Available at : http ://www.ictp.trieste.it/~pub_off
IC/99/122
EXT-2000-128
01/09/1999

United Nations Educational Scientific and Cultural Organization
and
International Atomic Energy Agency

THE ABDUS SALAM INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

CALCUL FONCTIONNEL DE WERMER ET SPECTRE LOCAL

O. El-Fallah[1]
Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences, Université Mohammed V, B.P 1014, Avenue Ibn Battouta Agdal, Rabat, Morocco

and

E.H. Zerouali[2]
Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences, Université Mohammed V, B.P 1014, Avenue Ibn Battouta Agdal, Rabat, Morocco
and
The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

MIRAMARE – TRIESTE

September 1999

[1] E-mail : elfallah@fsr.ac.ma
[2] Regular Associate of the Abdus Salam ICTP. E-mail : zerouali@fsr.ac.ma

1 Introduction

Soient X un espace de Banach et $\mathcal{L}(X)$ l'algèbre des opérateurs bornés sur X. Pour $T \in \mathcal{L}(X)$ on désigne par $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$ et $\rho(T)$ respectivement le spectre, le spectre ponctuel et le résolvant de T.

Soient $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on dit que λ est dans le résolvant local de T en x, noté $\rho(x,T)$, s'il existe un voisinage V de λ et une application analytique F de V à valeurs dans X vérifiant l'équation :

$$(\mu - T)F(\mu) = x \quad \text{pour tout } \mu \in V.$$

Le spectre local de T en x, noté $\sigma(x,T)$, est le complémentaire de $\rho(x,T)$ dans $\mathbb{C}$. On dit que T admet la propriété de l'extension unique (en abrégé S.V.E.P), si pour tout ouvert V de $\mathbb{C}$ l'unique fonction analytique F de V à valeurs dans X vérifiant l'équation

$$(\mu - T)F(\mu) = 0 \quad (\mu \in V)$$

est la fonction nulle. Dans ce cas l'application

$$\begin{array}{ccc} \rho(T) & \longrightarrow & X \\ \lambda & \longrightarrow & (\lambda - T)^{-1}x \end{array}$$

admet une extension analytique maximale unique définie sur $\rho(x,T)$. Il est facile d'établir, dans le cas où on a la S.V.E.P, que $\sigma(x,T)$ est non vide pour tout $x \in X$ non nul. Notons que si $\sigma_p(T)$ est d'intérieur vide, alors T admet la S.V.E.P. Pour plus de détails voir [5], [6], [7].

On notera par , le cercle unité, $C(,)$ l'espace des fonctions continues sur , et $\hat{f}(n)$ le nième coefficient de Fourier de f $(f \in C(,))$.

Dans la suite $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ désignera une suite de nombres réels satisfaisant :

$$\begin{cases} \omega(n) \geq 1 \ (n \in \mathbb{Z}) \\ \limsup\limits_{|n|\to\infty} \omega(n)^{\frac{1}{|n|}} = 1 \\ c_1\omega(n) \leq \omega(n+1) \leq c_2\omega(n) \ (c_1, c_2 > 0) \end{cases} \tag{1}$$

où $\limsup\limits_{|n|\to\infty} \omega(n)^{\frac{1}{|n|}} = Max\{\limsup\limits_{n\to+\infty} \omega(n)^{\frac{1}{n}}, \limsup\limits_{n\to+\infty} \omega(-n)^{\frac{1}{n}}\}$.

L'ensemble $A_\omega = \{f \in C(,) \ / \ \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|\omega(n) < +\infty\}$ muni de la norme $\|f\|_\omega := \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|\omega(n)$ est un espace de Banach. Il est à noter que A_ω est une algèbre de Banach si, et seulement si, $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un poids (i.e $\omega(n+m) \leq \omega(n)\omega(m) \quad (n, m \in \mathbb{Z})$).

