Available at: http://www.ictp.trieste.it/~pub_off
IC/99/174

United Nations Educational Scientific and Cultural Organization
and
International Atomic Energy Agency

THE ABDUS SALAM INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

QUASI-BIGÈBRES DE LIE ET ALGÈBRES QUASI-BATALIN-VILKOVISKY DIFFÈRENTIELLES

Momo Bangoura[1]
Département de Mathématiques, Université de Conakry,
BP 1147, Conakry, Guinée[2]
and
The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

Abstract

Lie quasi-bialgebras (also called Jacobian quasi-bialgebras) are generalisations of Lie bialgebras, introduced by Drinfeld, while differential quasi-Batalin-Vilkovisky algebras are generalisations of differential Batalin-Vilkovisky algebras, introduced by Getzler. We show that differential quasi-Batalin-Vilkovisky algebras with vanishing Laplacian are BV_∞-algebras. We generalize a result of Getzler by establishing a one-to-one correspondence between Lie quasi-bialgebra structures $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ on a finite-dimensional vector space $\mathcal{F}$ such that $\partial_\mu \phi \in Im\gamma$, and differential quasi-Batalin-Vilkovisky structures on $\Lambda\mathcal{F}^*$, the exterior algebra of the dual of $\mathcal{F}$.

MIRAMARE – TRIESTE
November 1999

[1]Regular Associate of the Abdus Salam ICTP. E-mail: bangm@ictp.trieste.it
[2]Permanent address.

Résumé

Les quasi-bigèbres de Lie (appelées aussi quasi-bigèbres jacobiennes) sont des généralisations introduites par Drinfeld des bigèbres de Lie, tandis que les algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles sont des généralisations introduites par Getzler des algèbres de Batalin-Vilkovisky différentielles. Nous montrons que les algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky à laplacien nul sont des BV_∞-algèbres. Nous généralisons un résultat de Getzler en établissant une correspondance bijective entre les structures de quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ sur un espace vectoriel $\mathcal{F}$ de dimension finie telles que $\partial_\mu \phi \in Im\gamma$, et les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\Lambda\mathcal{F}^*$, l'algèbre extérieure du dual de $\mathcal{F}$.

1 Introduction

Nous donnons un exemple d'algèbre de Batalin-Vilkovisky à homotopie près et nous généralisons un résultat de Getzler [7] qui établit une correspondance bijective entre les structures de bigèbre de Lie sur un espace vectoriel $\mathcal{F}$ de dimension finie, muni d'un co-caractère, et les structures d'algèbre de Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\bigwedge \mathcal{F}^*$.

Les quasi-bigèbres de Lie [6] ou quasi-bigèbres jacobiennes ([2], [10]) sont des généralisations des bigèbres de Lie, introduites par Drinfeld comme étant les limites classiques des algèbres quasi-Hopf; elles sont caractérisées par l'existence d'un défaut d'identité co-Jacobi pour le co-crochet, qui est en fait le cobord d'un certain élément de $\bigwedge^3 \mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ est l'espace vectoriel sur lequel est définie la structure de quasi-bigèbre de Lie, alors que pour les bigèbres de Lie, ce défaut est nul. Dans la section 3, nous rappelons la définition et les propriétés des quasi-bigèbres de Lie et à partir d'une structure de quasi-bigèbre de Lie donnée $(\mathcal{F}, \mu, \gamma)$, nous définissons trois opérateurs d_μ, ∂_γ et i_ϕ sur $\bigwedge \mathcal{F}^*$ qui sont liés par un ensemble de relations, conséquences des axiomes d'une structure de quasi-bigèbre de Lie.

Les algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles sont des généralisations introduites par Getzler des algèbres de Batalin-Vilkovisky diffèrentielles. Une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle est caractérisée par la donnée d'une algèbre commutative graduéeA munie de trois opérateurs différentiels Δ, δ, Φ vérifiant un ensemble de relations (voir [7] et section 4). Dans la section 4, nous montrons qu'à toute algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle correspond une structure d'algèbre BV_∞ sur le noyau de son opérateur laplacien.

La section 5 est consacrée à la démonstration du résultat qui établit le lien entre les structures de quasi-bigèbre de Lie et les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle. En conséquence nous remarquons qu'outre la structure standard d'algèbre de Batalin-Vilkovisky différentielle associée à une bigèbre de Lie $(\mathcal{F}, \mu, \gamma)$ [11], chaque co-caractère de la co-algèbre de Lie $(\mathcal{F}, \gamma)$ permet de définir une nouvelle structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky différentielle.

2 Préliminaires

Dans cette section, nous rappelons certaines notions standard utiles pour la suite.

Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mu)$ une algèbre de Lie sur le corps $\mathbf{K}$, supposé égal à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, où $\mu : \bigwedge^2 \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ est le crochet d'algèbre de Lie sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}$.

Définition 2.1 *Le crochet de Schouten algébrique ([10], [13], [15]) est la structure d'algèbre de Lie graduée, $[,]^\mu$, sur l'algèbre extérieure, $\bigwedge \mathcal{F} = \bigoplus_{p \geq -1} \bigwedge^{p+1} \mathcal{F}$, de $\mathcal{F}$ qui :*

(i) s'annule si l'un des arguments est dans $\mathbf{K}$,

(ii) étend le crochet de Lie μ, et

(iii) satisfait la règle de Leibniz graduée

$$[X, Y \wedge Z]^\mu = [X, Y]^\mu \wedge Z + (-1)^{p(q+1)} Y \wedge [X, Z]^\mu$$

pour $X \in \bigwedge^{p+1} \mathcal{F}$, $Y \in \bigwedge^{q+1} \mathcal{F}$, $Z \in \bigwedge \mathcal{F}$.

Dans le cas où $\mathbf{r} \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$, le crochet de Schouten algébrique de $\mathbf{r}$ avec lui-même est l'élément $[\mathbf{r}, \mathbf{r}]^{\mu} \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ telle que pour $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{F}^*$,

$$[\mathbf{r}, \mathbf{r}]^{\mu}(\xi, \eta, \zeta) =< \zeta, \mathbf{r}(ad^{*\mu}_{\mathbf{r}\xi}\eta - ad^{*\mu}_{\mathbf{r}\eta}\xi) - \mu(\mathbf{r}(\xi), \mathbf{r}(\eta)) >,$$

où $\mathbf{r}$ considéré comme application linéaire de $\mathcal{F}^*$ dans $\mathcal{F}$ est défini par $< \mathbf{r}(\xi), \eta >= \mathbf{r}(\xi \otimes \eta)$ pour $\xi, \eta \in \mathcal{F}^*$, et $< ad^{*\mu}_x \xi, y >= - < \xi, \mu(x, y)$ pour $x, y \in \mathcal{F}$, $\xi \in \mathcal{F}^*$.
En particulier, si $\mathbf{a} \in \bigwedge^2 \mathcal{F}$, alors $[\mathbf{a}, \mathbf{a}]^{\mu}$ est l'élément de $\bigwedge^3 \mathcal{F}$ tel que pour $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{F}^*$,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}]^{\mu}(\xi, \eta, \zeta) = -2 \oint < \zeta, \mu(\mathbf{a}(\xi), \mathbf{a}(\eta)) >,$$

où $\oint$ désigne la somme sur les permutations circulaires des éléments ξ, η, ζ; ou dans la notation en termes de produits tensoriels triples,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a}]^{\mu} = -2([\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{13}] + [\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{23}] + [\mathbf{a}_{13}, \mathbf{a}_{23}]).$$

Si $\mathbf{a} = \sum_i a_i \otimes b_i$, alors par définition,

$$\mathbf{a}_{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1, \quad \mathbf{a}_{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i, \quad \mathbf{a}_{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i,$$

$$[\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{13}] = \sum_{i,j} \mu(a_i, a_j) \otimes b_i \otimes b_j, \quad [\mathbf{a}_{12}, \mathbf{a}_{23}] = \sum_{i,j} a_i \otimes \mu(b_i, a_j) \otimes b_j,$$

$$[\mathbf{a}_{13}, \mathbf{a}_{23}] = \sum_{i,j} a_i \otimes a_j \otimes \mu(b_i, b_j).$$

Remarquons qu'on peut définir un tel crochet sur $\bigwedge \mathcal{F}$ pour tout $\mu \in Hom(\bigwedge^2 \mathcal{F}, \mathcal{F})$. L'anti-commutativité graduée et la règle de Leibniz graduée restent en vigueur, mais en général le crochet $[,]^{\mu}$ ne vérifie pas l'identité de Jacobi graduée et il la vérifie si et seulement si $(\mathcal{F}, \mu)$ est une algèbre de Lie.

Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mu)$ une algèbre de Lie et soit M un $\mathcal{G}$-module, c'est-à-dire que $\mathcal{G}$ agit sur M. Par exemple $\mathcal{G}$ agit sur elle-même (plus généralement sur son algèbre tensorielle) par la représentation adjointe.

Définition 2.2 *L'espace vectoriel des applications k-linéaires antisymétriques sur $\mathcal{G}$ à valeurs dans M est appelé l'espace des k-cochaines de $\mathcal{G}$ à valeurs dans M.*

Désignons par $\mathcal{C}^k(\mathcal{G}, M)$, l'espace vectoriel des k-cochaines de $\mathcal{G}$ à valeurs dans M et $\mathcal{C}(\mathcal{G}, M) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathcal{C}^k(\mathcal{G}, M)$.

Définition 2.3 *L'opérateur cobord de Chevalley-Eilenberg de $\mathcal{G}$ à valeurs dans M, noté δ_{μ} : $\mathcal{C}(\mathcal{G}, M) \to \mathcal{C}(\mathcal{G}, M)$, est l'application linéaire de degré 1 définie par*

$$\begin{aligned}(\delta_{\mu}\alpha)(x_0, ..., x_k) \quad &= \quad \textstyle\sum_{i=0}^k (-1)^k x_i.(\alpha(x_0, ..., \hat{x_i}, ..., x_k)) \\ &\quad + \textstyle\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha(\mu(x_i, x_j), x_0, ..., \hat{x_i}, ..., \hat{x_j}, ...x_k)\end{aligned}$$

pour $\alpha \in \mathcal{C}^k(\mathcal{G}, M)$, $x_i \in \mathcal{F}, i = 0, 1, ...k$; $x_i.a$ désignant l'action de $x_i \in \mathcal{G}$ sur $a \in M$ et $\hat{x_i}$ indiquant l'omission de l'argument x_i.

Remarque 2.1 On peut définir un tel opérateur pour tout $\mu \in Hom(\bigwedge^2 \mathcal{F}, \mathcal{F})$. En général $\delta_\mu^2 \neq 0$ et $\delta_\mu^2 = 0$ si et seulement si $(\mathcal{F}, \mu)$ est une algèbre de Lie.

Définition 2.4 *Une k-cochaine α est appelé un k-cocycle si $\delta_\mu \alpha = 0$. Une k-cochaine α est appelé un k-cobord si il existe une $(k-1)$-cochaine β, telle que $\alpha = \delta_\mu \beta$.*

Définition 2.5 *Un opérateur différentiel d'ordre zéro sur une algèbre commutative graduée A est un opérateur qui commute avec les éléments de A, ces derniers agissant par multiplication. Un opérateur différentiel d'ordre n sur A, $n \geq 1$, est un opérateur dont le commutateur avec les éléments de A est un opérateur différentiel d'ordre $n-1$. Par ailleurs une dérivation d'ordre 1 de A est une dérivation dans le sens usuel, alors qu'une dérivation d'odre n de A est un opérateur L tel que $[L, a] - La$ est une dérivation d'odre $n-1$ pour tout $a \in A$.*

Ainsi une dérivation du second ordre sur A est un opérateur Δ satisfaisant la relation

$$\begin{aligned}\Delta(abc) \;=\;& \Delta(ab)c + (-1)^{|\Delta||a|} a\Delta(bc) + (-1)^{(|a|+|\Delta|)|b|} b\Delta(ac) \\ & -(\Delta a)bc - (-1)^{|\Delta||a|} a(\Delta b)c - (-1)^{|\Delta|(|a|+|b|)} ab(\Delta c)\end{aligned}$$

pour tous $a, b, c \in A$, où $|\Delta|$ et $|a|$ désignent respectivement les degrés de Δ et a.

Définition 2.6 *On dit q'un opérateur différentiel Δ de degré -1 sur une algèbre commutative graduée A engendre un crochet $[,]_\Delta$ sur A, si pour tous $a, b \in A$,*

$$[a, b]_\Delta = (-1)^{|a|}(\Delta(ab) - (\Delta a)b - (-1)^{|a|} a\Delta b).$$

Dans [15] il est établi que l'opérateur transposé de l'opérateur de Chevalley-Eilenberg engendre le crochet de Schouten algébrique.

Soit A l'algèbre extérieure $\bigwedge \mathcal{F}^*$, où $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, et $\mathcal{F}^*$ le dual de $\mathcal{F}$. Pour une base donnée (e_i) de $\mathcal{F}$ de base duale (ϵ^i), désignons par a_i l'opérateur de degré -1 consistant en la contraction avec e_i, et par b^i l'opération de multiplication extérieure par ϵ^i. Ces opérateurs satisfont les relations de commutation canoniques,

$$a_i b^j + b^j a_i = \delta_i^j.$$

On a le résultat suivant [7] :

Proposition 2.1 *Un opérateur sur $A = \bigwedge \mathcal{F}^*$ est un opérateur différentiel d'ordre n, s'il s'écrit comme une somme de monômes, chacun desquels étant au plus d'ordre n en les opérateurs (a_i).*

Le crochet de dualité entre $\bigwedge \mathcal{F}$ et $\bigwedge \mathcal{F}^*$ étendant celui entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^*$ est défini par

$$< \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge ... \wedge \xi_m, x_1 \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_n >= \delta_m^n det(< \xi_i, x_j >)$$

$\xi_i \in \mathcal{F}^*, i = 1, ..., m, x_i \in \mathcal{F}, j = 1, ..., n.$

3 Quasi-bigèbres de Lie

Les quasi-bigèbres de Lie [6] (appelées quasi-bigèbres jacobiennes dans ([2],[10])) sont les limites classiques des algèbres quasi-Hopf, introduites par Drinfeld. Plus précisément

Définition 3.1 *Un quadruplet $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ est une quasi-bigèbre de Lie si et seulement si $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel muni d'un crochet $\mu \in Hom(\bigwedge^2 \mathcal{F}, \mathcal{F})$, d'un co-crochet $\gamma \in Hom(\mathcal{F}, \bigwedge^2 \mathcal{F})$ et d'un élément $\phi \in \bigwedge^3 \mathcal{F}$ tels que*

3.1. $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mu)$ *est une algèbre de Lie,*

3.2. γ *est un 1-cocycle de l'algèbre de Lie $\mathcal{G} = (\mathcal{F}, \mu)$, à valeurs dans $\bigwedge^2 \mathcal{F}$ pour l'action adjointe définie par μ,*

3.3. $\frac{1}{2}[\gamma, \gamma]_{NR}^{\mathcal{F}^*} + \delta_\mu \phi = 0$,

3.4. $\delta_\gamma \phi = 0$,

où $[,]_{NR}^{\mathcal{F}^*}$ désigne le crochet de Nijenhuis-Richardson [19] des formes sur $\bigwedge \mathcal{F}^*$ à valeurs dans $\mathcal{F}^*$, δ_μ (resp. δ_γ) est l'opérateur cobord associé à l'action adjointe définie par μ (resp. γ).

