

Università degli Studi di Salerno
DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE E STATISTICHE

Valeria D'Amato*

PRICING DI OPZIONI ESOTICHE: RASSEGNA
TEORICA E STRUMENTI INFORMATICI PER IL
PREZZAMENTO

WORKING PAPER 3.189
OTTOBRE 2007

* Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche – Università degli Studi di Salerno – via Ponte Don Melillo – 84084 Fisciano (Salerno)

Indice

Premessa	3
Capitolo I	
<i>Brevi cenni sulle opzioni finanziarie</i>	7
1.1 Generalità sul contratto di opzione	7
1.2 Proprietà fondamentali delle opzioni su azioni	11
Capitolo II	
<i>Le opzioni esotiche: approfondimenti su alcune tipologie</i>	17
2.1 Introduzione alle opzioni esotiche	17
2.2 Opzioni binarie	18
2.3 Opzioni barriera	20
2.4 Le opzioni asiatiche	23
2.5 Le opzioni lookback	25
Capitolo III	
<i>Modelli per il pricing</i>	27
3.1 Premessa sui modelli di valutazione di opzioni esotiche	27
3.2 Modello binomiale	29
3.3 Modello di Black e Scholes	34
3.4 Metodo Monte Carlo	39
Capitolo IV	
<i>Strumenti informatici per il pricing</i>	43
4.1 Introduzione	43
4.2 La valutazione di opzioni standard	47

4.3 La valutazione delle opzioni binarie	56
4.4 La valutazione delle opzioni barriera.....	62
4.5 La valutazione delle opzioni asiatiche	75
4.6 La valutazione delle opzioni lookback	81
Osservazioni conclusive	91
Appendice	93
Bibliografia	97

Premessa

Le negoziazioni in strumenti derivati hanno conosciuto, negli ultimi anni, tassi di crescita molto elevati, sia a livello nazionale che internazionale. Essi vengono scambiati sia in mercati ufficiali, exchange traded, che ne standardizzano le caratteristiche e ne regolamentano la compravendita, sia in mercati cosiddetti over-the-counter (OTC), che non presentano una specifica regolamentazione né quotazioni ufficiali e consentono la costruzione di prodotti finanziari con caratteristiche calibrate sui fabbisogni della clientela.

La Banca dei Regolamenti Internazionali (BRI) rileva nel 2004, a livello mondiale, posizioni in derivati OTC per un valore nozionale pari a circa 197.000 miliardi di dollari, rispetto al valore nozionale dei derivati exchange traded pari a circa 37.000 miliardi di dollari (cfr. Tabella 1). I derivati over-the-counter (OTC) hanno assunto dunque un peso preponderante (pari a circa l'84%) sul mercato complessivo di tali strumenti.

Tabella 1: Valore nozionale degli strumenti derivati nei paesi del G-10 (Dati di fine periodo; valori in miliardi di dollari USA)

Fonte: Banca dei Regolamenti Internazionale (BRI) - Quarterly Review, settembre 2004

	2001	%	2003	%
DERIVATI OTC				
su tassi di interesse	77.568	69,8	141.991	72,0
su tassi di cambio	16.748	15,1	24.475	12,4
su azioni	1.881	1,7	3.787	1,9
su altri strumenti	14.981	13,5	26.914	13,7
TOTALE OTC (A)	111.178	100,0	197.167	100,0
DERIVATI EXCHANGE TRADED				
<i>Futures</i>				
su tassi di interesse	9.269	39,0	13.123	35,7
su tassi di cambio	66	0,3	80	0,2
su azioni	334	1,4	502	1,4
<i>Opzioni</i>				
su tassi di interesse	12.493	52,6	20.793	56,6
su tassi di cambio	27	0,1	38	0,1
su azioni	1.575	6,6	2.197	6,0
TOTALE EXCHANGE TRADED (B)	23.764	100,0	36.733	100,0
TOTALE DERIVATI (A + B)	134.942		233.900	

Nell'ambito della classe di attività finanziarie in parola, la componente principale è rappresentata dalle opzioni, la cui struttura contrattuale può essere standard (opzioni plain vanilla) oppure non elementare (opzioni esotiche).

Le opzioni esotiche, scambiate in mercati OTC, offrono un duplice vantaggio: la capacità reddituale elevata ed il contenimento dei costi. Esse ristrutturano profili finanziari esistenti in diversi prodotti, singolarmente considerati, ricombinandone variamente le proprietà, al fine di ottenerne dei nuovi, in grado di offrire livelli di rischio e di rendimento desiderati e non altrimenti raggiungibili dalle opzioni elementari. La decurtazione sul costo, che generalmente queste attività finanziarie subiscono, deriva essenzialmente dalla misura in cui si limita la copertura dell'acquirente alla sola fascia di eventi rischiosi di più probabile realizzazione (ad esempio, si copre il rischio di rialzo di un tasso di cambio solo nel limite del 10% e non per percentuali di rivalutazione superiori). Per converso, la maggiore complessità della struttura caratteristica comporta una oggettiva difficoltà nella quantificazione del loro valore, soprattutto per gli acquirenti, che spesso non sono nella condizione per poter valutare se il prezzo pagato è allineato al valore teorico (fair value¹) dello strumento.

In ogni caso, la grande attrattività commerciale dei derivati esotici è recentemente testimoniata dai cospicui volumi di vendita. In particolare, a livello nazionale, la forte crescita della domanda di tali prodotti ha interessato specialmente imprese non finanziarie, Enti locali ed altri enti pubblici².

Anche forme assicurative del ramo Vita incorporano diversi tipi di opzioni esotiche, incluse in modo implicito o esplicito. Le più popolari opzioni implicite sono dovute alle garanzie di minimo in alcune assicurazioni di tipo unit-linked. Sebbene contratti strutturati di questo tipo, quali cliquet, rung, best of, worst of, ecc. siano offerti dal mercato ormai da qualche anno, rimane complessa, anche in questo ambito, la corretta definizione dei

¹ Il riferimento primario per gli operatori è rappresentato dallo IAS n.39, il quale qualifica, al paragrafo 8 e richiamando lo IAS n.32, il fair value come "corrispettivo al quale un'attività può essere scambiata, o una passività estinta, tra parti consapevoli e disponibili, in una transazione equa".

² Le operazioni in derivati esotici sono state realizzate dagli enti pubblici italiani soprattutto a fronte della necessità di porre in essere operazioni di copertura contro diffuse attese di un aumento dei tassi di interesse, così come rilevato dall'indagine Consob - 2005 sui derivati.

processi di calcolo che siano “certificabili” e che diano risultati confrontabili.

Il senso del lavoro è di effettuare una disamina descrittiva di alcune tipologie di opzioni esotiche, selezionate in funzione della diffusione sul mercato e dell'appetibilità commerciale, ed offrire una riflessione compiuta rispetto all'obiettivo di quantificazione numerica di tali derivati. Il problema di pricing, infatti, risulta pressante nell'ambito di un mercato che è in ascesa, ma che tuttavia non ha ancora raggiunto un livello di trasparenza informativa (disclosure) compatibile con le crescenti attese e richieste dei diversi stakeholders. L'impostazione metodologica con la quale si espone la teoria delle opzioni esotiche risente della finalità didattica del testo. Lo sviluppo del tema è infatti esplicativo e non analitico, presenta formule di facile applicazione, senza necessariamente fornire dimostrazioni approfondite, privilegia l'aspetto operativo, trattando le nozioni teoriche in questione tramite esempi guidati che fanno uso del supporto informatico, oramai imprescindibile non soltanto nel campo della finanza.

Capitolo I

Brevi cenni sulle opzioni finanziarie

1.1 Generalità sul contratto di opzione

Le opzioni finanziarie appartengono alla famiglia dei derivati, strumenti finanziari il cui valore deriva appunto da quello di un dato bene sottostante (underlying) e che amplificano le variazioni di esso, a causa del tipico effetto leva (leverage). Giuridicamente esse rientrano nella fattispecie dei contratti uniformi a termine su strumenti finanziari. Le opzioni sono annoverate in tale categoria, in quanto l'eventuale esecuzione contrattuale è differita rispetto alla data di negoziazione. Esse nascono con una finalità istituzionale che è quella di copertura assicurativa di operazioni finanziarie da rischi di perdite (downside risk), superiori ad un dato livello, causate da fluttuazioni avverse del sottostante, e tuttavia consentono di porre in essere comportamenti speculativi con margini di profitto, in alcuni casi potenzialmente illimitati.

Oggetto del contratto d'opzione possono essere titoli azionari, portafogli, futures, valute, indici di Borsa, merci, purché negoziati in mercati ufficiali, le cui quotazioni siano dunque accessibili al pubblico degli investitori.

La stipulazione di un contratto di opzione conferisce all'acquirente di essa, detto holder, la facoltà di esercitarla ad una scadenza determinata T (expiration date o maturity), se l'opzione è di tipo europeo, oppure in un istante qualsiasi nell'intervallo temporale compreso tra t_0 , data di emissione (transaction date), e T , data di scadenza, se l'opzione è di tipo americano. L'eventuale esercizio dell'opzione, da parte dell'holder, per il cui diritto egli corrisponde un premio pari a C_0 o P_0 - prezzo di mercato dell'opzione rispettivamente call o put - si sostanzia nell'acquisto, se si tratta di una call, ovvero nella vendita, nel caso di una put, di un bene sottostante ad un prezzo prestabilito K , detto strike price o prezzo di esercizio, dedotto in contratto. Esso obbliga chi ha scritto l'opzione, il writer, ad eseguire la prestazione cui si è impegnato: vendere o acquistare l'underlying al prezzo K , rispettivamente in una call, o in una put.

Opzioni europee: il caso dell'opzione call

L'apertura di una posizione long sul sottostante da parte dell'holder di una call, è subordinata al valore del sottostante stesso sul mercato spot al tempo T , V_T . Si indichi con C_T il valore a scadenza dell'opzione. Si ha:

$$C_T = \begin{cases} V_T - K & \text{se } V_T \geq K \\ 0 & \text{se } V_T < K \end{cases} \quad (1.1)$$

da cui risulta che

$$C_T = \max(V_T - K; 0) \quad (1.2)$$

Se al tempo T l'underlying avrà assunto un prezzo a pronti superiore a K , l'acquirente troverà conveniente esercitare l'opzione e si dice che l'opzione scade in-the-money, (itm); se invece a scadenza l'underlying ha un valore $V_T < K$, si dice che l'opzione scade out-of-the-money (otm). L'acquirente dell'opzione non si servirà del contratto stipulato, poiché il bene sottostante potrà essere comperato sul mercato ad un prezzo più vantaggioso. Egli avrà perso dunque il premio C_0 .

Simmetrica, ma di segno opposto, è la posizione del writer.

Dunque la conclusione di un contratto di opzione di tipo call consente all'holder di governare l'incertezza connessa all'andamento del sottostante, tagliando la coda negativa del downside risk, assicurandosi dal pericolo di subire una perdita superiore a C_0 , senza però che egli si precluda così la possibilità di conseguire rendimenti superiori ad un dato livello (upside potential). In sostanza, l'acquisto di una call dischiude quanto meno potenzialmente opportunità illimitate di beneficiare di plusvalenze, a fronte di fluttuazioni rialziste dell'underlying.

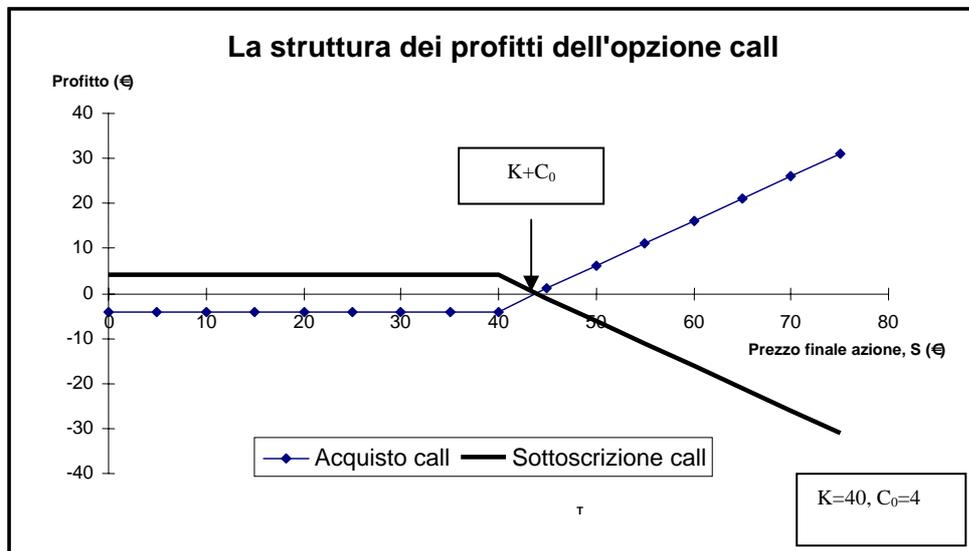


Grafico 1: La struttura dei profitti dell'opzione call

D'altra parte invece il writer si espone, in caso di aumento di V_T , ad un rischio di perdita potenzialmente illimitato, laddove al decrescere di V_T può conseguire al più un risultato economico positivo pari a C_0 .

Opzioni europee: il caso dell'opzione put

Supponiamo che un operatore acquisti una put. Se $K > V_T$ la posizione netta dell'holder si chiuderà con un margine reddituale positivo, al meglio uguale a $K - P_0$ (se $V_T = 0$). Si indichi con P_T il valore a scadenza di un'opzione put. Si ha:

$$P_T = \begin{cases} 0 & \text{se } V_T \geq K \\ K - V_T & \text{se } V_T < K \end{cases} \quad (1.3)$$

da cui risulta che

$$P_T = \max(K - V_T; 0) \quad (1.4)$$

Simmetrica, ma di segno opposto, è la situazione del writer nei diversi possibili casi.

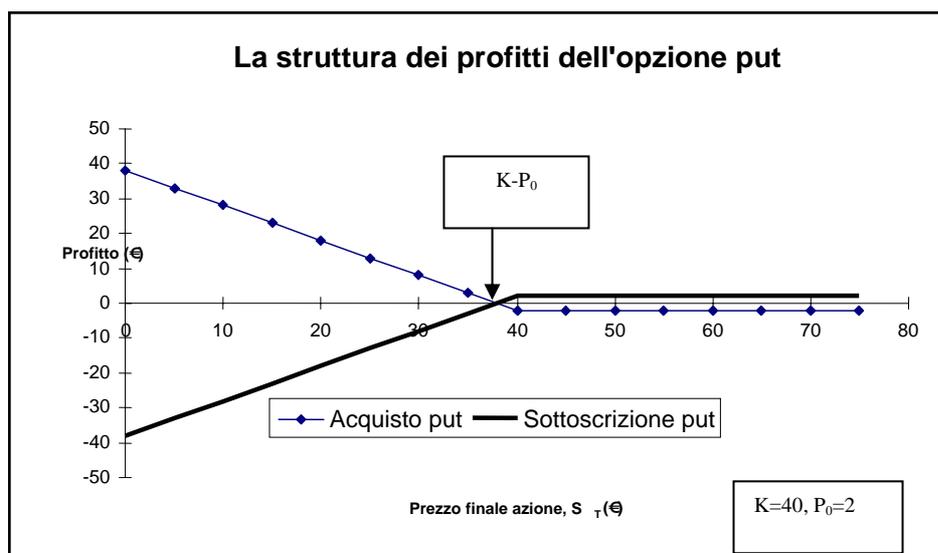


Grafico 2: La struttura dei profitti dell'opzione put

Ad indurre i due operatori, writer ed holder, ad aprire posizioni antitetiche su di un'opzione che insiste su di un medesimo oggetto contrattuale, è una netta asimmetria previsionale circa il trend del sottostante. Si suppone infatti che in una call, ad esempio, l'holder si attenda un incremento dell'underlying e si immunizzi da esso attraverso l'acquisto dell'opzione; oppure che in condizioni di marcata incertezza, egli intenda speculare sull'attività finanziaria, costituita dall'opzione stessa, rivendendola sul mercato ad un prezzo che ha subito una variazione in aumento, causata dalla maggiore volatilità. E' altrettanto evidente quanto il writer confidi invece in un ribasso del mercato del sottostante. Le parti quindi elaborano induzioni assolutamente personali, oltre che divergenti, circa l'andamento del mercato, "analizzando le cause che potrebbero influenzare un aumento o una caduta dei valori, o

l'ampiezza delle eventuali fluttuazioni " (Bachelier), sulla base di ciò che Bayes chiama probabilità soggettive. Opinioni così diametralmente opposte potrebbero formarsi, oltre che per una difficoltà di produrre analisi prospettiche a causa del possibile manifestarsi di eventi futuri ed incerti, anche per un diseguale accesso al patrimonio informativo (asimmetria informativa), diversamente da quanto accadrebbe in un ipotetico sistema economico caratterizzato da mercati efficienti, perfettamente concorrenziali, in cui tutte le informazioni sono disponibili al pubblico degli investitori.

1.2 Proprietà fondamentali delle opzioni su azioni

Fattori che incidono sul prezzo delle opzioni

Il prezzo di un'opzione scritta su di un'azione dipende dai seguenti fattori:

- prezzo corrente al tempo t dell'azione sottostante V_t ;
- prezzo di esercizio K ;
- vita residua dell'opzione $T - t$;
- volatilità del prezzo dell'azione sottostante σ ;
- tasso istantaneo d'interesse privo di rischio δ ;
- dividendi attesi durante la vita dell'opzione D .

Tabella 2: Effetti sul prezzo delle opzioni derivanti dall'aumento di valore di ciascun fattore

Fattori	call	put
V_t	+	-
K	-	+
$T - t^*$	+/-	+/-
σ	+	+
δ	+	-
D	-	+

*(l'effetto può essere di aumento e di diminuzione)

PREZZO CORRENTE DELL'AZIONE SOTTOSTANTE

A parità di altre condizioni, il prezzo di una call è maggiore quanto più è elevata la quotazione dell'azione sottostante. Al contrario, il prezzo di una put è maggiore quanto minore è il valore dell'azione sottostante.

PREZZO DI ESERCIZIO

A parità di altre condizioni, il prezzo di una call è maggiore quanto più basso è il prezzo di esercizio. Invece, il prezzo di una put risulta maggiore quanto maggiore è il prezzo di esercizio.

VITA RESIDUA DELL'OPZIONE

A parità di altre condizioni, il valore di call e put europee non necessariamente cresce al crescere della vita residua, dal momento che il detentore di un'opzione europea con vita residua più lunga non ha maggiori possibilità di esercizio rispetto al possessore di un'opzione europea con vita residua minore. L'opzione europea infatti può essere esercitata solo a scadenza.

VOLATILITÀ DEL PREZZO DELL'AZIONE SOTTOSTANTE

Al crescere della volatilità aumenta la probabilità che la performance dell'azione sottostante risulti particolarmente vantaggiosa o al contrario particolarmente sfavorevole. Nell'ipotesi di rialzo dei corsi, il detentore di una call consegue un profitto superiore, mentre nel caso di ribasso sopporta un downside risk limitato. D'altra parte il possessore di una put beneficia del deprezzamento dell'azione sottostante e si accolla un downside risk predefinito nel caso di aumento delle quotazioni azionarie.

TASSO ISTANTANEO D'INTERESSE PRIVO DI RISCHIO

Ad un incremento dei tassi d'interesse sul mercato corrisponde un aumento del tasso di crescita atteso del valore azionario. D'altra parte, il valore attuale di ciascun flusso futuro diminuisce. Entrambi questi effetti abbattano il valore di una put, mentre si producono esiti opposti su di una call: il primo effetto agisce in aumento sul prezzo opzionario, il secondo in diminuzione. Tuttavia si dimostra che l'effetto netto è positivo, dunque il valore della call aumenta all'aumentare del tasso d'interesse.

DIVIDENDI

I dividendi causano un deprezzamento dell'azione nel giorno di stacco. Dunque le call ne subiscono un pregiudizio, le put beneficiano di un vantaggio.

Limitazioni al valore di call e put europee

Le opzioni devono essere correttamente prezzate sul mercato affinché non si configuri alcuna occasione di arbitraggio (free lunch). Il prezzo razionale³ delle opzioni deve dunque soddisfare puntualmente le seguenti limitazioni, che ne restringano il valore entro un intervallo chiuso. Si considerino, ancora una volta, opzioni scritte su azioni (stock options).

LIMITI SUPERIORI

Il valore di una call non deve mai salire al di sopra del valore del sottostante su cui è scritta:

$$C_0 \leq V_0 \quad (1.5)$$

Se ciò non accadesse, gli arbitraggisti, approfittando tempestivamente di questa imperfezione dei prezzi, potrebbero acquistare l'azione ad un prezzo V_0 e contestualmente scrivere su di essa una call ad un prezzo di mercato $C_0 > V_0$, ottenendo un profitto privo di rischio $C_0 - V_0$ diminuito dei costi di transazione.