Pour tout opérateur inversible T sur X on considère le poids $\omega_T(n) = \|T^n\|$ $(n \in \mathbb{Z})$. Le calcul fonctionnel de Wermer [2], [10] est l'application Φ_T défini par :

$$\begin{array}{cccc} \Phi_T : & A_{\omega_T} & \longrightarrow & \mathcal{L}(X) \\ & f & \longrightarrow & f(T) := \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)T^n. \end{array}$$

Notons que pour tout $x \in X$ et pour tout $f \in A_{\omega_x}$, où $\omega_x(n) = \text{Max } (1, \|T^n x\|) \quad (n \in \mathbb{Z})$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)T^n x$ est convergente. On définit alors le calcul fonctionnel de Wermer local $\Phi_{T,x}$ par :

$$\begin{array}{cccc} \Phi_{T,x} : & A_{\omega_x} & \longrightarrow & X \\ & f & \longrightarrow & \Phi_{T,x}(f) := \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)T^n x. \end{array}$$

Remarquons que $\Phi_{T,x}$ est un " prolongement local " de Φ_T (i.e $\Phi_{T,x}(f) = \Phi_T(f)x$ pour tout $f \in A_{\omega_T}$). On posera alors $\Phi_{T,x}(f) = f(T)x$ pour tout $f \in A_{\omega_x}$. Notons aussi que la suite ω_x n'est pas nécessairement un poids, par conséquent A_{ω_x} n'est pas toujours une algèbre de Banach.

Le but de ce travail est d'étudier le spectre local de T en $f(T)x$. La section 3 est consacrée au cas du shift S_ω sur l'espace A_ω. Plus précisément, nous démontrons que si l'algèbre des multiplicateurs de A_ω est régulière, alors $\sigma(f, S_\omega) = suppf \quad (f \in A_\omega)$, où $suppf$ est le support de f. Dans la section 4 nous démontrons, sous certaines conditions, les inclusions suivantes :

$$\overline{\sigma(x,T) \cap (,\ \setminus Z(f))} \subset \sigma(f(T)x, T) \subset \sigma(x,T) \cap supp(f)$$

où $Z(f)$ l'ensemble des zéros de f. Nous donnons ensuite des exemples montrant que l'encadrement ci-dessus est le meilleure possible et nous introduisons une classe d'opérateurs pour laquelle nous avons l'égalité :

$$\overline{\sigma(x,T) \cap (,\ \setminus Z(f))} = \sigma(f(T)x, T).$$

2 Préliminaires

Nous commençons cette section par introduire certaines notations nécessaires pour énoncer le théorème de Beurling [3].
Soient $\lambda_o \in$, et $D(\lambda_o, r)$ le disque de centre λ_o et de rayon r. On note $D^+(\lambda_o, r) = D(\lambda_o, r) \cap D$ et $D^-(\lambda_o, r) = D(\lambda_o, r) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{D})$ où D est le disque unité.

Soient $\eta > 0$ et ρ une application continue, positive et symetrique (i.e $\rho(r) = \rho(\frac{1}{r})$) sur $[\frac{1}{1+\eta}, 1+\eta]$. On désigne par $C_\rho(D(\lambda_o, r))$ l'espace des fonctions f continues sur $\overline{D(\lambda_o, r)} \setminus$, telles que la fonction $z \to \rho(|z|)f(z)$ se prolonge en une fonction continue sur $\overline{D(\lambda_o, r)}$, nulle sur l'arc $D(\lambda_o, r) \cap$, . L'espace $C_\rho(D(\lambda_o, r))$ muni de la norme

$$\|f\|_\rho = \sup_{z \in D(\lambda_o, r)} \rho(|z|)|f(z)|.$$

est un espace de Banach. On pose finalemant :
-$A_\rho(D^\pm(\lambda_o, r)) = \{f \in C_\rho(D(\lambda_o, r))/f$ holomorphe sur $D^+(\lambda_o, r) \cup D^-(\lambda_o, r)\}$
-$A_\rho(D(\lambda_o, r)) = \{f \in A_\rho(D^\pm(\lambda_o, r))/f$ se prolonge analytiquement sur $D(\lambda_o, r) \cap$, $\}$.

Théorème 2.1 ([3]) : $A_\rho(D(\lambda_o, r))$ est un sous espace fermé de $A_\rho(D^\pm(\lambda_o, r))$ pour la norme $\|.\|_\rho$ si, et seulement si,

$$\int_1^{1+\eta} loglog \frac{1}{\rho(t)} dt < +\infty. \tag{2}$$

On dit qu'une suite $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une *suite de Beurling* si $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{log\omega(n)}{1+n^2} < \infty$. Le résultat que nous énonçons ci-dessous est la version discrète du théorème de Beurling-Malliavin [4] ([1], lemma 2.1).

