IC/99/126

United Nations Educational Scientific and Cultural Organization
and
International Atomic Energy Agency

THE ABDUS SALAM INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

SUR LES ALGÈBRES S-RÉGULIÈRES ET LA $S-$DÉCOMPOSABILITÉ DES OPÉRATEURS DE MULTIPLICATIONS

A. Daoui, H. Mahzouli
Faculté des Sciences de Rabat, Département de Mathematiques et Informatique,
BP 1014 Agdal, Rabat, Morocco

and

E.H. Zerouali[1]
Faculté des Sciences de Rabat, Département de Mathematiques et Informatique,
BP 1014 Agdal, Rabat, Morocco
and
The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

Abstract

Let A be a comutative Banach algebra and $\Delta(A)$ it's maximal ideal space. For given $S \subset \Delta(A)$, we establish necessary and sufficient conditions so that A becomes $S-$regular. We derive some characterisations of decomposable multiplication operators and a description of the Apostol algebra of A. This provides a class of algebras (including Douglas algebras) for which the Apostol algebra is regular.

MIRAMARE – TRIESTE

September 1999

[1]Regular Associate of the Abdus Salam ICTP. E-mail: zerouali@frs.ac.ma

1 Introduction

Soient X un espace de Banach et L(X) l'algèbre des opérateurs lineaires continus sur X, pour $T \in L$(X), on notera $\sigma(T)$ son spectre et R_T sa fonction résolvante définie par $R_T(\lambda) = (\lambda - T)^{-1}$ pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. Pour tout $x \in X$ on appelle le résolvant local de T en x, noté $\rho(x;T)$, l'ouvert maximal sur lequel l'application $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T) \to R_T(\lambda)x \in X$ admet des extensions analytiques; son complémentaire noté $\sigma(x;T)$ est le spectre local de T en x.
Soit S une partie d'un espace topologique (Ω, τ), on considère la topologie associée à S donnée par:

$$\tau^S = \{O \in \tau \text{ tel que } \; S \subseteq O \text{ ou bien } O \cap S = \emptyset\}.$$

On dira que T satisfait la condition (δ) si pour tout recouvrement ouvert $(O_i)_{i=1...n} \in \tau$ de $\sigma(T)$, il existe $(X_i)_{i=1...n}$ une famille de sous espaces invariants par T satisfaisant:

$$(1) \left\{ \begin{array}{c} X = X_1 + ... + X_n \\ \sigma(x,T) \subseteq O_i \;\text{ pour tout }\; x \in X_i \text{ et } \; i = 1...n. \end{array} \right.$$

On dira que T est décomposable si les sous espace X_i peuvent etre choisis fermés. Si (1) est satisfaite avec $(O_i)_{i=1...n} \in \tau^S$ et $(X_i)_{i=1...n}$ fermés, on dit que T est $S-$décomposable. Dans le cas où S est l'ensemble vide ou un ensemble totalement discontinu, tout opérateur $S-$décomposable et décomposable. Lorsque S est le spectre résiduel analytique ($S = S_T$), cette notion coinside avec la définition de la S-décomposablité au sens [11]. On étudie dans ce travail la notion de la S-décomposabilité les operateurs de multiplications sur les algèbres de Banach commutatives semi simples; on met en évidence le lien avec la régularité de l'algèbre (dans un sens à definir) retrouvant ainsi les résultats de [4] et de [5]. Ceci nous permet de donner une autre approche de la solution donnée par [9](voir aussi [9]) à un problème de M.Neumann dans le cas des algèbres de Douglas.

