

CERN LIBRARIES, GENEVA



CM-P00100524

DOKL. AKAD. NAUK SSSR

Vol. 66, p. 867-70, Moscou 1949

PROPAGATION DES ONDES LE LONG D'UNE HELICE INFINIE

par

S.Kh. Kogan

(Présenté par l'académicien M.A. Leontovich le 7.4.1949)

Traduit au CERN par A. Golovanoff

(Original : Russe)

(CERN Trans. 68-1)

Genève

Janvier 1968

Nous examinerons la propagation des ondes électromagnétiques le long d'une hélice de longueur infinie, sans nous borner au cas déjà étudié où le pas est sensiblement inférieur au rayon de l'hélice.

Nous prendrons la dépendance du temps sous la forme $e^{-j\omega t}$. L'axe z_1 du système de coordonnées cylindriques sera disposé le long de l'axe de l'hélice. Les angles φ_1 seront comptés à partir du rayon vecteur mené depuis l'axe de l'hélice en passant par le point d'intersection de l'axe du conducteur avec le plan $z_1 = 0$. Nous introduirons ensuite une coordonnée curviligne L , comptée le long de l'axe du conducteur. Les grandeurs L et z_1 sont liées par la relation

$$L = z_1 / \sin \delta \quad (1)$$

où δ est la pente de l'hélice.

Désignons par r_0 le rayon moyen de l'hélice, par a_0 le rayon de la section du conducteur, par s le pas de l'hélice. L'équation de l'axe du conducteur dans le système de coordonnées cylindriques s'écrira

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{s} z_1, \quad r_1 = r_0 \quad (2)$$

Si le conducteur est assez fin, c'est-à-dire si $a_0/r_0 \ll 1$, $a_0/\lambda \ll 1$, $a_0/s \ll 1$, on peut remplacer dans le calcul du vecteur-potentiel la distribution superficielle du courant par une

distribution linéaire, coïncidant avec l'axe du conducteur. Alors le vecteur-potentiel au point de coordonnées z, φ, r s'écrira

$$A = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} I(L) \frac{e^{jkR}}{R} dL. \quad (3)$$

où $I(L)$ - courant total dans la section L ; $k = 2\pi/\lambda$ nombre d'onde;
 $R = \sqrt{(z_1 - z)^2 + p^2}$; $p = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi_1 - \varphi)}$.

Pour obtenir l'équation intégrale fondamentale qui détermine la loi de distribution du courant le long de l'hélice, utilisons la condition de frontière à la surface du conducteur, dont nous considérerons la conductivité comme idéale. Dans notre cas, cette condition est de la forme :

$$E_L = E_z \sin \delta + E_\varphi \cos \delta = 0 \quad (\text{à la surface du conducteur}) \quad (4)$$

Dans la suite, nous considérerons comme suffisant le respect de cette condition non sur l'ensemble de la surface du conducteur mais seulement sur la génératrice de l'hélice, qui constitue le lieu géométrique des points de tangence de l'hélice avec le cylindre de rayon $r = r_0 + a_0$.

On montre aisément que la condition de frontière (4) peut s'écrire, après remplacement des composantes électriques par leurs valeurs en fonction du potentiel (3), sous la forme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(z_1) f(|z - z_1|) dz_1 = 0 \quad (z_1 = L/\sin\delta). \quad (5)$$

Nous n'écrivons pas l'expression pour le noyau, qui ne nous est pas utile. Il faut seulement savoir que le noyau de l'équation (5) dépend seulement du module de la différence des variables z et z_1 . Cela est presque évident en général.

Les solutions possibles d'une équation du type de (5) sont de la forme :

$$I(z_1) = I e^{jh z_1} \quad (z_1 = L/\sin\delta). \quad (6)$$

Pour déterminer la constante h , le plus simple est d'utiliser l'équation initiale (4), parfaitement équivalente à (5). Alors, le calcul des champs selon la formule

$$E = \left(\frac{j}{k} \text{grad div} + jk\right) A \quad (7)$$

est sensiblement simplifié, puisque la nature de la fonction de distribution du courant est déjà définie (6).

