Available at: `http://www.ictp.trieste.it/~pub_off` IC/98/166

United Nations Educational Scientific and Cultural Organization
and
International Atomic Energy Agency

THE ABDUS SALAM INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

CLASSES DE SHIFS DÉCOMPOSABLES SUR LES ÉSPACES DE BEURLING

H. Mahzouli
Faculté des Sciences de Rabat, Département de Mathematiques et Informatique, BP 1014 Agdal, Rabat, Morocco

and

E.H. Zerouali[1]
Faculté des Sciences de Rabat, Département de Mathematiques et Informatique, BP 1014 Agdal, Rabat, Morocco[2]
and
The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

Abstract

The main aim of this paper is to study classes of decomposable shifts on Beurling spaces. Necessary conditions to be decomposable are given. We introduce the multiplier algebras of Beurling spaces which allow us to prove a classification theorem for decomposable weighted shifts.

MIRAMARE – TRIESTE
October 1998

[1]Regular Associate of the Abdus Salam ICTP. E-mail: zerouali@frs.ac.ma
[2]Permanent address.

1 INTRODUCTION

On désigne par $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de réels dans $[1,+\infty[$ et par

$$A_\omega = \{f \in C(\Gamma), \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|\omega(n) < +\infty\}$$

où Γ est le cercle unité et $\hat{f}(n)$ le nièmme coéfficient de Fourier de f. A_ω muni de la norme $\|f\|_\omega = \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(n)|\omega(n)$ est un espace de Banach.
Considerons le shift sur A_ω

$$\begin{array}{rlcl} S_\omega : & A_\omega & \longrightarrow & A_\omega \\ & \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\alpha^n & \longrightarrow & \Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\hat{f}(n)\alpha^{n+1} \end{array}$$

où α est la fonction position sur Γ définie par $\alpha(e^{it}) = e^{it}$.
S_ω est un opérateur continu et inversible lorsque

$$0 < \inf_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\omega(k)}{\omega(k+1)}\right) \leq \sup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\omega(k)}{\omega(k+1)}\right) < +\infty \tag{1}$$

Dans ce cas pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a:

$$\|(S_\omega)^n\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\omega(k+n)}{\omega(k)}\right)$$

On notera $\tilde{\omega}(n) = \|(S_\omega)^n\|$. Soient $R = \limsup_{n\to+\infty}\tilde{\omega}(n)^{\frac{1}{n}}$ et $r = \limsup_{n\to-\infty}\tilde{\omega}(n)^{\frac{1}{n}}$.
Le spectre de S_ω est la courone $\{z \in \mathbb{C}, r \leq |z| \leq R\}$ (voir [8] par exemple).
Rappellons que A_ω est un espace régulier (i.e. on peut trouver des fonctions dans A_ω à support arbitrairement petit) si et seulement si $\Sigma_{n\in\mathbb{Z}}\frac{Log\omega(n)}{n^2+1} < +\infty$ (voir [1], [2]). On dira dans ce cas que $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite régulière.
On étudie dans ce travail différents concepts de décomposabilité de S_ω, on généralise notamment certains résultats de [9] et on retrouve ceux de [7] dans le cas où A_ω est une algèbre.

2 Multiplicateur de A_ω

On supposera dans la suite de ce travail que $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est une suite satisfaisant (1). On dira qu'une fonction f définie sur Γ est un multiplicateur de A_ω si l'application

$$\begin{array}{rlcl} M_f : & A_\omega & \longrightarrow & A_\omega \\ & g & \longrightarrow & fg \end{array}$$

est un opérateur borné. On notera M_ω l'espace des multiplicateurs de A_ω muni de sa norme d'opérateur.

Remarques

1. Il est clair que M_ω est une partie de A_ω $(1 \in A_\omega)$.

2. Muni de sa norme d'opérateur, notée $\|.\|_{M_\omega}$, M_ω est une algèbre de Banach contenant S_ω. Dans un raisonnement analogue á celui de [8], on peut voir que M_ω coinside avec le commutant de S_ω noté $\{S_\omega\}'$

3. Lorsque $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est un poids (ie. $\omega(n+m) \leq \omega(n)\omega(m); \quad n; m \quad \in \mathbb{Z}$), A_ω est une algèbre et on a: $M_\omega = A_\omega$

La proposition suivante (signalée dans [4]) permet "d'approcher" M_ω.