2 Les algèbres S-régulières

On considère dans la suite A une algèbre de Banach commutative semi simple et $\Delta(A)$ son ensemble de caractères. L'ensemble $\Delta(A)$ est une partie de la boule unité du dual A^* de A. La topologie faible * induit sur $\Delta(A)$ une topologie separée dite de Gelfand qu'on noreta τ_g, c'est la topologie la moins fine rendant continues les transformées de Gelfand des éléments de A, où la transformée de Gelfand $\hat{a}$ de $a \in A$ est l'application continue sur $\Delta(A)$ définie pour $\phi \in \Delta(A)$ par $\hat{a}(\phi) = \phi(a)$. On considère pour $E \subseteq \Delta(A)$ l'idéal fermé

$$k_A(E) = \{a \in A \text{ tel que } E \subseteq Ker(\hat{a})\}$$

et pour I une partie de A l'ensemble

$$h(I) = \{\phi \in \Delta(A) \;\text{ tel que } I \subseteq Ker\phi\}.$$

On dira que E est hk_A- fermé si $E = hk_A(E)$. Ceci permet de définir une topologie sur $\Delta(A)$ dite la hk_A- topologie (ou la topologie de Kuratowski) qui est moins fine que la topologie de Gelfand.

Rappelons qu'une algèbre A est dite régulière si pour toute partie fermée $S \subseteq \Delta(A)$ et $\phi \in \Delta(A) \setminus S$, il existe $a \in A$ tel que $\hat{a}(\phi) \neq 0$ et $S \subseteq Ker(\hat{a})$, on aura donc $S = hk_A(S)$ pour tout fermé S de $\Delta(A)$ et par suite les deux topologies précédement définies coincident.

On appelle multiplicateur de A tout opérateur borné $T : A \to A$ satisfaisant $T(ab) = aT(b)$ pour tout $a, b \in A$. On notera $M(A)$ l'ensemble des multiplicateurs de A, muni de la composition et de norme operateur $M(A)$ est une sous algèbre fermée de $L(A)$. Pour $a \in A$, l'opération de multiplication par a, notée M_a, est un multiplicateur et l'application $\Phi : a \in A \longmapsto \Phi(a) = M_a \in M(A)$ permet d'identifier A à un idéal fermé de $M(A)$. En particulier on aura $\Delta(M(A)) = \Delta(A) \cup h(A)$, lorsque A est une algèbre unitaire on a $M(A) = A$. Le lien entre la régularité de A est la décomposabilité des opérations de multiplication a fait l' objet de plusieurs travaux. On regroupe dans le théorème suivant l'essentiel des résultats obtenus dans ce sens.

Théorème 2.1 *Soit A une algèbre de Banach commutative semi simple. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
i) A est une algèbre régulière
ii) Pour tout $a \in A, M_a$ est décomposable
iii) Pour tout $a \in A, \hat{a}$ est hk_A-continue
iv) La topologie de Gelfand et la hk_A-topologie coincident .

Remarque Dans ([7], théorème 1.2) M .M Neumann montre qu'en fait pour $a \in A$ on a, $\hat{a}$ est hk_A-continue sur $\Delta(A)$ si et seulement si M_a est décomposable sur A.

Nous adaptons ce résultat à la S-décomposabilité sur A des opérateurs de multiplication. Soit S une partie de $\mathbb{C}$. On dira que $\hat{a}$ est hk_A^S-continue sur $\Delta(A)$ si pour tout $O \in \tau^S, \hat{a}^{-1}(O)$ est hk_A ouvert dans $\Delta(A)$. En reprenant les arguments de la preuve de théorème 1.2 de [7], on obtient le résultat suivant

Proposition 2.2 *Soient A une algèbre de Banach commutative semi simple, a dans A et S une partie de $\mathbb{C}$. Alors $\hat{a}$ est hk_A^S-continue si et seulement si M_a est $S-$décomposable.*

Définition 2.3 *Soit A une algèbre de Banach commutative et S une partie de $\Delta(A)$. On dira que A est S-régulière si pour tout $\phi \in \Delta(A) \setminus S$ et V un voisinage de ϕ il existe $a \in A$ tel que $\hat{a}(\phi) \neq 0$ et $Supp(\hat{a}) \subseteq V$*