En utilisant la formule (3) et la décomposition

$$\frac{e^{j h R}}{R} = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_m(\omega) e^{j m (\varphi - \varphi_0)} e^{-j \omega (z_1 - z)} d\omega, \quad (8)$$

où

$$F_m(\omega) = \begin{cases} \frac{j}{2} J_m(r_0 \sqrt{k^2 - \omega^2}) H_m(r \sqrt{k^2 - \omega^2}) & \text{при } r > r_0, \\ -\frac{j}{2} J_m(r \sqrt{k^2 - \omega^2}) H_m(r_0 \sqrt{k^2 - \omega^2}) & \text{при } r < r_0, \end{cases}$$

nous aurons (si nous remplaçons les intégrales doubles selon le théorème de l'intégrale de Fourier) les composantes du vecteur de champ :

$$E_z = 2jk \frac{I_0}{c} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{hp_m}{k^2}\right) B_m e^{ip_m z + im\varphi}, \quad (9)$$

$$E_\varphi = \frac{iI_0}{c} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left[k \operatorname{ctg} \delta (B_{m,1} + B_{m,-1}) + 2B_m \frac{mh}{kr} \right] e^{ip_m z + im\varphi}. \quad (10)$$

où

$$B_{m,n} = \begin{cases} I_{m+n}(r_0 v_m) K_{m+n}(r v_m) & \text{при } r > r_0, \\ I_{m+n}(r v_m) K_{m+n}(r_0 v_m) & \text{при } r < r_0, \end{cases}$$

$$v_m = \sqrt{\left(h - \frac{2\pi}{s} m\right)^2 - k^2}, \quad p_m = h - \frac{2\pi}{s} m.$$

Nous ne calculons pas les autres composantes des vecteurs du champ. En substituant les expressions (9), (10) dans (4) et compte tenu de ce que sur la génératrice du conducteur de l'hélice, où nous exigeons le respect de la condition (4), $r = r_0 + a_0$ et $\varphi = (2\pi/s) z$, nous obtenons l'équation transcendante :

$$\begin{aligned} & - \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (B_{m,1} + B_{m,-1}) k^2 \operatorname{ctg}^2 \delta + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2P_m (h^2 - k^2) + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2B_m (1 - \beta) \frac{mh}{r_0} \operatorname{ctg} \delta = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

où $B_{m,n} = I_{m+n}(r_0 v_m) K_{m+n}(\beta r v_m)$; $\beta = 1 + a_0/r_0$.

La dernière série de l'équation (11) peut être négligée ($\beta - 1 \ll 1$), si bien que pour définir la constante de propagation h il reste l'équation

$$\left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_{m,1} + B_{m,-1} \right) / 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m = \operatorname{tg}^2 \delta \left(\frac{h^2}{k^2} - 1 \right). \quad (12)$$

Les résultats obtenus peuvent être interprétés de la façon suivante. L'onde de courant, qui progresse le long du conducteur de l'hélice avec une constante de propagation $k_n = \sin h_n$ (h_n étant la n -ième racine de l'équation (12)), induit dans l'espace environnant une multitude innombrable d'ondes électriques et magnétiques inséparables à dépendance azimutale, qui se propagent le long de l'axe de l'hélice avec une constante de propagation

$$p_{m,n} = \frac{k_n}{\sin \delta} - m \frac{2\pi}{s} \quad (13)$$

L'onde d'indice $m=0$ est symétrique. Toutes les autres ondes sont asymétriques, ce qui résulte de la structure périodique de l'hélice.

Introduisons les notations

$$\begin{aligned} F_1(hr_0) &= \operatorname{tg}^2 \delta \left[\left(\frac{hr_0}{kr_0} \right)^2 - 1 \right], \\ F_2(hr_0) &= \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_{m,1} + B_{m,-1} \right) / 2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m; \end{aligned} \quad (14)$$

alors l'équation (12) s'écrit

$$F_1(hr_0) = F_2(hr_0). \quad (12')$$

La principale difficulté pour la détermination des racines de l'équation (12') réside dans la sommation des séries de $F_2(hr_0)$. Il importe de remarquer que $F_2(hr_0)$ est finie partout, à l'exception

des deux valeurs de hr_0 : $h'r_0 = \text{ctg } \delta + kr_0$ et $h''r_0 = \text{ctg } \delta - kr_0$.

$F_2(hr_0)$ est réelle seulement dans certains intervalles, définis par la condition :

$$|hr_0 + m \text{ctg } \delta| > kr_0 \quad (15)$$

qui doit être remplie pour tout m .

On donne sur la Fig. 1 (a et b) deux exemples de construction de la résolution graphique de l'équation (12') pour les racines réelles. Comme il apparaît sur la Fig. 1a, la résolution aboutit à 3 racines : h_1 formée par l'intersection de la courbe de $F_1(hr_0)$ avec la partie en pente douce de la courbe $F_2(hr_0)$, h_2 et h_3 sont formées par l'intersection de la courbe $F_1(hr_0)$ avec les deux branches de la courbe $F_2(hr_0)$ partant vers l'infini. A partir d'une certaine fréquence que nous appellerons première fréquence critique de l'hélice, seule une racine h_3 peut exister (Fig. 2).

