Available at: http://www.ictp.trieste.it/~pub_off IC/98/167

United Nations Educational Scientific and Cultural Organization
and
International Atomic Energy Agency
THE ABDUS SALAM INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

ORTHOGONALITÉ ET SPECTRE LOCAL

H. Lbjaoui
Faculté des Sciences de Rabat, Département de Mathematiques et Informatique, BP 1014 Agdal, Rabat, Morocco

and

E.H. Zerouali[1]
Faculté des Sciences de Rabat, Département de Mathematiques et Informatique, BP 1014 Agdal, Rabat, Morocco[2]
and
The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

Abstract

Let X be a Banach space and X^* its dual space, for $T \in L(X)$ we denote by T^* its adjoint. We show that if $x \in X$ and $x^* \in X^*$ have disjoint local spectrum with empty interior, therfore $(x, x^*) = 0$. This provides a simple proof and a generalization of a result of J.Finch.

MIRAMARE – TRIESTE
October 1998

[1]Regular Associate of the Abdus Salam ICTP. E-mail: zerouali@frs.ac.ma
[2]Permanent address.

1 INTRODUCTION

Soient X un espace de Banach de dual X^* et $T \in L(X)$ un opérateur continu sur X. On note par $T^* \in L(X^*)$ l'adjoint de T, $\sigma(T)$ son spectre $\rho(T) = \mathbb{C}\backslash\sigma(T)$ son résolvent et par $R_T : \lambda \in \rho(T) \to (T-\lambda)^{-1}$ sa fonction résolvente. Pour tout $x \in X$ l'application $\lambda \in \rho(T) \to (T-\lambda)^{-1}x \in X$ peut admettre des extensions analytiques qu'on appelera résolventes locales de T en X, on notera $\rho(x,T)$ l'ouvert maximal sur lequel $R_T(\lambda)x$ admet une extension, le fermé $\sigma(x,T) = \mathbb{C}\backslash\rho(x,T)$ est appelé le spectre local de T en x. Lorsque l'extension maximale de $R_T(\lambda)x$ est unique, on dit que T possède la propriété d'extension unique $(SVEP)$. Il est clair que $\sigma(x,T) \subset \sigma(T)$ et qu'il est non vide, pour x non nul, lorsque T possède la $(SVEP)$. Un calcul direct montre que T n' admet pas la $(SVEP)$, si et seulement si, on peut trouver un ouvert O et $F : O \to X$ une fonction analytique non nulle satisfaisant: $(T-\lambda)F(\lambda) = 0$. En considérant les fonctions G_1, G_2 définies par:
$G_1(\mu) = \frac{F(\lambda)}{\lambda-\mu} \quad \mu \neq \lambda$
$G_2(\mu) = \begin{cases} \frac{F(\lambda-F(\mu)}{\lambda-\mu} & \mu \in O\backslash\lambda \\ F'(\lambda) & \mu = \lambda \end{cases}$
on voit que l'équation $(T-\mu)G(\mu) = F(\lambda)$ admet des solutions analytiques sur tout $\mathbb{C}$. Donc $\sigma(F(\lambda),T) = \emptyset$ pour tout $\lambda \in O$ et par suite on a l'équivalence, T a la $(SVEP)$ si et seulement si $\sigma(x,T) \neq \emptyset$ pour tout x non nul. Pour une étude détaillée des propriétés du spectre local nous renvoyons le lecteur aux références [2] et [4]. Lorsque T et T^* ont la $(SVEP)$, Bishop [1] montre que pour tout $x \in X$ et $x^* \in X^*$ satisfaisant $\sigma(x,T) \cap \sigma(x^*,T^*) = \emptyset$ on a $(x,x^*) = 0$. En remarquant que ce résultat n'est pas vrais si T ne satisfait pas la $(SVEP)$, J.Finch établit dans [3] le résultat suivant.

Proposition 1.1 *, Soient $x \in X$ et $x^* \in X^*$ si $\sigma(x,T) = \sigma(x^*,T^*) = \emptyset$ alors $(x,x^*) = 0$.*

Nous donnons dans ce travail des extensions de ce résultat en utilisant une méthode inspirée directement du travail de Bishop [1] simplifiant par la même occasion la preuve de [3].

2 Ortogonalité et spectre local

Pour une partie $F \in \mathbb{C}$, on note F^0 son interieur. Le théorème suivant généralise le théorème de J.Finch [3].

Théorème 2.1 *Soient $T \in L(X)$, $x \in X$ et $x^* \in X^*$. Si*
$\sigma(x,T) \cap \sigma(X^*,T^*) = \emptyset$ et que $\sigma(x,T)^0 = \sigma(X^*,T^*)^0 = \emptyset$
alors $(x,x^*) = 0$.