Soit $S \subset \Delta(A)$ et supposons que A est $S-$régulière, on aura d'après la proposition 2.2, $\tau_g^S = \tau_{hk}^S$ ce qui implique que $\hat{a}$ est $hk_A^{\hat{a}(S)}-$continue pour tout $a \in A$ (car $S \subset \hat{a}^{-1}(a(S))$), d'où M_a est $\hat{a}(S)$-decomposable. En notant S_a le plus petit fermé S pour lequel M_a soit S-decomposable, dont l'existence est demontrée dans [6], on aura $\hat{a}^{-1}(S_a) \subset S$ et par suite $\cup_{a\in A}\hat{a}^{-1}(S_a) \subset S$. Reciproquement pour tout $a \in A$ on a, M_a est $\cup_{a\in A}\hat{a}(S)$-decomposable. On déduit le théorème

Théorème 2.4 *Sous les notations précédentes, posons $S_A = \cup_{a\in A}\hat{a}^{-1}(S_a)$, on a*
1. Si A est $S-$régulière, alors $S_A \subset S$ et M_a est $\hat{a}(S)$-decomposable pour tout $a \in A$.
2. A est S_A-régulière.

Remarque . Dans le thérème précédent on établit donc l'existence d'une plus petite partie S_A pour laquelle l'algebre A soit S_A-régulière.

Le lemme suivant qui est une version équivalente du corollaire 2.2 donnée dans [7] nous permet d 'envisager d'étendre les résultats obtenus.

Lemme 2.5 *Si A est une algèbre de Banach semi simple commutative et I un idéal fermé de A, alors pour tout $a \in I$ les assertions suivantes sont équivalentes .*
i) $\hat{a}$ est hk_I- continue
ii) $\hat{a}$ est hk_A- continue

Preuve: On a $\Delta(I)=\Delta(A)\setminus h(I)$, donc $\Delta(I)$ est un ouvert, l'implication directe s' obtient alors par restriction.
Réciproquement, suposons que $\hat{a}$ est hk_I- continue et soit O un ouvert de $\mathbb{C}$, considérons

$$\hat{a}^{-1}(O)_I=\{\phi\in\Delta(I)/\hat{a}(\phi)\in O\},$$

$$\hat{a}^{-1}(O)_A=\{\phi\in\Delta(A)/\hat{a}(\phi)\in O\}$$

$\hat{a}^{-1}(O)_I$ et ouvert dans $\Delta(I)$, donc il est ouvert dans $\Delta(A)$. Pour montrer que $\hat{a}^{-1}(O)_A$ est ouvert dans $\Delta(A)$ on distingue les deux cas suivants
Si $0\notin O$ alors $\hat{a}^{-1}(O)_A=\hat{a}^{-1}(O)_I$ est ouvert.
Si $0\in O$ on aura: $\hat{a}^{-1}(O)_A=\hat{a}^{-1}(O)_I\cup h(I)$. Soit $\varepsilon\geq 0$ tel que $D(0,\varepsilon)\subseteq O$, l'emsemble $V_\varepsilon=\{\phi\in\Delta(A)/|\phi(a)|<\varepsilon\}$ est un ouvert de $\Delta(A)$ (complémentaire d'un compact) contenant $h(I)$ et $V_\varepsilon\subseteq\hat{a}^{-1}(O)_A$ qui est en conséquent ouvert.

Proposition 2.6 *Soient I un idéal fermé de A et $a\in I$. Alors*
1) Pour tout $b\in I, Supp(\hat{b})\subseteq\hat{M_a}^{-1}(\sigma(b,M_a))$
2) Si M_a est décomposable (sur A)alors $\hat{M}_a|_{\Delta(I)}$ est hk_I-continue.

Preuve :
1) soit $\lambda\notin\sigma(b,M_a), O$ un voisinage de λ et $F:O\to I$ tels que