Proposition 2.1 *Soit* $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *une suite dans* $[1, +\infty[$, *sous les notations précédentes nous avons:*

$$A_{\tilde{\omega}} \subseteq M_\omega \subseteq A_\sigma \cap A_\omega$$

où σ *est la suite donnée par* $\sigma(n) = Max(1; \frac{\tilde{\omega}(n)}{1+n^2})$. *En plus les injections sont continues*

Preuve: Soit $f \in A_{\tilde{\omega}}$ et $g \in A_\omega$ on a

$$\begin{aligned} \|fg\|_\omega &= \Sigma_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)\hat{g}(k-n)|\omega(k) \\ &= \Sigma_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)\hat{g}(k-n)| \frac{\omega(k)\omega(k-n)}{\omega(k-n)} \\ &\leq \Sigma_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)\hat{g}(k-n)|\tilde{\omega}(n)\omega(k-n) \\ &\leq \|f\|_{\tilde{\omega}} \|g\|_\omega \end{aligned}$$

donc $f \in M_\omega$ et $\|f\|_{M_\omega} \leq \|f\|_{\tilde{\omega}}$.

D'autre part soit $f \in M_\omega$, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$\|f\alpha^n\|_\omega \leq \|f\|_{M_\omega} \|\alpha^n\|_\omega = \|f\|_\omega \omega(n)$.

Donc $\Sigma_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|\omega(n+k)| \leq \omega(n).\|f\|_\omega$

En particulier, $|\hat{f}(k)\frac{\omega(n+k)}{\omega(n)}| \leq \|f\|_\omega$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par passage au maximum on obtient $|\hat{f}(k)|\tilde{\omega}(k) < \|f\|_\omega$ d'où $\Sigma_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)|\frac{\tilde{\omega}(k)}{1+n^2} < +\infty$, et par suite $f \in A_\sigma$.

3 Eléments de la théorie spectrale locale

Soit $T \in L(X)$ un opérateur borné sur un espace de Banach, on note par $\sigma(T)$, le spectre de T et $R_T : \lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(T) \to (T-\lambda)^{-1}$ sa fonction résolvente. Pour $x \in X$ on désigne par $\rho(x, T)$, le résolvent local de T en x, l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tel qu'il éxiste un voisinage V de λ et $F : V \to X$ une fonction analytique satisfaisant $(T-\mu)F(\mu) = x$ pour tout $\mu \in V$. Le spectre local de T en x est $\sigma(x, T) = \mathbb{C}\backslash\rho(x, T)$. On notera pour toute partie F de $\mathbb{C}$ $X_T(F) = \{x \in X, \sigma(x, T) \subseteq F\}$. $X_T(F)$ joue un role important dans la théorie de décomposition d'un opératreur borné.

- On dit que T a la propriété d'extension unique (en abrégée SVEP) si la seule fonction analytique F sur un ouvert O satisfaisant $(T-\lambda)f(\lambda) = 0 (\lambda \in O)$ est la fonction nulle. On voit que si T n'a pas de valeurs propres ou si son spectre est d'intérieur vide, alors T satisfait la $SVEP$. Dans ce cas on a: $\sigma(x, T) \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$ et $\cup_{x\in X}\sigma(x, T) = \sigma(T)$ voir [3]

- On dira que T satisfait la condition (de décomposition) (δ) si pour tout recouvrement $\{O_1, O_2\}$ d'ouvert du spectre de T on a: $X_T(O_1) + X_T(O_2) = X$.

- On dira que T satisfait la condition de Dunford (C) si $X_T(F)$ est fermé pour toute partie fermée $F \subset \mathbb{C}$. En considérant $\sigma(T_{|X_T(\emptyset)})$, on peut vérifier facilement que tout opérateur possédant la condition de Dunford (C) admet la $(SVEP)$. voir aussi [6]

- T est dit un opérateur décomposable s'il satisfait les conditions (δ) et (C)

- On dira que T est spectral s'il éxiste une mesure spectrale $E : \mathcal{B} \longrightarrow \{\mathcal{T}\}'$ ($\mathcal{B}$ la tribu boréliènne de $\mathbb{C}$) satisfaisant pour tout borélien $S \in \mathcal{B}$ $\sigma(E(S)) \subseteq S$ et $E(S)^2 = E(S)$ avec $E(\emptyset) = 0$ et $E(\sigma(T) = I$.

- On dira que T est uniformement décomposable s'il existe $m > 0$ telque pour tout recouvrement d'ouvert $\{O_1, O_2\}$ de $\sigma(T)$ et tout $x \in X$, il existe une décomposition $x = x_1 + x_2$ vérifiant: $\sigma(x_i, T) \subset O_i$ et $\|x_i\| \leq m\|x\|$ pour $i = 1, 2$.

Pour une étude détaillée des différentes classes d'opérateurs décomposables, nous renvoyons le lecteur à [5], [7].

