

CERN LIBRARIES, GENEVA



CM-P00100541

INSTITUT DE PHYSIQUE DE HAUTE ENERGIE,
SERPUKHOV, 1967

Rapport IFVE No 67-35 K

PASSAGE DE LA RESONANCE PARAMETRIQUE
DANS LES ACCELERATEURS A FAISCEAUX INTENSES

par

V.I. Balbekov et I.A. Shukejlo

Traduit au CERN par A. Golovanoff

(Original : Russe)

(CERN Trans. 68-19)

Genève

Novembre 1968

INTRODUCTION

Le progrès de la technique des sources d'ions a entraîné, au cours des dernières années, une augmentation importante de la densité des phases des faisceaux des accélérateurs cycliques. L'interaction électromagnétique des particules devient le principal facteur qui limite l'intensité. Parmi les effets les plus importants, on peut citer la chute de la fréquence des oscillations bétatroniques. En général, la densité limite est atteinte lorsque le nombre d'oscillations accomplies par tour par les particules représente une valeur entière ou semi-entière. Par suite de l'excitation de résonances, une partie du faisceau se perd contre les parois de la chambre. L'étude de cet effet dans les accélérateurs de protons a fait l'objet de plusieurs travaux /1-3/.

Le commencement de l'accélération constitue la phase la plus dangereuse, et un procédé trivial mais coûteux d'augmentation de l'intensité consiste à élever l'énergie d'injection. D'autre part, dans un champ rigoureusement régulier azimuthalement, il ne se produit pas d'oscillations par résonance, puisque la résonance paramétrique est due aux non-homogénéités azimuthales du gradient. C'est pourquoi l'intensité limite peut être élevée par une correction méticuleuse du champ.

Le glissement de fréquence de Coulomb est déterminé par la densité de charge locale dans le paquet et décroît rapidement avec l'augmentation de l'énergie. Les particules peuvent couper la bande de résonance quatre fois par période d'oscillation synchrotronique, et le nombre total de ces intersections est limité.

Les pertes de particules dans l'intersection multiple de la résonance ont été estimées d'après l'équation de Fokner-Planck^{/3/}. Dans le présent travail, on effectue une étude plus détaillée de la traversée coulombienne de la résonance paramétrique.

L'analyse consécutive aboutit à une équation cinétique auto-accordée dans l'espace de phases sextudimensionnel. Toutefois, les difficultés mathématiques obligent à consentir à une série de simplifications. Nous examinerons le mouvement dans un champ linéaire à coordonnées verticale et horizontale séparées. Négligeons les variations de la densité de charge qui ont lieu alors du passage de la résonance, c'est-à-dire considérons que les dimensions des paquets varient seulement du fait de l'amortissement adiabatique des oscillations. Enfin, négligeons l'influence de la charge d'espace sur les oscillations synchrotroniques. On montrera que les résultats obtenus à partir de ces hypothèses s'appliquent aussi, avec une précision suffisante, aux cas plus généraux.

Résolution de l'équation des oscillations bétatroniques

Pour fixer les idées, examinons un déplacement le long de l'axe vertical z . On sait /4/ qu'au voisinage de la bande de résonance l'équation de l'amplitude complexe a est de la forme :

$$\frac{da}{d\psi} = a^* P_{\text{exp}} \left(-2 i \int_0^{\psi} \xi(x) dx \right), \quad (1)$$

où P = demi-largeur complexe de la résonance paramétrique, mesurée en nombre d'oscillations bétatroniques par tour; ψ = azimut généralisé; l'astérisque désigne la conjuguée complexe. La grandeur $\xi(\psi)$ est la distance moyenne par tour du point de travail à la résonance; c'est pourquoi elle dépend seulement lentement de ψ (par la fréquence des oscillations synchrotroniques).

L'équation (1) est vraie au voisinage de la résonance entière et semi-entière. Dans le premier cas, le membre de droite doit comporter un terme déterminé par les perturbations du champ et indépendant de l'amplitude. Toutefois, on sait /4/ qu'une telle adjonction entraîne une déformation de l'orbite d'équilibre et ne modifie pas la distribution des particules par rapport au centre du faisceau. C'est pourquoi le membre de droite peut ne pas être considéré et la déformation de l'orbite sera examinée à part et exprimée dans les résultats finals.

Par suite de l'amortissement adiabatique des oscillations, leur amplitude vraie A est liée à a par la relation :

$$A = |a| \sqrt{\beta_0 \gamma_0 / \beta \gamma} \quad (2)$$

où β = rapport des vitesses des particules à celle de la lumière;
 $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ - facteur relativiste; β_0, γ_0 se rapportent au moment de l'injection.

Introduisons les notations : $\mathcal{E}^{(0)}$ - distance du point de travail à la résonance dans un faisceau d'intensité nulle; Ω - nombre d'oscillations synchrotroniques par tour; R - rayon moyen de l'orbite; n - densité linéaire des particules au centre du paquet; f_z - fonction de Floquet, normée d'après /4/. Si la section transversale du faisceau est limitée par une ellipse à pôles r_x, r_z et la densité de charge est constante dans la section, le glissement maximal de la fréquence est égal à :

$$\Delta Q = \frac{2 e^2 R^2 n}{m c^2 \beta^2 \gamma^3} \left\langle \frac{|f_z|^2}{r_z (r_x + r_z)} \right\rangle \quad (5)$$

(moyenne par tour). Cette grandeur, qui varie peu par période d'oscillation synchrotronique, diminue avec l'augmentation de l'énergie

