелинейные компоненты ведущего магнитного поля (секступольная и октупольная). Их влияние на пучок исследовалось многими авторами как с помощью численного моделирования, так и аналитически. Выражения, описывающие нелинейный сдвиг бетатронной частоты для такого рода возмущений хорошо известны.

Однако, существуют и другие источники зависимости частоты колебаний от амплитуды, которые могут существенно влиять на нелинейную динамику пучка. Так, например, в [1] нелинейность краевого поля исследовалась для кольца низкой энергии (*LER*) комплекса *PEP-II*, и было показано, что преобладающий вклад (большой, чем из-за регулярных хроматических секступольных линз) вызван краевым полем квадрупольных магнитов. Кинематические эффекты и краевое поле поворотных магнитов существенного влияния не оказывают. Для *B*-фабрики *KEK* [2] указывается, что основное ограничение динамической апертуры вызывается кинематическими эффектами места встречи и краевым полем квадрупольных линз, расположенных вблизи места встречи.

Подобные исследования ведутся, в основном, методами численного моделирования, когда нелинейное преобразование координат частицы, движущейся через краевое поле линзы задается, например, операторами Ли [3] или с помощью матричного формализма второго порядка [4].

Ниже делается попытка получить простые аналитические выражения для вклада краевого поля квадрупольных линз в нелинейный сдвиг частоты бетатронных колебаний. Для сравнения приводятся, также, формулы для кинематического возмущения и октупольной нелинейной компоненты магнитного поля, которая для оценок рассматривается как погрешность (малая) идеального поля внутри квадрупольной линзы. Вклад

различного рода возмущений сравнивается на примере электрон-позитронного накопителя ВЭПП-4М.

2. Гамильтониан

Мы будем рассматривать квадрупольную линзу, у которой идеальное квадрупольное поле с учетом краевого спада (см., например, [5]) возмущено октупольной компонентой. Такое возмущение всегда имеется в поле реальной линзы и было бы интересно сравнить его вклад с влиянием краев.

В рассматриваемом случае поперечные компоненты магнитного поля записываются как

$$\begin{aligned} B_z &= B_1(s)x + \frac{1}{6}B_3(s)(x^3 - 3xz^2) - \frac{1}{12}B_1''(s)(x^3 + 3xz^2) + O(5), \\ B_x &= B_1(s)z + \frac{1}{6}B_3(s)(3x^2z - z^3) - \frac{1}{12}B_1''(s)(z^3 + 3x^2z) + O(5), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $B_1 = (\frac{\partial B}{\partial x})|_{x=z=0}$ - градиент поля, $B_3 = (\frac{\partial^3 B}{\partial x^3})|_{x=z=0}$ - октупольное возмущение, а $B_1'' = (\frac{\partial^2 B}{\partial x^2})|_{x=z=0}$ характеризует вклад краевого поля. Из-за того, что поле октупольного возмущения и краевая нелинейность описываются одним полиномом (но различаются знаками), последнюю иногда называют "псевдооктупольной".

Гамильтониан поперечного движения релятивистского электрона в магнитном поле (2.1) для $\frac{\Delta p}{p_0} = 0$ имеет вид [6]:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left((p_x^2 + p_z^2) + \frac{1}{2}k_1(s)(x^2 - z^2) \right) - \text{невозмущенная линейная часть,} \\ &+ \frac{1}{8}(p_x^2 + p_z^2)^2 - \text{кинематическая часть,} \\ &- \frac{1}{48}k_1''(s)(x^4 + 6x^2z^2 - z^4) \\ &- \frac{1}{2}k_1'(s)x^2zp_z - \text{влияние краевого поля,} \\ &+ \frac{1}{24}k_3(s)(x^4 - 6x^2z^2 + z^4) \right) - \text{октупольная составляющая,} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $k_1(s) = \frac{B_1(s)}{B\rho}$ и $k_3(s) = \frac{B_3(s)}{B\rho}$. Здесь считается, что $k_1 > 0$ для квадрупольной линзы, фокусирующей в горизонтальном направлении.

Хотя основная цель данной работы — исследование нелинейности краевого поля, для сравнения и оценок будут, также, приведены выражения для кинематического слагаемого и для регулярной октупольной составляющей магнитного поля.