$$(M_a-\mu)F(\mu)=b\quad(\mu\in O).$$

Donc $(\hat{a}(\phi)-\mu)F\hat{(\mu)}(\phi)=\hat{b}(\phi)$ pour tout $\phi\in\Delta(I)$ et par suite on a
$\hat{M_a}^{-1}(\rho(b,M_a))\subseteq Ker(\hat{b})$, ce qui donne $Supp(\hat{b})\subseteq\hat{M_a}^{-1}(\sigma(b,M_a))$.
2) Supposons que M_a est décomposable et qu'il existe F fermé de $\mathbb{C}$ tel que $E=\hat{M_a}^{-1}(F)$ ne soit pas hk_I-fermé. Soit $\phi\in hk_I(E)\setminus E$ et $\lambda=\hat{M}_a(\phi)\notin F$. En considérant le recouvrement $\mathbb{C}\setminus\{\lambda\}$ et $\mathbb{C}\setminus F$ de $\mathbb{C}$. On peut trouver I_1,I_2 deux sous espaces invariants par M_a tels que $I=I_1+I_2$ avec $\sigma(M_a|I_1)\subseteq\mathbb{C}\setminus\{\lambda\}$ et $\sigma(M_a|I_1)\subseteq\mathbb{C}\setminus F$, en particulier pour tout $b_1\in I_1$ on a $\sigma(b_1,M_a)\subseteq\sigma(M_a|I_1)\subseteq\mathbb{C}\setminus\{\lambda\}$; donc $\lambda\notin\sigma(b_1,M_a)$ et $\phi(b_1)=0$ d'après 1. D'autre part pour $b_2\in I_2,\sigma(b_1,M_a)\cap F=\emptyset$ donc $\phi(b_2)=0(\phi\in hk_I(E))$. Ce qui implique que $\phi(b)=0$ pour tout $b\in I$ (impossible) .

Le théorème suivant donne une nouvelle caractérisation des algèbres S-régulières.

Théorème 2.7 *: Soient A une algèbre de Banach commutative semi simple et $S\subseteq\Delta(A)$ hk_A-fermé. Les assertions suivantes sont équivalentes.*
1) A est une algèbre S-régulière.
2) Pour tout idéal I tel que $S\subseteq h(I)$, I est une algèbre régulière .
3) τ_S et τ_S hk_A coincident.

Preuve: Pour l'implication directe, soient E fermé de $\Delta(I)$ et $\phi\in\Delta(I)\setminus E$, il existe $a\in A$ tel que $\phi(a)\neq 0$ et $Supp(\hat{a})\subseteq\Delta(I)\setminus E$. Comme $\phi\in\Delta(I)$, il existe $b\in I$ tel que $\phi(b)\neq 0$. On aura alors $\phi(ab)\neq 0$, $ab\in I$ et $Supp(\hat{ab})\subseteq\Delta(I)\setminus E$.
Réciproquement, soit $\phi\in\Delta(A)\setminus S$, l'algèbre $k(S)$ étant régulière, on peut trouver pour un voisinage arbitraire V de ϕ dans $\Delta(A)\setminus S$ et $a\in k(S)$ tel que $\phi(a)\neq 0$, donc $Supp(\hat{a})\subseteq V$.

Exemple 2.8 *Notons $D(0,r):=\{z\in\mathbb{C}/|z|<r\}$ et soit*

$$A=\{f\in C(\overline{D(0,2)})\quad holomorphes\ sur\quad D(0,1)\}$$

Munie de la multiplication ponctuelle et de la norme

$$\|f\|_\infty = sup\{|f(z)| : z \in \overline{D(0,2)}\}$$

A est une algèbre de Banach dont l'ensemble des caractères s'identifie à $\overline{D(0,2)}$. Un calcul direct montre que A est une algèbre $\overline{D(0,1)}$-régulière. De plus, en utilisant le principe des zéros isolés pour les fonctions holomorphes, pour tout sous ensemble fermé S de $D(0,1)$ ayant un point d' accumulation dans $D(0,1)$, on a $h(k_A(S)) = \overline{D(0,1)}$; donc l'assertion 2) du théorème est satisfaite alors que A n'est pas S-régulière . Il n'existe pas d'ensemble minimal pour 2) dans le théorème précédent. On supposera dans la suite que S est hk_A-fermé.

On retrouve l'ensemble S_A pour une algèbre de Banach A d'une autre manière.