Si les oscillations synchrotroniques sont linéaires et la densité des phases dans les limites d'un paquet est constante, la fonction $\varepsilon(\vartheta)$ est de la forme :

$$\varepsilon(\vartheta) = \varepsilon^{(0)} - \Delta Q \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \Omega \vartheta}, \quad (4)$$

où α - amplitude relative des oscillations synchrones. Dans le cas général, on peut poser :

$$\varepsilon(\vartheta) = \varepsilon^{(0)} - \Delta Q [1 - \zeta + \zeta \chi(\vartheta)], \quad (5)$$

où les ζ et $\chi(\vartheta)$, qui dépendent de la forme et de l'amplitude des oscillations synchrotroniques, satisfont les conditions

$$\chi(\vartheta + \frac{2\pi}{\Omega}) = \chi(\vartheta); \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega}} \chi d\vartheta = 0; \chi_{\max} = 1; \zeta(1 + |\chi_{\min}|) \leq 1. \quad (6)$$

Ainsi, $(1 - \zeta)\Delta Q$ est le glissement du point de travail moyen par période des oscillations synchrotroniques, $\zeta\Delta Q$ est l'amplitude de ses oscillations.

Si l'accroissement de l'amplitude est assez petit, la solution de l'équation (1), aux termes $\sim |P|^2$ près, est de la forme :

$$a(\vartheta) = a_0 + a_0^* \int_0^{\vartheta} F(x) dx + a_0 \int_0^{\vartheta} F(x) dx \int_0^x F^*(y) dy, \quad (7)$$

où $a_0 = |a_0| e^{i\varphi_0}$ - amplitude initiale,

$F(\varphi)^0$ - coefficient du membre de droite de (1). En désignant par I et I_1 l'intégrale simple et l'intégrale double, et compte tenu de ce que $2 \operatorname{Re} I_1 = |I|$, nous obtiendrons :

$$\left| \frac{a}{a_0} \right| = 1 + \operatorname{Re}(I e^{-2i\varphi_0}) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}^2(I e^{-2i\varphi_0}) + \operatorname{Im}^2(I e^{-2i\varphi_0}). \quad (8)$$

L'estimation montre que le terme suivant de cette série $\sim 0,1 |I|^3$, si bien que, lorsque l'amplitude est multipliée par deux, les termes de l'addition rejetés sont $\lesssim 0,01$.

Accroissement de l'amplitude des particules synchrones

Pour une particule synchrone ($\xi = 0$), nous avons :

$$|I| = \left| P \int_0^{\varphi} \exp \left\{ -2i \int_0^x [\varepsilon^{(0)} - \Delta Q(y)] dy \right\} dx \right|. \quad (9)$$

La principale contribution à l'intégrale est donnée par le voisinage du point φ_p , où la condition de résonance est vérifiée :

$$\Delta Q(\varphi_p) = \varepsilon^{(0)} \quad (10)$$

Après la traversée de la résonance, l'amplitude a subi des battements amortis pour atteindre finalement une valeur stable. Pour calculer

l'accroissement de l'amplitude, décomposons en série l'exposant de l'exponentielle au voisinage de ϑ_p et limitons-nous aux termes $\sim (\vartheta - \vartheta_p)^2$. Si au moment de l'injection le point de travail est assez éloigné de la résonance, si bien que $\vartheta_p \sqrt{|\Delta Q'_p|} \gtrsim 10$, la limite inférieure de (9) peut être remplacée par $-\infty$. Le passage à la limite $\vartheta \rightarrow \infty$ fournit l'amplitude stable, qui pour la phase initiale la moins favorable est égale à :

$$|a| = |a_0| \left(1 + |I|_{\infty} + \frac{1}{2} |I|_{\infty}^2 \right); \quad |I|_{\infty} = |P| \sqrt{\frac{\pi}{|\Delta Q'_p|}}. \quad (11)$$

Par suite des battements, la valeur maximale de l'amplitude est atteinte pour $\vartheta_m \approx \vartheta_p + 1,5/\sqrt{|\Delta Q'_p|}$ et, compte tenu de l'amortissement adiabatique, elle est égale à :

$$A_m = A_0 \sqrt{\frac{\beta_0 \gamma_0^2}{\beta \gamma}} \left(1 + |I|_m + \frac{1}{2} |I|_m^2 \right); \quad |I|_m \approx \frac{2,1 |P|}{\sqrt{|\Delta Q'_p|}}. \quad (12)$$

Pour une très faible largeur de la résonance, il est possible que $A_m < A_0$; alors, à aucun moment l'amplitude ne dépasse la valeur initiale et, au point ϑ_m , un maximum relatif a lieu.

Les estimations (11)-(12) sont majorées d'un facteur deux environ si au début du cycle le point de travail est disposé au voisinage de la résonance, si bien que $\vartheta_p \sqrt{|\Delta Q'_p|} < 1$. Dans l'intervalle $1 \lesssim \vartheta_p \sqrt{|\Delta Q'_p|} \lesssim 10$, l'erreur sur $|I|$ ne dépasse pas 10-15 %.

Accroissement de l'amplitude des particules non synchrones

Pour les particules non synchrones, nous aurons :

$$I_{-} = P \int_0^{\psi} \exp\{-2i \int [\varepsilon^{(0)} - \Delta Q(1 - \zeta + \zeta \chi(x))] dx\} d\psi = P \sum_q \sqrt{\frac{\pi}{|\varepsilon_q|}} e^{i\psi_q} \quad (13)$$

où les dérivées sont prises aux moments de passage par la résonance ψ_q , lorsque la condition suivante est vérifiée :

$$\varepsilon(\psi_q) \equiv \varepsilon^{(0)} - [1 - \zeta + \zeta \chi(\psi_q)] \Delta Q(\psi_q) = 0. \quad (14)$$

Il résulte de (6) et de (10) que la valeur maximale de ψ , pour laquelle le passage est possible, est égale à ψ_p et que la valeur minimale est tirée de l'équation :

$$\Delta Q(\psi_1) = \frac{\varepsilon^{(0)}}{1 - \zeta(1 + |\chi_{\min}|)}. \quad (15)$$

S'il s'avère que le membre de droite de (15) dépasse le glissement de la fréquence au début du cycle, le point de travail passe par la résonance juste après l'injection, et il faut poser $\psi_1 = 0$.