Remarque 3.1 Dans 3.3, $\phi : \mathbf{K} \to \bigwedge^3 \mathcal{F}$ est considéré comme une $0-$forme sur $\mathcal{F}$ à valeurs dans $\bigwedge^3 \mathcal{F}$ tandis que dans 3.4, $\phi : \bigwedge^3 \mathcal{F}^* \to \mathbf{K}$ est considéré comme une $3-$forme sur $\mathcal{F}^*$ à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Remarque 3.2 Dans le cas où $\phi = 0$, le triplet $(\mathcal{F}, \mu, \gamma)$ satisfaisant les conditions ci-dessus, n'est rien d'autre qu'une bigèbre de Lie.

Dans toute la suite, nous supposerons que l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ est de dimension finie sur $\mathbf{K}$, et que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Ainsi, en termes de grand crochet [,] ([2], [9], [10], [17]), une quasi-bigèbre de Lie peut être définie de la manière suivante :

Définition 3.2 *Un quadruplet $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ avec $\mu \in \bigwedge^2 \mathcal{F}^* \bigotimes \mathcal{F}$, $\gamma \in \mathcal{F}^* \bigotimes \bigwedge^2 \mathcal{F}$, $\phi \in \bigwedge^3 \mathcal{F}$, est une quasi-bigèbre de Lie si et seulement si $[\mu + \gamma + \phi, \mu + \gamma + \phi] = 0$.*

En tenant compte des bidegrés, la condition $[\mu + \gamma + \phi, \mu + \gamma + \phi] = 0$ est équivalente aux suivantes :

3.5. $[\mu, \mu] = 0$,

3.6. $[\mu, \gamma] = 0$,

3.7. $\frac{1}{2}[\gamma, \gamma] + [\mu, \phi] = 0$,

3.8. $[\gamma, \phi] = 0$.

Remarque 3.3 La dénomination "quasi-bigèbre jacobienne" utilisée dans [1], [2], [10] se justifie par le fait que c'est le crochet qui vérifie l'identité de Jacobi, alors que le co-crochet ne vérifie pas l'identité co-Jacobi. Ainsi, contrairement à la notion de bigèbre de Lie, la notion de quasi-bigèbre jacobienne n'est pas auto-duale; l'objet dual est appélé une quasi-bigèbre co-jacobienne.

La donnée d'une structure de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{F}$ détermine une structure d'algèbre de Lie $[,]_{\mathcal{D}}$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{D} = \mathcal{F} \bigoplus \mathcal{F}^*$ en posant:

$$[x, y]_{\mathcal{D}} = \mu(x, y),$$

$$[x, \xi]_{\mathcal{D}} = -ad_{\xi}^{*\gamma} x + ad_x^{*\mu} \xi,$$

$$[\xi, \eta]_{\mathcal{D}} = \phi(\xi, \eta) + \gamma(\xi, \eta)$$

pour tous $x, y \in \mathcal{F}$, $\xi, \eta \in \mathcal{F}^*$.

L'identité de Jacobi pour le crochet $[,]_{\mathcal{D}}$ sur $\mathcal{D}$ est équivalente aux conditions définissant la structure de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{F}$.

De façon plus précise, on montre dans [10] que les structures de quasi- bigèbre de Lie sur $\mathcal{F}$ sont en correspondance biunivoque avec les structures d'algèbre de Lie sur $\mathcal{D} = \mathcal{F} \bigoplus \mathcal{F}^*$ laissant invariant le produit scalaire canonique, dont $\mathcal{F}$ est une sous-algèbre de Lie.

Plus exactement, les conditions définissant une quasi-bigèbre de Lie s'écrivent sous la forme :

3.9. $\oint \mu(\mu(x, y), z) = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathcal{F}$,

3.10. $\gamma(\mu(x, y)) = (ad_x^{\mu} \otimes 1 + 1 \otimes ad_x^{\mu})\gamma(y) - (ad_y^{\mu} \otimes 1 + 1 \otimes ad_y^{\mu})\gamma(x), \ \forall x, y \in \mathcal{F}$,

ou de façon équivalente,

$(3.10)'$. $\mu(\gamma(\xi, \eta)) = (ad_{\xi}^{\gamma} \otimes 1 + 1 \otimes ad_{\xi}^{\gamma})\mu(\eta) - (ad_{\eta}^{\gamma} \otimes 1 + 1 \otimes ad_{\eta}^{\gamma})\mu(\xi), \ \forall \xi, \eta \in \mathcal{F}^*$,

3.11. $\oint \gamma(\gamma(\xi, \eta), \zeta) = -\oint ad^{*\mu}_{\phi(\xi,\eta)} \zeta, \quad \forall \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{F}^*$,

3.12. $\oint \phi(\gamma(\xi, \eta), \zeta) = \oint ad_{\xi}^{*\gamma} \phi(\eta, \zeta), \quad \forall \xi, \eta, \zeta \in \mathcal{F}^*$,

où $ad_x^{\mu} y = \mu(x, y)$ pour $x, y \in \mathcal{F}$, $ad_{\xi}^{\gamma} \eta = \gamma(\xi, \eta)$ pour $\xi, \eta \in \mathcal{F}^*$, $\oint$ désigne la somme sur les permutations circulaires des éléments $x, y, z \in \mathcal{F}$, ou $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{F}^*$, $\phi : \bigwedge^2 \mathcal{F}^* \to \mathcal{F}$ avec $< \phi(\xi, \eta), \zeta >= \phi(\xi, \eta, \zeta)$, $< ad_x^{*\mu} \xi, y >= - < \xi, \mu(x, y) >$ pour $x, y \in \mathcal{F}, \xi \in \mathcal{F}^*$ et $< ad_{\xi}^{*\gamma} x, \eta >= - < x, \gamma(\xi, \eta) >$ pour $x \in \mathcal{F}, \xi, \eta \in \mathcal{F}^*$.

On a les équivalences suivantes :

3.9 traduit le fait que μ est un crochet de Lie sur $\mathcal{F}$.

3.10 et $(3.10)'$ sont équivalentes et traduisent la condition de cocycle $\delta_{\mu}\gamma = 0$,

3.11 traduit l'équation $\frac{1}{2}[\gamma, \gamma]_{NR}^{\mathcal{F}^*} + \delta_{\mu}\phi = 0$,

3.12 traduit l'équation $\delta_{\gamma}\phi = 0$.

Rappelons à présent la notion de couple de Manin due à Drinfeld [6].

Définition 3.3 *Un couple de Manin consiste en un couple $(\mathcal{D}, \mathcal{F})$ où $\mathcal{D}$ est une algèbre de Lie munie d'un produit scalaire invariant non dégénéré et $\mathcal{F}$ une sous-algèbre de Lie isotrope de dimension maximale de $\mathcal{D}$.*

L'étude des quasi-bigèbres de Lie est rendue facile grâce au twist [6], (appelé en français modification [1]), qui consiste à construire de nouvelles structures de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{F}$ à partir d'une déjà connue; ce qui permet de les étudier en termes de classes d'équivalence ([6], [10]), en montrant que les classes d'équivalence de quasi-bigèbres de Lie modulo modification sont en correspondance biunivoque avec les couples de Manin.