La valeur $k_{Kp_1} = w_{Kp}/C$ peut être calculée par une formule exacte à la limite $a_0 \rightarrow 0$, qui donne une bonne approximation pour les conducteurs fins :

$$k_{Kp_1} \approx \frac{\cos \delta}{(1 + \sin \delta) r_0} \quad (16)$$

Les zones discrètes de fréquences où il n'existe pas de racines réelles sont déterminées aussi par la condition (15).

Pour $k > \text{ctg } \delta / 2r_0$, il n'y a pas de racines réelles. La

fréquence qui correspond à cette valeur $k = w/C$ sera appelée seconde fréquence critique de l'hélice. Par suite de l'existence possible de 3 solutions, le courant total dans le conducteur peut s'écrire sous la forme :

$$I = \sum_{n=1}^3 I_n e^{jk_n L} \quad (17)$$

Le rapport des amplitudes du courant peut être déterminé par les conditions d'excitation.

Pour vérifier la justesse des résultats obtenus, on a calculé une hélice concrète de paramètres suivants : $2 r_0 = 22,5$ cm, $s = 15$ cm, $\delta = 12^\circ$, $2 a_0 = 1,125$ cm. Les résultats du calcul sont donnés sur la Fig. 2 par la courbe $\tau = f(kr_0)$, caractéristique du coefficient de ralentissement $\tau = k/k_n$ de l'onde le long du conducteur en fonction de la fréquence. On a aussi porté les données expérimentales (1). La coïncidence des deux sortes de valeurs est tout à fait satisfaisante. La valeur $k_{Kp_1} r_0$, d'après les mesures, se trouve entre $kr_0 = 0,705$ et $kr_0 = 0,76$. Le calcul donne $k_{Kp_1} r_0 = 0,74$ et la formule approchée (16) : $k_{Kp_1} r_0 = 0,805$. L'expérience montre que le passage de la fréquence critique provoque un saut du coefficient de ralentissement de $\tau_1 = 1$ à $\tau_{3kp} = 0,66$, qui confirme l'existence de racines réelles seulement dans les zones discrètes de valeurs de h . D'après le calcul $\tau_{3kp} = 0,68$.

L'auteur exprime sa reconnaissance pour les conseils prodigués et l'intérêt témoigné à l'occasion du présent travail par les Professeurs Ya.N. Feld et L.A. Vajnshtejn.

Référence

1. Kraus J. and Williamson J., J. Appl. Phys. 19, 1 (1948)

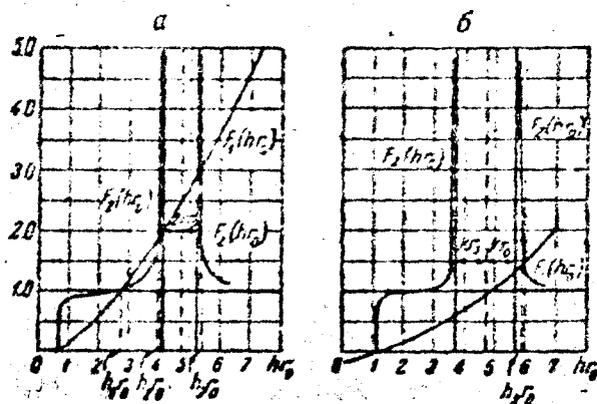


Fig. 1 : Courbes de la fonction $F_1(hr_0)$ et $F_2(hr_0)$:
 a - pour $kr_0 = 0,6$; b - pour $kr_0 = 1$

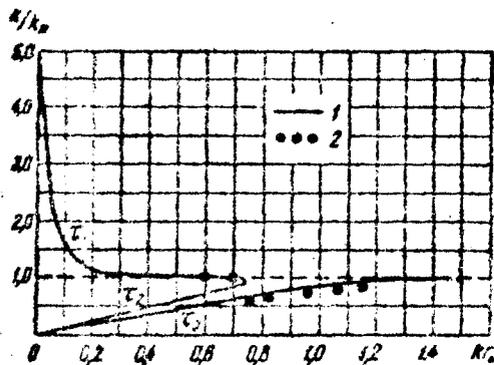


Fig. 2 : Coefficient de ralentissement τ en fonction de kr_0 ;
 1 - courbe calculée; 2 - points expérimentaux.