Les phases ψ_q dans (13) sont les valeurs de l'intégrale en exposant dans l'exponentielle aux moments ψ_q . Lorsque q varie, leur variation est presque désordonnée. La corrélation faible, qui provoque l'apparition de résonances synchro-bétatroniques, est fortement

altérée par les processus stochastiques, tels que les fluctuations des différents paramètres et la diffusion sur le gaz résiduel. Par suite, les ψ_q peuvent être considérés comme des grandeurs aléatoires, prenant n'importe quelle valeur dans l'intervalle $0 - 2\pi$ avec une même probabilité. Alors l'amplitude des oscillations est aussi une grandeur aléatoire et, d'après (8) et (13), sa valeur moyenne et sa dispersion pour $\nu \rightarrow \infty$ sont égales à :

$$|\bar{a}| = |a_0| \left(1 + \frac{3}{4} \overline{|\Pi|^2}\right); \quad (16a)$$

$$\overline{(|a| - |\bar{a}|)^2} = \frac{1}{2} |a_0|^2 \overline{|\Pi|^2}; \quad (16b)$$

où

$$\overline{|\Pi|^2} = \pi |P|^2 \sum_q \frac{1}{|\varepsilon_q|}. \quad (17)$$

En utilisant la formule (5) et compte tenu de ce que $\Delta Q(\nu)$ varie lentement par rapport à $\chi(\nu)$, nous obtiendrons $|\varepsilon_q| \approx \zeta \Delta Q_q |\chi_q'|$. Cette valeur dépend peu de l'indice q , c'est pourquoi la sommation peut être remplacée par une intégration suivant dq . Passons ensuite à l'intégration suivant ν , en posant $dq = \frac{2\Omega_q}{\pi} d\nu$ (la résonance est traversée quatre fois par période d'oscillation synchrotronique). En définitive, nous aurons au lieu de (17) :

$$\overline{|\Pi|^2} = \frac{2|P|^2}{\zeta} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{\Omega}{|\varepsilon_q|} \frac{d\nu}{\Delta Q}. \quad (18a)$$

Cette formule n'est pas commode parce qu'elle inclut la fonction $\chi(\vartheta)$ qui généralement n'est pas bien connue. C'est pourquoi nous remplaçons $|\chi_q|$ par sa valeur moyenne par période d'oscillation synchrotronique, égale à $\frac{2\Omega}{\pi} (1 + |\chi_{\min}|)$. Il en résulte :

$$|\overline{I}|^2 \approx \frac{\pi |P|^2}{\zeta (1 + |\chi_{\min}|)} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{4Q(\vartheta)} \quad (18b)$$

Bien que la transformation effectuée entraîne certaines erreurs, elle est tout à fait satisfaisante pour les estimations, comme on le montre plus loin.

Dans la relation entre l'amplitude et le temps, il convient de remplacer la limite supérieure dans (18) par l'azimut courant. On voit que $|I|^2$ augmente avec ϑ .
 $\vartheta < \vartheta_p$. / Donc l'amplitude moyenne et la dispersion sont maximales au moment ϑ_p .

L'expression (18) est aussi formellement valable pour les particules synchrones, puisque pour $\zeta \rightarrow 0$, la relation (11) découle de (10), (16) et (18).

Calcul des pertes de particules

Le calcul des pertes exige des données plus détaillées sur la probabilité des différents accroissements de l'amplitude. A partir de (13) on peut montrer que les moments impairs de distrib.

tion des grandeurs $\text{Re } I$ et $\text{Im } I$ disparaissent et que les moments pairs sont égaux à :

$$\overline{(\text{Re } I)^{2k}} = \overline{(\text{Im } I)^{2k}} = \frac{(2k)!}{k!} \left(\frac{|II|^2}{4} \right)^k \left[1 - \frac{k(k-1)}{4M} + \dots \right], \quad (19)$$

où le point de suspension désigne des termes $\sim (k^2/M)^2$ et d'ordre supérieur, M est défini par la relation :

$$M \sum_q |\varepsilon_q|^{-2} = \left(\sum_q |\varepsilon_q|^{-1} \right)^2 \quad (20)$$

On voit que M est approximativement égal au nombre de traversées de la résonance. Il résulte de (19) que les fonctions de distribution des grandeurs $\text{Re } I$ et $\text{Im } I$ sont identiques et égales à :

$$|v(x)| = \frac{1}{\sqrt{\pi} |II|^2} e^{-x^2/|II|^2} \left[1 - \frac{1}{16M} \left(3 - 12 \frac{x^2}{|II|^2} + 16 \left[\frac{x^2}{|II|^2} \right]^2 \right) + \dots \right], \quad (21)$$

où x désigne $\text{Re } I$ ou $\text{Im } I$. La majeure partie des particules est concentrée dans le domaine $x^2 \lesssim |II|^2$, si bien que la distribution (21) est presque gaussienne si le nombre de traversées de la résonance est $M \gtrsim 10$.