Nous produisons dans cette proposition une condition nécessaire pour la décomposabilité de S_ω géneralisant les résultats de [9].

Proposition 3.1 *Si S_ω possède la propriété (δ) alors on a:*
i.$\sigma(S_\omega) = \Gamma$.
ii. $(\omega(n))_{n\in Z}$ *est une suite régulière.*

Preuve:
i. Le spectre de S_ω étant une couronne, il suffit de montrer que $\sigma(S_\omega) \subseteq \Gamma$, soient $\{O_1, O_2\}$ un recouvrement de $\sigma(S_\omega)$ avec $O_1 \cap \Gamma = \emptyset$. Pour tout $f \in A_\omega$ il existe $f_1, f_2 \in A_\omega$ telles que $f = f_1 + f_2$ avec $\sigma(f_i, S_\omega) \subseteq O_i \ \ \forall i \in \{1, 2\}$ d'après [4] $Supp(f) \subseteq \sigma(f, S_\omega)$, on aura alors $Supp(f_1) \subseteq \sigma(f_1, S_\omega) \cap O_1 \subseteq \Gamma \cap O_1 = \emptyset$ donc $f_1 = 0$ ce qui donne $f = f_2$ et par suite $\sigma(f, S_\omega) \subseteq O_2$ pour tout $f \in A_\omega$, S_ω n'ayant pas de valeurs propre, il admet la $(SVEP)$, on obtient $\sigma(S_\omega) = \bigcup_{f\in A_\omega} \sigma(f, S_\omega) \subseteq O_2$. O_2 étant un voisinage arbitraire de Γ. *i.* est établie.
ii. Soit V un ouvert arbitraire de Γ et O un ouvert différent de Γ tel que $\Gamma \subset V \cup O$, on construit,(comme dans *i.*) $f \in A_\omega$ tel que $\sigma(f, S_\omega) \subset V$.

4 Sur la décomposabilité de S_ω.

Dans ce paragraphe on étudie les différentes notions de décomposabilité pour S_ω, on supposera, en vertu de la prop.3.1, que $\sigma(S_\omega) \subseteq \Gamma$.

Théorème 4.1 *Soit* $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *dans* $[1,+\infty[$ *une suite satisfaisant* (1) *et supposons que* $\sigma(T)\subseteq\Gamma$*:*
alors S_ω *n'est pas uniformement décomposable.*

Preuve: L'espace A_ω peut être vu comme étant le dual topologique de l'espace des suites:

$$C_{0,\omega}=\{f=(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}},\lim_{n\longrightarrow+\infty}|\frac{\hat{f}(n)}{\omega(n)}|=0\}$$

Supposons que S_ω est uniformement décomposable. Il éxiste $m>0$ telque pour tous les recouvrements de Γ donnés par les arcs:$I_{n,1}=]e^{-\frac{1}{n}i},e^{(\pi+\frac{1}{n})i}[\quad I_{n,2}=]e^{(\pi-\frac{1}{n})i},e^{\frac{1}{n}}[$ on a $1=f_{n,1}+f_{n,2}$ avec $\sigma(f_{n,i},S_\omega)\subseteq I_{n,i}$ et $\|f_{n,i}\|_\omega\leq\|1\|_\omega\leq m\omega(0).i=1,2$. La boule unité de A_ω étant $\sigma(A_\omega,C_{0,\omega})$-compact on peut extraire une sous suite $f_{n_k,1}$ convergente vers $f\in A_\omega$. D'autre part $f_{n,i}(\xi)\longrightarrow\chi_{I_i}(\xi)$ pour tout $\xi\in\Gamma$ où $I_1=]1,e^{\pi i}[$ et $I_2=]e^{\pi i},e^{2\pi i}[$ par unicité de la limite $f=\chi_{I_1}$.
Ce qui contredit le fait que $A_\omega\subseteq C(\Gamma)$
Le corollaire suivant est une conséquence directe de théorème 4.1 bien qu' admettant une preuve beaucoup plus simple.

Corollaire 4.2 S_ω *ne peut pas être spectral .*

Preuve: Tous opérateur spectral est uniformement décomposable avec $m=1$.

D'autre classes d'opérateurs décomposables ont été étudiées dans [5] où on montre qu'elles sont toutes distinctes, nous introduisons ici ces classes et nous montrons qu'elles se confondent dans notre cas. Pour $T\in L(X)$, on note $Lat(T)$ le trellis des sous-espaces invariants (fermés).