Par le choix d'une base de $\mathcal{F}$ et de sa base duale dans $\mathcal{F}^*$, les conditions définissant une quasi-bigèbre de Lie s'expriment en fonction des composantes c_{ij}^k, f_k^{ij}, et ϕ^{ijk} de μ, γ et ϕ respectivement, comme suit :

3.13. $c_{ij}^m c_{mk}^l + c_{jk}^m c_{mi}^l + c_{ki}^m c_{mj}^l = 0,$

3.14. $c_{mk}^i f_l^{jm} - c_{ml}^i f_k^{jm} - c_{mk}^j f_l^{im} + c_{ml}^j f_k^{im} = c_{kl}^m f_m^{ij},$

3.15. $f_m^{ij} f_l^{mk} + f_m^{jk} f_l^{mi} + f_m^{ki} f_l^{mj} = c_{lm}^i \phi^{jkm} + c_{lm}^j \phi^{kim} + c_{lm}^k \phi^{ijm},$

3.16. $f_m^{kl} \phi^{ijm} + f_m^{il} \phi^{jkm} + f_m^{jl} \phi^{kim} = f_m^{ij} \phi^{lkm} + f_m^{jk} \phi^{lim} + f_m^{ki} \phi^{ljm}.$

Pour une quasi-bigèbre de Lie donnée $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$, nous pouvons définir sur $\bigwedge \mathcal{F}^*$ les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} d_\mu &: \bigwedge^k \mathcal{F}^* \to \bigwedge^{k+1} \mathcal{F}^*, \\ \partial_\gamma &: \bigwedge^k \mathcal{F}^* \to \bigwedge^{k-1} \mathcal{F}^*, \\ i_\phi &: \bigwedge^k \mathcal{F}^* \to \bigwedge^{k-3} \mathcal{F}^*, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} (d_\mu \xi)(x_1 \wedge ... \wedge x_{k+1}) &= \textstyle\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \xi(\mu(x_i, x_j) \wedge x_1 \wedge ... \wedge \hat{x_i} \wedge ... \wedge \hat{x_j} \wedge ... \wedge x_{k+1}), \\ \partial_\gamma(\xi_1 \wedge ... \wedge \xi_k) &= \textstyle\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \gamma(\xi_i, \xi_j) \wedge \xi_1 \wedge ... \wedge \hat{\xi_i} \wedge ... \wedge \hat{\xi_j} \wedge ... \wedge \xi_k, \\ (i_\phi \xi)(x_1 \wedge ... \wedge x_{k-3}) &= \xi(\phi \wedge x_1 \wedge ... \wedge x_{k-3}), \end{aligned}$$

pour $\xi \in \bigwedge^k \mathcal{F}^*$, $\xi_i \in \mathcal{F}^*$, $i = 1, ..., k$, $x_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, ..., k+1$.
L'opérateur d_μ est l'opérateur de Chevalley-Eilenberg (à coefficients triviaux) associé à μ, ∂_γ est le transposé de l'opérateur d_γ associé à γ (γ ne définissant pas une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{F}^*$). Pour plus de détails sur les propriétés de l'opérateur de Chevalley-Eilenberg et de son opérateur transposé, voir par exemple ([11], [15], [16]).
On a le résultat suivant :

Théorème 3.1 *Les opérateurs d_μ, ∂_γ et i_ϕ satisfont les propriétés suivantes :*

3.17. d_μ est une dérivation de degré 1 de $(\bigwedge \mathcal{F}^*, \wedge)$ telle que $d_\mu^2 = 0$, *3.18. ∂_γ est une dérivation du second ordre de $(\bigwedge \mathcal{F}^*, \wedge)$ de degré -1,*

3.19. l'opérateur $d_\mu \partial_\gamma + \partial_\gamma d_\mu$ est une dérivation de $(\bigwedge \mathcal{F}^*, \wedge)$ de degré 0,

3.20. i_ϕ est un opérateur différentiel d'ordre 3 de $(\bigwedge \mathcal{F}^*, \wedge)$ de degré -3 tel que $i_\phi^2 = 0$

3.21. $\partial_\gamma^2 + d_\mu i_\phi + i_\phi d_\mu - i_{\partial_\mu \phi} = 0$,

3.22. $\partial_\gamma i_\phi + i_\phi \partial_\gamma = 0$,

où ∂_μ est l'opérateur transposé de d_μ, défini sur $\bigwedge \mathcal{F}$.

Démonstration : Les propriétés 3.17, 3.18 et 3.19 sont standard et se démontrent exactement comme dans le cas des bigèbres de Lie (voir par exemple ([14], [16]). On voit que ∂_γ est une dérivation du second ordre de $(\bigwedge \mathcal{F}^*, \wedge)$ en utilisant le fait que ∂_γ engendre le crochet $[,]^\gamma$ et la règle de Leibniz graduée pour ce crochet. Prouvons 3.20, 3.21 et 3.22.
3.20. En fait i_ϕ est par définition un opérateur différentiel d'ordre 3 de degré -3 et comme ϕ est de degré impair, on a $i_\phi^2 = 0$.
3.21. Par définition de d_γ et d'après la condition (3.7) de la définition d'une quasi-bigèbre de Lie, on a :

$$d_\gamma^2(X) = \frac{1}{2}[[\gamma,\gamma],X] = -[[\mu,\phi],X] = [\phi,X]^\mu, \forall X \in \bigwedge \mathcal{F}.$$

Mais, l'opérateur d'homologie ∂_μ engendrant le crochet de Schouten algébrique $[,]^\mu$, on a : $\partial_\mu(\phi \wedge X) = (\partial_\mu \phi) \wedge X - \phi \wedge (\partial_\mu X) - [\phi, X]^\mu, \quad \forall X \in \bigwedge \mathcal{F}$, c'est-à-dire $[\phi,X]^\mu = (i^*_{\partial_\mu \phi} - \partial_\mu i^*_\phi - i^*_\phi \partial_\mu)(X), \forall X \in \bigwedge \mathcal{F}$; d'où $d_\gamma^2 = i^*_{\partial_\mu \phi} - \partial_\mu i^*_\phi - i^*_\phi \partial_\mu$. Par transposition, on obtient

$$\partial_\gamma^2 + d_\mu i_\phi + i_\phi d_\mu - i_{\partial_\mu \phi} = 0.$$

3.22. Comme d_γ est une dérivation de $(\bigwedge \mathcal{F}, \wedge)$, on a

$$d_\gamma(\phi \wedge X) = (d_\gamma \phi) \wedge X - \phi \wedge (d_\gamma X), \quad \forall X \in \bigwedge \mathcal{F}.$$

Mais par hypothèse $\delta_\gamma \phi = 0$, ce qui est équivalent à $d_\gamma \phi = 0$; d'où $d_\gamma i^*_\phi + i^*_\phi d_\gamma = 0$. Par transposition, on obtient

$$\partial_\gamma i_\phi + i_\phi \partial_\gamma = 0. \quad \square$$

Remarque 3.4 Pour une bigèbre de Lie $(\mathcal{F}, \mu, \gamma)$, l'opérateur $\mathcal{L} = d_\gamma \partial_\mu + \partial_\mu d_\gamma$ est appelé le **laplacien** de la bigèbre de Lie $(\mathcal{F}, \mu, \gamma)$ ([12], [16]), et l'opérateur transposé $\mathcal{L}^* = d_\mu \partial_\gamma + \partial_\gamma d_\mu$ est le **laplacien** de la bigèbre de Lie duale $(\mathcal{F}^*, \gamma, \mu)$.

Proposition 3.1 *Pour $x \in \mathcal{F}$, on a :*

$$\partial_\gamma i_x + i_x \partial_\gamma = -i_{\gamma(x)}.$$

Démonstration. En effet ce résultat se démontre par un calcul direct. Pour les détails voir par exemple la proposition 1 de [11]. $\square$

Exemple 3.1 Toute bigèbre de Lie est une quasi-bigèbre de Lie; il suffit de prendre $\phi = 0$.

Exemple 3.2 Soit $(\mathcal{F}, \mu)$ une algèbre de Lie. Alors tout choix d'un élément $\mathbf{r} \in \bigwedge^2 \mathcal{F}$ définit une structure de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{F}$ en posant

$$\gamma = \delta_\mu \mathbf{r}, \quad \phi = -\frac{1}{2}[\mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu.$$

Une telle structure est dite strictement exacte ([1], [2]).