Preuve: Pour tout $\lambda \in \rho(x,T)$, il existe D_λ un voisinage ouvert de λ et $f_\lambda : D_\lambda \to X$ analytique satisfaisant $(T-\mu)f_\lambda(\mu) = x, (\mu \in D_\lambda)$ et pour tout $\lambda \in \rho(x^*,T^*)$, on peut

trouver D^*_λ , $f^*_\lambda : D^*_\lambda \to X^*$ analytique tels que $(T^* - \mu)f^*_\lambda(\mu) = x^*, (\mu \in D^*_\lambda)$. En écrivant $\rho(x,T) = \cup_{\lambda\in\rho(x,T)} D_\lambda$ et $\rho(x^*,T^*) = \cup_{\lambda\in\rho(x^*,T^*)} D^*_\lambda$
et en utilisant notre hypothèse on a:

$$\mathbb{C} = \cup_{\lambda\in\rho(x,T)} D_\lambda \cup \cup_{\lambda\in\rho(x^*,T^*)} D^*_\lambda$$

Soit h la fonction définie par:
$h(\mu) = \begin{cases} (f_\lambda(\mu), x^*) & \text{si} \quad \mu \in D_\lambda \\ (x, f^*_\lambda(\mu)) & \text{si} \quad \mu \in D^*_\lambda \end{cases}$
Montrons que cette fonction est bien définie. On a trois cas à étudier:

- $\mu \in D_\lambda \cap D^*_{\lambda'}$ on aura:
$\begin{aligned}(f_\lambda(\mu), x^*) &= (f_\lambda(\mu), (\mu - T^*)f^*_{\lambda'}(\mu)) \\ &= ((\mu - T)f_\lambda(\mu), f^*_{\lambda'}(\mu)) \\ &= (x, f^*_\lambda(\mu))\end{aligned}$

- $\mu \in D_\lambda \cap D_{\lambda'}$ ouvert, comme $\overline{\rho(x^*,T^*)} = \mathbb{C}$, il existe $\lambda" \in \mathbb{C}$ telque l'ouvert $V =: D_\lambda \cap D_{\lambda'} \cap D^*_{\lambda"}$ soit non vide, on obtient alors d'après le premier cas, pour tout $\mu \in V$:
$$(f_\lambda(\mu), x^*) = (x, f^*_{\lambda'}(\mu)) = (f_{\lambda"}(\mu), x^*)$$
h étant analytique. l'égalité s'étend à $D_\lambda \cap D_{\lambda'}$.

- $\mu \in D^*_\lambda \cap D^*_{\lambda'}$ s'obtient de la même manière que le deuxième cas.

Comme pour μ assez grand: $|h(\mu)| = |(T - \mu)^{-1}x, x^*)| \leq \|(T - \mu)^{-1}\|.\|x\|.\|x^*\|$, on a $\lim_{|\mu|\to\infty} h(\mu) = 0$. Donc h est identiquement nulle, et par suite $(x, x^*) = \hat{f}(0) = 0$.
Le corollaire suivant est une réciproque partiel du théorème 5 de [3]

Corollaire 2.2 *Soit T un opérateur continu sur X et supposons que l'ensemble $X_T(\emptyset) =: \{x \in X, \sigma(x,T) = \emptyset\}$ est dense dans X . Alors T^* admet la $(SVEP)$ et on a pour tout $x^* \in X^*$ non nul, $(\sigma(x^*, T*))^0 \neq \emptyset$.*

Preuve, Soit $x^* \in X^*$ telque $(\sigma(x^*, T*))^0 = \emptyset$. Donc d'après le théorème.2.1 $(x, x*) = 0$ pour tout $x \in X_T(\emptyset)$. d'ou $x = 0$.

Le thérème 2.1 peut s'ecrire de plusieures manières pourvu que la fonction h de notre preuve soit partout définie.

Théorème 2.3 *Soient $x \in X$ et $x^* \in X^*$. On a $(x, x*) = 0$ dans chacun des cas suivants:*
1. T satisfait la SVEP, $(\sigma(x,T))^0 = \emptyset$ et $\sigma(x,T) \cap \sigma(x^*,T^*) = \emptyset$.
2. T^* a la SVEP, $(\sigma(x^*,T^*))^0 = \emptyset$ et $\sigma(x,T) \cap \sigma(x^*,T^*) = \emptyset$.
3. $\sigma(x,T) = \sigma(x^*, T*) = \emptyset$. J.Finch [3].
4. T et T^* ont la SVEP et $\sigma(x,T) \cap \sigma(x^*, T*) = \emptyset$. E.Bishop [1]

REMERCIEMENT: Le deuxième auteur a été soutenu par l' ICTP de Trieste où une partie de ce travail a été réalisée. Il tient á exprimer ses remerciements. This work was done within the framework of the Associateship Scheme of the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

References

[1] E.Bishop A duality theory for arbitrary operators, Pacific Journal of Math 9(1959)379-397

[2] I. Colojoara and C.Foias "Theory of Generalized Spectral Operators", Gordon and breach, New York, 1968.

[3] J.Finch, On the local spectrum and the adjoint Pacific Journal of Math 94(1981)297-302.

[4] R.Lange and S.W.Wang, New approaches in spectral decomposition, Contemporary mathematics, Amer.Math.Soc.Providence Rhode Island(128) 1992.