Théorème 2.2 *Soit* $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *une suite satisfaisant* (1). *Il existe une fonction non nulle* $f \in A_\omega$ *à support arbitrairement petit si, et seulement si,* $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une suite de Beurling.*

On dit qu'une fonction $f \in C(,\ )$ est un multiplicateur de A_ω si $fA_\omega \subset A_\omega$. L'ensemble des multiplicateurs de A_ω sera noté M_ω. Puisque l'application

$$\begin{array}{lcl} M_\omega & \longrightarrow & \mathcal{L}(A_\omega) \\ f & \longmapsto & T_f \ : \ g \mapsto fg \end{array}$$

est une injection, on peut identifier tout multiplicateur de A_ω à un opérateur borné sur A_ω. Muni de la multiplication ponctuelle et de la norme d'opérateur, noté $\|.\|_{M_\omega}$, M_ω est une algèbre de Banach commutative unitaire. En remarquant que $\|\alpha^n\|_{M_\omega} = \tilde{\omega}(n)$ où $\tilde{\omega}(n) = sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\omega(n+k)}{\omega(k)}$, on obtient aisément les inclusions suivantes :

$$A_{\tilde{\omega}} \subset M_\omega \subset A_\sigma \cap A_\omega \quad \text{où} \quad \sigma(n) = \frac{\tilde{\omega}(n)}{1+n^2}.$$

Ainsi l'ensemble des caractères de l'algèbre M_ω s'identifie à , si, et seulement si, $\lim_{|n|\longrightarrow\infty} \frac{log\tilde{\omega}(n)}{|n|} = 0$. En utilisant le théorème 2.2 et les inclusions ci-dessus, on peut vérifier facilement que M_ω est une algèbre régulière si, et seulement si, $(\tilde{\omega}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un poids de Beurling.

3 Cas du shift

Soit $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite satisfaisant (1). Nous désignons par S_ω l'opérateur shift défini par :

$$\begin{array}{rccc} S_\omega : & A_\omega & \longrightarrow & A_\omega \\ & f & \longrightarrow & \alpha f \end{array}$$

où α est l'application donnée par $\alpha(e^{it}) = e^{it}$.

Théorème 3.1 *Soient $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite satisfaisant (1) et S_ω le shift défini sur A_ω. Si $(\tilde{\omega}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un poids de Beurling, alors pour tout $f \in A_\omega$ on a*

$$\sigma(f, S_\omega) = supp(f).$$

Preuve : Puisque $(\tilde{\omega}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un poids de Beurling (i.e $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{log\tilde{\omega}(n)}{1+n^2} < \infty$), on a $\lim_{|n|\longrightarrow\infty} \frac{log\tilde{\omega}(n)}{|n|} = 0$ et par conséquent $\sigma(S_\omega) \subset$, ([9], théorème 7).
Pour tout $\lambda_0 \in$, $\setminus \sigma(f, S_\omega) = \rho(f, S_\omega) \bigcap$, , il existe un voisinage ouvert V de λ_0 et une fonction analytique F de V à valeurs dans A_ω vérifiant :

$$(\mu - S_\omega)F(\mu) = f \quad (\mu \in V).$$

Ceci entraîne que $f(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in V \cap$, , donc $supp(f) \subset \sigma(f, S_\omega)$.

Inversement, soit $\lambda_0 \in$, $\setminus supp(f)$. Il existe alors un voisinage ouvert V de λ_0 tel que $f = 0$ sur $V \cap$, . L'ensemble

$$I = \{\varphi \in A_{\tilde{\omega}} / \ \varphi = 0 \ sur \ , \ \setminus V\}$$

est un idéal fermé de $A_{\tilde{\omega}}$ et $Z(I) := \cap_{f\in I} Z(f) =$, $\setminus V$ en vertu de la régularité de $A_{\tilde{\omega}}$ et l'ensemble des caractères de $A_{\tilde{\omega}}/I$ s'identifie à , $\setminus V$ ([8] p.223). Ce qui donne, $\sigma(\pi(\alpha)) =$, $\setminus V$, où π la surjection canonique de $A_{\tilde{\omega}}$ sur $A_{\tilde{\omega}}/I$. Ainsi l'application :

$$\begin{array}{rccc} G : & V & \longrightarrow & A_{\tilde{\omega}}/I \\ & \lambda & \longrightarrow & (\lambda - \pi(\alpha))^{-1} \end{array}$$

est analytique. Soit $W \subset V$ un voisinage compact de λ_0. Puisque G est borné sur W, il existe $c > 0$ tel que

$$\|G(\lambda)\| < c \quad (\lambda \in W).$$

Donc pour tout $\lambda \in W$ il existe $g_\lambda \in A_{\tilde{\omega}}$ tel que :

$$(\lambda - \alpha) g_\lambda \in 1 + I \text{ et } \|g_\lambda\|_{\tilde{\omega}} \le c.$$