Per quanto riguarda una put, il fattore limitante è dato, invece, dal prezzo di esercizio, cioè l'opzione non può mai valere più di $Ke^{-\delta T}$. Al tempo 0 vale la seguente :

$$P_0 \leq Ke^{-\delta T} \quad (1.6)$$

³ In quest'ambito, l'aggettivo non è usato nell'accezione comune ed economica, ma sta ad indicare che si escludono opportunità di arbitraggio .

dove δ è il tasso d'interesse privo di rischio (composto continuamente) a T anni. Dunque al tempo 0 la put non può valere più del valore attuale di K .

Se ciò non si verificasse, un arbitraggista potrebbe conseguire un flusso di cassa positivo, in assenza di rischio, vendendo l'opzione e reinvestendo il ricavato al tasso risk-free.

Limiti inferiori - il caso di una call

Il limite inferiore o minimo teorico del prezzo di una call europea, scritta su titoli che non corrispondono dividendi, è dato invece dalla differenza tra il prezzo del sottostante al tempo 0 di emissione dell'opzione e il valore attuale dello strike price K al tasso risk-free:

$$C_0 \geq V_0 - Ke^{-\delta T} \quad (1.7)$$

Per dimostrarlo costruiamo due portafogli A e B, il primo formato da una call europea e da un importo monetario pari al valore attuale del prezzo di acquisto dedotto nel contratto d'opzione, $Ke^{-\delta T}$; il secondo costituito da una azione con le stesse caratteristiche del sottostante dell'opzione del portafoglio A.

A scadenza T , il valore del portafoglio A sarà:

$$\max(0, V_T - K) + K = \max(K, V_T) \quad (1.8)$$

mentre il portafoglio B varrà V_T . Dunque in T il portafoglio A assume un valore non minore di quello di B. Per l'ipotesi di non arbitraggio, la relazione deve sussistere anche in 0, per cui

$$C_0 + Ke^{-\delta T} \geq V_0$$

da cui

$$C_0 \geq V_0 - Ke^{-\delta T} \quad (1.9)$$

Se il prezzo della call fosse minore del minimo teorico, si prospetterebbero appetibili opportunità di arbitraggio all'operatore che comprasse la call al prezzo C_0 e contestualmente vendesse allo scoperto l'azione al prezzo V_0 . Egli conseguirebbe già al tempo 0 un ricavo di vendita, a fronte della cessione dell'azione. Il ricavo, capitalizzato sino alla scadenza della opzione, verrebbe eroso solo dell'entità dello strike price, in caso di esercizio della call, oppure di un ammontare più esiguo, nel caso di mancato esercizio e di acquisto sul mercato dell'azione sottostante l'opzione, chiudendo così la situazione rimasta aperta.

Limiti inferiori - il caso di una put

Se si tratta di una put europea, emessa su titoli che non pagano dividendi, il minimo teorico è

$$Ke^{-\delta T} - V_0 \quad (1.10)$$

Per dimostrarlo costruiamo due portafogli C e D, il primo formato da una put europea e da un'azione il secondo costituito da un importo monetario pari al valore attuale del prezzo di acquisto dedotto nel contratto d'opzione put, $Ke^{-\delta T}$.

Alla scadenza T , il valore del portafoglio C risulta

$$\max(0, K - V_T) + V_T = \max(K, V_T) \quad (1.11)$$

mentre il portafoglio D varrà K . Dunque in T il portafoglio C assume un valore non minore di quello di D. Per l'ipotesi di non arbitraggio, la relazione deve sussistere anche in 0, per cui:

$$P_0 + V_0 \geq Ke^{-\delta T} \quad (1.12)$$

Relazione di parità tra call e put europee

Analizziamo ora qual è la relazione che intercorre tra una call ed una put europee, che vengono a maturazione lo stesso giorno T , con lo stesso prezzo di esercizio K , sottoscritte su di un

underlying costituito da un titolo azionario che non paga dividendi e dalle medesime condizioni contrattuali.

Si considerino il portafoglio A, costituito dalla call più l'ammontare monetario $Ke^{-\delta T}$ ed il portafoglio B, costituito dalla put più l'azione. Alla scadenza T , A varrà

$$\max(0, V_T - K) + K = \max(K, V_T) \quad (1.13)$$

ed il portafoglio B varrà

$$\max(0, K - V_T) + V_T = \max(V_T, K) \quad (1.14)$$

Avendo in T lo stesso valore, A e B avranno in 0 lo stesso valore per l'ipotesi di non arbitraggio, cioè risulta:

$$V_0 + P_0 = Ke^{-\delta T} + C_0 \quad (1.15)$$

nota come put-call parity⁴.

⁴ Originariamente venne conosciuta come *conversione* ed individuata per primo dallo speculatore Russel Sage, che è riconosciuto da molti come l'antesignano del moderno commercio di opzioni. La notizia è riportata da Israel Nelken (cfr. bibliografia).

Capitolo II

Le opzioni esotiche: approfondimenti su alcune tipologie

2.1 Introduzione alle opzioni esotiche

Dagli anni novanta, la strutturazione di prodotti finanziari particolarmente articolati catalizza l'interesse di analisti ed operatori ed apre la strada alla seconda generazione di opzioni: le esotiche⁵. L'aggettivo esotico richiama proprio l'alterità dei contratti opzionari atipici rispetto a quelli standard, cosiddetti plain vanilla. Con le opzioni plain vanilla si acquistano strumenti che, pur garantendo il massimo della protezione, presentano un costo che è tuttavia elevato.

Gli operatori negoziano sempre più spesso contratti esotici, conformati su particolari caratteristiche dei payoff, al fine di abbattere il costo che altrimenti sopporterebbero se acquistassero un'opzione standard.

Questa particolare classe di derivati riunisce prodotti dalla configurazione così eterogenea, che qualsiasi definizione di tali strumenti finanziari risulta in ogni caso impropria. L'unico elemento caratteristico comune, in ragione del quale si giustifica la riunificazione in un'unica categoria, è la complessità della funzione dei payoff, che si riscontra in tutte le opzioni di questo genere. Mentre infatti, in quelle classiche, la funzione dei flussi di cassa

⁵ Esse furono commerciate meno di quarant'anni fa sul mercato americano over-the-counter. Il primo uso di questi contratti avvenne precisamente nel 1967 con le Down-and-out call del tipo barriera, una delle numerose categorie di esotiche. L'aggettivo invece viene accostato a questo tipo di derivati davvero pochi anni fa. Secondo Nelken infatti la paternità della qualificazione è probabilmente da attribuirsi a Mark Rubinstein, che pubblica solo nel 1990 una monografia dal titolo "Exotic Options". Si scopre curiosamente che, prima dell'uscita del testo, per indicare i primi contratti opzionari vennero usate etichette mutate dal mondo della moda, come boutique options o designer options, forse perché servizi finanziari tagliati su misura, su specifiche esigenze della clientela. Prima del lavoro di Rubinstein, aldilà delle ricostruzioni sull'origine del nome di tali derivati, essi furono oggetto d'indagine di eminenti studi che confermano l'attenzione che nacque intorno alle opzioni esotiche sin già dagli esordi. Sono da segnalare a questo proposito, in particolare, le analisi di Goldman, Sosin e Gatto del 1979, la disamina di Stulz del 1982 e infine quella di Ingersoll del 1986. In ultimo, quando, dopo il 1973, fu chiaro ed accessibile a tutti l'apporto della formula di valutazione di Black e Scholes, i tempi divennero maturi per l'exploit delle esotiche.

attesi dipende dal valore dell'underlying a scadenza, in questo caso, invece, essa è determinata da variabili diverse.

Esistono combinazioni disparate di contratti esotici, negoziati sia in modo autonomo, che come parte integrante di prestiti obbligazionari e plasmati su richieste sempre più specifiche del pubblico degli investitori, al punto che è difficile classificare esaustivamente la vastissima specie. A causa della celerità con la quale, nello spazio di pochi anni, " l'industria finanziaria " ne ha creato degli altri, risulta anacronistica la tradizionale suddivisione, per ben undici categorie, tentata nel 1991 da Mark Rubistein .

Le tipologie di opzioni esotiche che saranno trattate in questo lavoro sono state scelte in funzione della loro diffusione sul mercato e privilegiando i casi caratterizzati da semplicità computazionale nei metodi di prezzamento. Esse sono le seguenti:

1. opzioni binarie;
2. opzioni barriera;
3. opzioni asiatiche;
4. opzioni lookback.

Saranno prese in considerazione solo opzioni di tipo europeo

2.2 Opzioni binarie

Le opzioni binarie⁶ (o digitali) costituiscono la classe più semplice di derivati esotici. Esse pagano infatti una somma fissa al verificarsi di determinate condizioni. Nella maggior parte dei casi, questo tipo di derivato, anziché essere negoziato singolarmente, è inglobato in prodotti più complessi, allo scopo di costruire strutture a rischio limitato. Differiscono dalle plain vanilla per la discontinuità del payoff (nelle opzioni ordinarie il payoff è una funzione continua del valore dell'underlying).

⁶ Sono chiamate così perché corrispondono integralmente la somma predeterminata oppure non pagano nulla (come il codice binario è composto solo dalle cifre 0 ed 1).

Si distinguono anch'esse in europee (anche dette at maturity) ed americane (anche dette one touch). Le opzioni binarie possono assumere configurazioni diverse:

1. Cash-or-nothing,
2. Asset-or-nothing,
3. Supershare.

Nel seguito verranno trattate solo opzioni Cash-or-nothing dal momento che esse risultano le forme contrattuali più scambiate sul mercato.

Una call (una put) cash-or-nothing corrisponde un importo costante predeterminato X se il prezzo del sottostante a scadenza V_T è superiore (inferiore) ad un certo livello prefissato K , detto strike price, nulla in caso contrario:

$$C_T = \begin{cases} X & \text{se } V_T > K \\ 0 & \text{se } V_T \leq K \end{cases} \quad (2.1)$$

mentre per l'opzione put possiamo scrivere:

$$P_T = \begin{cases} 0 & \text{se } V_T > K \\ X & \text{se } V_T \leq K \end{cases} \quad (2.2)$$

Questa versione contrattuale è facilmente riconducibile ad una vera e propria scommessa sul prezzo dell'attività sottostante. Ad esempio, l'holder di una call europea di questo tipo si trova nella posizione dello scommettitore che punta sull'evento che, a scadenza, l'attività sottostante V_T risulti superiore al prezzo d'esercizio K . Se questo si verifica egli vince la scommessa ed ottiene un payoff, definito pari a X .

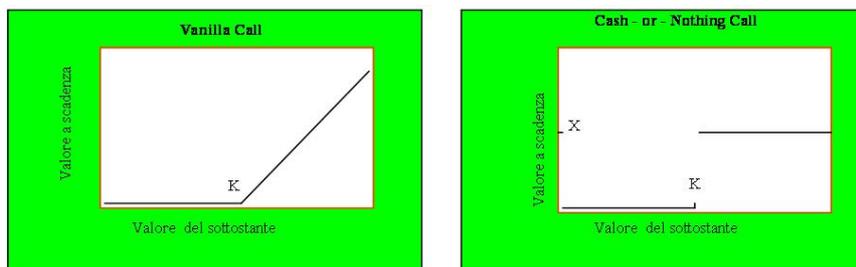


Grafico 1: Valori a scadenza
Vanilla Call e Cash-or-Nothing Call stile europeo

2.3 Opzioni barriera

Le opzioni barriera, tra i primi contratti esotici ad essere negoziati⁷, possiedono la configurazione ordinaria delle call e put standard di tipo europeo, tuttavia, rispetto ad esse, incorporano una specifica clausola negoziale che ne altera il funzionamento. Tali contratti contemplano infatti una condizione di natura sospensiva o risolutiva, rispettivamente nelle Knock-in e nelle Knock-out. Nelle esotiche del primo tipo, l'opzione viene ad esistenza solo se la quotazione del sottostante raggiunge o supera, durante la vita del derivato, un dato prezzo limite, la cosiddetta barriera. Per le Knock-out invece il raggiungimento o il superamento della barriera implica la risoluzione del contratto. In tal caso l'holder perde ogni prerogativa, salvo il diritto ad un compenso (rebate). Tipicamente l'acquisto di questo tipo di opzione è consigliato agli operatori che gestiscono flussi import/export in divisa disposti a pagare un premio anticipato contenuto, per coprirsi dal rischio di un movimento sfavorevole con la possibilità, però, che l'opzione non esista a scadenza⁸.

⁷ Una prima *call* del tipo *down-and-out* appare sul mercato OTC americano già nel 1967. Nella letteratura accademica compaiono nel 1969 ad opera di Snyder.

⁸ Conviene in questo caso fare alcune brevi considerazioni: le barriera sono probabilmente le forme di esoticità più usate contro fluttuazioni avverse del tasso di cambio: con il regular knock-out l'operatore è coperto dal rischio di un movimento sfavorevole del tasso di cambio; se invece il cambio si muove in senso favorevole rispetto alla posizione sottostante, fino a raggiungere il livello della barriera, è vero che l'opzione cessa di esistere, ma è pur vero che l'operatore può tornare a coprirsi, per esempio con un normale cambio a termine, ad un livello migliore rispetto a quello della copertura originaria. È ovviamente necessario che l'operatore che utilizzi opzioni con la clausola del regular knock-out segua l'andamento del mercato valutario con costanza. Ben più pericolosa è la clausola del reverse knock-out, giacché può capitare che l'opzione cessi di esistere proprio nel momento in cui serve di più,

Sia le Knock-in che le Knock-out possono essere di due specie:

1. Knock-in down-and-in;
2. Knock-in up-and-in;
3. Knock-out down-and-out;
4. knock-out up-and-out.

Nelle down-and-in call e put l'opzione viene ad esistenza quando la quotazione dell'underlying scende fino a raggiungere la barriera, nelle up-and-in call e put invece quando sale fino al prezzo limite. Le down-and-out e le up-and-out call e put cessano di esistere a partire dal momento in cui il prezzo del sottostante rispettivamente decresce fino alla barriera, cresce fino ad essa.

La barriera, che limita dunque le possibilità di esercizio dell'opzione, si trova tipicamente posizionata nella regione out-of-the-money, ossia al di sotto del prezzo di esercizio per le opzioni di tipo call, al di sopra per una put. Questa è la configurazione delle opzioni barriera cosiddette regolari⁹.

Di seguito è indicato il posizionamento della barriera rispetto al prezzo di esercizio (strike), in relazione alle diverse configurazioni delle opzioni appartenenti alla classe:

Tabella 1: *Posizionamento della barriera*

Down-and-out	Knock-out La barriera è posizionata sotto lo strike.	Down-and-in	Knock - in La barriera è posizionata sotto lo strike.
Up-and-out	La barriera è posizionata sopra lo strike.	Up-and-in	La barriera è posizionata sopra lo strike.

In genere è più facile che si accetti di sottoscrivere (vendere) una call down-and-in, piuttosto che una put della stessa specie.

ossia nel momento in cui il tasso di cambio si sia mosso in senso sfavorevole ed in modo tanto intenso da raggiungere la barriera. In tal caso non solo l'operatore perde l'opzione, ma si fa carico dell'intera perdita, come se non avesse mai provveduto alla copertura del rischio, ed inoltre deve ricoprirsi ad un livello di cambio assolutamente peggiore (Alea teach reports n.1,1999).

⁹ Tuttavia recentemente sono state create opzioni, cosiddette *reverse*, nelle quali la barriera cade all'interno della regione *in-the-money*.

Questo genere di call richiede una forte volatilità del titolo sottostante affinché venga esercitata con successo dall'holder. Il valore del sottostante deve prima scendere al di sotto della barriera, per poi risalire a scadenza al di sopra dello strike price. Una elevata incertezza circa il trend del sottostante stimola l'acquirente, ma ancora di più il venditore che richiederà il pagamento di un premio maggiore. A differenza delle plain vanilla, nelle knock-in il premio aumenta all'aumentare della volatilità.

L'holder delle opzioni barriera sopporta un costo contenuto, dal momento che rischia di aver acquistato un'opzione che non esiste.

Per quanto riguarda il payoff delle opzioni barriera si rimanda al capitolo 4.

Fattori che incidono sul prezzo delle opzioni barriera

Il prezzo di un'opzione barriera dipende dai seguenti fattori:

- prezzo corrente dell'azione V_t
- prezzo di esercizio K ;
- vita residua $T - t$;
- volatilità del prezzo del sottostante σ ;
- tasso istantaneo d'interesse privo di rischio δ ;
- livello della barriera H .

Tabella 2: Effetti sul prezzo delle opzioni derivanti dall'aumento di valore di ciascuna variabile

Fattori	Down- and- out		Up-and-out	
	call	put	call	put
V_t	+	+	-	-
K	-	+	-	+
σ *	+/-	+/-	+/-	+/-
δ	+	-	+	-
$T - t$ *	+/-	+/-	+/-	+/-
H	-	-	+	+

*l'effetto può essere di aumento e di diminuzione

2.4 Le opzioni asiatiche

Le opzioni asiatiche (asian o average rate options) fanno parte della famiglia delle Path-Dependent, in quanto il loro payoff dipende dalla media delle quotazioni rilevate sul mercato del sottostante, in un intervallo temporale solitamente uguale proprio alla durata di vita dell'opzione medesima.

Dalla fine degli anni ottanta, quando vennero scambiati per la prima volta sul mercato di Tokyo, ad oggi si è assistito ad un massiccio incremento della domanda di tali contratti, spesso anche inglobati in clausole di regolamento di titoli obbligazionari. Il successo tributato dal mercato alle opzioni asiatiche dipende essenzialmente dalla opportunità che esse offrono di coprirsi dall'incertezza generata dalle oscillazioni del sottostante. L'indicazione infatti del valore medio quale parametro cui ancorare il calcolo del payoff consente di livellare la volatilità dei prezzi. L'holder si tiene dunque al riparo da picchi delle fluttuazioni sul mercato del sottostante, poiché la stima del prezzo medio normalizza il risultato finale dell'operazione e, nel contempo, sopporta un costo per l'acquisto che è inferiore a quello delle opzioni ordinarie (cfr. capitolo IV).

I derivati asiatici sono tipicamente scritti su commodities. In particolare si tratta di merci di consistente controvalore, quali metalli preziosi e prodotti petroliferi. Tuttavia trovano largo impiego anche nei mercati valutari. Se, ad esempio, si deve negoziare un flusso di importazioni a scadenza ravvicinata, la copertura per ciascuna fornitura contro oscillazioni sfavorevoli del tasso di cambio richiederebbe l'acquisto di un gran numero di opzioni plain vanilla con scadenza ravvicinata. I costi di assicurazione contro il rischio, nel caso di mancato esercizio, potrebbero così rivelarsi troppo consistenti. Le asiatiche, invece, in questo frangente risultano più convenienti.

Recentemente tali opzioni sono stati predisposte anche per gli operatori che desiderano coprirsi dal rischio della variabilità dei prezzi dell'energia elettrica¹⁰.

¹⁰ Ad esempio, sono negoziate opzioni asiatiche sul prezzo medio dell'energia elettrica del mercato spot nel NORDPOOL – Nordic Power Exchange (Danimarca, Norvegia, Svezia e Finlandia).

Per quanto riguarda i profili contrattuali, le asiatiche possono essere emesse anche su scadenze superiori al breve termine (raggiungono anche i 3 anni), diversamente dalle opzioni plain vanilla (con scadenza 3, 6, 9 mesi).

La determinazione del valore medio dei prezzi del sottostante è operata sulla base dei seguenti fattori:

- l'orizzonte temporale di rilevazione può coincidere o meno con la vita del derivato: può essere antecedente al tempo di emissione dell'opzione t_0 , oppure iniziare a decorrere dopo un periodo di differimento τ , terminando in ogni caso con la scadenza del derivato T ;
- il tipo di media: essa può essere aritmetica o geometrica;
- la ponderazione assegnata a ciascun prezzo: si può assegnare un peso relativo diverso dagli altri dati alle osservazioni relative a particolari epoche;
- il tipo di campionamento: le quotazioni dell'underlying possono essere rilevate con campionamento discreto o continuo. Nel primo caso la media viene calcolata in base a un insieme finito di prezzi $\{V(t_k), k = 0, 1, 2, \dots, n\}$, nel secondo caso l'osservazione viene effettuata con continuità istante per istante.

Si consideri il caso in cui il calcolo del valore medio viene effettuato su di un periodo di campionamento che coincide con la vita del derivato e che attribuisce uguale peso ai prezzi osservati.