Soit A_{adm} l'amplitude admissible. Alors l'accroissement admissible de l'amplitude $|a|$ par rapport à la valeur initiale $|a_0| = A_0$ est :

$$g = \frac{A_{g0n}}{A_0} \sqrt{\frac{\beta_0 \gamma_n}{\beta_0 \gamma_0}} \quad (22)$$

D'après (8), la probabilité que l'amplitude dépasse la valeur admissible est :

$$N = \iint_{1+x+\frac{1}{2}x^2+y^2 > g} W(x)W(y) dx dy \quad , \quad (23)$$

où l'intégration s'effectue selon la partie externe de l'ellipse centrée au point $(-1,0)$ et de demi-axes $\sqrt{2g-1}$ et $\sqrt{g-\frac{1}{2}}$. Cette formule donne la valeur relative des pertes lorsque toutes les particules ont même amplitude initiale. Rigoureusement parlant, tous les résultats précédents sont obtenus sans tenir compte des pertes. Toutefois l'écart est peu important si les pertes sont faibles.

D'après (21), l'expression semi-intégrale est sensiblement différente de zéro dans un cercle de rayon $\sim \sqrt{|I|^2}$. Si $\overline{|I|^2} \gtrsim 2(g-1)^2$, ce cercle sort largement des bords de l'ellipse suivant laquelle s'effectue l'intégration et l'importance des pertes devient inadmissible. Au contraire, si $(g-1)^2 \lesssim 2 |I|^2$, les pertes sont très petites et on peut les négliger. En pratique, dans le cas le plus intéressant, $(g-1)^2 \simeq \overline{|I|^2} \lesssim 1$ (l'inégalité a lieu car nous sommes obligés de limiter à de petits accroissements de l'amplitude, d'après nos hypothèses initiales).

La contribution principale à l'intégrale est donnée par le domaine $x^2 + y^2 \lesssim 2 \overline{|I|^2}$. D'après (21), on peut négliger les corrections $\sim M^{-1}$ dans ce domaine. Avec ces hypothèses, l'intégrale (23) a été calculée sur ordinateur et les résultats sont représentés sur la figure 1.

Pour calculer les pertes, dans un cas plus général, il faut multiplier N par la fonction de distribution selon les amplitudes initiales et intégrer, en tenant compte de la dépendance de g dans A_0 (22). La figure 2 représente les résultats obtenus pour une distribution rectangulaire, c'est-à-dire quand toutes les valeurs A_0 sont également probables dans l'intervalle $0 - r_z$. La valeur de g_r sur cette courbe est obtenue d'après (22) pour $A_0 = r_z$. Il apparaît sur la courbe que, dans le domaine qui nous intéresse, la relation entre les pertes et $\sqrt{\overline{|I|^2}}$ est presque linéaire. A partir de la formule (18), on peut montrer que, si la fonction $\Delta Q(\nu)$ est réelle, la grandeur $\sqrt{\overline{|I|^2}}$ décroît presque linéairement avec l'augmentation de ξ . Cela est confirmé par l'exemple étudié plus loin (fig. 3). Il en résulte dans le calcul des pertes qu'il faut prendre pour $\overline{|I|^2}$ la valeur trouvée pour l'amplitude moyenne des oscillations synchroniques.

Examen des hypothèses initiales

Parmi les hypothèses admises précédemment, les moins importantes sont celles relatives à la forme des oscillations synchrotroniques, car les caractéristiques moyennes du faisceau et les pertes de particules n'en dépendent presque pas. Il suffit que la stabilité de phases soit conservée.

L'absence d'auto-accord est gênante, tout d'abord parce que l'on ne tient pas compte de la variation de la densité du faisceau lors de la traversée de la résonance. Ensuite, parce que la traversée entraîne essentiellement une modulation de l'enveloppe, et la densité moyenne varie très peu. Ainsi, lors d'un accroissement de l'amplitude d'un facteur de deux, la hauteur maximale et minimale du faisceau diffèrent d'un facteur de quatre, bien que la densité moyenne diminue d'environ 10 %. De même, le glissement coulombien de fréquence diminue insensiblement, et cela se déroule dans le temps relativement long entre l'injection et v_p . Donc l'effet considéré est pratiquement sans influence sur la vitesse de traversée et on peut le négliger.

En outre, du fait de la diversité des accroissements des amplitudes des différentes particules, la frontière du faisceau devient diffuse et les forces de Coulomb deviennent non linéaires. La non-linéarité peut avoir lieu aussi par suite de la non-homogénéité

de la distribution initiale. Alors, le glissement coulombien dépend de l'amplitude, ce qui peut modifier la vitesse de traversée de la résonance. Toutefois, les estimations pour le cas de la non-linéarité quadratique ont montré que l'effet est sensible seulement lorsque $\zeta \approx \frac{|P|}{\Omega}$. La valeur typique de $|P|$, pour laquelle le niveau des pertes est admissible, est égale à $1 \cdot 10^{-3}$. La fréquence synchrotronique Ω est généralement voisine de $1 \cdot 10^{-1}$, c'est-à-dire en pratique seulement pour les particules synchrones. Le résultat physique est clair : la résonance est traversée rapidement lorsque l'amplitude des oscillations synchrotroniques est suffisante; d'autre part, l'accroissement de l'amplitude et la variation correspondante du glissement coulombien sont peu importants pour chaque traversée. Pour les particules synchrones, la non-linéarité entraîne une diminution de l'accroissement de l'amplitude, si l'on suppose naturellement que la densité de la charge diminue avec la distance de l'axe du faisceau. En effet, si l'amplitude augmente, le glissement de la fréquence diminue et la traversée s'effectue plus vite qu'en l'absence de non-linéarité. Lorsque l'amplitude diminue, la vitesse de traversée diminue aussi, ce qui provoque un amortissement plus important.

La liaison des oscillations est importante seulement si les deux fréquences bétatroniques traversent la résonance simultanément (nous ne tenons pas compte de la possibilité de la résonance de la liaison, car nous n'avons pas considéré jusqu'ici les résonances non linéaires). Toutefois, même dans ce cas, il ne peut se produire qu'une redistribution des incréments des oscillations verticales et radiales.