Or $f = 0$ sur V, donc $f = (\lambda - \alpha)g_\lambda f$. Comme $g_\lambda \in A_{\tilde{\omega}} \subset M_\omega$, $g_\lambda f \in A_\omega$. Nous pouvons alors considérer l'application F définie par :

$$\begin{array}{llll} F : & V & \longrightarrow & A_\omega \\ & \lambda & \longrightarrow & F(\lambda) = g_\lambda f. \end{array}$$

Notons que $(\lambda - \alpha)F(\lambda) = f$. Pour montrer que $\lambda_0 \notin \sigma(f, S_\omega)$, il suffit de démontrer que F est analytique sur W.
Puisque $\sigma(\alpha) = ,$, pour tout $\lambda \in V \setminus ,$ on a :

$$F(\lambda) = f(\lambda - \alpha)^{-1},$$

donc F est analytique sur $V \setminus ,$. De plus pour tout $\lambda, \mu \in W$ on a :

$$\begin{array}{lll} \|F(\lambda) - F(\mu)\| & = & \|g_\lambda f - g_\mu f\| \\ & = & \|g_\lambda(\alpha - \mu)g_\mu f - g_\mu(\alpha - \lambda)g_\lambda f\|_\omega \\ & = & |\mu - \lambda|\|g_\mu g_\lambda f\|_\omega \\ & \leq & c^2\|f\|_\omega|\mu - \lambda|. \end{array}$$

Ceci prouve que F est continue sur W et par conséquent F est analytique sur W. D'où le résultat.

Remarque 3.2 *Lorsque $(\tilde{\omega}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas un poids de Beurling, l'égalité (3) n'est pas toujours satisfaite. En effet, considérons la suite $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par :*

$$\omega(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 0 \\ 2^{\frac{p(p-1)}{2} + inf(k,p)} & n = 2^p + k \quad avec \quad 0 \leq k \leq 2^{p+1} - 2^p. \end{cases}$$

La suite $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfait (1) et un calcul simple montre que

$$\tilde{\omega}(n) = \begin{cases} 1 & n < 0 \\ 2^n & n \geq 0. \end{cases}$$

Donc la suite $(\tilde{\omega}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ n'est pas de Beurling et $\sigma(S_\omega) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ 1 \leq |z| \leq 2\}$.
Puisque S_ω n' as pas de valeurs propres, S_ω admet la S.V.E.P et par conséquent $\bigcup_{f\in A_\omega} \sigma(f, S_\omega) = \sigma(S_\omega)$ ([7], p.8). On en déduit, puisque $supp(f) \subset ,$ $(f \in A_\omega)$, qu'il existe $f \in A_\omega$ tel que $supp(f) \neq \sigma(f, S_\omega)$.

4 Localisation spectrale

Soient X un espace de Banach, $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur inversible et $x \in X$. Si $\limsup_{|n|\to+\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{|n|}} = 1$, alors l'application $R(x,T) : \mathbb{C} \setminus , \ \to X$ définie par :

$$R(x,T)(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\lambda^{n+1}} T^n x & (|\lambda| > 1) \\ \displaystyle -\sum_{n\geq 0} \lambda^n T^{-n-1} x & (|\lambda| < 1) \end{cases}$$

est analytique et vérifie l'équation $(\lambda - T)R(x,T)(\lambda) = x$ $(\lambda \in \mathbb{C} \setminus ,)$, donc $\sigma(x,T) \subset ,$. Notons que la suite $\omega_x(n) = Max\{\|T^n x\|, 1\}$ $(n \in \mathbb{Z})$ satisfait (1) et que $\tilde{\omega}_x(n) = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\omega_x(n+k)}{\omega_x(k)}$ $(n \in \mathbb{Z})$ est un poids. Il est bien connu que $\tilde{\omega}_x$ est un poids de Beurling si, et seulement si, ρ_x vérifie (2) où $\frac{1}{\rho_x(r)} = \frac{1}{\rho_x(\frac{1}{r})} = Max\{\sum_{n\geq 0} \tilde{\omega}_x(-n-1)r^n, \sum_{n\geq 0} \tilde{\omega}_x(n) r^{n+1}\}$ pour tout $r \in]0,1[$ et $\rho_x(1) = 0$.