Sia $[t = 0; t = T]$ l'orizzonte temporale di riferimento, la media aritmetica dei prezzi M_d nel caso discreto può scriversi come segue:

$$M_d = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n V(t_k) \quad (2.3)$$

con $t_k = t_0 + hk$ ($k = 0, 1, \dots, n$; $h = (t_n - t_0)/n$), mentre nel caso continuo la media è

$$M_c = \frac{1}{T} \int_0^T V(u) du \quad (2.4)$$

La media geometrica G_d nel caso discreto è

$$G_d = \left(\prod_{k=0}^n V(t_k) \right)^{1/(n+1)} \quad (2.5)$$

e nel caso continuo è

$$G_c = \exp \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \log V(u) du \right\} \quad (2.6)$$

Nell'ambito delle opzioni asiatiche si possono individuare due diverse configurazioni contrattuali:

- le average price (o fixed strike average rate)
- le average strike (o floating strike average rate).

La media dei prezzi M così come calcolato secondo le relazioni seguenti sostituisce, nella struttura del payoff delle prime, il prezzo finale del sottostante, nelle seconde, il prezzo d'esercizio:

payoff call averaverage price

$$\max\{0, \phi M - \phi X\} \quad (2.7)$$

payoff put averaverage price

$$\max\{0, \phi V_T - \phi M\} \quad (2.8)$$

dove ϕ è una variabile binaria che vale 1 se l'opzione è di tipo call, -1 se l'opzione è di tipo put.

2.5 Le opzioni lookback

Le opzioni lookback o retrospettive appartengono anch'esse alla più vasta classe dei contratti Path-Dependent. Esse

conferiscono al portatore il diritto di acquistare (call) ovvero di vendere (put) il sottostante al miglior prezzo registrato durante la vita dell'opzione. La configurazione standard (in questo caso si parla di opzioni floating strike lookback) prevede infatti che l'eventuale esercizio dell'opzione venga effettuato ad un prezzo che coincide proprio con il valore minimo oppure massimo, rispettivamente per una call o per una put, dell'insieme di prezzi del bene sottostante, osservati durante la vita del derivato $[0, T]$.

Sia $[0, T]$ l'orizzonte temporale in cui l'opzione lookback è in vita e si considerino i prezzi (V_1, V_2, \dots, V_T) del bene sottostante, osservati in corrispondenza delle epoche $(1, 2, \dots, T)$. I payoff sono dunque i seguenti:

$$lookback_{call} = \max[0, V_T - \min(V_1, V_2, \dots, V_T)] \quad (2.9)$$

$$lookback_{put} = \max[0, \max(V_1, V_2, \dots, V_T) - V_T] \quad (2.10)$$

Il campionamento dei prezzi può essere naturalmente anche di tipo continuo su tutto $[0, T]$.

Le partial-lookback sono varianti di questa classe di opzioni, per le quali il valore massimo o il minimo è moltiplicato per un fattore di scala minore di uno, smorzando così il potenziale guadagno. Nelle lookback modificate lo strike è fisso, K , ed il payoff è dato da

$$lookback - mdcall = \max[0, \max(V_1, V_2, \dots, V_T) - K] \quad (2.11)$$

$$lookback - mdput = \max[0, K - \max(V_1, V_2, \dots, V_T)] \quad (2.12)$$

Capitolo III

Modelli per il pricing

3.1 Premessa sui modelli di valutazione di opzioni esotiche

I primi studi condotti sulla valutazione di opzioni risalgono all'inizio del secolo scorso, ad opera del matematico francese Louis Bachelier.

Da allora si sono susseguiti numerosi contributi alla costruzione genetica di una vera e propria teoria che rispondesse alla questione del prezzamento delle opzioni. Tuttavia, soltanto negli anni settanta Black, Merton e Scholes hanno sviluppato un modello sistematico e rigoroso che ha offerto una soluzione¹¹ metodologica del problema, divenendo paradigmatico per il prezzamento della intera classe di prodotti derivati. La valutazione delle opzioni esotiche pone però un'inevitabile questione di metodo circa l'opportunità di estendere ad essi, così significativamente diversi dalle plain vanilla, tale modello. In ordine alla particolarità di tali derivati non ordinari non esistono modelli di prezzamento che possano essere qualificati come robusti a priori, indipendentemente cioè dalle condizioni al contorno (boundary conditions) del prodotto finanziario. Si richiede piuttosto l'implementazione di modelli che si adattino alle caratteristiche su cui il prodotto medesimo è congegnato.

La chiave di lettura per la valutazione delle opzioni esotiche risiede dunque nella singolarità delle specie di esse, in una unicità di strutture in cui si configurano, che si riflette sul diverso grado di leva finanziaria o curvilinearità dei payoffs. La varietà della tipologia di questi derivati, fenomenale proprio perchè sviluppatasi su di un arco di tempo relativamente breve, indica la misura della difficoltà nell'assegnare un valore alle esotiche che sia corretto, nel senso che si avvicini il più possibile a quello reale, nel nome di un criterio di sub-ottimalità (data la complessità dei payoffs delle esotiche, spesso la valutazione è frutto di un'approssimazione).

Ogni livello di complicazione su cui è costruito il prodotto esotico introduce infatti nuovi elementi di complessità e giustifica

¹¹ Si tratta di una soluzione in forma chiusa: una formula costituita da un numero finito di operazioni.

quindi la molteplicità di approcci proposti per il pricing, in sede accademica, ma anche in seno alla comunità di operatori finanziari. Ogni nuova versione (di esotiche) insomma – “lancia una sfida”, come scrive Howinson¹², a coloro che sono interessati ad approntare schemi di analisi appropriati per i nuovi strumenti.

Per una parte di questi contratti sopravvive l'impianto teorico del lavoro degli studiosi Black e Scholes (di seguito denominati B-S). Ciò consente di far riferimento alla soluzione analitica dell'equazione differenziale di valutazione B-S, tenendo conto delle boundary conditions, come formula per ottenere il valore dell'opzione esotica, al pari del pricing di altri derivati. Tuttavia l'evidenza empirica esibisce spesso dinamiche del mercato non lineari¹³, in contrasto con il substrato sotteso al modello B-S, mostra violazioni frequenti delle ipotesi su cui è costruita tale teoria, che riprovano del tutto la possibilità di operare in un ambiente B-S¹⁴. In ogni caso, negli ultimi anni sta proseguendo il dibattito su mercati e modellistica (ha fatto la sua comparsa un'ulteriore classe di modelli basati sulla volatilità stocastica), in ordine alla necessità di far fronte ad un aumento dei rischi, dovuto essenzialmente all'orizzonte temporale di lungo termine (scadenze a cinque anni ed oltre) dei nuovi prodotti esotici, alla complessità dei tempi di calcolo, alla non linearità dei

¹² S.D. Howinson, “Applied mathematics and finance”, Mathematical Models in Finance “Chapman & Hall, 1995.

¹³ In merito alle dinamiche non lineari si veda W.T. Ziemba e C.R. Hensel in “ Worldwide security market anomalies Mathematical Models in Finance, Chapman & Hall, 1995. Anche Patterson nel 1993 affronta l'argomento.

¹⁴ In particolare, dal 1994, la pubblicazione degli articoli di Bruno Dupire ed Emanuel Derman e di Iraj Kani hanno segnato un profondo cambiamento nell'approccio alla valutazione dei derivati. Fino ad allora gli analisti quantitativi determinavano il pricing recependo acriticamente le ipotesi di B-S. Attualmente gli analisti quantitativi sanno che i problemi di pricing dipendono largamente dall'effettivo andamento del mercato (quale lo smile della volatilità implicita), in quanto esso determina la scelta del modello. Attualmente i modelli di tipo smile sono largamente utilizzati per il calcolo del valore di una opzione. Il loro utilizzo è stato favorito dalla crescita, dopo il 1994, dei mercati dei derivati su titoli azionari, caratterizzati da effetti smile e skew particolarmente pronunciati e più recentemente, dalla comparsa di comportamenti smile e skew sui mercati delle opzioni, quali quelli su oro e tassi di interesse, dove prima non esistevano (Risk Italia, Ottobre 2002, www.risknet.it).

L'effetto smile costituisce la principale contraddizione tra il modello di Black e Scholes e la realtà: il valore della volatilità implicita mostra una dipendenza dal prezzo di esercizio e dalla scadenza dell'opzione. Questa dipendenza è nota come *effetto smile*.

payoff ed infine alla complessità di analisi extra modello, data la turbolenza del macroambiente di riferimento.

3.2 Modello binomiale

La modellistica per il pricing dei derivati distingue l'ipotesi in cui l'andamento del sottostante segue un processo continuo, così come nello schema classico di B-S, da quella secondo cui le variazioni del prezzo avvengono in tempi discreti, così come nel modello binomiale.

Sebbene quest'ultimo sia stato presentato originariamente da Sharpe¹⁵, si riconduce all'ormai famoso articolo di Cox, Rubisten e Ross, "Option Pricing: a Simplified Approach", comparso nel 1979 sulla rivista scientifica *Journal of Financial Economics*.

Nota in letteratura anche come CRR, dall'acronimo delle iniziali dei tre autori, esso fu dapprima proposto per valutare le opzioni su azioni, in particolare quelle di tipo americano. Solo più tardi fu esteso efficacemente al prezzamento di numerosi derivati con payoffs complessi¹⁶, grazie alla duttilità della struttura valutativa.

Lo schema binomiale è basato sull'ipotesi che il prezzo del sottostante segua un processo binomiale di tipo moltiplicativo, secondo due fattori di scala, di crescita o di diminuzione, cosiddetti u (da up, maggiore di 1) e d (da down, tale che $0 < d < 1$). Si postula dunque che l'underlying possa assumere solo due valori, alternativamente, alla fine di un periodo di tempo di ampiezza Δt prefissata. In sostanza si suppone che, data la quotazione dell'attività sottostante al tempo di emissione del derivato V_0 , essa possa giungere, alla fine del primo sottoperiodo di ampiezza Δt , ad uV_0 oppure a dV_0 , cui sono associate rispettivamente le probabilità p ed $1-p$ che si realizzino rispettivamente un rialzo o un ribasso. Questo processo può essere rappresentato come mostra la figura 1:

¹⁵ Seppur parzialmente, Sharpe ha sviluppato per primo proprio questo approccio per il prezzamento delle opzioni, nel testo "Investments" - 1978. Nello stesso anno Rendleman e Barter, indipendentemente, hanno ricavato una formulazione simile per la soluzione del medesimo problema.

¹⁶ Brennan e Schwartz hanno fornito molti risultati in questo senso; in particolare si veda Brennan M. J. e E.S. Schwartz, 1977, The valuation of American put options, *Journal of Finance* 32.

$$V_0 = \begin{cases} uV_0 & p \\ dV_0 & 1-p \end{cases} \quad (3.1)$$

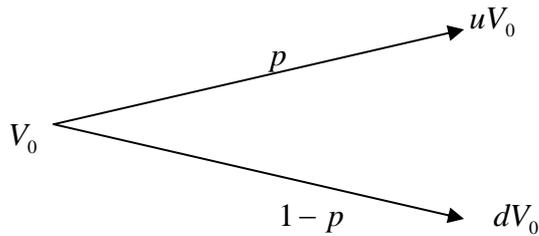


Figura 1: Andamento del sottostante dopo un periodo

I parametri u, d, p ¹⁷, in relazione al valore corrente dell'underlying, specificano un numero finito di prezzi finali di esso.

Il modello, che fa riferimento ad un mercato completo, si sviluppa alla luce di un importante principio noto come valutazione neutrale verso al rischio, il quale implica che disponendo di due tipi di attività finanziarie, quali le opzioni ed i relativi sottostanti, si può costruire un portafoglio privo di rischio, formato appunto dai medesimi titoli.

Dunque, si ipotizzi il caso di un portafoglio costituito da una posizione corta su di una call di tipo europeo ed una lunga su di un dato quantitativo di azioni sottostanti Δ , per le quali non si corrispondono dividendi.

Dopo un intervallo temporale unitario $[0,1]$, il valore del portafoglio nei due possibili stati del mondo sarà il seguente:

$$\begin{aligned} & V_0 u \Delta - C_u ; \\ & V_0 d \Delta - C_d \end{aligned} \quad (3.2)$$

¹⁷ La determinazione di questi parametri è rinviata all'appendice.

avendo indicato con C_u e C_d rispettivamente il valore dell'opzione nello "stato up" e nello "stato down" dopo il primo sottoperiodo.

Affinché il portafoglio sia privo di rischio, bisogna che il numero di azioni Δ detenute soddisfi la seguente equazione:

$$V_0 u \Delta - C_u = V_0 d \Delta - C_d \quad (3.3)$$

da cui

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{V_0 (u - d)} \quad (3.4)$$

Al fine di evitare possibilità di arbitraggio, il rendimento del portafoglio deve eguagliare il tasso privo di rischio. Questo implica che il valore attuale del portafoglio in uno dei due stati del mondo deve eguagliare il valore che possiede oggi il portafoglio medesimo:

$$(V_0 u \Delta - C_u) e^{-rT} = V_0 \Delta + C_0 \quad (3.5)$$

da cui si ottiene

$$C_0 = V_0 \Delta - (V_0 u \Delta - C_u) e^{-rT} \quad (3.6)$$

Sostituendo la (3.4) si ottiene

$$C_0 = e^{-rT} \left[C_u \frac{e^{rT} - d}{u - d} + C_d \frac{u - e^{rT}}{u - d} \right] \quad (3.7)$$

che, posto

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

può essere scritta come segue:

$$C_0 = e^{-rT} [C_u p + C_d (1 - p)] \quad (3.8)$$

La formula di valutazione binomiale (3.8) indica che il prezzo dell'opzione al tempo di emissione si può calcolare come valore attuale, ad un tasso privo di rischio, del valore atteso¹⁸ del payoff a scadenza. Se la vita del derivato dura n sottoperiodi di uguale ampiezza, si può osservare che, al termine di ciascun Δt , il prezzo del sottostante verrà ottenuto moltiplicando il valore di inizio periodo per il fattore di variazione u o d . Attraverso questo meccanismo, che termina con l'esame del sottostante a scadenza, si arriva a tracciare l'albero binomiale. Se n sono i sottointervalli in cui è stata suddivisa la vita dell'opzione scadente in T , si producono $n + 1$ valori possibili per il prezzo finale, dati da:

$$V_0 u^k d^{n-k} \quad \text{con } k = 0, 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

con probabilità

$$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (3.10)$$

In conclusione, il valore al tempo 0 della call scadente in T risulta dato dalla seguente formula:

$$C_0 = \left\{ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \max[0, V_0 u^k d^{n-k} - K] \right\} e^{-rT} \quad (3.11)$$

Dunque, il procedimento di valutazione binomiale si articola preliminarmente in una serie di fasi preordinate alla costruzione dell'albero binomiale, detto anche dendrogramma, sulla base del quale si opera poi il vero e proprio processo di calcolo.

¹⁸ Il valore atteso viene ottenuto in rapporto alle probabilità neutrali al rischio p ed $1-p$.

La struttura dell'albero è fatta da rami e nodi. Il numero dei rami dipende dagli stadi. I nodi, invece, che corrispondono ai probabili movimenti al rialzo o al ribasso del sottostante nell'intervallo temporale di ampiezza prestabilita, sono sempre solo due per ogni stadio, essendo il modello appunto binomiale. Ai due nodi di ogni stadio si associa, inoltre, come detto sopra, rispettivamente probabilità p ed $1 - p$ neutrali al rischio.

Una volta completato l'albero, il computo del valore opzionario viene fatto partendo dai nodi finali, attribuendo ad essi il valore che l'opzione possiederebbe in corrispondenza del prezzo che si è ipotizzato per ciascuno di essi. Precisamente, si ponderano i valori previsti dell'underlying con le rispettive probabilità scontandoli al tasso risk-free, data l'ipotesi di neutralità al rischio. Muovendosi a sinistra verso lo stato iniziale si ritorna così al punto d'origine dell'albero

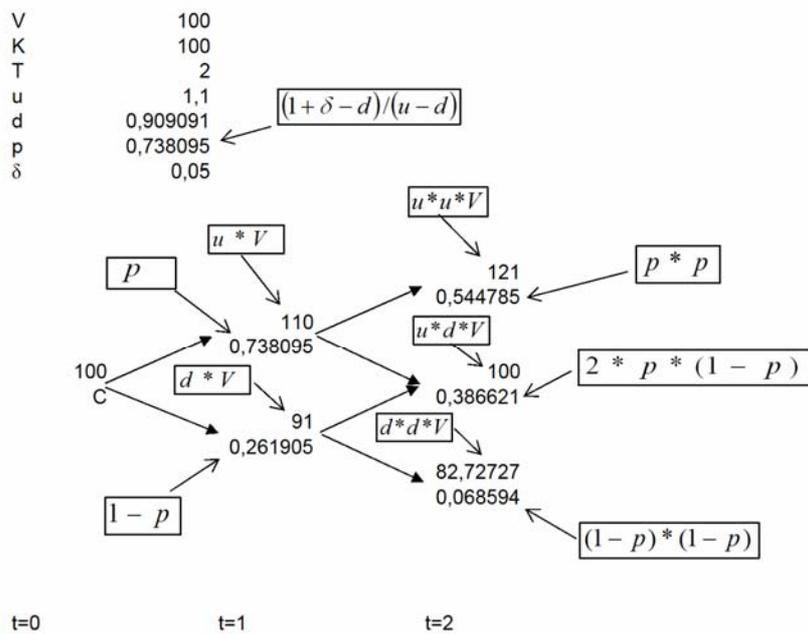


Figura 2: Valutazione di una call

Il dendrogramma ha un grande impatto visivo poiché, letto dal punto d'origine ai nodi finali, rappresenta l'evoluzione di scenario prevista per il mercato del sottostante e, specularmente, esaminato al contrario (dai nodi finali al punto di origine), esso individua quali valori può arrivare prevedibilmente a toccare l'opzione, rispetto allo stato attuale (al suo valore corrente).

Per opzioni europee si dimostra come la soluzione binomiale converga a quella analitica di B-S¹⁹.

Il modello binomiale è validamente implementato anche per calcolare il valore di derivati americani, pure se si corrispondono dividendi. La funzionalità del modello si estende, inoltre, anche alla valutazione di opzioni esotiche. Nel complesso questo metodo possiede un grado di elasticità piuttosto elevato, poiché si presta, in linea generale, al prezzamento di ogni tipo di opzione finanziaria. Dobbiamo ricordare infine che per la valutazione di opzioni su tassi d'interesse e su obbligazioni hanno trovato applicazione soprattutto gli alberi trinomiali, che a ciascun nodo prevedono tre probabili valori del sottostante, la cui procedura non diverge, nella sostanza, da quella binomiale, se non per complessità dell'elaborazione.

3.3 Modello di Black e Scholes

Ipotesi del modello

Il modello viene formulato poste una serie di assunzioni, che gli autori stessi definiscono "condizioni ideali sia del mercato delle azioni, che di quello delle opzioni"²⁰.

Si ipotizza che le negoziazioni avvengano in assenza di elementi frizionali e che dunque non vi siano costi di transazione, né tasse, che i titoli siano perfettamente divisibili, né siano previste penalità per vendite allo scoperto (short selling). In quest'ultima ipotesi gli operatori possono concludere un contratto di compravendita di una opzione senza che il writer o l'holder, rispettivamente di una call o di una put, siano titolari, al momento

¹⁹ Vedi Cox, Rubisten e Ross, "Option Pricing: a Simplified Approach", 1979, Journal of Financial Economics.

²⁰ F.Black e M. Scholes, "The pricing of options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, 1973.

della stipula, della proprietà del sottostante. Si suppone inoltre che:

- le negoziazioni avvengano in un tempo continuo;
- non si corrispondano dividendi sullo stock azionario sottostante, durante la vita dell'opzione;
- il tasso di interesse a breve privo di rischio sia noto e costante fino alla scadenza dell'opzione e della stessa entità su prestiti e depositi;
- non si configurino opportunità di arbitraggio²¹.
- l'andamento dei prezzi azionari sia regolato da un processo stocastico²² di tipo geometrico browniano²³.

Un processo stocastico segue un moto geometrico browniano se soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica:

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dZ \quad (3.12)$$

dove dZ è un processo di Wiener o moto browniano standard, μ il cosiddetto tasso istantaneo di deriva e σ la volatilità istantanea.

Dall'ipotesi che i prezzi siano descritti attraverso un moto geometrico browniano e sulla base del lemma di Ito discende un'importante proprietà: il logaritmo del prezzo azionario si distribuisce in modo normale e quindi le quotazioni azionarie seguono una distribuzione di probabilità di tipo lognormale.

²¹ L'ipotesi di non arbitraggio rappresenta uno dei capisaldi della moderna teoria finanziaria. Secondo questa assunzione, i prezzi che si formano sul mercato sono tali da non consentire l'opportunità di costruire strategie di compravendita da cui ottenere profitti certi, in assenza di rischio.