Exemple 3.3 Soit $(\mathcal{F}, \mu)$ une algèbre de Lie. Alors tout élément $\mathbf{r} \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}$ de partie symétrique ad^μ-invariante définit une structure de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{F}$ en posant

$$\gamma = \delta_\mu \mathbf{a}, \quad \phi = -\frac{1}{2}[\mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu = -\frac{1}{2}([\mathbf{a}, \mathbf{a}]^\mu + [\mathbf{s}, \mathbf{s}]^\mu),$$

où $\mathbf{a}$ (resp. $\mathbf{s}$) est la partie antisymétrique (resp. symétrique) de $\mathbf{r}$. Une telle structure est dite quasitriangulaire [1], [2].

Exemple 3.4 Soit $(\mathcal{D}, \mathcal{F})$ un couple de Manin; alors tout choix d'un sous-espace supplémentaire isotrope de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{D}$ définit une structure de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{F}$ [6].

4 Algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles

Les algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles sont des généralisations introduites par Getzler des algèbres de Batalin-Vilkovisky différentielles [7] en vue d'applications à la théorie conforme des champs topologique.

Définition 4.1 *Une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle est un quadruplet $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ où A est une algèbre commutative graduée munie d'une dérivation du second ordre Δ de degré -1, d'une dérivation δ de degré 1 et d'un opérateur différentiel Φ d'ordre 3 de degré -3 tels que*

4.1. $\delta^2 = 0$,

4.2. $\delta\Delta + \Delta\delta$ *est un opérateur différentiel du premier ordre,*

4.3. $\Delta^2 + \delta\Phi + \Phi\delta = 0$,

4.4. $\Delta\Phi + \Phi\Delta = \Phi^2 = 0$.

Remarque 4.1 Dans le cas où $\Phi = 0$, le triplet (A, Δ, δ) satisfaisant les conditions 4.1, 4.2 et 4.3 ci-dessus, est une algèbre de Batalin-Vilkovisky différentielle ([7], [11]); le couple (A, Δ) satisfaisant la condition $\Delta^2 = 0$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky.

Tenant compte des degrés des différents opérateurs, une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky peut être définie de manière équivalente en termes de commutateurs gradués d'opérateurs comme suit :

Proposition 4.1 *Un quadruplet $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ où A est une algèbre commutative graduée, Δ une dérivation du second ordre de degré -1 de A, δ une dérivation de degré 1 de A et Φ un opérateur* *différentiel d'ordre 3 de degré -3 de A, est une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle si et seulement si*

4.5. $[\delta, \delta] = 0$,

4.6. $[\delta, \Delta]$ *est un opérateur différentiel du premier ordre,*

4.7. $\frac{1}{2}[\Delta, \Delta] + [\delta, \Phi] = 0$,

4.8. $[\Delta, \Phi] = [\Phi, \Phi] = 0$.

Définition 4.2 *L'opérateur $L = [\delta, \Delta]$ est appelé le laplacien de l'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle $(A, \Delta, \delta, \Phi)$.*

On a le résultat suivant :

Proposition 4.2 *Dans une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle $(A, \Delta, \delta, \Phi)$, le laplacien L commute à la fois avec les opérateurs Δ, δ et Φ, i.e.,*

$$[L, \Delta] = [L, \delta] = [L, \Phi] = 0.$$

Démonstration. En effet, de 4.5 et 4.7, on a :

$$[L, \Delta] = [[\delta, \Delta], \Delta] = -[[\Delta, \Delta], \delta] = [[\delta, \Phi], \delta] = -[[\delta, \delta], \Phi] = 0.$$

De même, $[L, \delta] = 0$ est une conséquence de 4.5. En effet

$$[L, \delta] = [[\delta, \Delta], \delta] = -[[\delta, \delta], \Delta] = 0.$$

Enfin, $[L, \Phi] = 0$ est une conséquence de 4.7 et 4.8. En effet

$$[L, \Phi] = [[\delta, \Delta], \Phi] = -[[\Delta, \Phi], \delta] + \frac{1}{2}[[\Delta, \Delta], \Delta] = 0. \quad \square$$

Ainsi, les trois opérateurs Δ, δ et Φ agissent sur $KerL$ et les relations définissant la structure d'algèbre quasi- Batalin-Vilkovisky différentielle sur A restent en vigueur sur $KerL$. l'opérateur L étant une dérivation sur A, $KerL$ est stable pour le produit défini sur A et par conséquent, $KerL$ est une algèbre commutative graduée dont la structure est induite par celle de A. Dans le cas où $\Phi = 0$, le triplet $(KerL, \Delta, \delta)$ est une algèbre de Gerstenhaber-Batalin-Vilkovisky différentielle (DGBV-algebra) au sens de ([3], [4], [8], [18]).

Nous rappelons maintenant la définition suivante d'une BV_∞-algèbre commutative donnée par Kravchenko [7]:

Définition 4.3 *Soit $A = \bigoplus_i A_i$ un espace vectoriel $\mathbf{Z}$-gradué. Une application linéaire $D : A \to A$ est dite impaire, si $D : A_i \to \bigoplus_k A_{i+2k+1}$, $k \in \mathbf{Z}$ pour chaque i.*

Définition 4.4 *Un triplet (A, d, D) est une BV_∞-algèbre commutative si*

4.9. A est une algèbre commutative graduée,

4.10. $d : A \to A$ est une différentielle de degré 1 de A,

4.11. $D : A \to A$ est un opérateur différentiel impair de carré nul, tel que le degré de $D - d$ est négatif.

On a le résultat suivant :

Théorème 4.1 *Soit $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle; soit $H(KerL, \delta)$ la cohomologie de $KerL$. Alors*

4.12. l'opérateur Δ induit sur $H(KerL, \delta)$ une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky,

4.13. l'opérateur $D = \delta + \Delta + \Phi$ induit sur $KerL$ une structure de BV_∞-algèbre commutative.

Démonstration. Démontrons 4.12. En effet sur $KerL$, on a $\delta\Delta + \Delta\delta = 0$; cela signifie que Δ agit sur $H(KerL, \delta)$. Par ailleurs, d'après 4.3, $\Delta^2 = -(\delta\Phi + \Phi\delta)$, ce qui signifie que sur $H(A, \delta)$, en particulier sur $H(KerL, \delta)$, $\Delta^2 = 0$. Par conséquent $(H(KerL, \delta), \Delta)$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky.

Démontrons 4.13. $KerL$ étant stable par les opérateurs Δ, δ et Φ, il s'ensuit que l'opérateur $D = \delta + \Delta + \Phi$ agit sur $KerL$. Il est clair que l'opérateur $D = \delta + \Delta + \Phi$ est impair, car δ est de degré 1, Δ est de degré -1 et Φ est de degré -3; les mêmes hypothèses montrent que l'opérateur $D - \delta$ est de degré négatif. D'autre part,

$$D^2 = \frac{1}{2}[\delta, \delta] + [\delta, \Delta] + (\frac{1}{2}[\Delta, \Delta] + [\delta, \Phi]) + \frac{1}{2}[\Phi, \Phi].$$

Des conditions 4.5, 4.7 et 4.8, et du fait que $[\delta, \Delta] = 0$ sur $KerL$, on obtient $D^2 = 0$ sur $KerL$. Par conséquent $(KerL, \delta, D)$ est une BV_∞-algèbre commutative avec $D = \sum_n D_n$, où $D_1 = \delta$, $D_2 = \Delta$, $D_3 = \Phi$ et $D_n = 0$ pour $n \geq 4$. $\square$

Nous venons ainsi de montrer que si $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ est unimodulaire, c'est-à-dire $L = 0$, alors A est munie d'une structure de BV_∞-algèbre et $(H(A, \delta), \Delta)$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky. Dans ces conditions, tenant compte des degrés des commutateurs gradués des différents opérateurs, on voit que les conditions 4.5-4.8 sont équivalentes à la nullité du carré de l'opérateur $\delta + \Delta + \Phi$.

Dans le cas général, $H(KerL, \delta)$ est munie d'une structure d'algèbre de Gerstenhaber "exacte" ([11], [20]) dont le crochet de Lie est défini par

$$[a, b]_\Delta = (-1)^{|a|}(\Delta(ab) - (\Delta a)b - (-1)^{|a|}a(\Delta b)),$$

pour $a, b \in H(KerL, \delta)$.