Théorème 2.9 *Soient $(S_i)_{i\in J}$ une famille d'ensembles dans $\Delta(A)$ telle que A soit S_i-régulière pour tout $i \in J$. Alors A est $\cap_{i\in J}S_i$-régulière. En particulier il existe une plus petite partie S_A telle que A est S_A-régulière.*

Preuve: Soit $\phi \notin \cap_{i\in J}S_i$ et V un voisinage de ϕ tel que $V \cap (\cap_{i\in J}S_i) = \emptyset$. Soit $O = V \cap C \setminus S_i$, $O \cap S_i = \emptyset$, il existe $a \in A$ tel que $\hat{a}(\phi) \neq 0$ et $supp\hat{a} \subseteq O \subseteq V$. Donc A est une $\cap_{i\in J}S_i$-régulière. En considérant la famille

$$F = \{S \quad hk_A - \text{fermé}/\ A \text{ soit } S - \text{régulière}\}$$

on obtient $S_A = \cap_{S\in F}S$.

3 Les algèbres O-analytiques :

Définition 3.1 *Soient A une algèbre de Banach semi simple commutative et O un ouvert de $\Delta(A)$. A est dite O-analytique si pour tout $a \in A$ et pour tout V ouvert de O on a : $\hat{a} \equiv cte$ sur V entraine $\hat{a} \equiv cte$ sur O.*

Proposition 3.2 *Soit A une algèbre O-analytique alors il existe un plus grand ouvert O_A (au sens de l'inclusion) tel que A est O_A-analytique .*

Preuve: il suffit de prendre l'union de tous les ouverts O tels que A est O-analytique. On notera O_A cette réunion.

Proposition 3.3 *soit A une algèbre O-analytique et soit I un idéal fermé de A tel que $O \subseteq \Delta(I)$ alors I est O-analytique.*

Preuve: S'obtient par restriction.

On déduit alors

Théorème 3.4 *Soient A une algèbre de Banach commutative semi simple et O un ouvert de $\Delta(A)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes .*
i) A est O-analytique .
ii) Pour tout idéal fermé I tel que $O \subseteq \Delta(I)$, I est une algèbre O-analytique.

Exemple 3.5 *: L'algèbre donnée dans l'exemple précédent est $D(0,1)$-analytique d'après le principe des zéros isolés d'une fonction analytique et on a $O_A = D(0,1)$.*

On va s'intéresser dans la partie suivante aux liens qui existent entre les algèbres O analytiques et les algèbres S-régulières.

Proposition 3.6 *Soit $O \subset \Delta(A)$ et supposons que A est O-analytique alors $O \subset S_A$.*

preuve: Soit $\phi \in \Delta(A)$ et supposons que $\phi \in O \setminus S_A$, puisque A est S_A-régulière, il existe V un voisinage de ϕ dans $\Delta(A)$ et $a \in A$ tel que $\hat{a}(\phi) \neq 0$ et $supp(\hat{a}) \subset V$. En prenant V un voisinage strictement inclu dans O, on obtient une contradiction.
Sous des hypothèses supplementaires on a:

Proposition 3.7 *Soient A une algèbre O_A-analytique et $a \in A$. Considérons les assertions suivantes*
1. M_a est décomposable.
2. M_a possède la propriété (δ).
3. $\hat{a}_{|D}$ est constante sur tout ouvert connexe D de O_A
Alors $1 \Rightarrow 2. \Rightarrow 3.$
Si de plus $hk(O_A) = S_A$ on a $3 \Rightarrow 1$

Preuve: Soit D un ouvert connexe de O_A et supposons que $\hat{a}$ n'est pas constante sur D, considérons ϕ_1 , ϕ_2 dans D tels que $\hat{a}(\phi_1) \neq \hat{a}(\phi_2)$ et soit O_1, O_2 deux ouverts de $\mathbb{C}$ tels que $\mathbb{C} = O_1 \cup O_2$, $\hat{a}(\phi_i) \in O_i$, $\;i = 1, 2$ et tel que $\hat{a}(\phi_i) \notin O_1 \cap O_2 \;\; i = 1, 2$. Comme M_a admet la propriété (δ), pour tout $b \in A$ il existe b_1, b_2 dans A tel que $b = b_1 + b_2$ satisfaisant $\sigma(b_i, M_a) \subseteq O_i$ pour $i = 1, 2$, d'après [7] on a $\sigma(b_i, M_a) = \hat{a}(supp(\hat{b_i}))$ et on a $\hat{a}(\phi_1) \notin \hat{a}(supp(\hat{b_2})$ donc il existe un voisinage ouvert V_1 de ϕ_1 dans D tel que $\hat{b_2}_{|V_1} = 0$, ce qui implique que $\hat{b_2}_{|D} = 0$ de même pour b_1 alors $\hat{b}_{|D} = 0$ ce qu'est absurde.
2) Si $hk_A(O_A) = S_A$ alors pour tout $a \in A$ tel que $\hat{a}_{|D} = cte$ sur tout ouvert connexe de $O_A, \hat{a}$ est $hk-$continue sur $\Delta(A)$ donc d'après le théorème 2.1 M_a est décomposable.