²² La dinamica dei prezzi dei titoli azionari è oggetto di numerosi studi, in quanto costituisce uno dei fenomeni più difficili da modellizzare. In letteratura esistono dunque altri modelli di evoluzione del prezzo, come ad esempio i *jump diffusion* (Jarrow, Rudd (1983), Cox, Rubinstein (1985)). Essi combinano una componente diffusa e una componente di salto. Secondo alcuni autori infatti, l'ipotesi in base a cui il processo che regola questa dinamica sia un moto geometrico browniano, può essere accettata solo per brevi periodi di tempo e per particolari tipi di mercati. Un processo di pura diffusione (come il moto browniano) non spiegherebbe in maniera adeguata le variazioni repentine alle quali sono soggette le quotazioni che *scontano* l'arrivo di importanti informazioni sui mercati.

²³ Per ulteriori dettagli si veda l'appendice "Dinamica del prezzo del sottostante".

Inoltre, in virtù di tale lemma, se la dinamica del sottostante V è rappresentata attraverso la (3.12), si può affermare che il processo seguito da una funzione f di V e t è descritto dalla seguente²⁴:

$$df = (\mu V \frac{\partial f}{\partial V} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2}) dt + \sigma V \frac{\partial f}{\partial V} dZ \quad (3.13)$$

dove dZ è lo stesso processo di Wiener o moto browniano standard presente nell'equazione che regola il sottostante.

Se le assunzioni del modello sono verificate, B-S dimostrano che:

$$C_t = V_t N(d_1) - Ke^{-\delta t} N(d_2) \quad (3.14)$$

Si rinvia per riferimenti sulla dimostrazione al sottoparagrafo successivo.

Gli autori calcolano il valore teorico di un'opzione call costruendo un portafoglio con rendimento privo di rischio (immunizzato), costituito dall'opzione stessa più una certa quantità Δ delle azioni sottostanti l'opzione. Si può costruire, ad un tempo $0 < t < T$, un portafoglio di valore Π in $t = 0$ che replichi il flusso di cassa della call. In assenza di opportunità di free lunch, data una certa funzione dei payoff della call, il portafoglio che duplichi un tale flusso di cassa deve avere un valore uguale a quello del derivato duplicato. Basterà insomma individuare il valore del portafoglio replicante per conoscere quello della call. Nella fattispecie, la replica avviene attraverso l'apertura di una posizione corta sulla opzione f ed una lunga sulla quantità $\frac{\partial f}{\partial V}$ di azioni di valore unitario V , su cui è scritto il derivato. Si ha:

²⁴ BLACK F., SCHOLLES M., *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 81 (1973).

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial V} V \quad (3.15)$$

dove la relativa variazione in Δt è:

$$\Delta \Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial V} \Delta V \quad (3.16)$$

In questo modo, la variazione di valore di Π risulta indipendente dalla componente stocastica, cui sono medesimamente soggetti sia la call che lo stock azionario.

Essendo i prezzi dell'opzione e dell'azione sottostante descritti rispettivamente dalla (3.12) e (3.13), le variazioni di tali valori nel discreto sono quindi le seguenti:

$$\Delta V = \mu V \Delta t + \sigma V \Delta z \quad (3.17)$$

$$\Delta f = \left[\frac{\partial f}{\partial V} \mu V + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \sigma^2 V^2 \right] \Delta t + \frac{\partial f}{\partial V} \sigma V \Delta z \quad (3.18)$$

Sostituendo questi valori nell'equazione (3.16), la variazione di portafoglio $\Delta \Pi$ può essere dunque così riscritta:

$$\begin{aligned} \Delta \Pi &= - \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial V} \mu V + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \sigma^2 V^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial V} \sigma V \Delta z \right\} + \frac{\partial f}{\partial V} [\mu V \Delta t + \sigma V \Delta z] = \\ &= \left(- \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \sigma^2 V^2 \right) \Delta t \end{aligned} \quad (3.19)$$

L'espressione, dalla quale risulta eliminata la fonte d'incertezza costituita dal processo di Wiener ($dz = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$), mostra chiaramente

che la variazione $\Delta\Pi$ è priva di rischio²⁵. E' opportuno evidenziare qui che la copertura della posizione finanziaria si realizza su brevi intervalli temporali Δt , dopo ciascuno dei quali il portafoglio deve subire un adeguato riproporzionamento, che riporti la situazione in assenza di rischio, secondo una strategia di copertura dinamica.

Un portafoglio con un rischio di mercato 0 ($\beta = 0$), per il Capital Asset Pricing Model²⁶ deve remunerare, in Δt , l'investitore ad un tasso di rendimento pari al tasso risk-free. Del resto, se così non fosse, si potrebbe dar luogo ad arbitraggi. Per questo motivo si può scrivere che:

$$\Delta\Pi = \delta\Pi\Delta t \quad (3.20)$$

Sostituendo in questa equazione i valori della (3.15) e della (3.19) otteniamo

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \sigma^2 V^2 \right) \Delta t = \delta \left(f - \frac{\partial f}{\partial V} V \right) \Delta t \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} \sigma^2 V^2 + \delta V \frac{\partial f}{\partial V} = \delta f$$

che costituisce l'equazione differenziale²⁷ di Black e Scholes, alle derivate parziali, di secondo ordine, di tipo parabolico.

Si può convenientemente argomentare che, essendo μ assente dall'equazione (3.21), non influenza la soluzione analitica di valutazione. Ciò semplifica la formula del prezzamento. Supponiamo quindi che gli investitori operino in una condizione di neutralità al rischio, che non richiedano cioè premi per sopportare

²⁵ Il portafoglio risulta istantaneamente immunizzato. Per questo si veda "The pricing of Options and Corporate Liabilities", Black e Scholes (1973).

²⁶ Sharpe, "Capital Asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk", Journal of Finance, n.19, 1964.

²⁷ Vedi in appendice "Equazioni differenziali".

l'incertezza, più o meno accentuata, circa il rendimento derivante dalla detenzione di date attività. Si può così ottenere l'importo dei flussi di cassa futuri scontandone il valore atteso al tasso privo di rischio. Si conseguono soluzioni dell'equazione di valutazione, verificate anche in una economia con avversione al rischio, in cui, in particolare, si controbilanciano due effetti: un aumento sia del tasso di crescita atteso del sottostante, che di quello di attualizzazione (che contiene questa volta un premio per il rischio).

Formula di pricing di una opzione

Lo step finale per calcolare il valore della call è risolvere l'equazione differenziale stocastica (3.21). Il valore del derivato può essere conseguito mediante l'attualizzazione del flusso di cassa futuro atteso, ad un tasso risk-free δ , data la condizione di neutralità al rischio sopra supposta²⁸.

Il valore di un'opzione call al tempo $t < T$ è il seguente:

$$C_t = V_t N(d_1) - Ke^{-\delta t} N(d_2) \quad (3.22)$$

3.4 Metodo Monte Carlo

Il metodo Monte Carlo rientra nella categoria delle tecniche numeriche che forniscono soluzioni nella forma di approssimazioni e che sono tipicamente impiegate qualora non siano disponibili formule analitiche di valutazione. Esso è stato introdotto in finanza da Boyle²⁹ nel 1977 e da allora viene considerato come uno strumento computazionale piuttosto efficace per la risoluzione del problema del pricing dei derivati in generale. Per le opzioni esotiche, in particolare, Boyle stesso raccomanda l'applicazione del metodo, per la velocità, per l'efficienza e per la flessibilità³⁰.

Il procedimento è simulativo dello spazio dei possibili cammini stocastici che vengono campionati secondo una serie di fasi.

²⁸ Black F., Scholes M., *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Political Economy, 81 (1973).

²⁹ Boyle, P. P. (1977). Option: a Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, 4:323-338

³⁰ Si legga Boyle in "Valuation of Exotic Options, Using the Monte Carlo Method".

Si suddivide l'intervallo temporale di riferimento $[0, T]$ (equivalente alla vita dell'opzione) in n intervalli, di ampiezza $\Delta t = T / n$.

Si introduce una ipotesi su come evolve nel tempo il prezzo dell'underlying. Comunemente, nelle applicazioni del metodo al calcolo del valore opzionario, il prezzo dell'attività sottostante è distribuito in base ad una funzione di densità in forma lognormale (si sceglie cioè il moto geometrico browniano).

Si simula il prezzo ad ogni data discreta $k = 0, \dots, T$ fino a $V_i(T)$ dopo $T / \Delta t$ passi (cioè si simula l'intero sentiero temporale per il valore dell'underlying fino a V_T), secondo il processo stocastico del moto geometrico browniano (3.12).

Possiamo riscrivere l'equazione (3.12) in questo modo:

$$V_{t+\Delta t} = V_t + \mu V_t \Delta t + \sigma V_t \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (3.23)$$

in cui ε una estrazione casuale da una distribuzione normale standardizzata $\varphi \sim (0,1)$. Se n sono i sottoperiodi in cui è scandita la durata del derivato, n sono le estrazioni casuali ε su cui è costruita ciascuna simulazione.

A questo punto, per $i = 1, 2, \dots, M$, si simula l' i -esimo $V_{i,T}$ e si determina corrispondentemente la funzione del payoff campionario. Ad esempio, per una call si ottiene :

$$C_{i,T} = \max [V_{i,T} - K, 0] \quad (3.24)$$

Infine si reiterano le simulazioni M volte e si attualizza la media campionaria delle M iterazioni, ad un tasso risk-free, data l'assunzione di un'economia neutrale al rischio:

$$C_t = e^{-\delta(T-t)} E[C_T] \quad (3.25)$$

in cui

$$E[C_T] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \max[0, V_{i,T} - K] \quad (3.26)$$

La simulazione va effettuata sul $\log V$ e non su V . Per il lemma di Ito $\log V$ segue l'andamento diffusivo:

$$\log[V] = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz \quad (3.27)$$

Pertanto, data la (3.23), otteniamo

$$\log[V_{t+\Delta t}] = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (3.28)$$

da cui

$$V_{t+\Delta t} = V_t e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}} \quad (3.29)$$

ed è possibile ricavare V_T :

$$V_T = V_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \varepsilon} \quad (3.30)$$

In rapporto alla dimensionalità del problema di valutazione da affrontare, il metodo Monte Carlo si presenta più efficiente nel confronto con altre procedure, numeriche o meno. Se infatti sono tre o più le variabili stocastiche che influenzano il valore del derivato, conviene implementare la simulazione stocastica, poiché mentre il tempo di elaborazione di altri metodi si incrementa esponenzialmente rispetto al numero di variabili (vedi modello binomiale), in questo caso esso cresce invece quasi linearmente (sempre rispetto al numero di variabili).

Per ottenere stime di Monte Carlo maggiormente accurate, si deve aumentare il numero di simulazioni in misura quadratica,

essendo l'errore della stima proporzionale ad $\frac{\eta}{\sqrt{Media}}$, dove con η si indica la varianza della variabile casuale payoff. Tuttavia, se è vero che aumentando N la deviazione standard diminuisce, tendendo a zero, la velocità di convergenza risulta svantaggiosamente molto lenta. Per dimezzare l'errore³¹, infatti, bisogna quadruplicare il numero di simulazioni e quindi, si noti bene, anche il tempo di calcolo, poichè la deviazione standard tende a zero con $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Questo significa che l'ottenimento di deviazioni standard di piccola entità potrebbe richiedere tempi di calcolo inaccettabilmente lunghi.

³¹ Per ridurre la varianza sono state messe a punto tecniche ad hoc tra cui in particolare il metodo delle variabili antitetiche e quello delle variabili di controllo.

Capitolo IV

Strumenti informatici per il pricing

4.1 Introduzione

Si sviluppa di seguito la valutazione delle opzioni esotiche in oggetto, sulla base dei modelli di pricing previamente analizzati.

Le piattaforme di calcolo prescelte allo scopo di implementare tali applicazioni sono il foglio di lavoro Excel della Microsoft ed il software FINCAD XL (FinancialCAD Corporation), integrato all'applicativo Microsoft Excel.

Il primo, che si caratterizza per flessibilità di adattamento ad esigenze particolari e per massiccia diffusione tra gli utenti del pacchetto Office di cui fa parte, consente di attivare formule risolutive ad hoc. Tuttavia esse devono essere necessariamente prima predisposte dall'operatore per poi essere impiegate.

Il foglio di calcolo Excel offre inoltre il vantaggio dell'esiguità del costo di installazione, rispetto ad applicativi chiusi, sofisticati per potenza, ancorché onerosi per tempi di apprendimento allungati.

D'altra parte, il software FINCAD XL, che trova largo impiego per la valutazione ed il risk management di titoli finanziari di base e di derivati, dispone del medesimo impianto strutturale del foglio di calcolo del pacchetto Office. Esso risulta implementato in 72 paesi tra banche e aziende, data l'enorme quantità di funzioni immediatamente disponibili (1400 funzioni e 150 workbooks precostituiti), la consistenza e l'accuratezza delle stime che produce, nonché la rapidità dei tempi di apprendimento. Tuttavia, trattandosi di un programma professionale, il costo della licenza risulta più elevato.

Valutazione con Microsoft Excel

Si riporta di seguito la nomenclatura relativa ad alcune funzionalità del foglio di calcolo Excel:

- file: cartelle - workbooks;
- le cartelle possono essere costituite da più fogli di lavoro - worksheets;
- il foglio selezionato: foglio attivo – active worksheet;

- in una cartella possono essere attivati differenti fogli di lavoro selezionando le linguette dei fogli apposite poste nella parte inferiore di ciascun di essi: schede (vedi figura 1);
- l'intersezione di una riga (identificata da un numero) con una colonna (identificata da una lettera) individua una cella;
- la posizione di una cella è identificata da un numero (riga) e da una lettera (colonna): riferimento di cella.

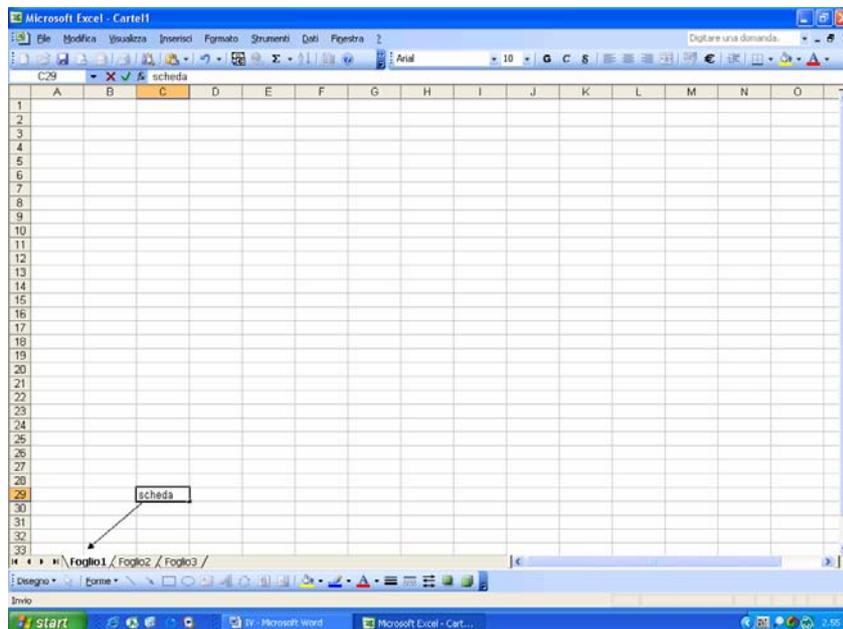


Figura 1

Le formule di pricing verranno riprodotte nel foglio di calcolo step dopo step a partire da celle vuote (figura 2), non essendo annoverate per default nella libreria di funzioni Excel.

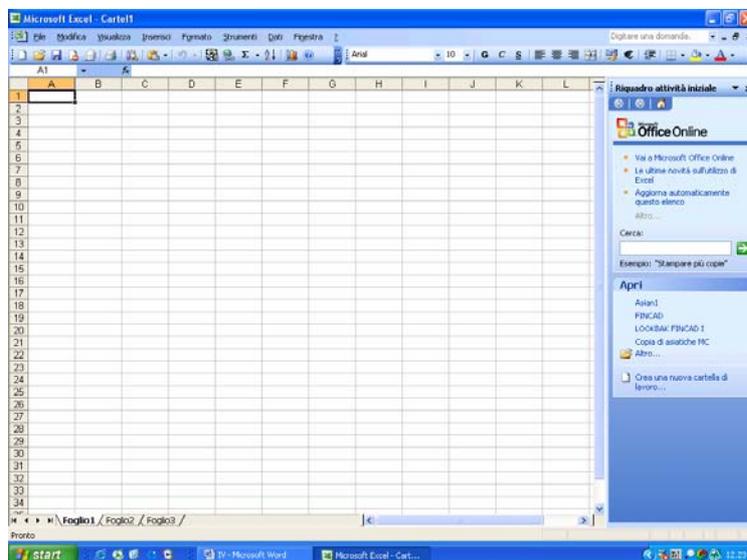


Figura 2

Valutazione con Fincad XL

Per selezionare una funzione occorre preventivamente attivare FINCAD XL dal menù del foglio di calcolo (figura 3), quindi selezionare FUNCTION FINDER (figura 4).

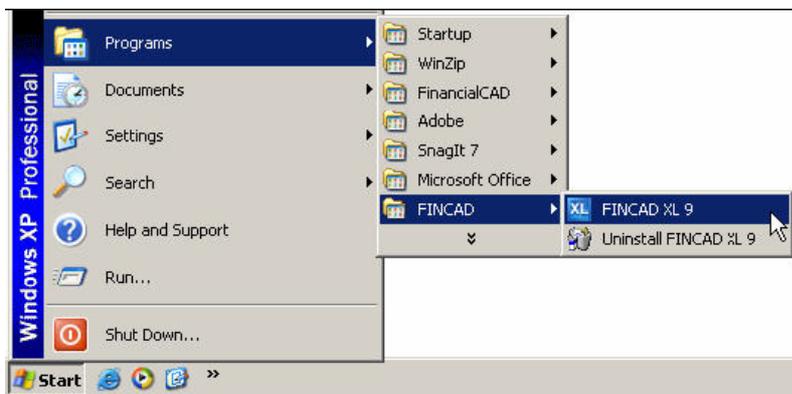


Figura 3

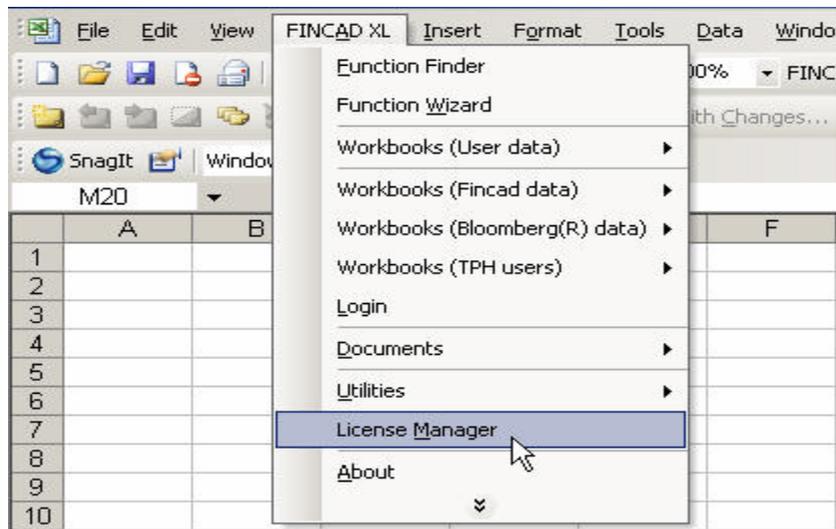


Figura 4

In tal modo, appare la schermata relativa alla biblioteca delle funzioni catalogate per categoria, in cui selezionare la classe EXOTIC OPTIONS e la sottoclasse d'interesse, alla destra della quale comparirà il riquadro che restituisce l'indicazione delle funzioni relative alla sottoclasse selezionata. Cliccando su ciascuna funzione compare la descrizione sintetica dell'obiettivo che essa persegue

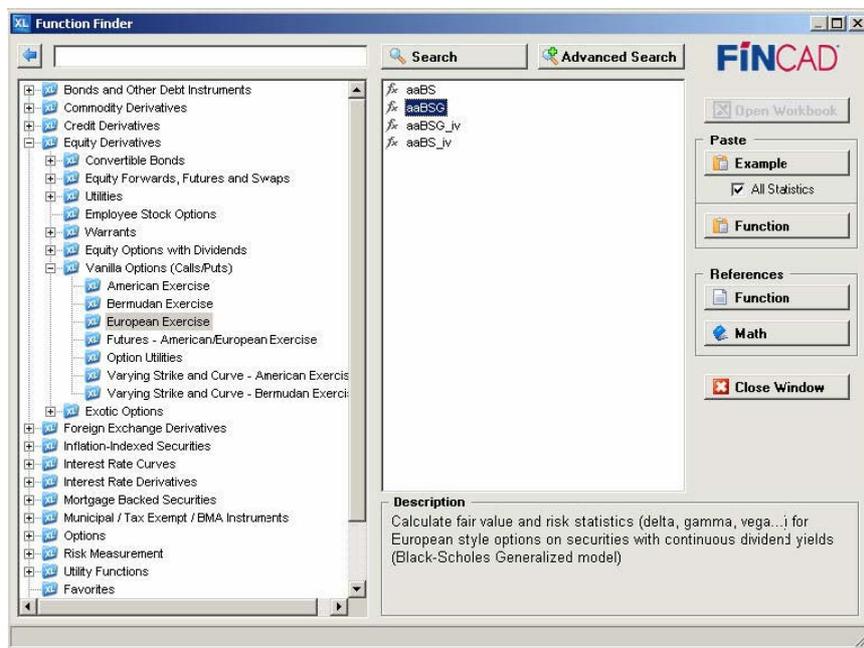


Figura 5

Nella stessa schermata, una volta selezionata la funzione desiderata (figura 5), si clicca:

- nella stringa PASTE, su FUNCTION per attivarla, su EXAMPLE per averne un esempio;
- nella stringa REFERENCES, su FUNCTION per ottenere maggiori dettagli tecnici sull'operatività della funzione medesima, su MATH per dettagli matematici.