Ainsi, les résultats obtenus peuvent être utilisés pour des distributions autres que celle étudiée, en prenant pour ΔQ le glissement moyen sur la section du faisceau.

Exemple

Les figures 3-7 représentent les résultats des calculs pour l'accélérateur de Serpukhov de 70 GeV /5/. Les paramètres sont les suivants : énergie d'injection 100 MeV; accroissement de l'énergie par tour 0,187 MeV $\chi(\vartheta) = \cos 2\Omega\vartheta$, où $\Omega = 0,0667$ et ne dépend pas de l'énergie et de l'amplitude (cas faiblement relativiste, oscillations synchrotroniques linéaires). La dépendance $\Delta Q(\vartheta)$ est prise sous la forme suivante :

$$\Delta Q = \frac{\Delta Q_0}{\sqrt{1 + 3,38 \cdot 10^{-4} \vartheta^2}} \quad (24)$$

où ΔQ_0 est le glissement coulombien à l'injection; $\Delta Q_0 = 0,1$ correspond à l'intensité 10^{12} particules par impulsion.

Les figures 3-4 donnent la variation de l'amplitude des particules synchrones après traversée de la résonance (formule (12)) en fonction de $\varepsilon^{(0)}$, ΔQ_0 , $|P|$. Sur les figures 5-7, les courbes en trait continu représentent la variation de $\sqrt{|I|_\infty^2}$ en fonction de ζ , $\varepsilon^{(0)}$, ΔQ_0 , selon la formule (18a). Les courbes en

pointillés sont construites selon une formule approximative (18b). L'écart est important seulement avec $\varepsilon^{(0)} = \Delta Q_0$ pour des particules à grande amplitude des oscillations synchrotroniques. Cela résulte du fait que dans (18b) on prenait la moyenne de la fonction $|\chi|$ sur une période d'oscillation synchrotronique $2\pi/\Omega$, tandis que, d'après (14), avec $\varepsilon^{(0)} > \Delta Q_0 (1-2\zeta)$, la traversée de la résonance n'est possible que sur une partie de la période

$$\Delta\vartheta = \frac{2}{\Omega} \arccos \frac{1}{\zeta} \left(\frac{\varepsilon^{(0)}}{\Delta Q_0} + 1 - \zeta \right).$$

Le point de cassure de la courbe, figure 5, s'explique par le fait que, pour $\zeta > 0,25$, les particules traversent la résonance juste après l'injection.

Les points réunis par les droites représentent les résultats du calcul de l'intégrale (13) sur ordinateur. Leurs distances mutuelles sont trop grandes pour qu'il soit possible de construire des courbes régulières. Leur forme réelle est représentée sur les graphiques complémentaires.

Pour vérifier la formule (18a), on a trouvé la valeur moyenne $|I|_{\text{crd}}^2 / \overline{|I|^2}$ et la dispersion de ce facteur. D'après (19), elle doit être égale à 1; en fait, on a obtenu les valeurs 1,15 et 0,35. L'écart d'environ 15 % correspond approximativement à la précision du calcul de l'intégrale (13). La concordance avec la formule (18b) est un peu plus mauvaise : respectivement 1,37 et 1,18.

REFERENCES

1. L. Smith. Conférence internationale sur les accélérateurs. Dubna, 1963. Atomizdat M., 1964, p. 897
2. P. Lapostolle. Id., p. 900
3. P.R. Zenkevich. P.T.E., 1, 24 (1967)
4. A.A. Kolomenskij et A.M. Lebedev. Théorie des accélérateurs cycliques, Fizmatgiz M, 1962, p. 89
5. V.V. Vladimirkij et al. Conférence internationale sur les accélérateurs, Dubna, 1963. Atomizdat M., 1964, p. 197

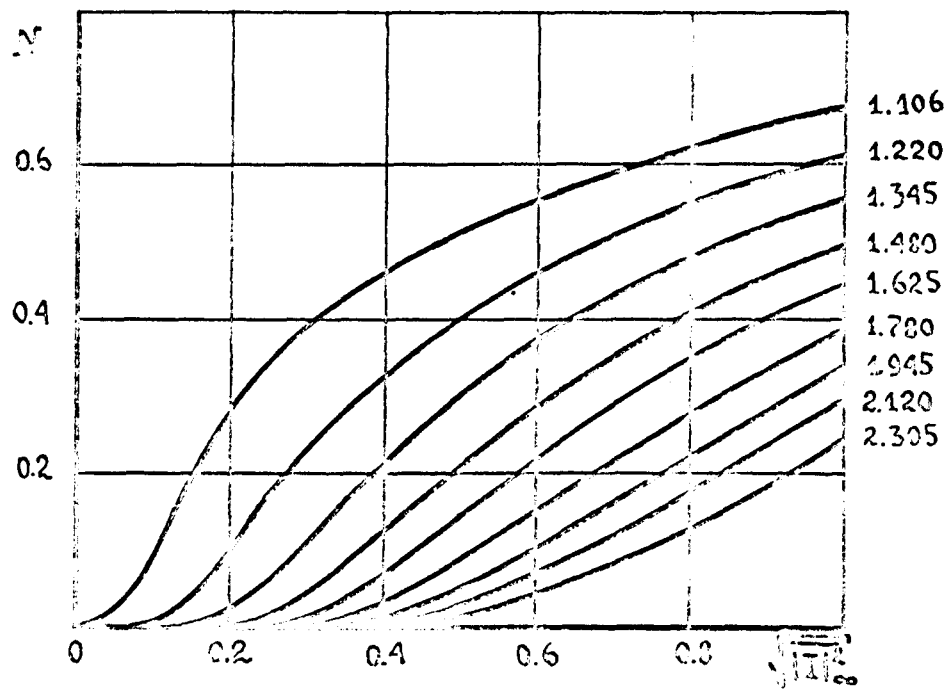


Fig. 1 Pertes de particules pour une distribution δ des amplitudes initiales. Les nombres en face des courbes désignent les valeurs $g = |a|_{adm}/|a_0|$.