Soit $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ une algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle. Associons à l'opérateur $D = \delta + \Delta + \Phi$ les applications linéaires suivantes $\Phi_D^n : \bigwedge^n KerL \to KerL$ définies par

$$\Phi_D^1(a) = D(a),$$

$$\begin{aligned}\Phi_D^{n+1}(a_1,...,a_{n+1}) &= \Phi_D^n(a_1,...,a_n a_{n+1}) - (\Phi_D^n(a_1,...,a_n))a_{n+1}\\ &\quad -(-1)^{|a_n|(|a_1|+...+|a_{n-1}|+1)} a_n \Phi_D^n(a_1,...,a_{n-1},a_{n+1}),\end{aligned}$$

pour $a, a_1, ..., a_{n+1} \in KerL$.
Posons

$$[a,b]_D = (-1)^{|a|}\Phi_D^2(a,b) = (-1)^{|a|}(D(ab) - (Da)b - (-1)^{|a|}a(Db)), \quad \forall a, b \in KerL.$$

On a le résultat suivant:

Proposition 4.3 *Les applications linéaires Φ_D^n et le crochet $[,]_D$ ci-dessus définis satisfont les propriétés suivantes :*
4.14. $(\Phi_D^1)^2 = 0$,
4.15. Φ_D^1 *est une dérivation du crochet* $[,]_D$,
4.16. $\Phi_D^1\Phi_D^2 + \Phi_D^2\Phi_D^1 = 0$,
4.17. $(\Phi_D^2)^2 + \Phi_D^1\Phi_D^3 + \Phi_D^3\Phi_D^1 = 0$,
4.18. $\Phi_D^2\Phi_D^3 + \Phi_D^3\Phi_D^2 = (\Phi_D^3)^2 = 0$,
4.19. $\Phi_D^n = 0$, *pour* $n \geq 4$.

Démonstration. D'après le théorème 4.1, D est un opérateur impair de carré nul sur $KerL$. Ainsi, la propriété 4.14 est évidente. Montrons à présent la propriété 4.15. En effet, pour $a, b \in KerL$, on a :

$$\begin{aligned}\Phi_D^1[a,b]_D &= (-1)^{|a|}D(D(ab) - (Da)b - (-1)^{|a|}a(Db)) = -(-1)^{|a|}D((Da)b) - D(a(Db))\\ &= -(-1)^{|a|}((-1)^{|a|+|D|}D(a)D(b) + (-1)^{|a|+|D|}[Da,b]_D)\\ &\quad -(D(a)D(b) + (-1)^{|a|}[a,Db]_D) = [Da,b]_D + (-1)^{|a|+1}[a,Db]_D\\ &= [\Phi_D^1(a),b]_D + (-1)^{|a|+|D|}[a,\Phi_D^1(b)]_D;\end{aligned}$$

d'où 4.15.
Démontrons 4.16. En effet, pour $a, b \in KerL$, on a :

$$\begin{aligned}(\Phi_D^1\Phi_D^2)(a,b) &= D(D(ab) - (Da)b - (-1)^{|a|}a(Db)) = -D((Da)b) - (-1)^{|a|}D(a(Db))\\ (\Phi_D^2\Phi_D^1)(a,b) &= \Phi_D^2(Da,b) + (-1)^{|a|}\Phi_D^2(a,Db)\\ &= D((Da)b) - (-1)^{|a|+|D|}(Da)(Db) + (-1)^{|a|}D(a(Db)) - (-1)^{|a|}(Da)(Db)\\ &= D((Da)b) + (-1)^{|a|}D(a(Db));\end{aligned}$$

d'où $\Phi_D^1\Phi_D^2 + \Phi_D^2\Phi_D^1 = 0$.
Les propriétés 4.17 et 4.18 se démontrent aussi par un calcul direct mais long; en fait elles découlent de la proposition 2 de [8], tandis que la propriété 4.19 est une conséquence du fait que D est par définition un opérateur au plus d'ordre 3, car δ est d'ordre 1, Δ est du second ordre et Φ est d'ordre 3. □

Remarque 4.2 La propriété 4.17 exprime le fait que le crochet $[,]_D$ ne vérifie pas l'identité de Jacobi graduée et ne définit donc pas une structure d'algèbre de Lie graduée sur $KerL$; toutefois, il définit une structure d'algèbre de Lie sur $H(KerL, D)$. Par ailleurs, les propriétés

4.15 et 4.16 sont équivalentes. En effet $\Phi_D^1\Phi_D^2+\Phi_D^2\Phi_D^1=0$ si et seulement si $\Phi_D^1(\Phi_D^2(a,b))=-\Phi_D^2((\Phi_D^1(a))\wedge b+(-1)^{|a|}a\wedge\Phi_D^1(a)),\forall a,b\in KerL$ i.e.,

$$\begin{aligned}(-1)^{|a|}\Phi_D^1[a,b]_D &= -\Phi_D^2((Da),b)-(-1)^{|a|}\Phi_D^2(a,(Db))\\ &= -(-1)^{|a|+|D|}[Da,b]_D-(-1)^{2|a|}[a,Db]_D=(-1)^{|a|}[Da,b]_D-[a,Db]_D;\end{aligned}$$

d'où $\Phi_D^1[a,b]_D=[\Phi_D^1(a),b]_D+(-1)^{|a|+|D|}[a,\Phi_D^1(b)]_D$.

Soit $A=\bigwedge\mathcal{F}^*$, où $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel de dimension finie. Soient Δ,δ,Φ respectivement une dérivation du second ordre de degré -1, une dérivation de degré 1 et un opérateur d'ordre 3 de degré -3, de A. Alors, d'après ce qui précède, ces trois opérateurs s'expriment en fonction des opérateurs a_i et b^i comme suit :

$$\Delta=f_k^{ij}a_ia_jb^k+p^ia_i,\quad \delta=c_{ij}^kb^ib^ja_k,\quad \Phi=\frac{1}{3}\phi^{ijk}a_ia_ja_k,$$

avec

$$f_k^{ij}+f_k^{ji}=0,\quad c_{ij}^k+c_{ji}^k=0,\quad \phi^{ijk}=-\phi^{jik}=-\phi^{ikj}.$$

Remarque 4.3 Les coefficients $c_{ij}^k,f_k^{ij},\phi^{ijk}$ ci-dessus définis sont les doubles de ceux définis dans [6].

On a le résultat suivant :

Proposition 4.4 *Pour Δ,δ,Φ définis ci-dessus, on a :*

4.19. $\delta^2=0$ si et seulement si les coefficients c_{ij}^k sont les constantes de structure d'une algèbre de Lie, i.e., satisfont la relation 3.13.

4.20. $\Delta\delta+\delta\Delta$ est un opérateur du premier ordre si et seulement si les coefficients c_{ij}^k et f_k^{ij} satifont la relation 3.14.

4.21. $\Delta^2+\delta\Phi+\Phi\delta=0$ si et seulement si les coefficients $c_{ij}^k,f_k^{ij},\phi^{ijk}$ et p^i satisfont les relations 3.15 et

$$p^kf_k^{ij}=c_{mk}^j\phi^{kmi}-c_{km}^i\phi^{kmj}.$$

4.22. $\Delta\Phi+\Phi\Delta=0$ si et seulement si les coefficients f_k^{ij} et ϕ^{ijk} satisfont la relation 3.16.

Démonstration. Ces différentes propriétés se démontrent aisément par un calcul direct en utilisant les propriétés des opérateurs a_i et b^j, notamment l'antisymétrie et les relations de commutation canoniques. Les propriétés 4.19 et 4.20 découlent du lemme 3.3 et de la proposition 3.4 de [7]. Prouvons 4.21 et 4.22.