- On dit que T est décomposable relativement à l' identité si pour tout recouvrement d'ouverts $O_1,...,O_n$ de $\sigma(T)$ il éxiste pour $i\in 1,...,n,Y_i\in Lat(T)$ et $P_i\in\{T\}'$ satisfaisant: $P_i(X)\subseteq Y_i,\sigma(T|Y_i)\subseteq O_i$ et $I=P_1+...+P_n$ (I étant l'identité de $L(X)$).

- T est faiblement décomposable relativement à l' identité si

  i Pour tout recouvrement $(O_i)_{i=1,...,n}$ il éxiste pour tout$i=1,...,n\quad(X_i)\in Lat(T)$ telque: $\sigma(T|X_i)\subseteq O_i\quad i=1,...,n$.

  ii. Pour tout $p>0\ \exists\ (P_{ij})_{j=1,...,p}\subseteq\{T\}'$ telque $P_{ij}(X)\subseteq X_i$ avec $lim_{p\rightarrow+\infty}\|\Sigma_{j=1,...,p}P_{ij}-I\|=0$

- T est dit A-scalaire (A une algèbre de fonctions régulière contenant les polynômes trigonometriques) s'il éxiste un morphisme d'algèbre $\phi:A\rightarrow\{T\}'$, satisfaisant $\phi(1)=I,\phi(z)=T$.

Théorème 4.3 *Soit* $(\omega(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ *une suite dans* $[1,+\infty[$. *Les assersions suivantes sont équivalentes.*

1. $\tilde{\omega}$ *est une suite régulière*

2. S_ω *est* $M_\omega-$*scalaire*

3. S_ω *est décomposable relativement à l' identité.*

4. S_ω *est faiblement décomposable relativement à l' identité .*

Preuve:

- $1 \Rightarrow 2$: D'après la prop 2.1 $\tilde{\omega}$ est de Beurling si seulement si M_ω est une algèbre régulière. Le morphisme
  $$\begin{array}{llll} \phi: & M_\omega & \longrightarrow & \{S_\omega\}' \\ & f & \longrightarrow & M_f : g \rightarrow fg. \end{array}$$
  $M_f = fg$ répond alors à la question

- $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ sont vraies de façon générale à partir des définitions.

- $4 \Rightarrow 1$ Soient O_1, O_2 un recouvrement de Γ satisfaisant, $\Gamma\backslash\overline{O_i} \neq \emptyset$ et X_1, X_2 deux espaces invariants telsque $\sigma(S_\omega|X_i) \subseteq O_i$. D'apres *ii.* $\exists (f_{ij})_{j=1\ldots p} \in M_\omega = \{T\}'$ telque $f_{ij}A_\omega \subset X_i$ et $\lim_{p\longrightarrow+\infty} \Sigma_{i=1\ldots p} f_{ij} = 1$. donc, il existe i, j tels que $f_{ij} \neq 0$ et $f_{ij} \in X_i$, par suite $\sigma(f_{ij}, S_\omega) \subseteq O_i$ comme $Supp(f_{ij}) \subseteq \sigma(f_{ij}, S_\omega)$ on obtient $Supp(f_{ij}) \neq \Gamma$ d'où $\tilde{\omega}$ est une suite régulière.

REMERCIEMENT: Le deuxième auteur a été soutenu par l' ICTP de Trieste où une partie de ce travail a été réalisée. Il tient á exprimer ses remerciements.
This work was done within the framework of the Associateship Scheme of the Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

References

[1] A. Atzmon, On the existence of hyperinvariant subspaces. J.Operator Theory 11 (1984), 3-40.

[2] A.Beurling and P.Malliavin, The Fourier transforms of measures with compact support. Acta. Math, 107 (1962), 291-309.

[3] I. Colojoara and C.Foias, "Theory of Generalized Spectral Operators", Gordon and breach, New York, 1968.

[4] O.El fallah and E.H.Zerouali, Calcul fonctionnel de Wermer et spectre local. Preprint.

[5] R.Lange and S.W.Wang, New approaches in spectral decomposition .(Contemporary mathematics) Amer. Math. Soc. Providence Rhode Island (128) 1992.

[6] K.B Laursen and M.M.Neumann, Asymptotic intertwining and spectral inclusions, Czechoslovak Mathematical Journal 43 (1993) 483-497.

[7] K.B.Laursen and M.Neumann, Decomposable multipliers and applications to harmonic analysis. Studia Math 101 (1992). 193-214

[8] A.Shields, Weighted shifts operators and analytic function theory, Topics in operators (edited by Pearcy) Amer. Math. Soc. Math surveys

[9] Sun shanli, Spectral decomposition of weighted shift operators Acta. Math. Sinica .New series (1986) Vol (2) No 4 pp 367-376 .