Lemme 4.1 *Soient $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur inversible et $x \in X$ tels que* $\limsup\limits_{|n|\to+\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{|n|}} = 1$ *et* $\lim\limits_{|n|\to+\infty} \tilde{\omega}_x(n)^{\frac{1}{n}} = 1$. *Pour tout $f \in A_{\tilde{\omega}_x}$ on a*

$$\sigma(f(T)x, T) \subset ,$$

et

$$R(f(T)x, T)(\lambda) = f(T)R(x, T)(\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus , .$$

Preuve : Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned}
\|T^p f(T)x\| &= \|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n) T^{p+n} x\| \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| \|T^{p+n} x\| \\
&\leq \|f\|_{\omega_x} \tilde{\omega}_x(p).
\end{aligned}$$

Il découle de ce qui précède que $\sigma(f(T)x, T) \subset , .$
Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| > 1$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned}
\|T^p R(x, T)(\lambda)\| &\leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \|T^{p+n} x\| \\
&\leq \sum_{n\geq 0} \frac{1}{|\lambda|^{n+1}} \omega_x(n+p) \\
&\leq \omega_x(p)\rho_x(|\lambda|).
\end{aligned}$$

De même pour $|\lambda| < 1$ on obtient $\|T^p R(x, T)(\lambda)\| \leq \omega_x(p)\rho_x(|\lambda|)$, $(p \in \mathbb{Z})$. On en déduit alors facilement l'égalité :

$$R(f(T)x, T)(\lambda) = f(T)R(x, T)(\lambda) \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus , .$$

Théorème 4.2 *Soient $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur inversible admettant la S.V.E.P, $x \in X$ tel que* $\limsup\limits_{|n|\to+\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{|n|}} = 1$ *et $\tilde{\omega}_x$ un poids de Beurling. Pour tout $f \in A_{\omega_x}$ on a*

$$\sigma(f(T)x, T) \subset \sigma(x, T) \cap supp(f).$$

Preuve : Comme $\tilde{\omega}_x$ est un poids de Beurling, $\lim\limits_{|n|\to+\infty} \tilde{\omega}_x(n)^{\frac{1}{n}} = 1$. On en déduit, d'après le lemme 4.1, que $\sigma(f(T)x, T) \subset , .$ Il suffit alors de montrer que $(, \setminus suppf) \cup (, \setminus \sigma(x, T)) \subset , \setminus \sigma(f(T)x, T)$.

Soit $\lambda_0 \in , \setminus suppf$. D'après le théorème 3.1 on a $\sigma(f, S_{\omega_x}) = suppf$, il existe alors un voisinage ouvert V de λ_0 et une application analytique F :

$$\begin{array}{rccc}
F: & V & \longrightarrow & A_{\omega_x} \\
 & \lambda & \longrightarrow & F(\lambda)
\end{array}$$

telle que $(\lambda - T)F(\lambda) = f$. Ceci permet de définir l'application :

$$\begin{array}{rccc}
G: & V & \longrightarrow & X \\
 & \lambda & \longrightarrow & F(\lambda)(T)x.
\end{array}$$

Comme l'application G est analytique et vérifie :

$$(\lambda - T)G(\lambda) = f(T)x \quad (\lambda \in V),$$

$\lambda_0 \in , \setminus \sigma(f(T)x, T)$.