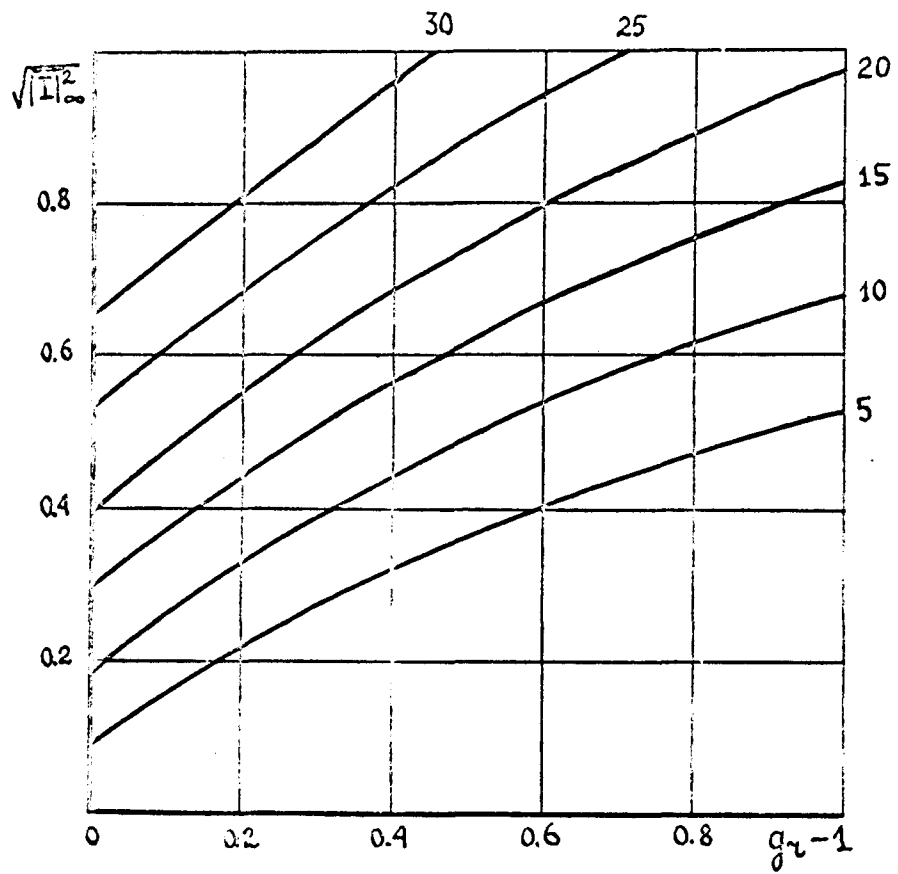


Fig. 2 Pertes de particules pour une distribution rectangulaire des amplitudes initiales. Les nombres en face des courbes définissent les pertes en %.

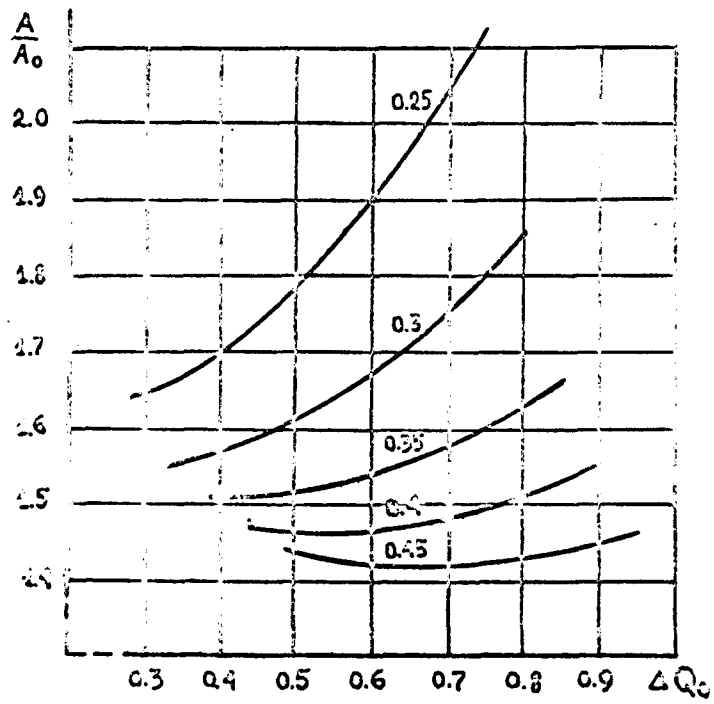


Fig. 3 Amplitude maximale des particules synchrones en fonction du glissement coulombien initial. Les nombres sur les courbes sont les valeurs de $\epsilon^{(0)}$; $2\pi|P| = 0,01$.