4.2 La valutazione di opzioni standard

La valutazione di un'opzione plain vanilla sulla base del modello B-S e di quello binomiale può essere agevolmente implementata in un foglio di calcolo Microsoft Excel attraverso l'uso di Visual Basic for Applications (VBA), sistema di programmazione integrato all'applicativo. La formula di pricing può essere riprodotta nel linguaggio VBA in funzioni specifiche che non sono annoverate per default nella libreria Excel, bensì devono essere create ex novo: si deve cioè programmare una macro. In tal modo, le

funzioni cosiddette definite dall'utente, che per struttura e per sintassi sono analoghe a quelle standard, possono essere richiamate direttamente dalla finestra:

Inserisci – Funzione del foglio di calcolo, appunto nella categoria definite dall'utente.

Per creare una funzione occorre preventivamente attivare l'editor di VBA dal menù:

Strumenti – Macro – Editor di Visual Basic (figura 6).

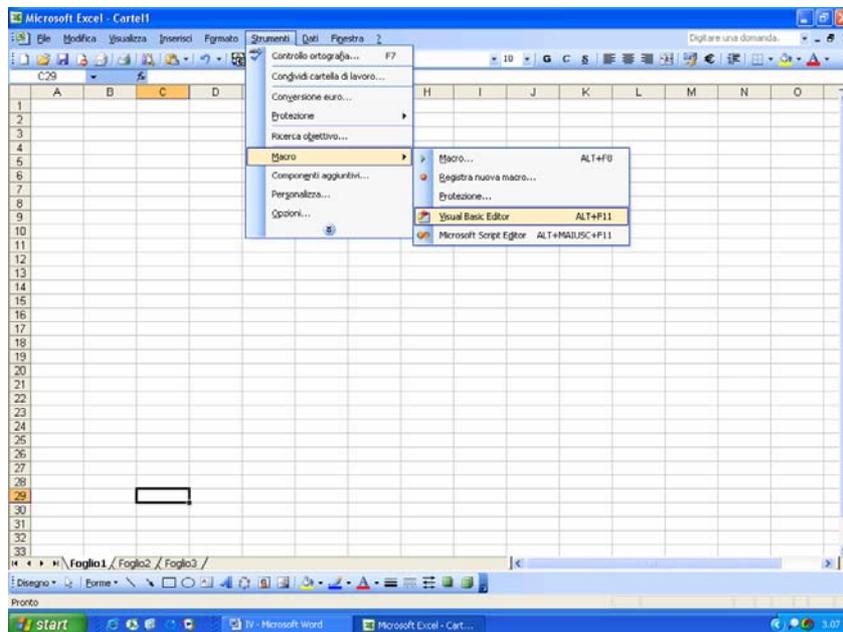


Figura 6

Una funzione definita dall'utente si compone di una lista di istruzioni da digitare in un apposito modulo, che può essere aperto dall'editor di VBA, selezionando il menù:

Inserisci – Modulo (figura 7).

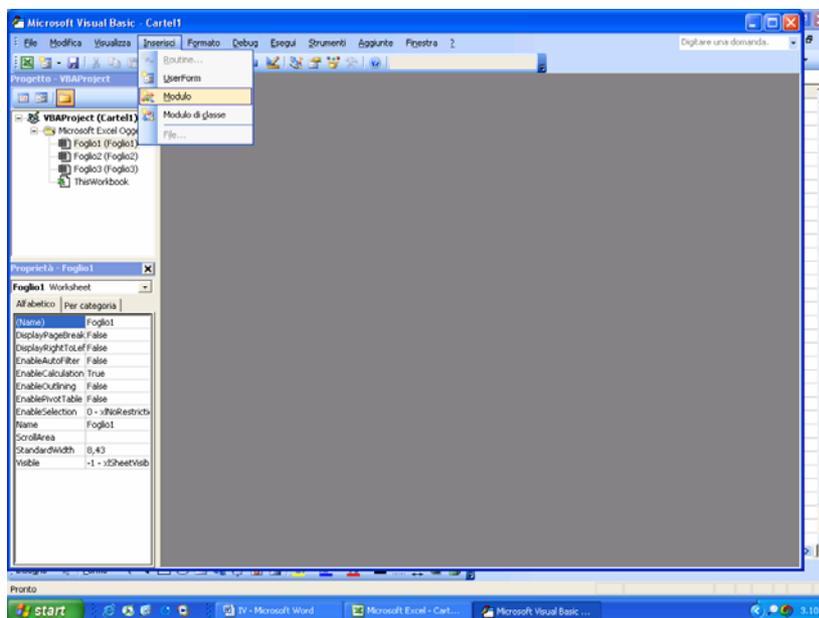


Figura 7

Il programma relativo alle funzioni EurCall e EurPut, che permettono di determinare il prezzo di opzioni call e put standard di tipo europeo secondo il modello binomiale, è il seguente:

```

Function EurCall(S, X, T, rf, sigma, n)
'VBA non è "case sensitive", pertanto useremo "rf" al posto di "r" e
"r" al posto di "R"
'Ancora, useremo "up" e "down" al posto di "1+up" e "1+down"
delta_t = T / n
up = Exp(sigma * Sqr(delta_t))
down = Exp(-sigma * Sqr(delta_t))
R = Exp(rf * delta_t)
q_up = (R - down) / (R * (up - down))
q_down = 1 / R - q_up
EurCall = 0
For Index = 0 To n
EurCall = EurCall + Application.Combin(n, Index) * q_up ^
Index * _
q_down ^ (n - Index) * Application.Max(S * up ^ Index *
down ^ _
(n - Index) - X, 0)
Next Index
End Function
Function EurPut(S, X, T, rf, sigma, n)
delta_t = T / n
up = Exp(sigma * Sqr(delta_t))
down = Exp(-sigma * Sqr(delta_t))
R = Exp(rf * delta_t)
q_up = (R - down) / (R * (up - down))
q_down = 1 / R - q_up
EurPut = 0
For Index = 0 To n
EurPut = EurPut + Application.Combin(n, Index) * q_up ^
Index * _
q_down ^ (n - Index) * Application.Max(X - up ^ Index *
down ^ _
(n - Index) * S, 0)
Next Index
End Function

```

Di seguito è richiamata la lista di istruzioni che definiscono le funzioni di valutazione di opzioni call e put standard di tipo europeo, sulla base del modello B-S:

```
Function dOne(Azione, Esercizio, Scadenza, Interesse, sigma)
  dOne = (Log(Azione / Esercizio) + Interesse * Scadenza) / (sigma *
  Sqr(Scadenza)) _
  + 0.5 * sigma * Sqr(Scadenza)
End Function
Function CallOption(Azione, Esercizio, Scadenza, Interesse, sigma)
  CallOption = Azione * Application.NormSDist(dOne(Azione, Esercizio, _
  Scadenza, Interesse, sigma)) - Esercizio * Exp(-Scadenza * Interesse) * _
  Application.NormSDist(dOne(Azione, Esercizio, Scadenza, Interesse, sigma)) _
  - sigma * Sqr(Scadenza)
End Function
'Questa funzione di pricing per le opzioni put usa la "Parità put-call"
Function PutOption(Azione, Esercizio, Scadenza, Interesse, sigma)
  PutOption = CallOption(Azione, Esercizio, Scadenza, Interesse, sigma) _
  + Esercizio * Exp(-Interesse * Scadenza) - Azione
End Function
```

A questo punto l'utente ha necessità di registrare le macro che ha appena programmato, affinché esse si rendano disponibili ad ogni esecuzione. Si scelga dunque dal menù:

Strumenti – Macro – Registra nuova macro (figura 8).

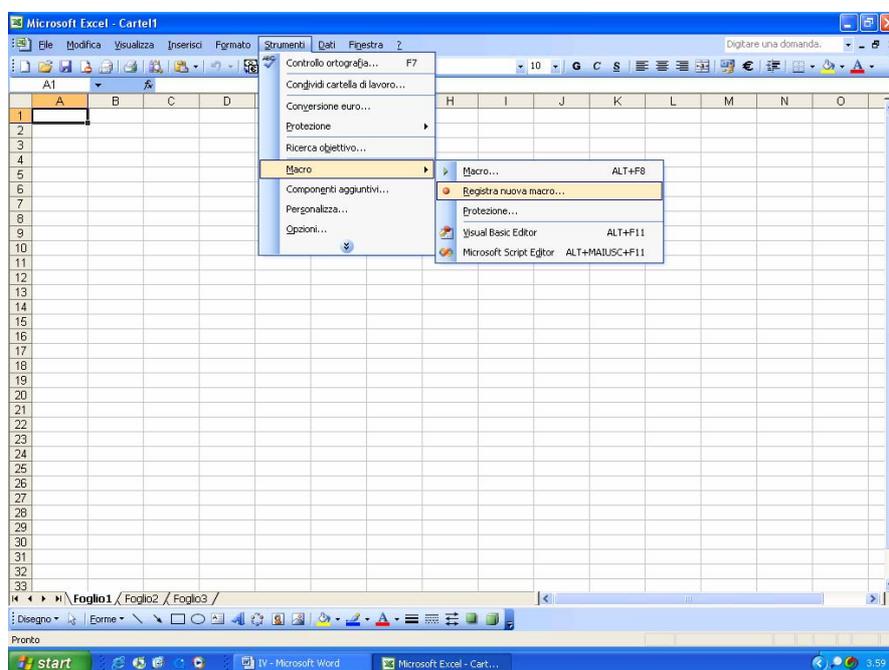


Figura 8

Dunque si aprirà la finestra di dialogo Registra Macro (figura 9). Essa richiede l'immissione di:

- 1) **Nome Macro:** il nome che identifica la macro stessa;
- 2) **Scelta rapida da tastiera:** si può associare ad una combinazione di tasti l'esecuzione della macro in oggetto;
- 3) **Memorizza Macro in:** questo comando attiva tre scelte
 - a) **Questa cartella di lavoro;**
 - b) **Nuova cartella di lavoro;**
 - c) **Cartella Macro personale:**

quest'ultimo si seleziona se si desidera rendere la macro disponibile ogni volta che si utilizza Excel.

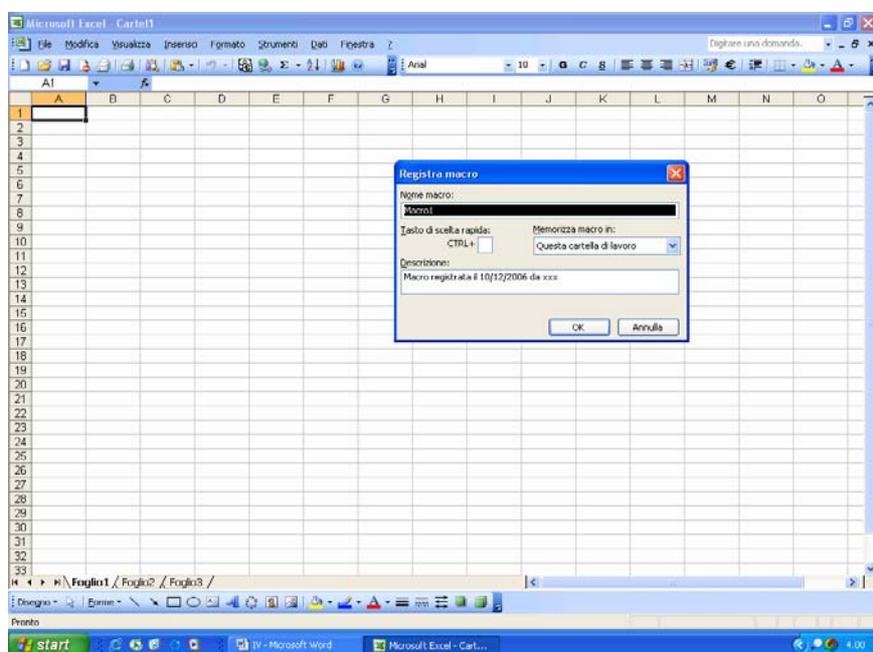


Figura 9

Si imposti il registratore di macro in modo che la macro selezioni delle celle indipendentemente dalla cella attiva al momento dell'esecuzione. A questo scopo premere:

Interrompi Registrazione dal menù strumenti – macro (figura 10).

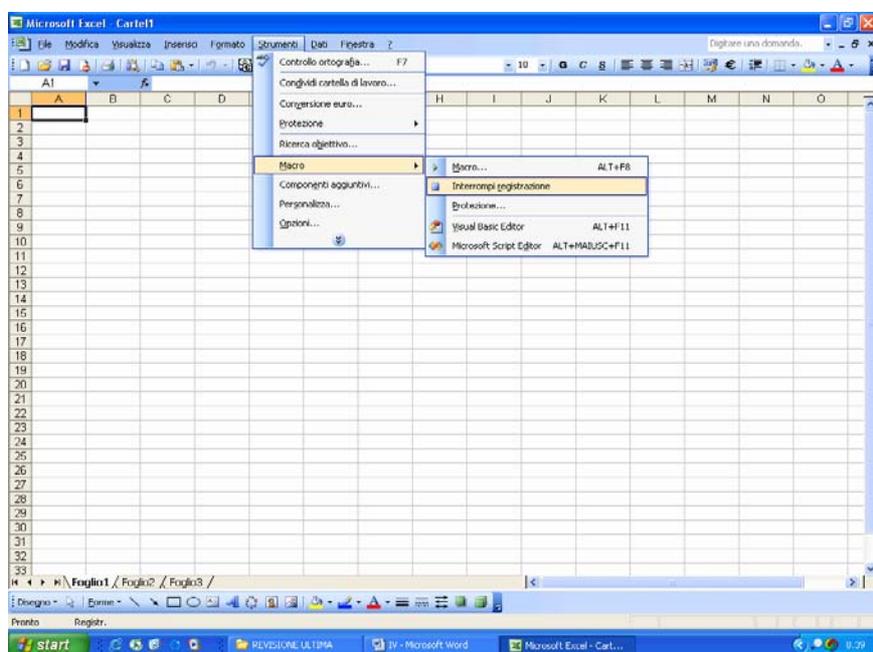


Figura 10

Infine premere il tasto OK. Per eseguire la macro appena registrata premere dal menù: **Strumenti – Macro – Macro**. Il pulsante **Esegui** lancia la macro (figura 11).

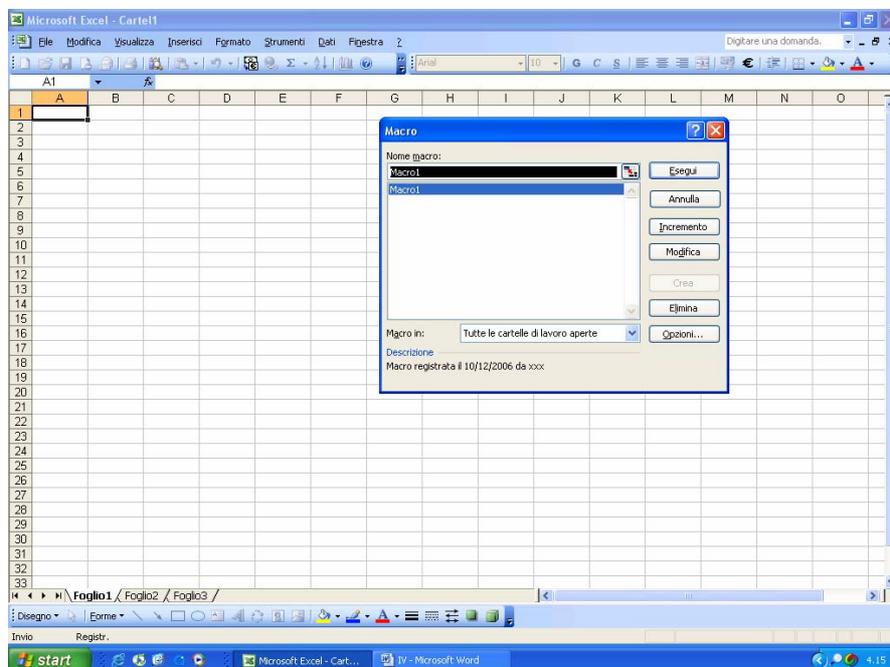


Figura 11

Esempio numerico

Si supponga ad esempio di voler prezzare, sulla base del modello binomiale, una put europea avente le seguenti caratteristiche:

Tabella 1

Opzione Europea	
Prezzo Sottostante (V)	60
Prezzo Esercizio (K)	60
Tasso di interesse (delta)	8%
Volatilità (sigma)	30%
Steps nell'albero (n)	20
Tipo di opzione	Put europea standard

Basterà richiamare la funzione EurPut appena creata dal menù **Inserisci – Funzione** - (categoria) Definite dall'Utente ed infine selezionare EurPut (figura 12).

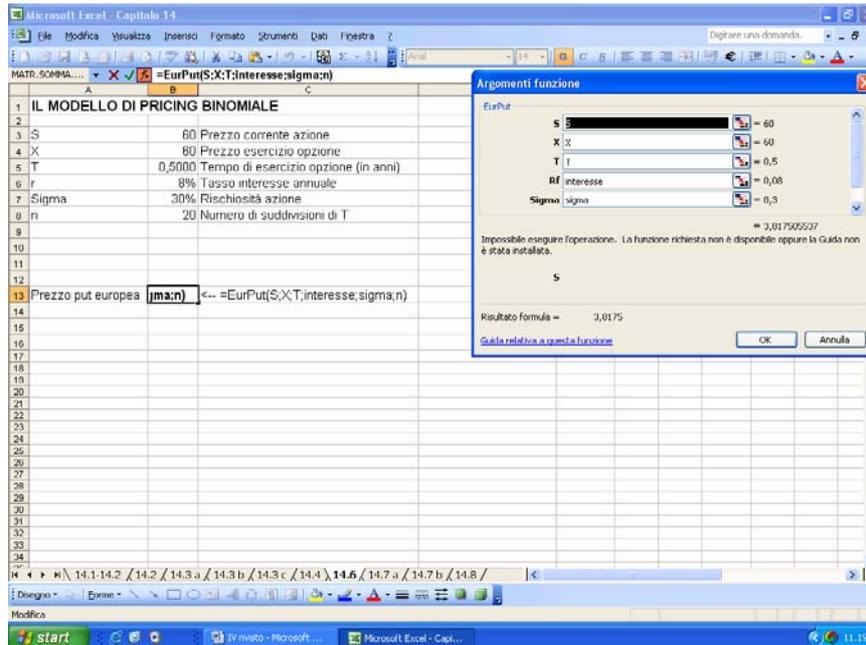


Figura 12

La funzione in parola prezza la put ad un valore pari a 3,82 (figura 12).

4.3 La valutazione delle opzioni binarie

Si consideri una call binaria del tipo cash-or-nothing, di stile europeo (l'esercizio è consentito solo a scadenza).

Le opzioni binarie possono essere agevolmente prezzate con il modello B-S³². In particolare l'equazione di valutazione risulta la seguente:

³² Cfr. PIANCA P., *Elementi di teoria delle opzioni*, Giappichelli, Torino (2003).

$$C(V_T, K, T) = e^{-\delta T} X \text{Prob}(V_T > K) = e^{-\delta T} XN(d_2) \quad (4.1)$$

dove

$$d_2 = \frac{[\log(V/K) + (\delta - d - \sigma^2/2)T]}{\sigma\sqrt{T}}$$

δ è il tasso d'interesse istantaneo privo di rischio e D gli eventuali dividendi sul titolo sottostante.

Valutazione di opzioni binarie con Microsoft Excel - Modello B-S

La formula di pricing (4.1) può essere creata ex novo in ambiente Excel.