Soit maintenant $\lambda_0 \in , \setminus \sigma(x, T)$, il existe un voisinage ouvert V de λ_0 et une application analytique H de V à valeurs dans X telle que

$$(\lambda - T)H(\lambda) = x \quad (\lambda \in V).$$

Puisque T admet la S.V.E.P et $\limsup_{|n| \to +\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{|n|}} = 1$, on a

$$H(\lambda) = R(x, T)(\lambda) \quad (\lambda \in V \setminus ,).$$

Or d'après le lemme 4.1 nous avons :

$$\|T^p H(\lambda)\| \leq \omega_x(p)\rho_x(|\lambda|) \quad (\lambda \in V \setminus , , p \in \mathbb{Z}).$$

Donc pour tout $g \in A_{\omega_x}$ l'application :

$$\begin{array}{ccc} V \setminus , & \longrightarrow & X \\ \lambda & \longrightarrow & g(T)H(\lambda) \end{array}$$

est analytique et vérifie

$$\|g(T)H(\lambda)\| \leq \|g\|_{\omega_x}\rho_x(|\lambda|) \quad (\lambda \in V \setminus ,).$$

Posons $f_n = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k)\alpha^k$. Il est clair que l'application :

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & X \\ \lambda & \longrightarrow & f_n(T)H(\lambda) \end{array}$$

est analytique. De plus on a

$$\|f(T)H(\lambda) - f_n(T)H(\lambda)\| \leq \|f - f_n\|_{\omega_x}\rho_x(|\lambda|) \quad (\lambda \in V \setminus ,).$$

Puisque $\tilde{\omega}_x$ est un poids de Beurling (i.e ρ_x satisfait (2)) on obtient, d'après le théorème 2.1, que l'application :

$$\begin{array}{ccc} V \setminus , & \longrightarrow & X \\ \lambda & \longrightarrow & f(T)H(\lambda) \end{array}$$

se prolonge analytiquement à travars $V \cap ,$ (prolongement noté L). On peut alors vérifier facilement que L satisfait l'équation :

$$(\lambda - T)L(\lambda) = f(T)x \quad (\lambda \in V).$$

Par conséquent $\lambda_0 \in , \setminus \sigma(f(T)x, T)$. D'où $\sigma(f(T)x, T) \subset \sigma(x, T) \cap supp f$.

Soient $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(\sigma(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ deux suites réelles. On dira que σ domine ω s'il existe $C > 0$ tel que $\omega(n) \leq C\sigma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
Dans le cas où $\tilde{\omega}_x$ n'est pas un poids de Beurling on peut démontrer, de la même manière que le théorème 4.2, le résultat suivant :

Théorème 4.2' *Soient $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur inversible admettant la S.V.E.P et $x \in X$ tels que $\limsup_{|n| \to +\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{|n|}} = 1$. Si σ est un poids de Beurling dominant ω_x, alors pour tout $f \in A_\sigma$ on a*

$$\sigma(f(T)x, T) \subset \sigma(x, T) \cap supp(f).$$

Lemme 4.3 *Soient $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur inversible et $x \in X$ tels que $\limsup\limits_{|n|\to+\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{|n|}} = 1$. Si σ est un poids dominant ω_x, alors pour tout $f \in A_\sigma$, σ domine $\omega_{f(T)x}$ et*

$$(fg)(T)x = g(T)(f(T)x) \quad \textit{pour tout} \quad g \in A_\sigma.$$

Théorème 4.4 *Soient $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur inversible admettant la S.V.E.P et $x \in X$ tel que $\limsup\limits_{|n|\to+\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{|n|}} = 1$. Si σ est un poids de Beurling dominant ω_x, alors pour tout $f \in A_\sigma$ on a*

$$\overline{\sigma(x,T) \cap (,\ \setminus Z(f))} \subset \sigma(f(T)x, T).$$

Preuve : Soit $\lambda_0 \in ,\ \setminus \sigma(f(T)x,T)$ tel que $f(\lambda_0) \neq 0$. Il existe un voisinage fermé V de λ_0 et une application analytique $F : V \longrightarrow X$ satisfaisant :

$$(\lambda - T)F(\lambda) = f(T)x \quad (\lambda \in V).$$

Quitte à retrécir V, on peut supposer que $f(\lambda) \neq 0$ pour tout $\lambda \in V \cap ,$. L'ensemble $I = fA_\sigma + I_\sigma(V \cap ,\ )$, où $I_\sigma(V \cap ,\ ) = \{f \in A_\sigma \ / \ f(\lambda) = 0 \ (\lambda \in V \cap ,\ )\}$, est un idéal de A_σ. Puisque σ est un poids de Beurling, A_σ est une algèbre régulière, donc $Z(I)(:= \bigcap\limits_{f\in I} Z(f)) = \emptyset$. Par suite $I = A_\sigma$. En particulier il existe $g \in A_\sigma$ et $h \in I_\sigma(V \cap ,\ )$ tels que $1 = fg + h$. Il découle alors du lemme 4.3 que