4.21. D'après le lemme 3.2 de [7], on a

$$\Delta^2=2f_l^{mi}f_m^{jk}b^la_ia_ja_k+2p^kf_k^{ij}a_ia_j.$$

D'autre part en utilisant l'antisymétrie et les relations de commutation canoniques, on a

$$\delta\Phi=-2c_{ij}^k\phi^{jmn}b^ia_ma_na_k-2c_{ij}^k\phi^{ijm}a_ma_k-\Phi\delta$$

Ainsi, par identification, $\Delta^2 + \delta\Phi + \Phi\delta = 0$ si et seulement si on a 3.15 et

$$p^k f_k^{ij} = c_{km}^j \phi^{kmi} - c_{km}^i \phi^{kmj};$$

ce qui prouve 4.21.

4.22. En utilisant de nouveau l'antisymétrie et les relations de commutation canoniques, on a

$$\Delta\Phi = f_k^{ij} \phi^{kmn} a_i a_j a_m a_n - \Phi\Delta;$$

d'où $\Delta\Phi + \Phi\Delta = 0$ si et seulement si on a 3.16. $\square$

Remarque 4.4 En posant $x = p^k e_k$ et $\phi = \frac{1}{3}\phi^{ijk} e_i \wedge e_j \wedge e_k$, où (e_i) est une base de $\mathcal{F}$, la relation $p^k f_k^{ij} = c_{km}^j \phi^{kmi} - c_{km}^i \phi^{kmj}$ dans 4.21 est équivalente à $\partial_\mu \phi = \gamma(x)$ où les c_{ij}^k (resp. f_k^{ij}) sont les coefficients de μ (resp. γ).

Ainsi, on vient de prouver que si $(A, \Delta, \delta, \Phi)$ est une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\bigwedge \mathcal{F}^*$, alors il existe un crochet de Lie μ sur $\mathcal{F}$, un co-crochet γ sur $\mathcal{F}$, $\phi \in \bigwedge^3 \mathcal{F}, x_0 \in \mathcal{F}$ tels que

$$\Delta = \partial_\gamma + i_{x_0}, \quad \delta = d_\mu, \quad \Phi = i_\phi,$$

et $\partial_\mu \phi = \gamma(x_0)$.

5 Correspondance entre quasi-bigèbres de Lie et algèbres quasi-Batalin-Vilkovisky différentielles

Dans cette section, nous établissons une bijection entre certaines structures de quasi-bigèbre de Lie sur un espace vectoriel $\mathcal{F}$ de dimension finie et les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\bigwedge \mathcal{F}^*$. Plus précisément :

Théorème 5.1 *Soit $\mathcal{F}$ un espace vectoriel de dimension finie. Les structures de quasi-bigèbre de Lie $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ sur $\mathcal{F}$ telles que $\partial_\mu \phi \in Im\gamma$, sont en correspondance bijective avec les structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\bigwedge \mathcal{F}^*$.*

Démonstration. Ce théorème est une conséquence des propositions 3.1 et 4.4 et du théorème 3.1. En effet :

Soit $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ une structure de quasi-bigèbre de Lie sur $\mathcal{F}$ telle que $\partial_\mu \phi \in Im\gamma$, i.e., il existe $x_0 \in \mathcal{F}$ tel que $\gamma(x_0) = \partial_\mu \phi$. Posons

$$A = \bigwedge \mathcal{F}^*, \quad \Delta = \partial_\gamma + i_{x_0}, \quad \delta = d_\mu, \quad \Phi = i_\phi.$$

Il est clair d'après le théorème 3.1 que Δ est une dérivation du second ordre de degré -1 de A, δ est une dérivation de degré 1 de A de carré nul et Φ est un opérateur d'ordre 3 de degré -3 de A. De plus, $L = [\delta, \Delta] = [d_\mu, \partial_\gamma] + [d_\mu, i_{x_0}]$. D'après le théorème 3.1, $[d_\mu, \partial_\gamma]$ est une dérivation de A; comme i_{x_0} est une dérivation de A, $[d_\mu, i_{x_0}]$ l'est aussi, étant le commutateur gradué de deux dérivations de A. Par conséquent L est un opérateur d'ordre 1 de A.

De la définition de Δ, on a $\Delta^2 = \partial_\gamma^2 + \partial_\gamma i_{x_0} + i_{x_0}\partial_\gamma$; du théorème 3.1 et de la proposition 3.1, on obtient $\Delta^2 + \delta\Phi + \Phi\delta = 0$. Enfin les conditions $\Delta\Phi + \Phi\Delta = 0$ et $\Phi^2 = 0$ suivent par le théorème 3.1. En définitive, $(A, \Delta, \delta, \phi)$ est une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\bigwedge \mathcal{F}^*$.

La réciproque suit par la proposition 4.3. $\square$

Remarque 5.1 Dans les conditions du théorème 5.1, le laplacien de l'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle correspondante est donné par $L = [d_\mu, \partial_\gamma] + ad_{x_0}^{*\mu}$.

Corollaire 5.1 *A toute structure de quasi-bigèbre de Lie strictement exacte sur un espace vectoriel $\mathcal{F}$ de dimension finie, il correspond une structure d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\bigwedge \mathcal{F}^*$.*

Démonstration. En effet, soit $(\mathcal{F}, \mu, \gamma, \phi)$ une structure de quasi-bigèbre de Lie strictement exacte sur $\mathcal{F}$, i.e., il existe $\mathbf{r} \in \bigwedge^2 \mathcal{F}$ tel que

$$\gamma = \delta_\mu \mathbf{r}, \qquad \phi = -\frac{1}{2}[\mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu.$$

Le co-crochet γ est défini explicitement par

$$\gamma(x) = ad_x^\mu \mathbf{r} = [x, \mathbf{r}]^\mu, \quad \forall x \in \mathcal{F}.$$

∂_μ étant une dérivation dans $(\bigwedge \mathcal{F}, [,]^\mu)$, on a

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi &= -\tfrac{1}{2}\partial_\mu([\mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu) = -\tfrac{1}{2}([\partial_\mu \mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu - [\mathbf{r}, \partial_\mu \mathbf{r}]^\mu) \\ &= -[\partial_\mu \mathbf{r}, \mathbf{r}]^\mu = -\gamma(\partial_\mu \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Ainsi, $\partial_\mu \phi \in Im\gamma$ et la conclusion suit par le théorème 5.1. $\square$

Remarque 5.2 Dans les conditions du corollaire 5.1, l'opérateur Δ et le laplacien L sont définis explicitement par $\Delta = [i_\mathbf{r}, d_\mu] - 2i_{\mathbf{r}_0}$ et $L = -2ad_{\mathbf{r}_0}^{*\mu}$, où $\mathbf{r}_0 = \partial_\mu \mathbf{r} = -\mu(\mathbf{r})$. En effet, la restriction de d_γ à $\mathcal{F}$ est l'opposé du cocycle γ, i.e., $d_\gamma(x) = -\gamma(x) = [\mathbf{r}, x]^\mu, \quad \forall x \in \mathcal{F}$. En utilisant le fait que d_γ est une dérivation dans $(\bigwedge \mathcal{F}, \wedge)$, on montre que

$$d_\gamma(X) = [\mathbf{r}, X]^\mu, \quad \forall X \in \bigwedge \mathcal{F}.$$

L'opérateur d'homologie ∂_μ engendrant le crochet de Schouten algébrique $[,]^\mu$, on a $\partial_\mu(\mathbf{r} \wedge X) = (\partial_\mu \mathbf{r}) \wedge X + \mathbf{r} \wedge (\partial_\mu X) + [\mathbf{r}, X]^\mu$, i.e., $d_\gamma = \partial_\mu i_\mathbf{r}^* - i_\mathbf{r}^* \partial_\mu - i_{\mathbf{r}_0}^*$. D'où par transposition $\partial_\gamma = i_\mathbf{r} d_\mu - d_\mu i_\mathbf{r} - i_{\mathbf{r}_0} = [i_\mathbf{r}, d_\mu] - i_{\mathbf{r}_0}$. D'après les formules $\Delta = \partial_\gamma + i_{x_0}$ et $\partial_\mu \phi = -\gamma(\partial_\mu \mathbf{r})$, on a

$$\Delta = \partial_\gamma + i_{(-\partial_\mu \mathbf{r})} = [i_\mathbf{r}, d_\mu] - 2i_{\mathbf{r}_0}.$$