Creare una formula nel foglio di calcolo significa scrivere un'equazione che esegue algoritmi sui valori di input immessi. Il primo carattere, che deve comparire nella cella affinché l'applicativo effettui un calcolo, è il segno di uguale. Bisogna poi cliccare sulle celle che contengono i valori di input per inserirli nella formula stessa. L'implementazione della (4.1) richiede inoltre l'immissione di una funzione. Le funzioni Excel sono formule predefinite che eseguono calcoli utilizzando valori specifici, denominati argomenti, in un particolare ordine o struttura. Anche la struttura di una funzione inizia con un segno di uguale (=) seguito dal nome della funzione, da una parentesi aperta, dagli argomenti della funzione separati da virgole e da una parentesi chiusa. Gli argomenti possono essere numeri o riferimenti di cella. L'argomento designato deve fornire un valore valido per tale argomento. Gli argomenti possono anche essere delle costanti, formule o altre funzioni. Per svolgere il calcolo della (4.1) è necessario ricorrere all'uso delle funzioni:

- **DISTRIB.NORM.ST** nella formula, allo scopo di calcolare $N(\cdot)$. La funzione restituisce infatti la distribuzione normale standard cumulativa (media zero, deviazione standard 1). z ne costituisce l'argomento ed è il valore per il quale si desidera la distribuzione.

- **EXP** che restituisce il numero e elevato alla potenza di un numero³³. Lo schema sintattico è **EXP**(num), dove num è l'esponente applicato alla base e .
- **LN** che calcola il logaritmo naturale di un numero, secondo la sintassi **LN**(num), dove num è il numero reale positivo di cui si desidera calcolare il logaritmo naturale.

Esempio Numerico

A titolo di esempio, si supponga di prezzare una Call binaria del tipo Cash-or-Nothing, emessa in $t=0$, con prezzo di esercizio $K = 50$, scadenza dopo cinque mesi $T = 0,4167$ (espressa su base annua), scritta su di un titolo che non paga dividendi, il cui valore corrente è $V_0 = 50$ e la cui somma fissa nel caso l'opzione vada itm sia $X = 50$. Siano infine $\sigma = 0,40$ e $\delta = 0,10$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	X	50												
3	V	50	Prezzo corrente dell'azione											
4	K	50	Prezzo d'esercizio											
5	tasso interesse risk free	0,1	Tasso d'interesse privo di rischio ("risk-free")											
6	T	0,416667	Scadenza dell'opzione (in anni)											
7	Sigma	0,4	Volatilità prezzo dell'azione											
8														
9	d2	0,280474	= (LN(V0) + (r + 0,5*sigma^2)*T) / (sigma*RADQ(T)) - d1*sigma*RADQ(T)											
10														
11														
12														
13														
14														
15														
16														
17														
18														
19														
20														
21														
22														
23														
24														
25														
26														
27														
28														
29														
30														
31														
32														
33														
34														

Figura 13

³³ La costante e è uguale a 2,71828182845904, la base del logaritmo naturale.

Nella barra delle applicazioni della figura 5 è visualizzata la formula creata in Excel per il calcolo di d_2 (figura 13).

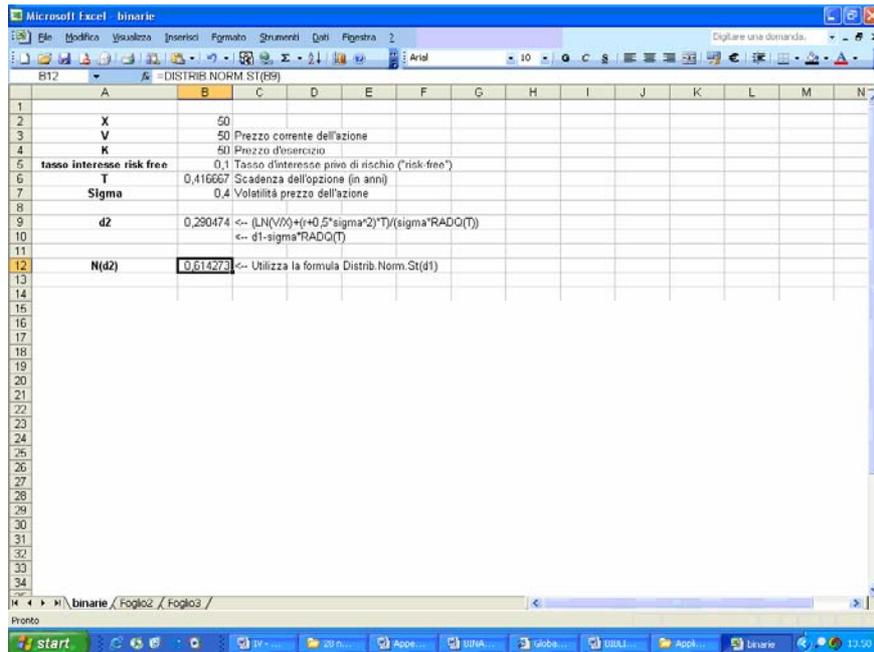


Figura 14

Nella barra delle applicazioni della figura 14 è visualizzata invece la formula per il calcolo della distribuzione normale cumulata.

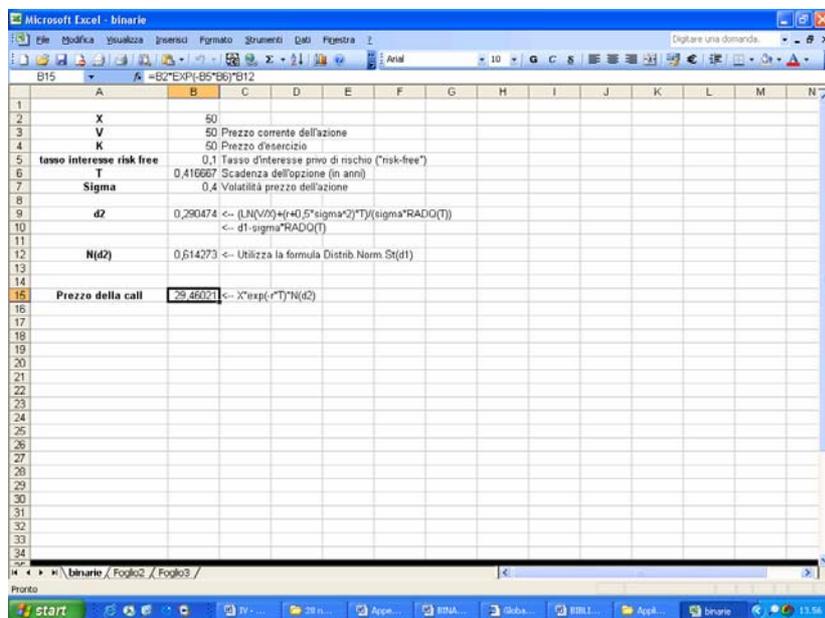


Figura 15

Infine, in figura 15 è mostrata l'applicazione della formula (4.1), da cui risulta che la call considerata è prezzata a 29,46.

Valutazione di opzioni binarie con Fincad XL – Modello B-S

Dalla biblioteca delle funzioni catalogate per categoria selezionare la classe EXOTIC OPTIONS e la sottoclasse BINARY. In essa comparirà la lista delle funzioni disponibili per tale sottoclasse:

- aaDigital_AON
- aaDigital_Gap
- aaBinary_hit_cash
- aaBinary_hit_asset
- aaBinary_nohit_cash
- aaBinary_nohit_asset
- aaBinary_in_cash
- aaBinary_in_asset
- aaBinary_out_cash
- aaBinary_out_asset

Le funzioni relative al pricing di una opzione binaria possiedono input ed output comuni, di seguito riportati:

Tabella 2

INPUT	
price_u	Valore corrente del sottostante
ex	Prezzo di esercizio
cash	Ammontare del pagamento (per opzioni cash-or-nothing)
d_v	Data di emissione
d_exp	Data di scadenza
cashorasset	1=cash, 2=asset (solo per la funzione aaDigital_AON() ³⁴).
vlt	Volatilità annualizzata dell'asset sottostante
rate_ann, cost_hldg	Essi indicano rispettivamente il tasso 1 ed il tasso 2. Questi sono tassi composti annualmente (Act/365) Se il sottostante è un equity, il tasso 2 è il dividend yield annualizzato. Se il sottostante è un prezzo forward, il tasso 2 deve risultare uguale al tasso risk-free. Se il sottostante è una commodity, il tasso 2 deve essere il costo annualizzato di detenzione della commodity (inclusi costi di immagazzinamento e di assicurazione).
option_type	1=call, 2=put
stat	Set di statistiche disponibili ³⁵ : 1,...,8. .
barrier_type	1=up and in; 2=down and in (per le binarie - barriera).

³⁴ La funzione **aaDigital_AON()** consente di prezzare sia le opzione binarie *cash-or-nothing* che le *asset-or-nothing*, inserendo come input alla voce **cashorasset** rispettivamente 1 oppure 2.

³⁵ Le statistiche che il programma può restituire in output sono codificate da numeri da 1 ad 8. Ad esempio inserendo il numero 2 alla voce di input **stat**, fincad riporta oltre al prezzo dell'opzione anche l'accuratezza della quantificazione.

Tabella 3

OUTPUT	
fair value	Fair value dell'opzione.
delta	Derivata del prezzo dell'opzione rispetto al valore corrente dell'underlying.
gamma	Derivata seconda del prezzo dell'opzione rispetto al valore corrente dell'underlying.
theta	Derivata con segno meno del prezzo dell'opzione rispetto all'option time (in anni), diviso 365.
vega	Derivata del prezzo dell'opzione rispetto alla volatilità, diviso 100.
rho of rate	Derivata del prezzo dell'opzione rispetto al tasso risk-free, diviso 100.
rho of dividend yield	Derivata del prezzo dell'opzione rispetto all' holding cost, diviso 100. Se l'underlying è un future, questa misura non è disponibile.
probability of hitting the barrier	Probabilità (risk neutral) che il prezzo del sottostante raggiunga la barriera durante la vita dell'opzione. Questo output è disponibile solo per le funzioni binaria-barriera.

Per valutare la call binaria cash-or-nothing di cui all'esempio numerico precedente può impiegare la funzione `aaDigital_AON()`, dalla quale risulta un valore di 24,51.

4.4 La valutazione delle opzioni barriera

Valutazione di opzioni barriera con Microsoft Excel - Modello binomiale

Il pricing di un'opzione esotica qualsiasi sulla base del modello binomiale risente di un forte svantaggio nel caso si ricorra all'implementazione di una funzione definita ad hoc dall'utente. In questo frangente, la funzione su limita a restituire esclusivamente la quotazione dell'opzione senza rappresentare i 2^n (con n numero degli step) possibili sentieri seguiti dal sottostante, che partono da un valore iniziale corrispondente a quello corrente e giungono sino ai prezzi relativi ai nodi finali.

E' necessario piuttosto costruire un foglio di lavoro ad hoc, articolato nelle seguenti fasi:

- 1) definizione dell'albero dei prezzi del sottostante;
- 2) definizione dei valori a scadenza dell'opzione;
- 3) definizione dell'albero del payoff opzionario.

Esempio numerico

Prima di iniziare bisogna configurare il set di parametri occorrenti per la valutazione (cfr. capitolo III). A titolo di esempio si ipotizzino i seguenti valori di input (in figura 16 tali valori risultano implementati nel foglio di calcolo):

Tabella 4

Opzione Europea	
Barriera	95
Prezzo Sottostante V	100,00
Prezzo Esercizio K	100,00
Tasso di interesse δ	5,00%
Dividend yield - q	0%
Tempo emissione opzione (0, <i>anni</i>)	0,00
Scadenza (T , <i>anni</i>)	0,50
Vita opzione ($T - t$, <i>anni</i>)	0,50
Volatilità σ	20,00%
Steps nell'albero n	3
Tipo di opzione	call down-and-out

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Modello Binomiale										
2	Opzione Europea										
3	Barriera										
4	Prezzo sottostante (S)			95							
5	Prezzo Esercizio (K)			100,00							
6	Int rate-cont. (delta)			5,00%							
7											
8	Dividend yield - cont. (q)			0,00%							
9											
10	Tempo emissione opzione (U, anni)			0,00							
11	Scadenza (T, anni)			0,50							
12	Vita opzione (L, anni)			0,50							
13	Volatilità (sigma)			20,00%							
14											
15	Steps nell'albero (n)			3							
16											
17	Tipo di opzione			Call							
18											
19											
20											
21											
22											
23											
24											
25											
26											
27											
28											
29											
30											
31											
32											

Figura 16

Procediamo ora secondo le tre fasi seguenti.

- 1) Definizione dell'albero dei prezzi del sottostante
La cella di partenza è B30.

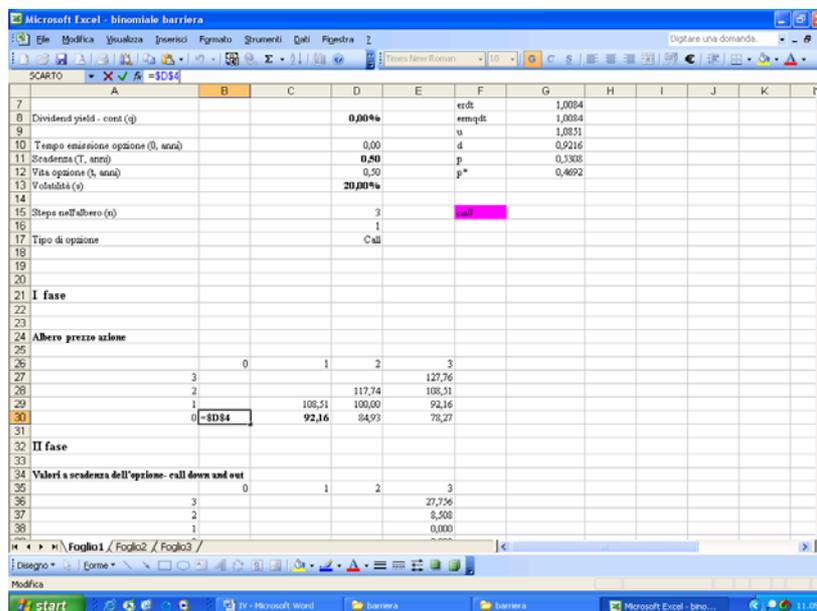


Figura 17

Successivamente deve essere inserita la formula di calcolo della cella C30 che consente la creazione dell'albero intero (figura 17). Essa fa uso di una funzione nidificata (figura 19: uno degli argomenti della funzione è nuovamente una funzione e non un valore) articolata come segue:

- la funzione SE: essa restituisce un valore se la condizione specificata ha valore VERO e un altro valore se essa ha valore FALSO.

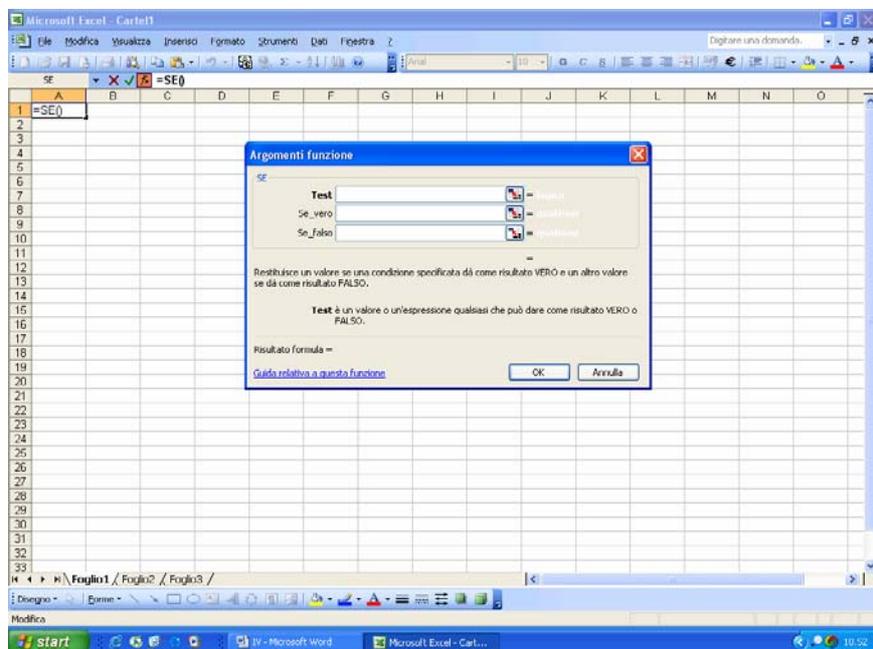


Figura 18

La sintassi della funzione è strutturata sugli argomenti (figura 18):

- **Test** è un valore o un'espressione qualsiasi che può dare come risultato VERO o FALSO.
- **Se_vero** è il valore che viene restituito se test è VERO. Se_vero può anche essere un'altra formula o una funzione.
- **Se_falso** è il valore che viene restituito se test è FALSO.

Nella fattispecie la funzione SE richiede come argomento di Se_vero e di Se_falso l'impiego della funzione: SCARTO.

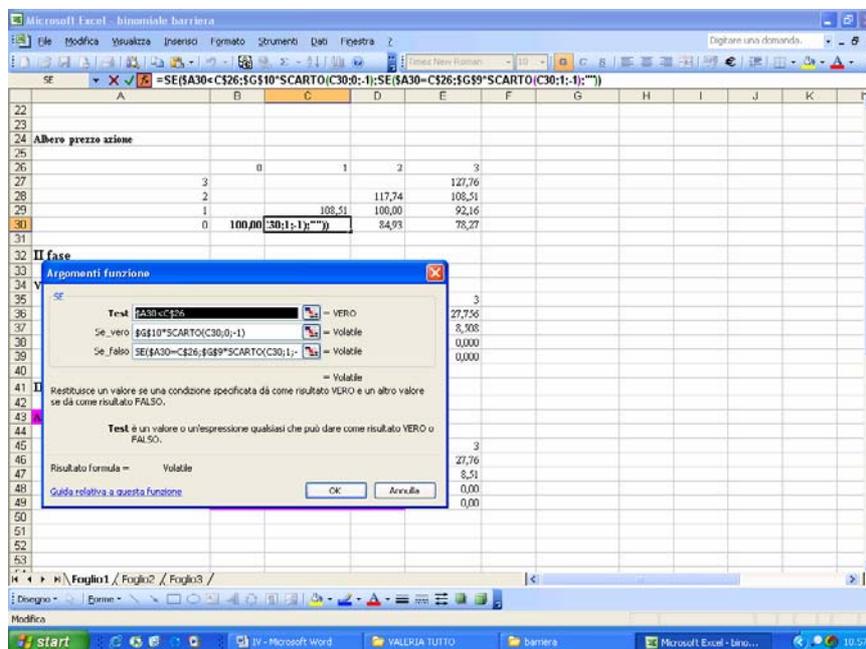


Figura 19

La funzione SCARTO restituisce un riferimento a un intervallo spostato rispetto a una cella o a un intervallo di celle di un numero specificato di righe e di colonne. Il riferimento restituito può riferirsi a una cella singola o a un intervallo. È possibile specificare il numero di righe e di colonne dell'intervallo da restituire.

La sintassi della funzione in parola si articola così (figura 20):

Rif è il riferimento da cui si desidera che inizi lo spostamento. **Rif** deve fare riferimento a una cella o a un intervallo di celle adiacenti, altrimenti SCARTO restituirà il valore di errore #VALORE!.

Righe è il numero di righe, verso l'alto o verso il basso, che si desidera come riferimento per la cella superiore sinistra. Se righe è uguale a 5, significa che la cella superiore sinistra del riferimento si trova cinque righe al di sotto di rif. Righe può essere un valore positivo, che indica le righe al di sotto del riferimento iniziale, o negativo, che indica le righe al di sopra del riferimento iniziale.

Colonne è il numero di colonne, a sinistra o a destra, che si desidera come riferimento per la cella superiore sinistra. Se

colonne è uguale a 5, significa che la cella superiore sinistra del riferimento si trova cinque colonne a destra di rif. Colonne può essere un valore positivo, che indica le colonne a destra del riferimento iniziale, o negativo, che indica le colonne a sinistra del riferimento iniziale.

Altezza è l'altezza del riferimento restituito espressa in numero di righe. Altezza deve essere un valore positivo.

Largh è la larghezza del riferimento restituito espressa in numero di colonne. Largh deve essere un valore positivo.