4 Sur la sous algèbre d'Apostol et $Reg(A)$

Etant donnée une algèbre A, on note $Reg(A)$ la plus grande sous-algèbre régulière de A et $Dec(A)$ la sous algèbre d'Apostol des éléments a de A tel que M_a soit decomposable. En general on a $Reg(A) \subset Dec(A)$ [4], la question de savoir si on a égalité est toutefois toujours ouverte. Divers résultats partiels ont été obtenu, la réponse est positive dans certaines algèbres de convolution [4] ou dans des algèbres de Douglas sur le cercle unité , (sous algèbres uniformes de $L^\infty(,)$ contenant strictement $H^\infty(D)$) [9], [8]. Dans ce paragraphe on donne une approche nouvelle à la question.

Lemme 4.1 *Soient A une algèbre de Banach comutative, $(C_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts connexes disjoints deux à deux de parties de $\Delta(A)$, considérons la sous-algèbre de Banach*

$$B := \{a \in A \;\; \text{tel que } \hat{a}_{|C_i} \;\; \text{constante pour tout} \;\; i \in I\}$$

alors $\Delta(B) = \Delta(A) \setminus \cup_{i \in I} \overline{C_i}) \cup_{i \in I} \{\xi_i\}$ où $\xi_i \in C_i$.

Preuve: Remarquons
que le choix de $\xi_i \in C_i$ ne pose pas d'ambiguité, en effet si $\xi_1, \xi_2 \in C_i$ on aura $\xi_{1_{|B}} = \xi_{2_{|B}}$.

Soit $I := h(\cup_{i \in I} \overline{C_i})$ l'idéal férmé de A des éléments dont la transformée de Gelfand s'annule sur $\cup_{i \in I} \overline{C_i}$. Pour $\xi \in \Delta(B)$, on distingue deux cas:

- $\xi_{|I} \neq 0$, soit alors $b \in I$ tel que $\xi(b) \neq 0$, on prolonge alors ξ à A de façon classique $\xi(a) = \frac{\xi(ab)}{\xi(b)}$ et on aura $\xi \in \Delta(A)$, puique $\xi_{|I} \neq 0$ on a $\xi \in \setminus \cup_{i \in I} \overline{C_i}$.

- $\xi_{|I} = 0$ et soit $b \notin I$ tel que $\xi(b) \neq 0$, on peut trouver $i \in I$ tel que $\hat{b}_{|C_i} \neq 0$. Soit $\xi_i \in C_i$, on aura $\xi_i(b) = \xi(b) \neq 0$, comme $A = ker(\xi_i) + \mathbb{C}b$ on pose $\tilde{\xi}(a + \lambda b) = \lambda \xi_i(b)$ pour tout $a + \lambda b \in A$, ce qui permet d'identifier ξ et $\tilde{\xi} \in \Delta(A)$.