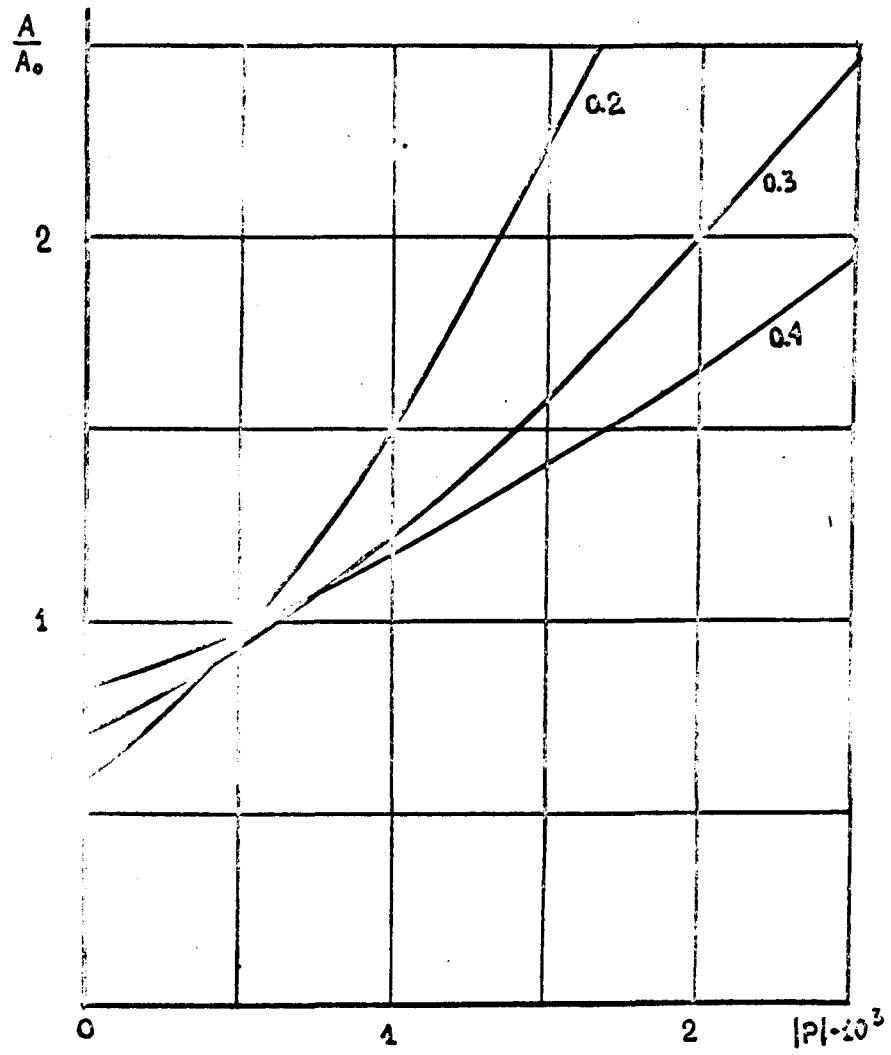


Fig. 4 Amplitude maximale des oscillations des particules synchrones en fonction de la largeur de résonance. Les nombres sur les courbes sont les valeurs de $\epsilon^{(0)}$; $\Delta Q_0 = 0,6$.

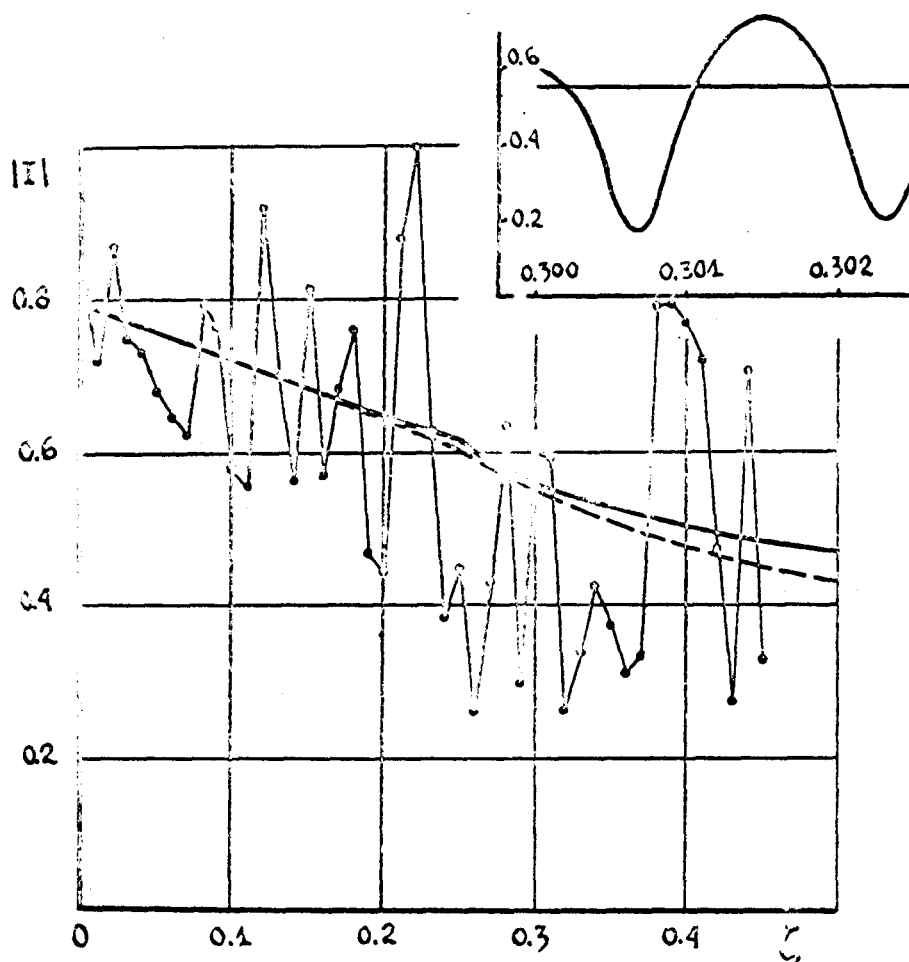


Fig. 5 Variation de l'accroissement de l'amplitude des oscillations bétatroniques en fonction de l'amplitude des oscillations synchrotroniques; $\epsilon^{(0)} = 0,3$; $\Delta Q_0 = 0,6$; $2\pi|P| = 0,01$.