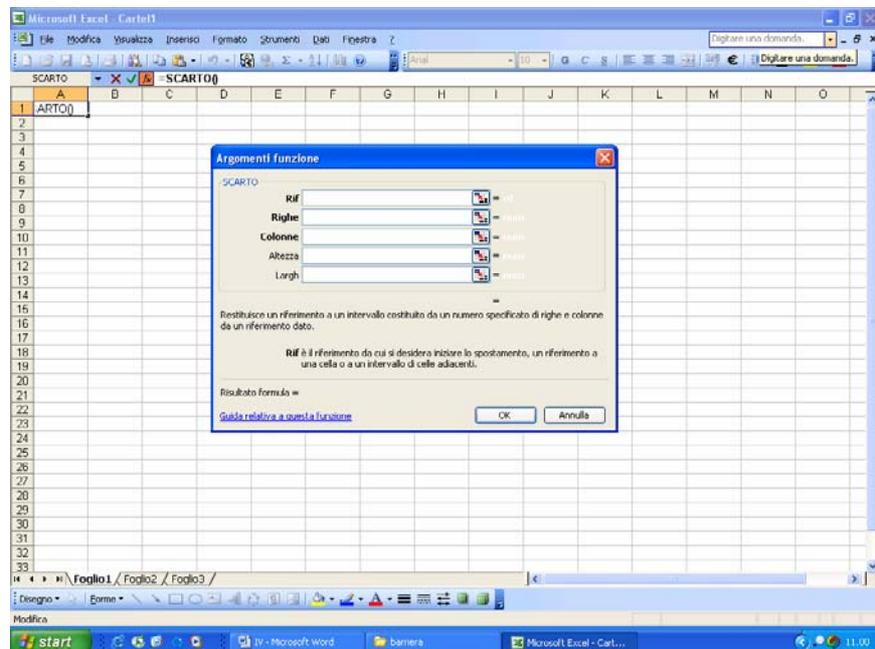


Figura 20

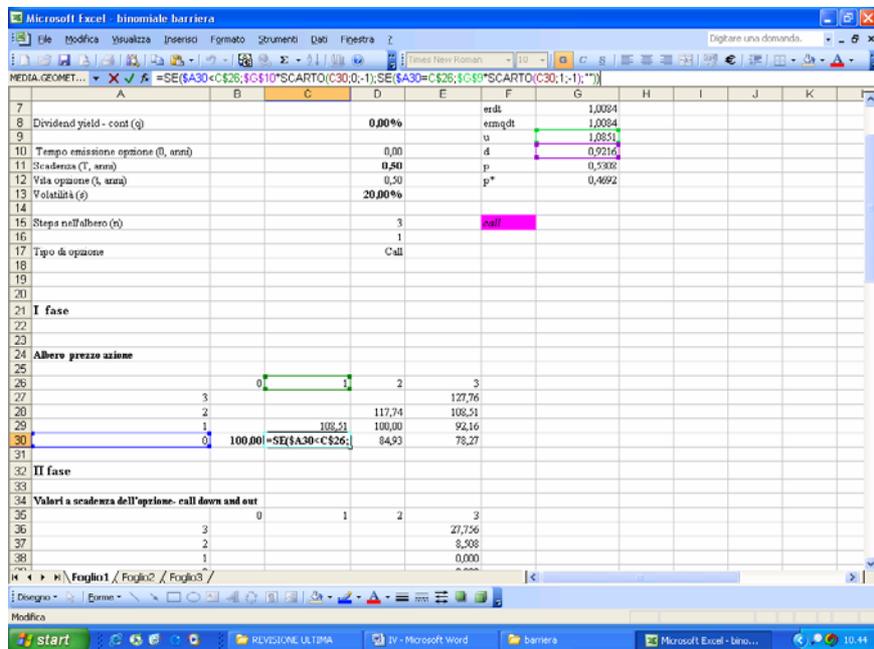


Figura 21

Effettuando il Copia - Incolla della formula in C30 nell'area di dimensione $n * n$, in cui n è il numero di step, si riempie l'albero dei prezzi del sottostante.

2) Definizione dei valori a scadenza dell'opzione.

Si calcolano i valori dell'opzione ai nodi in corrispondenza dell'ultimo step.

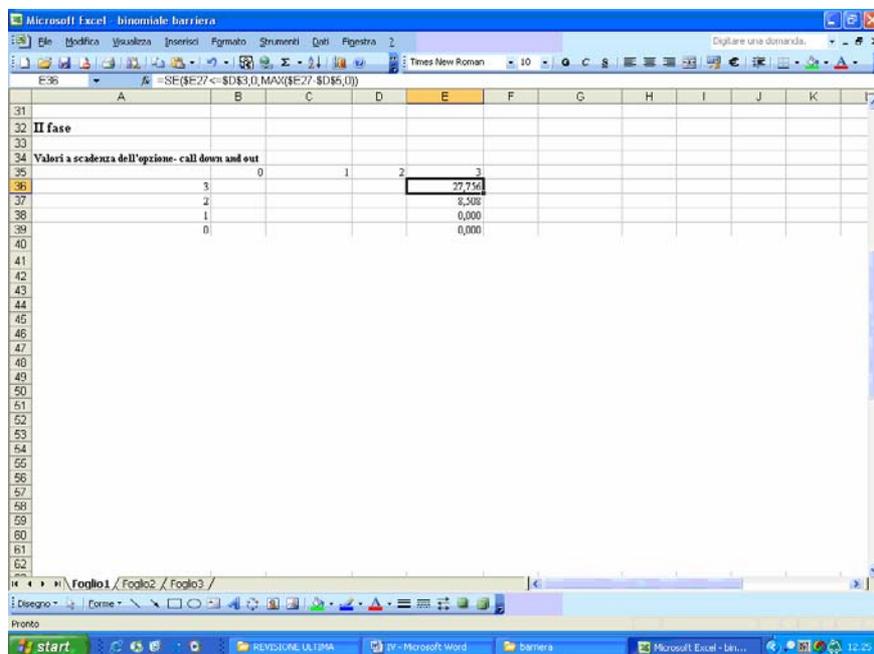


Figura 22

3) Definizione dell'albero del payoff opzionario

In ultima istanza si riportano nella colonna E i valori a scadenza calcolati precedentemente e si effettua induzione a ritroso sulla base della formula mostrata nella figura 23.

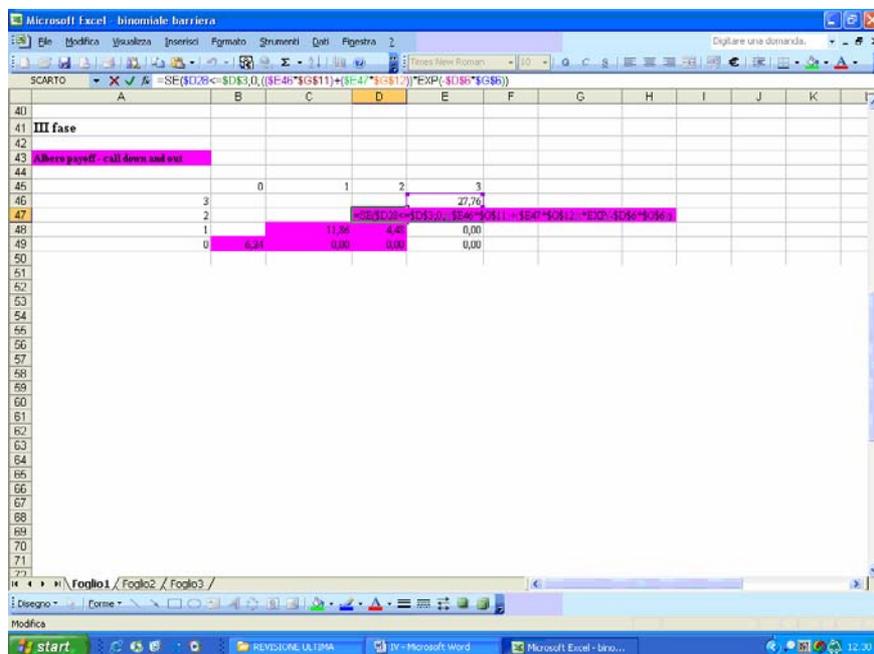


Figura 23

In questo frangente l'opzione call down-and-out risulta prezzata a 6,24.

Valutazione di opzioni barriera con Fincad XL - Modello binomiale

Per valutare un'opzione barriera, FINCAD XL dispone di una sterminata serie di funzioni. La funzione aaBarrier_out_dis_eu() consente di prezzare la call in oggetto, in forza del modello binomiale, con una frequenza di rilevazione del sottostante ad istanti discreti. Si illustrano di seguito gli argomenti richiesti dalla funzione

Tabella 5

Argomenti	Descrizione
price_u	Prezzo del sottostante
ex	Prezzo di esercizio
d_v	Data di negoziazione
d_exp	Data di scadenza
d_aver	Data in cui comincia la rilevazione dei valori del sottostante
vlt	Volatilità
rate_ann	tasso annuale (composto)
cost_hldg	Costo di detenzione annuale(Actual/365)
sam_freq	Frequenza di rilevazione
option_type	Tipo di opzione. Per convenzione: 1 call 2 put
stat	Per convenzione 1 significa che si richiede il valore dell'opzione

Esempio numerico

Sulla base dei dati della tabella 8, la funzione in questione restituisce un valore di 6,28.

Generalmente nel modello binomiale applicato alla valutazione delle opzioni barriera il processo di convergenza ad un valore accurato è piuttosto lento ed avviene a dente di sega³⁶. Bisogna dunque aumentare il numero di step per quanto possibile.

Valutazione di opzioni barriera con Microsoft Excel-Modello B-S

La valutazione delle opzioni call con barriera³⁷ di tipo down-and-out può essere operata anche sulla base del modello B-S³⁸.

In particolare, il prezzo di una call di tipo down-and-out può essere disaggregato nelle seguenti componenti:

³⁶Chriss N.A., Black – Scholes and Beyond Options Pricing Models, Mc Graw Hill, (1997).

³⁷ Merton è stato il primo a proporre una formula di valutazione in forma chiusa per le opzioni con barriera di tipo down-and-out

³⁸ Tuttavia, a causa della sensibilità delle *call up-and-out* agli effetti asimmetrici della diffusione lognormale, per il cosiddetto effetto *smile*, la valutazione B-S sottostima sistematicamente il loro valore. Questa osservazione trova fondamento teorico nei modelli deterministici della volatilità di Dupire-Derman (Dupire, 1994 & Derman, Kani, 1994), nel modello della volatilità stocastica di Heston (Heston, 1993), il jump-diffusion di Bates (Bates, 1996), e altri tra cui Avellaneda, Levy e Paras (1995).

- il valore di una call ordinaria con caratteristiche analoghe;
- la decurtazione di valore causata dalla clausola della barriera;
- il valore (eventuale) di rimborso.

Se il prezzo di eliminazione H ed il rimborso R sono costanti e se $S_0, K \geq H$ si dimostra che il valore della call è così formulabile:

$$\begin{aligned}
C = & S_0 N(a_1) - X e^{-\delta T} N(a_2) - \\
& - S_0 (H / S_0)^{2(\eta+1)} N(b_1) + K e^{-\delta T} (H / S_0)^{2\eta} N(b_2) + \\
& + R (H / S_0)^{\eta+\gamma} N(c_1) + R (H / S_0)^{\eta-\gamma} N(c_2)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

in cui

$$\eta = \frac{\delta}{\sigma^2} - \frac{1}{2}; \quad \gamma = \sqrt{\eta^2 + 2\delta / \sigma^2}$$

$$a_1 = \frac{\log(S_0 / K)}{\sigma} \sqrt{T} + (1 + \eta) \sigma \sqrt{T}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma \sqrt{T}$$

$$b_1 = \frac{\log(H^2 / S_0 K)}{\sigma} \sqrt{T} + (1 + \eta) \sigma \sqrt{T}$$

$$b_2 = b_1 - \sigma \sqrt{T}$$

$$c_1 = \frac{\log(H / S_0)}{\sigma} \sqrt{T} + \gamma \sigma \sqrt{T}$$

$$c_2 = c_1 - 2\gamma \sigma \sqrt{T}$$

Anche la formula (4.2) può essere creata ex novo in ambiente Excel, sulla base delle funzioni già precedentemente richiamate.

Valutazione di opzioni barriera con Fincad XL - Modello B-S

Il software in oggetto non utilizza il modello B-S, bensì un approccio binomiale. In particolare in ipotesi di monitoraggio del sottostante ad istanti discreti viene impiegata l'approssimazione di Steiner³⁹.

Valutazione di opzioni barriera con Microsoft Excel - Metodo Monte Carlo (MC)

Per il pricing di opzioni barriera possono essere utilizzati anche metodi numerici come il Metodo Monte Carlo. Nella fattispecie, il metodo in oggetto è impiegato per simulare il valore medio del sottostante sull'orizzonte temporale $[0, T]$ pari proprio alla durata contrattuale. Sia V_0, V_1, \dots, V_T l'approssimazione di Eulero di V per il periodo $[0, m\Delta t]$, con $\Delta t = T / m$.

La stima $\hat{V}_{\min} = \min\{V_0, V_1, \dots, V_T\}$ rappresenta l'approssimazione di Eulero nell'intervallo temporale $[0, m\Delta t]$.

Per l'implementazione del metodo Monte Carlo si assume che il prezzo dell'underlying segua l'andamento diffusivo del moto geometrico browniano:

$$V_t = V_{t-1} e^{\left[(\delta - D - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t} \right]}$$

con

- δ tasso d'interesse risk-free, ad esempio l'euribor semestrale,
- D tasso di dividendo continuo,
- ε processo di Wiener, con deviazione standard 1 e valore atteso 0.

Innanzitutto vanno determinati i valori di $V_{t-1}, \delta, D, \sigma^2$.

³⁹ Steiner, M., WallMeier, M., Hafner, R., *Pricing near the barrier: the case of discrete knock-out options*, Journal of Computational Finance, Volume 3 / Number 1, (1999).

Successivamente si ripartisce il periodo di tempo $[0, T]$ in n sottoperiodi di ampiezza Δt . A questo punto viene estratto z_1 , numero casuale dalla normale standardizzata, e si ricava così V_t :

$$V_t = V_{t-1} e^{\left[(\delta - d - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sigma z_1 \sqrt{\Delta t} \right]}$$

All'estrazione successiva z_2 , per determinare il valore di $V_{t+\Delta t}$ del sottostante si fa riferimento al valore simulato all'estrazione precedente V_t , e così di seguito.

Si tralasciano gli esempi numerici delle valutazioni B-S ed MC, poiché quantunque si possano implementare, si consiglia comunque di utilizzare il modello binomiale per l'estrema maneggevolezza.

4.5 La valutazione delle opzioni asiatiche

Il payoff delle opzioni asiatiche dipende dalla media dei prezzi del sottostante rilevati durante la vita del derivato. Esso viene scambiato ad un prezzo che è inferiore a quello di una plain vanilla dalle caratteristiche omologhe, in quanto la media normalizza gli effetti delle oscillazioni che subisce l'underlying, contenendone la volatilità (cfr. capitolo II).

La valutazione delle opzioni asiatiche pone particolari problemi di accuratezza della stima e di velocità computazionale⁴⁰, in relazione al tipo di media impiegata ed all'orizzonte di rilevazione. Tuttavia, se la media è di tipo geometrico, è disponibile una soluzione in forma chiusa, sviluppata nel '90 dagli studiosi Kemna e Vorst⁴¹, in ambiente B-S, per la quale si ha:

$$C_G = Ve^{(b-r)(T-t)} N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (4.3)$$

⁴⁰ LYUU, Y.-D, *Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, Algorithms*. Cambridge, U.K - Cambridge University Press, (2002).

⁴¹ KEMNA A. G. Z., VORST A. C. F. *A pricing Method for Options Based on Average Asset Values*, *Journal of Banking and Finance* 14, (1990).

$$d_1 = \frac{[\log(V / K) + (b + 0,5\sigma^2)T]}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{[\log(V / K) + (b - 0,5\sigma^2)T]}{\sigma\sqrt{T}}$$

Si consideri per l'appunto un'opzione call average – strike, il cui payoff è dato dalla seguente:

$$\max\{0, \phi V_T - \phi M\}$$

in cui M è una media geometrica dei prezzi del sottostante rilevati in tempo discreto

$$G_d = \left(\prod_{k=0}^n V(t_k) \right)^{1/(n+1)}$$

Valutazione di opzioni asiatiche con Microsoft Excel - Modello B-S

La formula (4.3) di pricing può essere riprodotta in ambiente Excel.

Per svolgere il calcolo della (4.3) è necessario ricorrere all'uso delle funzioni:

- DISTRIB.NORM.ST ;
- EXP ;
- LN ;
- RADQ.

Dall'implementazione della formula (4.3) nel foglio di calcolo risulta un prezzo della call average – strike pari a 3,45.

Valutazione di opzioni asiatiche con Fincad XL - Modello B-S

FINCAD XL dispone di un numero considerevole di funzioni per il pricing di opzioni asiatiche:

1. aaAsian
2. aaAsian_am_MC
3. aaAsian_basket_fs_MC
4. aaAsian_basket_MC
5. aaAsian_bskt_am_MC
6. aaAsian_bskt_fs_mstrk_am_MC
7. aaAsian_bskt_mstrk_am_MC
8. aaAsian_fs_am_MC
9. aaAsian_fs_MC
10. aaAsian_iv
11. aaAsian_MC
12. aaAsian_spread_fs_MC
13. aaAsian_spread_MC
14. aaGeo_Asian
15. aaGeo_Asian_fs
16. aaMulti_Asian_fs_MC
17. aaMulti_Asian_MC
18. aaQuanto_Asian
19. aaQuanto_asian_basket_fs_MC
20. aaQuanto_asian_basket_MC
21. aaQuanto_Geo_Asian
22. aaQuanto_Geo_Asian_fs
23. aaAver_strk_basket_fs_MC
24. aaAver_strk_basket_MC
25. aaAver_strk_fs_MC
26. aaAver_strk_MC
27. aaAver_strk_spread_fs_MC
28. aaAver_strk_spread_MC
29. aaGeo_Aver_Strk
30. aaGeo_Aver_Strk_fs
31. aaMulti_aver_strk_fs_MC
32. aaMulti_aver_strk_MC
33. aaQuanto_Geo_aver_strk
34. aaQuanto_Geo_aver_strk_fs

La funzione aaGeo_Aver_Strk consente di calcolare il prezzo di call average – strike di stile europeo, in cui lo strike è una media di tipo geometrico, sulla base di rilevazioni della quotazione del

sottostante operate ad intervalli regolari. Per l'operatività della funzione si richiede l'inserimento dei seguenti argomenti:

Tabella 6

Argomenti	Descrizione
price_u	Prezzo del sottostante
d_v	Data di negoziazione
d_exp	Data di scadenza
d_aver	Data in cui comincia la rilevazione dei valori del sottostante
vlt	Volatilità
rate_ann	tasso annuale (composto)
cost_hldg	Costo di detenzione annuale(Actual/365)
sam_freq	Frequenza di rilevazione
option_type	Tipo di opzione. Per convenzione: 1 call 2 put
stat	Per convenzione 1 significa che si richiede il valore dell'opzione

Per convenzione la frequenza di rilevazione è indicata nel seguente modo:

Tabella 7

Frequenza rilevazione	
1	annuale
2	bimestrale
3	trimestrale
4	mensile
5	settimanale
6	giornaliera
7	giorni borsa
8	annuale posticipata
9	annuale anticipata
10	semestrale posticipata
11	semestrale anticipata
12	trimestrale anticipata
13	trimestrale posticipata
14	mensile posticipata
15	mensile anticipata

Esempio numerico

Si ipotizzi che $V_0 = 100$, la durata contrattuale è 6 mesi, $\delta = 0,05$, $\sigma = 0,20$, $K = 100$, la funzione restituisce un valore dell'opzione pari a 4,20. Per il pricing di opzioni asiatiche vengono spesso utilizzati metodi numerici come il Metodo Monte Carlo.

Valutazione di opzioni asiatiche con Microsoft Excel - Metodo MC

Il primo passo della simulazione costruita nel foglio di calcolo Excel è la generazione casuale di tanti possibili sentieri seguiti dal sottostante, nei vari istanti di tempo in cui è stata suddivisa la vita dell'opzione, quanti sono gli scenari ipotizzati (numero delle simulazioni) . A questo scopo si utilizzano le funzioni:

- **CASUALE()**, che restituisce un numero casuale distribuito in maniera uniforme, maggiore o uguale a 0 e minore di 1. Ogni volta che si calcola un nuovo foglio di lavoro viene restituito un nuovo numero casuale.
- **INV.NORM.ST.**, che restituisce l'inversa della distribuzione normale standard cumulativa. La distribuzione ha una media uguale a zero e una deviazione standard uguale a uno. La sintassi della funzione è **INV.NORM.ST**(probabilità). Probabilità è la probabilità corrispondente alla distribuzione normale. In questo caso argomento della funzione è il valore determinato di volta in volta con la funzione **CASUALE()**.

Sulla base di ciascuna di queste estrazioni casuali viene determinato il valore del sottostante per ogni istante di tempo, sulla base della formula del moto geometrico browniano. Per ciascuno dei sentieri simulati si calcola la media geometrica ed il payoff dell'opzione. La media aritmetica dei payoff così ottenuti rappresenta una stima del valore atteso della distribuzione dei payoff dell'opzione. Infine la media della colonna dei payoff viene scontata al tasso privo di rischio di periodo per la durata contrattuale. La valutazione della call average – strike così effettuata ci restituisce un valore pari a 3,80.

Valutazione di opzioni asiatiche con Fincad XL - Metodo MC

La funzione `aaGeo_Aver_Strk_fs` consente di calcolare il valore della call in oggetto, attraverso l'implementazione del metodo Monte Carlo.