$$x = g(T)(f(T)x) + h(T)x$$

D'après le théorème 4.2', d'une part nous avons $\sigma(g(T)(f(T)x),T) \subset \sigma(f(T)x,T) \subset ,\ \setminus V$, et d'autre part on a $\sigma(h(T)x,T) \subset supp(h) \subset ,\ \setminus V$. Comme $\sigma(x,T) \subset \sigma(g(T)(f(T)x),T) \cup \sigma(h(T)x,T)$, $\sigma(x,T) \subset ,\ \setminus V$. Ceci achève la preuve du théorème .

Nous donnons maintenant des exemples montrant que les inclusions obtenues dans les théorèmes précédents sont les meilleurs possibles.

Exemples : Soient ω un poids de Beurling et I un idéal fermé de A_ω tel que $Z(I) = E$. L'opérateur T défini sur $X = A_\omega/I$ est donné par :

$$\begin{array}{rccc} T: & X & \longrightarrow & X \\ & \pi(f) & \longrightarrow & \pi(\alpha f). \end{array}$$

où π est la surjection canonique associeé à I.

On peut vérifier facilement que $\sigma(T) = E$. En particulier T admet la S.V.E.P. Puisque ω domine $\omega_{\pi(1)}$, nous avons pour tout $f \in A_\omega$ les inclusions suivantes :

$$\overline{\sigma(\pi(1),T) \cap (,\ \setminus Z(f))} \subset \sigma(f(T)\pi(1),T) \subset \sigma(\pi(1),T) \cap supp(f)$$

Nous allons construire, grâce à un bon choix de ω et de E, deux exemples montrant que l'encadrement ci-dessus est le meilleure possible.

1. Soit E l'arc du cercle unité d'extrémités e^{ia} et e^{ib} où $0 < a < b < 2\pi$. Posons $I = \{f \in A_\omega \ / \ f(e^{it}) = 0 \ (a < t < b)\}$. Puisque ω est un poids de Beurling, il existe $f \in A_\omega$ tel que $Z(f) = E$. On obtient alors $f(T)\pi(1) = \pi(f) = 0$ et par conséquent :

$$\overline{\sigma(\pi(1),T) \cap (,\ \setminus Z(f))} = \sigma(f(T)\pi(1),T) = \emptyset$$

et

$$\sigma(\pi(1),T) \cap supp(f) = \{e^{ia}, e^{ib}\}.$$

2. Soit ω le poids défini par :

$$\omega(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ e^{\sqrt{|n|}} & n < 0 \end{cases}$$

On considère $I = \overline{\{f \in A_\omega \ / \ f \text{ est nulle au voisinage de } 1\}}$. D'aprés [2], il existe $f \in A_\omega \setminus I$ tel que $f(1) = 0$. Nous obtenons alors :

$$\overline{\sigma(\pi(1), T) \cap (, \setminus Z(f))} = \emptyset.$$

D'autre part nous avons $f(T)\pi(1) = \pi(f) \neq 0$. Puisque T admet la S.V.E.P, $\sigma(f(T)\pi(1), T) \neq \emptyset$. On obtient alors

$$\sigma(f(T)\pi(1), T) = \sigma(\pi(1), T) \cap supp(f) = \{1\}.$$

Soit $E \subset$, , la frontière de E dans , sera notée ∂E.
Nous obtenons facilement du théorème 4.2' et du théorème 4.4 le corollaire suivant :

Corollaire 4.5 *Soient $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur inversible admettant la S.V.E.P et $x \in X$ tels que $\limsup\limits_{|n| \to +\infty} \|T^n x\|^{\frac{1}{|n|}} = 1$. Si σ est un poids de Beurling dominant ω_x, alors pour tout $f \in A_\sigma$ on a*

$$\sigma(f(T)x, T) \setminus \overline{\sigma(x, T) \cap (, \setminus Z(f))} \subset \partial\sigma(x, T).$$

Nous introduisons maintenant une classe d'opérateurs pour laquelle nous avons une caracterisation de $\sigma(f(T)x, T)$ dans le cas où $\partial\sigma(x, T)$ est au plus dénombrable.