Par ailleurs, d'après la définition de L et de ce qui précède, on a :

$$L = [\delta, \Delta] = [d_\mu, [i_\mathbf{r}, d_\mu]] - 2[d_\mu, i_{\mathbf{r}_0}] = -2[d_\mu, i_{\mathbf{r}_0}].$$

En utilisant le fait que ∂_μ engendre le crochet $[,]^\mu$, on a :

$$< L(\xi), X >= 2 < \xi, [\mathbf{r}_0, X]^\mu = -2 < ad^{*\mu}_{\mathbf{r}_0}\xi, X >, \quad \forall \xi \in \bigwedge \mathcal{F}^*, \forall X \in \bigwedge \mathcal{F};$$

d'où

$$L = -2ad^{*\mu}_{\mathbf{r}_0}.$$

Ainsi une large classe de structures d'algèbre quasi-Batalin-Vilkovisky différentielle est fournie par celles associées aux structures de quasi-bigèbre jacobienne strictement exactes.

Remarque 5.3 Dans le cas où $\phi = 0$, $(\mathcal{F}, \mu, \gamma)$ est une structure de bigèbre de Lie sur $\mathcal{F}$. Un élément $x \in \mathcal{F}$ tel que $\gamma(x) = \partial_\mu \phi$ est alors un élément de $ker\gamma$; c'est-à-dire un "co-caractère de la co-algèbre de Lie $(\mathcal{F}, \gamma)$". Ainsi, nous retrouvons le résultat de Getzler [7] qui établit une correspondance bijective entre les structures de bigèbre de Lie sur un espace vectoriel $\mathcal{F}$ de dimension finie, muni d'un co-caractère et les structures d'algèbre de Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\bigwedge \mathcal{F}^*$. Dans ce cas, nous pouvons introduire une paramétrisation sur les structures d'algèbre de Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\bigwedge \mathcal{F}^*$ en termes de co-caractère. En effet, soit $(\mathcal{F}, \mu, \gamma)$ une structure de bigèbre de Lie sur $\mathcal{F}$. Pour tout co-carctère x de $(\mathcal{F}, \gamma)$, posons

$$\Delta_x = \partial_\gamma + i_x, \quad \delta = d_\mu.$$

Alors de ce qui précède, $(\bigwedge \mathcal{F}^*, \Delta_x, \delta)$ est une algèbre de Batalin-Vilkovisky différentielle. Un calcul explicite ([5],[16]) montre que le laplacien d'une telle algèbre de Batalin-Vilkovisky différentielle est donné par $L = \frac{1}{2}(ad^\gamma_{\xi^\mu} - ad^{*\mu}_{x^\gamma}) + ad^{*\mu}_x$, où $\xi^\mu \in \mathcal{F}^*$ et $x^\gamma \in \mathcal{F}$ sont définis respectivement par $\xi^\mu(y) = tr(ad^\mu_y), y \in \mathcal{F}$ et $x^\gamma(\eta) = tr(ad^\gamma_\eta), \eta \in \mathcal{F}^*$. L'élément $0 \in \mathcal{F}$ est naturellement un co-caractère trivial, et la structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky différentielle obtenue $(\bigwedge \mathcal{F}^*, \Delta_0, \delta)$ est la structure standard donnée en exemple dans [11]. i_x étant une dérivation sur $(\bigwedge \mathcal{F}^*, \wedge)$, il est évident que tous les opérateurs Δ_x ainsi construits engendrent le même crochet de Batalin-Vilkovisky $[,]_{\Delta_0}$; donc à toutes les structures d'algèbre de Batalin-Vilkovisky (A, Δ_x), il correspond la même algèbre de Gerstenhaber. Notons enfin que $(\bigwedge \mathcal{F}^*, \Delta_0, \delta)$ étant une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\bigwedge \mathcal{F}^*$, alors $(\bigwedge \mathcal{F}, \delta^*, \Delta_0^*)$ est une structure d'algèbre de Batalin-Vilkovisky différentielle sur $\bigwedge \mathcal{F}$, car μ et γ jouent des rôles duaux pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^*$.

Remerciements. L'auteur tient à remercier Madame Y. Kosmann-Schwarzbach pour ses différentes remarques et suggestions sur le contenu du travail. Les remerciements vont également au Centre **Abdus Salam** ICTP pour l'hospitalité et le soutien materiel, qui ont permis la réalisation de ce travail.

This work was done within the Associateship Scheme of the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy. Financial support from the Swedish International Development Cooperation Agency is acknowledged.

References

[1] M. Bangoura, *Quasi-bigèbres jacobiennes et généralisations des groupes de Lie-Poisson*, Thèse, Université de Lille 1, (1995).

[2] M. Bangoura, Y. Kosmann-Schwarzbach, *The double of a Jacobian quasi-bialgebra*, Lett. Math. Physics, 28 (1993) 13-29.

[3] S. Barannikov, M. Kontsevich, *Frobenius Manifolds and formality of Lie algebras of polyvector fields*, Internat. Math. Res. Notices 4 (1998) 201-215.

[4] H-D. Cao, J. Zhou, *On quasi-isomorphic DGBV algebras*, Preprint math.DG/9904168.

[5] V.G. Drinfeld, *On almost cocommutative Hopf algebras*, Leningrad Math. J., 1 (2) (1990) 331-342.

[6] V.G. Drinfeld, *Quasi-Hopf algebras*, Leningrad Math. J., 1 (6) (1990), 1419-1457.

[7] E. Getzler, *Manin pairs and topological conformal field theory*, Annals of Physics 237 (1995) 161-201.

[8] O. Kravchenko, *Deformations of Batalin-Vilkovisky algebras*, Preprint math.QA/9903191, Banach Center Publications, à paraître.

[9] B. Kostant, S. Sternberg, *Symplectic reduction, BRS cohomology and infinite-dimensional Clifford algebras*, Ann. Phys. (N.Y) 176 (1987) 59-113.

[10] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Jacobian quasi-bialgebras and quasi-Poisson Lie groups*, Contemporary Mathematics 132 (1992) 459-489.

[11] Y. Kosmann-Schwarzbach, *Exact Gerstenhaber algebras and Lie bialgebroids*, Acta App. Math. 41 (1995) 153-165.

[12] Y. Kosmann-Shwarzbach, *Modular vector fields and Batalin-Vilkovisky algebras*, Banach Center Publications, à paraître.

[13] Y. Kosmann-Schwarzbach, F. Magri, *Poisson-Nijenhuis Structures*, Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Théor., 53 (1990) 35-81.

[14] J.L. Koszul, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. Soc. Math. France, 78 (1950) 65-127.

[15] J.L. Koszul, *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*, Astérisque, hors série, Soc. Math. France, Paris (1985) 257-271.

[16] J.H. Lu, *Lie bialgebras and Lie algebra cohomology*, Preprint 1996.

[17] P. Lecomte, C. Roger, *Modules et cohomologie des bigèbres de Lie*, Comptes rendues Acad. Sci. Paris Série I, 310 (1990) 405-410 et 311 (1990) 893-894.

[18] Y.I. Manin, *Three constructions of Frobenius manifolds : A comparative study*, in Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology and Moduli Spaces, Amer. Math. Soc., 1999.

[19] A. Nijenhuis, R.W. Richardson Jr., *Deformations of Lie algebra structures*, J. Math. and Mech., 17 (1) (1967) 89-105.

[20] P. Xu, *Gerstenhaber algebras and BV-algebras in Poisson geometry*, Comm. Math. Phys., 200 (1999) 545-560.