Для нахождения зависимости частоты бетатронных колебаний от амплитуды в первом порядке малости перейдем в (2.2) стандартным образом к переменным "действие-угол" [7] при помощи производящей функции

$$F(x, z, \phi_x, \phi_z, s) = -\frac{z^2}{2\beta_z(s)} \left[\tan \phi_z - \frac{\beta'_z(s)}{2} \right] - \frac{x^2}{2\beta_x(s)} \left[\tan \phi_x - \frac{\beta'_x(s)}{2} \right], \quad (2.3)$$

которая задает следующую зависимость старых переменных от новых:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2J_x \beta_x(s)} \cos \phi_x, & p_x &= \sqrt{\frac{2J_x}{\beta_x(s)}} \left(\cos \phi_x + \alpha_x(s) \sin \phi_x \right), \\ z &= \sqrt{2J_z \beta_z(s)} \cos \phi_z, & p_z &= \sqrt{\frac{2J_z}{\beta_z(s)}} \left(\cos \phi_z + \alpha_z(s) \sin \phi_z \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где α и β – параметры Гвисса.

Производя усреднение получившегося гамильтониана по циклическим переменным, $\langle H(s) \rangle_{\phi_x, \phi_z}$, и вычисляя частоту колебаний системы согласно

$$\nu_{x,z} = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\partial}{\partial J_{x,z}} \langle H(s) \rangle_{\phi_x, \phi_z} ds, \quad (2.5)$$

получаем следующие выражения для зависимости частоты колебаний от амплитуды в первом порядке по возмущению:

$$\nu_x = C_{xx} J_x + C_{xz} J_z, \quad \nu_z = C_{xz} J_x + C_{zz} J_z, \quad (2.6)$$

где коэффициенты включают в себя вклад кинематической составляющей, краевого поля и регулярного октупольного возмущения: $C = C^k + C^e + C^o$. Коэффициенты каждого типа имеют следующий вид.

а) Кинематическое возмущение.

$$\begin{aligned} C_{xx}^k &= \frac{3}{16\pi} \oint \gamma_x^2(s) ds, & C_{zz}^k &= \frac{3}{16\pi} \oint \gamma_z^2(s) ds, \\ C_{xz}^k &= \frac{1}{8\pi} \oint \gamma_x(s) \gamma_z(s) ds, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\gamma = \frac{1+\alpha^2}{\beta}$.

б) Краевое поле.

$$C_{xx}^e = -\frac{1}{32\pi} \oint k_1''(s) \beta_x^2(s) ds, \quad C_{zz}^e = +\frac{1}{32\pi} \oint k_1''(s) \beta_z^2(s) ds,$$

$$C_{xz}^e = -\frac{1}{16\pi} \oint \beta_x(s) \left(k_1''(s) \beta_z(s) - 4k_1'(s) \alpha_z(s) \right) ds. \quad (2.8)$$

с) Регулярная октупольная компонента.

$$C_{xx}^o = \frac{1}{16\pi} \oint k_3(s) \beta_x^2(s) ds, \quad C_{zz}^o = \frac{1}{16\pi} \oint k_3(s) \beta_z^2(s) ds,$$

$$C_{xz}^o = \frac{1}{8\pi} \oint k_3(s) \beta_x(s) \beta_z(s) ds. \quad (2.9)$$

Для большей наглядности и возможности сравнения упростим получившиеся общие выражения (2.7)–(2.9) исходя из оценки величины возмущения каждого типа в циклическом ускорителе.