Définition 4.6 *Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ admettant la S.V.E.P, on dira que T vérifie la condition $\mathcal{C}$ si pour tout $x \in X$ on a $\sigma(x, T)$ fini ou vide, implique $x = 0$.*

On a le résultat suivant :

Théorème 4.7 *Soient $T \in \mathcal{L}(X)$ un opérateur inversible satisfaisant la condition $\mathcal{C}$ et $x \in X$ tels que $\partial\sigma(x, T)$ est au plus dénombrable. Si σ est un poids de Beurling dominant ω_x, alors pour tout $f \in A_\sigma$ on a*

$$\sigma(f(T)x, T) = \overline{\sigma(x, T) \cap (, \setminus Z(f))}.$$

Preuve : On a d'après le théorème 4.2' :

$$\overline{\sigma(x, T) \cap (, \setminus Z(f))} \subset \sigma(f(T)x, T).$$

Supposons que cette inclusion est stricte. D'après le corollaire 4.5 $\sigma(f(T)x, T) \setminus \overline{\sigma(x, T) \cap (, \setminus Z(f))} \subset \partial\sigma(x, T)$. Puisque $\partial\sigma(x, T)$ est un fermé dénombrable, $\sigma(f(T)x, T) \setminus \overline{\sigma(x, T) \cap (, \setminus Z(f))}$ admet un point isolé (noté λ). Il est alors évident que λ est aussi isolé dans $\sigma(f(T)x, T)$. Soient W et V deux voisinages ouverts de λ tels que :

$$\overline{W} \subset V \quad \text{et} \quad V \cap \sigma(f(T)x, T) = \{\lambda\}.$$

Puisque σ est un poids de Beurling, A_σ est une algèbre régulière et par conséquent il existe $g \in A_\sigma$ tel que $supp(g) \subset V$ et $g = 1$ sur W. D'après le lemme 4.3

$$f(T)x = g(T)(f(T)x) + (1 - g)(T)(f(T)x)$$

Il découle alors du théorème 4.2' que $\sigma(g(T)(f(T)x), T) \subset \sigma(f(T)x, T) \cap supp(g) = \{\lambda\}$. Comme T satisfait $\mathcal{C}$, $g(T)(f(T)x) = 0$ et par conséquent

$$f(T)x = (1 - g)(T)(f(T)x).$$

Or d'après le théorème 4.2'on a :

$$\sigma(f(T)x, T) = \sigma((1 - g)(T)(f(T)x)) \subset supp(1 - g),$$

ce qui est absurde puisque $\lambda \in \sigma(f(T)x, T)$. D'où $\sigma(f(T)x, T) = \overline{\sigma(x, T) \cap (, \ \setminus Z(f))}$.

Remerciements : Nous tenons à remercier les Professeurs J. Esterle et M. Mbekhta pour toutes les discussions que nous avons eu avec eux lors de la préparation de ce travail. This work was done within the framework of the Associateship Scheme of the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

Références

[1] A. Atzmon, On the existence of hyperinvariant subspaces, J.Operator Theory, 11 (1984), 3-40.

[2] A. Atzmon, Operators which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces, Acta Math., 144 (1980), 27-63.

[3] A. Beurling, Analytic continuation across a linear boundary, Acta Math., 128 (1972), 154-182.

[4] A.Beurling and P.Malliavin, The Fourier transforms of measures with compact support, Acta Math., 107 (1962), 291-309.

[5] I. Colojoara and C.Foias, Theory of Generalized Spectral Operators, Gordon and breach, New York, 1968.

[6] N. Dunford and Schwartz, Linear Operators, Part 1, Wiley-Interscience. New-York 1963.

[7] I.Erdelyi and R.Lange, Spectral Decompositions on Banach Spaces, Lecture Notes in Math, 623, Springer Verlag, 1977.

[8] Y.Katznelson : An Introduction to Harmonic Analysis, Wiley, New-york, 1968.

[9] A.Shields, Weighted shift operators and analytic function theory, Topics in operators (edited by Pearcy) Amer. Math. Soc. Math. surveys, 13 (1974), 49-128.

[10] J. Wermer, The Existence of invariant subspaces, Duke. Math. J., 19 (1952),615-622.