Lemme 4.2 *Sous les notations précédentes, supposons que $hk(O_A) = S_A$. Pour $k \in 1, 2$, soient $J_k \subset I$ et F_k deux fermés disjoints de $\Delta(A)$ tel que $\cup_{i \in J_k} \overline{C_i} \subset F_k$, $F \cap \cup_{i \in J_k} \overline{C_i} = \emptyset$, alors il existe $b \in B$ tel que $\hat{b}_{|F_1} \equiv 1$ et $\hat{b}_{|F_2} \equiv 0$*

Preuve: L'algèbre A étant $hk(O_A)$-régulière, les ensembles F_k, $k = 1, 2$ sont $hk-$fermés, ce qui donne $h(k(F_1) + k(F_2)) \subset k(F_1) \cap k(F_2) = F_1 \cap F_2 = \emptyset$, puisque $k(F_1) + k(F_2)$ est un idéal, on obtient $A = k(F_1) + k(F_2)$ e par suite il existe $b_k \in F_k$ tels que $b_1 + b_2 = 1$. Finalement b_1 répond au lemme.

Proposition 4.3 *soit A une algèbre O_A-analytique, si $hk(O_A) = S_A$ alors on a $Reg(A) = Dec(A)$*

Preuve: D'après la proposition 3.7 on a

$$Dec(A) = \{a \in A / \hat{a}_{|D} = cte \ \text{ sur tout ouvert connexe de } O_A\}$$

En écrivant $O_A = \cup_{i \in I} C_i$ où les ouverts C_i sont les composantes connexes de O_A, on obtient d'après le lemme 4.1 $\Delta(Dec(A)) = \Delta(A) \setminus \cup_{i \in I} (\overline{C_i}) \cup_{i \in I} \{\xi_i\}$, ce qui implique d'après le lemme 4.2 que $Dec(A)$ est une sous-algèbre régulière de A. Puisque $Reg(A)$ est maximal on a

$$Reg(A) = Dec(A) = \{a \in A / \hat{a}_{|D} = cte \text{ sur tout ouvert connexe de } O_A\}$$

Remarques

1. Dans cette proposition on construit une famille d' algèbres qui donne une réponse positive à la question de [4]. On voit aussi que les preuves données dans [9] et [8] reposent sur une certaine idée de partition de l'ensemble des caractères en sous ensembes analytiques.

2. La S-décomposabilité et la décomposabilité peuvent se confondre dans des cas où les propriété spectral de l'opérateurs sont invariantes par rotation. Si on prend les shifts sur des espaces de Beurling étudiés dans [2] on voit qu'ils sont décomposables si et seulement si, ils sont S-décomposables, où S sous-ensemble quelconque non trivial fermé du cerle unité.

Remerciements Le troisième auteur a été soutenu par le Centre Abdus Salam de Trieste ou une partie de ce travail a été réalisée. Il tient à remercier le Professeur C.E.Chidume pour ses encouragements. This work was done within the framework of the Associateship Scheme of the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

References

[1] I. Colojoara and C.Foias, Theory of Generalized Spectral Operators, Gordon and Breach, New York, 1968.

[2] H.Mahzouli and E.H.Zerouali, Classes de Shifts décomposables sur les espaces de Beurling. à paraitre (Archiv der Mathematik)

[3] R.Lange and S.W.Wang, New approaches in spectral decomposition, Contemporary mathematics Amer. Math. Soc. Providence Rhode Island (128) 1992.

[4] K.B.Laursen and M.Neumann, decomposable multipliers and applications to harmonic analysis, Studia Math 101 (1992). 193-214

[5] K.B.Laursen and M.Neumann, Local spectral properties of multipliers on Banach algebras, Arch.Math.Vol (1992) 368-375

[6] B.Nagy, A strong spectral residuum for every closed operators, Illinois J.Math 24(1980). 173-179

[7] M.M Neumann, Commutative Banach algebras and decomposable operators, Monatsh.Math 113(1992) 227-243

[8] O.Hatori. K.Izuchi, Apostol algebrasand decompositionin Douglas algebras, Michigan Math.Jounal 44 (1997) 435-449

[9] R.Mortini, Decomposable multiplication operators, Arch.Math.72 (1999) 64-67

[10] C.E.Ricart, General theory of Banach algebras, Princeton-Toronto-London. 1960

[11] F.H.Vasilescu, Analytic Functional Calculus and Spectral decompositions, Editura Academiei and D.Reidel Publishing Company,Bucuresti and Dordrecht,1982