3. Кинематические эффекты

Основной вклад в интегральные выражения (2.7) дают участки ускорителя с предельно малым значением бетатронной функции, в качестве которых, прежде всего, уместно рассмотреть место встречи (см., например, [2]). Для прямолинейного промежутка длиной L , где поведение бета-функций зеркально симметрично относительно центра, $\gamma = \frac{1}{\beta_0}$, а β_0 – значение в центре промежутка, выражения (2.7) принимают простой вид, удобный для оценок:

$$C_{xx}^k = \frac{3}{16\pi} \frac{L}{\beta_{0x}^2}, \quad C_{xz}^k = \frac{1}{8\pi} \frac{L}{\beta_{0x} \beta_{0z}}, \quad C_{zz}^k = \frac{3}{16\pi} \frac{L}{\beta_{0z}^2}. \quad (3.1)$$

4. Октупольное возмущение

Если имеется магнитная структура ускорителя и, следовательно, задано поведение бетатронных функций вдоль траектории пучка, несложно вычислить коэффициенты (2.9) численно. Однако, для того, чтобы далее иметь возможность сравнить влияние октупольной ошибки поля линзы длиной L с влиянием краевых полей этой линзы, получим следующую простую оценку.

Предположим для коэффициента C_{xx}^o , что β_x слабо меняется внутри линзы ($k_1 \ll 1$), а само возмущение постоянно по длине $k_3(s) = k_3 = const$, тогда

$$C_{xx}^o \approx \frac{1}{16\pi} k_3 \beta_{0x}^2 L. \quad (4.1)$$

Понятие "качества" магнитного поля q обычно определяется как относительное отличие реального и идеального (для данного магнитного элемента) значения поля на некотором радиусе a (мы будем считать этот радиус вписанным радиусом апертуры квадрупольной линзы). Тогда из (2.1) для поля B_z в медианной плоскости ($z = 0$) следует:

$$q = \frac{k_3}{6k_1} \cdot a^2. \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в (4.1) можно получить оценку, которая понадобится нам дальше:

$$C_{xx}^o \approx \frac{3}{8\pi a^2} k_1 q \beta_{0x}^2 L. \quad (4.3)$$

5. Краевые эффекты

Нелинейный сдвиг частоты из-за краевого поля линз является основным предметом данной работы. Чтобы упростить выражения (2.8) нам необходимо ввести модель, описывающую поведение краевого поля квадрупольной линзы.

Рассматривались несколько вариантов модельного распределения краевого поля квадрупольной линзы: на основании формул *M. Bassetti* [8,9], модель "четырёх линий" *G. Lee-Whiting* [10] и описание спада магнитного поля двумя сопряженными парабололами [11]. Первые две модели достаточно точно описывают краевое поле и его производные по продольной координате.

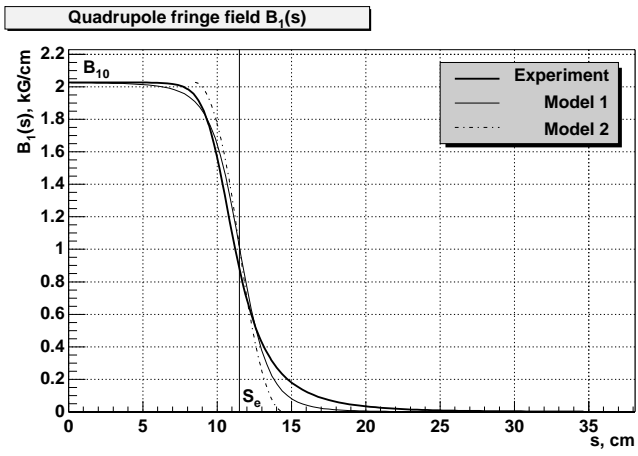
Например, для модели "четырёх линий" распределение градиента и его первых двух производных (необходимые для вычисления (2.8)) на краю линзы имеют вид:

$$B_1(s) = \frac{1}{2} B_{10} \left(1 - \frac{3s}{2d} + \frac{1s^3}{2d^3} \right),$$

$$B_1'(s) = -\frac{3}{4} B_{10} \frac{1}{d} \left(1 - \frac{s^2}{d^2} \right)^2, \quad B_1''(s) = \frac{15}{4} B_{10} \frac{s}{d^3} \left(1 - \frac{s^2}{d^2} \right)^2, \quad (5.1)$$

$$d = \sqrt{a^2 + s^2},$$

здесь a – вписанный радиус апертуры линзы, а B_{10} – градиент на оси линзы в центральном сечении. Приближение краевого поля с помощью (5.1) показано на рис. 5.1. К сожалению, использование (5.1) достаточно



A) - краевой спад градиента линзы.