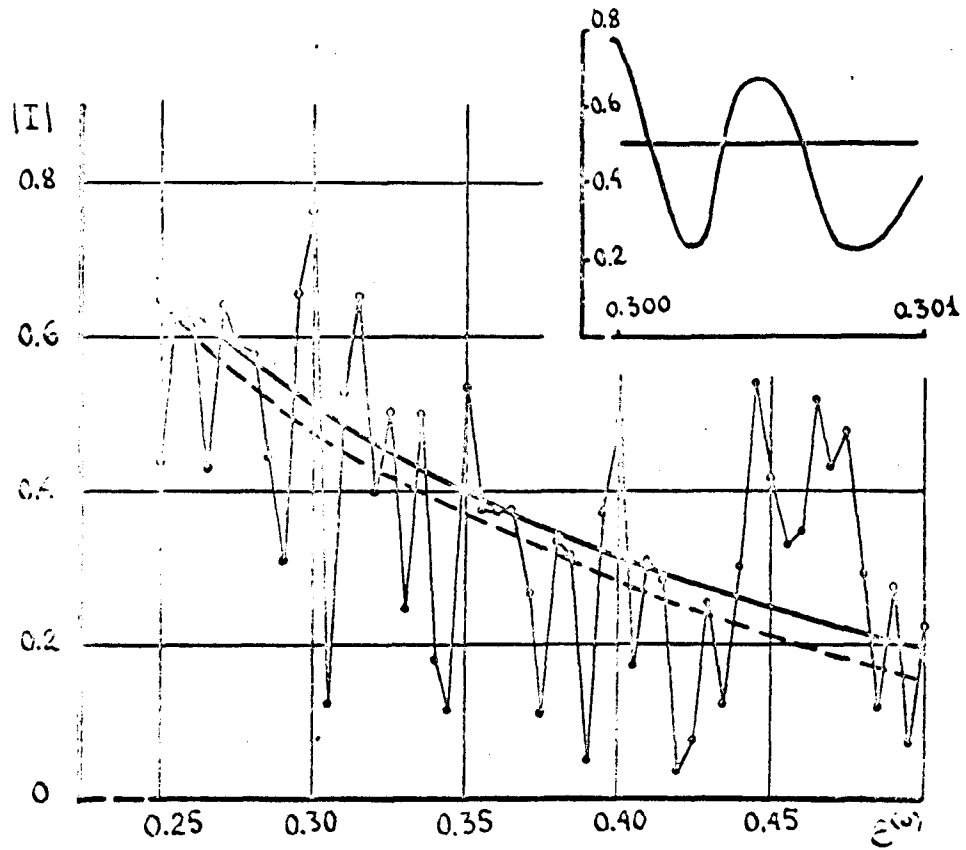


Fig. 6 Accroissement de l'amplitude en fonction de la position du point de travail; $\zeta = 0,4$; $\Delta Q_0 = 0,6$; $2\pi|P| = 0,01$.

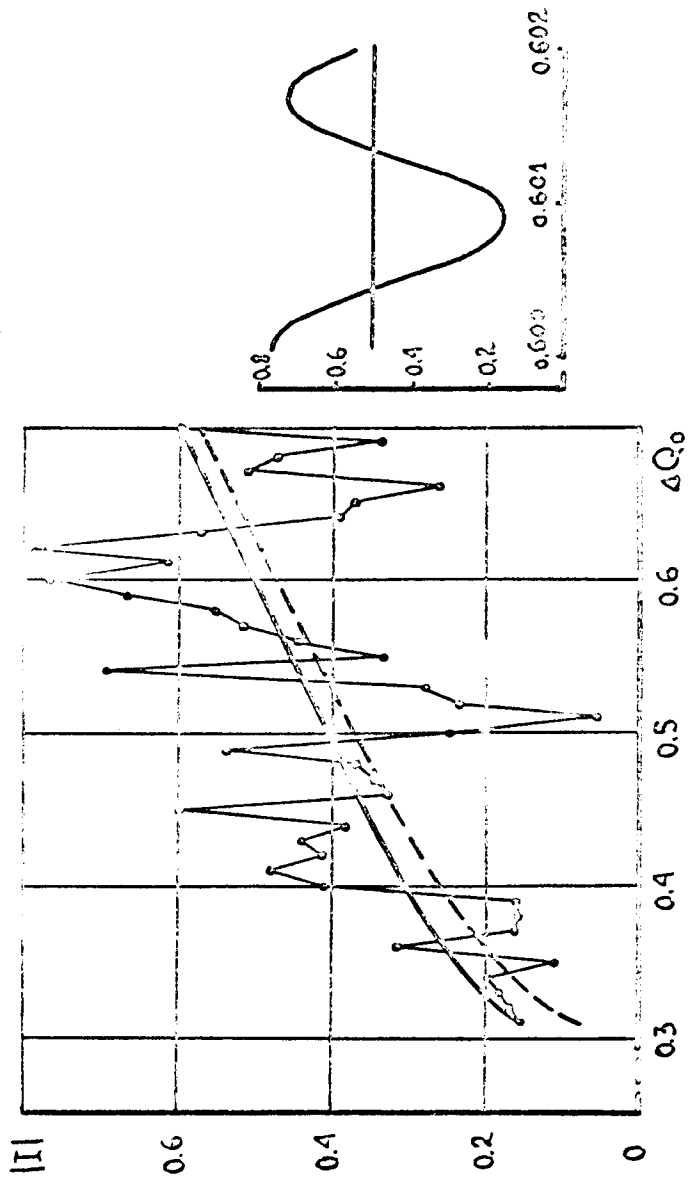


Fig. 7 Accroissement de l'amplitude en fonction du glissement coulombien initial; $\zeta = 0,4$; $\epsilon^{(0)} = 0,3$; $2\pi|P| = 0,01$.