Sulla base dei dati dell'esempio numerico precedente si effettua nuovamente il pricing della call average-strike attraverso la funzione in questione. Di seguito si riportano i risultati ottenuti per differenti numeri di simulazioni:

Tabella 8

MONTE CARLO	
Prezzo call average-strike	n.sim
3,6907	10000
3,6884	100000
3,6882	1000000

4.6 La valutazione delle opzioni lookback

Un'opzione lookback di stile europeo conferisce al detentore il diritto di acquistare (call) o di vendere (put) a scadenza un dato sottostante al prezzo più conveniente. In sostanza, l'opzione non scade mai out-of-the-money. In ordine a tale peculiarità, il prezzo di tale derivato risulta mediamente superiore a quello di un'opzione standard dalle analoghe caratteristiche. Esso può essere valutato con differenti gradi di accuratezza, velocità computazionale ed efficienza, sulla base del modello B-S, nonché di metodi numerici, quali ad esempio il Monte Carlo.

Il payoff di una call lookback standard o floating strike è dato dalla seguente espressione:

$$lookback_{call} = \max[0, V_T - \min(V_1, V_2, \dots, V_T)]$$

Di seguito si considera l'equazione di pricing, sviluppata in ambiente B-S, per una call lookback standard di stile europeo, valutata in t , nell'ipotesi di non corresponsione di dividendi sul

sottostante, così come venne formulata da Goldman, Sosin e Gatto⁴², prima del lancio commerciale del titolo:

$$C_{float} = Ve^{-dT} N(a_1) - V_{\min} e^{-\delta T} N(a_2) + Ve^{-\delta T} \frac{\sigma^2}{2(\delta - d)} \left[\left(\frac{V}{V_{\min}} \right)^{\frac{2(\delta - d)}{\sigma^2}} N\left(-a_1 + \frac{2(\delta - d)}{\sigma} \sqrt{T}\right) - e^{-dT} N(a_1) \right] \quad (4.4)$$

dove

$$a_1 = \frac{[\log(V/V_{\min}) + (\delta - d + 0,5\sigma^2)T]}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T}$$

e in cui V_{\min} è il valore minimo del sottostante osservato tra $[0, T]$.

La valutazione dell'opzione all'emissione del contratto, attraverso l'impiego dell'equazione in forma chiusa, può essere effettuata sulla base dell'ipotesi di uguaglianza del prezzo del sottostante in $t = 0$ e del prezzo minimo che si registrerà durante la vita dell'opzione.

La formula (4.4) può essere agevolmente implementata con l'ausilio della piattaforma informatica Microsoft Excel oppure si può ricorrere all'uso del software Fincad.

Valutazione di opzioni lookback con Microsoft Excel - Modello B-S

Per prezzare una lookback con il foglio Excel si può utilizzare una formula che contenga delle funzioni. Il procedimento è analogo a quello impiegato per la valutazione delle opzioni asiatiche. Risulta quindi superfluo soffermarsi oltre.

⁴² Cfr. Goldman, B., Sosin, H., Gatto, M. A., "Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High", Journal of Finance, S.1111-1127 (1979).

Per svolgere il calcolo della (4.4) è necessario ricorrere all'uso della funzione DISTRIB.NORM.ST nella formula, allo scopo di calcolare N(.

Si traslascia l'esempio numerico poiché le quotazioni ottenute con Excel sono sorprendentemente *accostabili* a quelle ottenute con Fincad, a parità di condizioni iniziali (dati relativi all'esempio numerico in tabella 14).

Valutazione di opzioni lookback con Fincad XL - Modello B-S

La libreria di FINCAD XL offre 10 funzioni per il pricing di opzioni lookback:

1. aaLook
2. aaLook_basket_fs_MC
3. aaLook_basket_MC
4. aaLook_fs_MC
5. aaLook_MC
6. aaLook_spread_fs_MC
7. aaLook_spread_MC
8. aaMulti_look_fs_MC
9. aaMulti_look_MC
10. aaQuanto_Look

Ciascuna di esse si fonda sulle ipotesi del modello B-S.

A titolo di esempio, si considerino le funzioni aaLook, aaLook_MC, aaLook_fs_MC.

aaLook (price_u, ex, d_v, d_exp, vlt, rate_ann, cost_hldg, option_type, stat) richiede l'inserimento dei seguenti argomenti:

Tabella 9

Argomenti	Descrizione
price_u	Prezzo del sottostante
min_max	Minimo (per una call), massimo (per una put) raggiunto dal sottostante durante la vita dell'opzione
d_v	Data di negoziazione
d_exp	Data di scadenza
vlt	Volatilità
rate_ann	tasso annuale (Actual/365)
cost_hldg	Costo di detenzione annuale(Actual/365)
option_type	Tipo di opzione. Per convenzione: 1 call 2 put
stat	statistica

La suddetta funzione calcola, oltre agli indici di esposizione rischiosa, il valore di un'opzione lookback di stile europeo, scritta su di un singolo sottostante (con campionamento dei prezzi del sottostante in tempo continuo).

Esempio numerico

La funzione aaLook restituisce il prezzo di call lookback floating strike, dove $V_0 = 100$, la durata contrattuale è 5 mesi, $\delta = 0,05$, $\sigma = 0,20$ per differenti valori minimi del sottostante, che sostituiscono il prezzo di esercizio di una standard call:

Tabella 10

Prezzi di esercizio (K)	Valore Call-Floating Strike
10	90,03336
20	80,06672
30	70,10009
40	60,13345
50	50,16681
60	40,20017
70	30,23354
80	20,26691
90	10,36949
100	4,271094

prezzi di esercizio

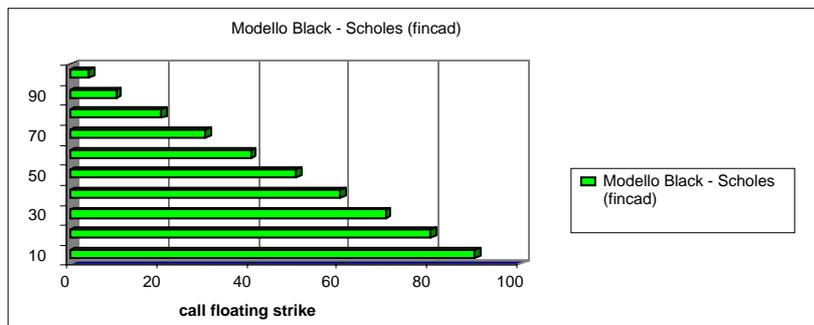


Grafico 1

Come ci si attende, minore è il valore minimo registrato durante la vita dell'opzione, maggiore il valore del derivato ceteris paribus.

Per quanto riguarda la scadenza contrattuale, la call lookback floating strike subisce riduzioni nel valore (grafico 2), all'aumentare dell'orizzonte d'investimento. Si riportano i prezzi calcolati sulla base delle summenzionate condizioni contrattuali:

Tabella 11

Scadenza (T)	Valore Call-Floating Strike
1 mese	4,6076141
2 mesi	4,5256872
3 mesi	4,4423456
4 mesi	4,3575104
5 mesi	4,2710944
6 mesi	4,1830022
7 mesi	4,0931281
8 mesi	4,0013546
9 mesi	3,9075510
10 mesi	3,8115706
11 mesi	3,7132484
12 mesi	3,6123970

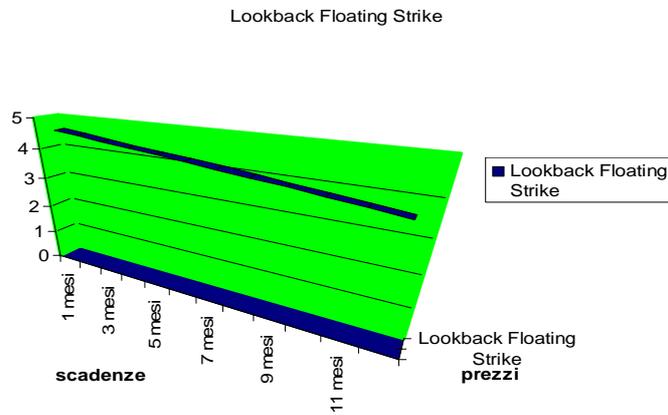


Grafico 2

Da un confronto tra i prezzi della call floating strike determinati sulla base di Excel e di Fincad emerge che non vi sono sensibili scostamenti nella valutazione (grafico 3). Sebbene il foglio di calcolo del pacchetto Office sia più dispendioso da costruire, rispetto al vantaggio di immediata disponibilità del risultato (a fronte del mero inserimento degli input) che restituisce il software Fincad.

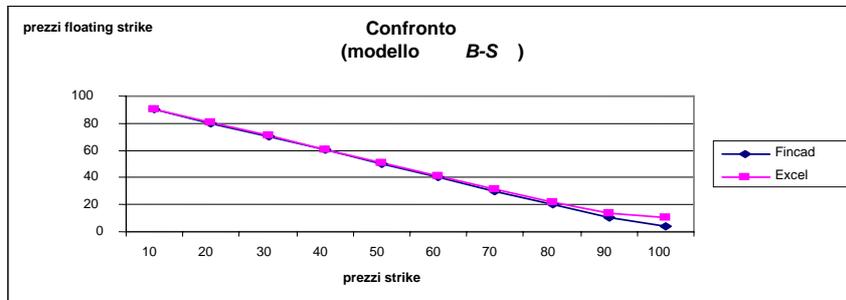


Grafico 3

Valutazione di opzioni lookback con Microsoft Excel - Metodo MC

Anche il metodo Monte Carlo si adatta bene a valutare opzioni di questo tipo.

La logica del metodo è sempre la stessa. A questo scopo si veda il paragrafo Valutazione di opzioni barriera con Metodo MC.

Nella fattispecie, tuttavia, il metodo in oggetto è impiegato per simulare il valore a scadenza del sottostante ed il prezzo minimo di esso per un periodo $[0, T]$ pari proprio alla durata contrattuale.

La simulazione costruita nel foglio di calcolo Excel è effettuata alla stregua della valutazione delle opzioni asiatiche con il medesimo metodo. Tuttavia, questa volta, per ogni scenario (simulazione) viene determinato il prezzo minimo della traiettoria. La colonna dei payoff è calcolata come differenza tra il valore finale simulato in ogni scenario ed il prezzo minimo di traiettoria.

Infine la media della colonna dei payoff viene scontata al tasso privo di rischio di periodo per la durata contrattuale.

Esempio numerico

Sulla base dei dati in tabella 12 il valore dell'opzione lookback prezzato con il metodo MC attraverso Excel risulta pari a 3,61.

Tabella 12

Metodo Monte Carlo	
Prezzo sottostante V	100
Prezzo di esercizio K	100
Tasso d'interesse privo di rischio δ	0,05
Dividend yield q	0
Tempo di emissione contrattuale $(0, \text{anni})$	0
Scadenza (T, anni)	0,5
Vita opzione $(T - t, \text{anni})$	0,5
Volatilità σ	0,2
Varianza σ^2	0,04
Simulazioni <i>numero</i>	10478
$\exp(-\delta)$	0,97531
N. step	5
Ampiezza step	0,1
Valore opzione	3,61

Valutazione di opzioni lookback con Fincad XL - Metodo MC

Le funzioni

- aaLook_MC (price_u, min_max, d_v, d_exp, vlt, rate_ann, cost_hldg, sam_seq, option_type, num_rnd, table_type)
- aaLook_fs_MC (price_u, min_max, d_v, d_exp, vlt, rate_ann, cost_hldg, sam_seq, option_type, num_rnd, table_type)

presentano altri tre argomenti riportati nella tabella seguente:

Tabella 13

Argomenti	Descrizione
sam_seq	Tempi di rilevamento dei prezzi
num_rnd	Numero di prove
table_type	Tavola di output. Per convenzione: 1 fair value, misura di accuratezza del risultato 2 fair value, misura di accuratezza del risultato, calcolo del delta.

Le due funzioni in parola consentono di determinare il valore di un'opzione lookback di stile europeo (con campionamento dei prezzi del sottostante in tempo discreto), sulla base del metodo Monte Carlo. Se il rilevamento dei prezzi avviene ad intervalli regolari si usa la funzione aaLook_MC(), per gli altri casi, aaLook_fs_MC().

La frequenza di rilevazione può essere impostata a propria discrezione, sulla base della nomenclatura richiamata in tabella 7).

Esempio numerico

Si richiamano alcuni interessanti risultati ottenuti per la valutazione di una call lookback floating strike sulla base del metodo Monte Carlo implementato con Fincad. In particolare le tabelle 18,19,20 mostrano il valore di una call lookback floating strike in relazione al numero di simulazioni effettuate, ipotizzando rispettivamente una frequenza di rivelazione del sottostante mensile, settimanale, giornaliera.

Tabella 14

MONTE CARLO frequenza mensile -prezzo min 100	
Prezzo call lookback floating strike	n.sim
2,2450925	10000
2,2524714	100000
2,2548685	1000000

Tabella 15

MONTE CARLO frequenza settimanale -prezzo min 100	
Prezzo call lookback floating strike	n.sim
2,8692413	10000
2,8905099	100000
2,8724411	1000000

Tabella 16

MONTE CARLO frequenza giornaliera -prezzo min 100	
Prezzo call lookback floating strike	n.sim
3,696778	10000
3,738672	100000
3,725408	1000000

In primo luogo, è interessante notare che l'implementazione del metodo Monte Carlo attraverso il software Fincad richiede tra gli input l'immissione del valore minimo o massimo (call o put rispettivamente), operando la simulazione esclusivamente del valore a scadenza del sottostante. Excel invece consente di visualizzare tutti i passaggi della simulazione e dunque di individuare anche lo strike price (valore massimo o minimo). Tuttavia in quest'ultimo caso viene penalizzata la velocità computazionale nella fase di predisposizione dei calcoli, oltre alla impossibilità tecnica di effettuare 1 milione di simulazioni, dal momento che non possono essere utilizzate più di 65536 righe per foglio.

In secondo luogo, le stime operate con Fincad risultano maggiormente convergenti al valore teorico di una opzione dalle medesime caratteristiche, calcolato sulla base del modello B-S, all'aumentare del numero di simulazioni. I valori ottenuti risentono inoltre della frequenza di rilevazione ipotizzata, in quanto con un

campionamento a scadenze ravvicinate la convergenza migliora. In particolare, con 1 milione di simulazioni ed una frequenza di rilevazione giornaliera la call in parola è prezzata a 3,73 (Metodo Monte Carlo) circa contro un valore teorico di 4,27 (tabella 10: prezzo di esercizio $K = 100$), così come risultante dalla (4.4).

Osservazioni conclusive

La sfida principale nella gestione del rischio delle opzioni esotiche è rappresentata dall'assenza di mercati regolamentati in cui si formino prezzi mark-to-market. Dunque il pricing di tali derivati è operato direttamente dagli intermediari finanziari, sulla base del modello di valutazione implementato. Tuttavia il prezzo di riferimento per ogni singolo prodotto può essere calcolato attraverso uno o più modelli. Conseguentemente, soltanto dopo aver analizzato accuratamente le caratteristiche ed i limiti della procedura da impiegare, si può stabilire un prezzo ad hoc. Tuttavia, l'adeguatezza dei modelli esplicativi e previsionali non può essere rigidamente predeterminata, ma deve essere accertata piuttosto in relazione alle caratteristiche strutturali del prodotto, secondo un principio di validità relativa. Ad esempio il modello di B-S formula ipotesi spesso troppo semplificate, che possono infatti portare a subire perdite notevoli. Vi sono esempi recenti di grandi istituzioni che hanno sofferto gravi perdite a causa di errori di questo tipo. Pensiamo al caso della National Westminster Bank che nel 1997 perse circa 90 milioni di sterline per non aver tenuto conto dell'effetto smile della volatilità nel pricing di opzioni out of the money scritte su tassi di interesse.

In sostanza l'attuale ampia offerta di dati, modelli e metodologia – oltre che del software necessario a implementarle – ha aumentato il rischio di errori di interpretazione e di impiego, soprattutto nella misura in cui il dibattito sulla applicabilità della modellistica disponibile, di cui il presente lavoro intende fornire solo un'istantanea, è vivo e non ancora giunto a riflessioni acquisite.

Appendice

Determinazione dei parametri del modello binomiale

I parametri d, u, p devono essere tali da determinare valori corretti della media e della varianza del sottostante V alla fine dell'intervallo Δt . In particolare, se il tasso di rendimento privo di rischio è r , il valore atteso del sottostante alla fine dell'intervallo temporale Δt dovrà essere:

$$Ve^{r\Delta t} = pVu + (1-p)Vd \quad (\text{A.1})$$

da cui

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d \quad (\text{A.2}).$$

Dato l'andamento diffusivo attraverso il quale è modellizzato il prezzo del sottostante, la varianza del suo tasso di variazione in Δt è $\sigma^2 \Delta t$. Possiamo scrivere

$$\sigma^2 \Delta t = pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2 \quad (\text{A.3}).$$

Sostituendo p in base alla (A.2) otteniamo che

$$\sigma^2 \Delta t = e^{r\Delta t}(u+d) - ud - e^{2r\Delta t} \quad (\text{A.4}).$$

Le relazioni (A.2) ed (A.4) impongono due condizioni su d, u, p . Ad esse gli autori del modello ne aggiungono una terza:

$$u = \frac{1}{d} \quad (\text{A.5}).$$

Queste tre condizioni implicano le seguenti relazioni:

$$p = \frac{a - d}{u - d} \quad (\text{A.6}),$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (\text{A.7}),$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (\text{A.8}),$$

dove

$$a = e^{r\Delta t} \quad (\text{A.9}).$$

Dinamica del prezzo del sottostante

Si consideri la dinamica del prezzo dell'attività sottostante che oggi vale V_t , in un dato intervallo temporale $(t, t + \Delta t)$. Dal momento che essa non evolve in condizioni deterministiche, viene rappresentata come una traiettoria di un processo stocastico a tempo continuo, tramite cioè un modello probabilistico descrittivo dell'andamento aleatorio nel tempo (o nello spazio) di una variabile. Si suppone, in particolare, che si tratti di un processo stocastico di tipo markoviano, cosiddetto senza memoria, nel quale "tutto ciò che si conosce del futuro è racchiuso nello stato attuale". Nella fattispecie si ipotizza che l'analisi diacronica del trend di un titolo sia del tutto irrilevante ai fini di una previsione del valore futuro di esso, e che quindi la predittività di tale stima dipenda esclusivamente dal valore corrente del titolo medesimo. Secondo Black e Scholes, l'andamento temporale del valore del sottostante può essere modellizzato attraverso un particolare tipo di processo stocastico markoviano: il moto geometrico browniano. In particolare dunque, l'entità della fluttuazione del sottostante fino ad un istante futuro $(t, t + \Delta t)$, cioè da t a $(t + \Delta t)$ rispetto al un prezzo corrente, risulta insieme descritta da una componente stocastica ed una deterministica. La prima è il risultato necessario di dati conosciuti nel presente, che influenzano la consistenza

della variazione, ma non la determinano. La seconda modifica la componente deterministica, che esprime solo una tendenza della variazione del sottostante, avendo riguardo del fattore di aleatorietà che pure incide sui mutamenti di valore del titolo.

Da un punto di vista formale, il moto geometrico risulta:

$$\Delta V = \mu V dt + \sigma V dz \quad (\text{A.10})$$

con $dz = \varepsilon \sqrt{\Delta t}$. Dividendo ambo i membri per V la relazione diventa :

$$\frac{\Delta V}{V} = \mu dt + \sigma dz \quad (\text{A.11})$$

dove il primo membro rappresenta proprio il tasso di rendimento di un titolo, che risulta dato dal suo valore atteso e dalla volatilità rispetto ad esso, la cui versione nel tempo discreto è

$$\frac{\Delta V}{V} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (\text{A.12})$$

Nella (A.12), ΔV rappresenta la variazione del prezzo di V in un piccolo intervallo di tempo Δt , ed ε è un'estrazione casuale da una distribuzione normale standardizzata. L'espressione mostra che $\frac{\Delta V}{V}$ si distribuisce in modo normale con media $\mu \Delta t$ e deviazione standard $\sigma \sqrt{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \varphi(\mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}) \quad (\text{A.13}).$$

Da ciò discende quindi che il prezzo V , in un intervallo di tempo Δt , si distribuisce lognormalmente. La lognormalità della distribuzione comporta che la variabile può assumere solo valori

non negativi, conformemente a quanto accade alle quotazioni di un titolo sottostante un'opzione.

La curva di frequenza di una variabile casuale che si distribuisce lognormalmente si presenta inoltre asimmetrica verso destra (o obliqua positiva). Questo significa che, nella generazione di una completa distribuzione di prezzi forward, hanno una maggiore probabilità di manifestarsi valori del prezzo sotto la media piuttosto che sopra.

Bibliografia

BABBS, S. (1992, 2000), Binomial Valuation of Lookback Options, *Journal of Economic Dynamics & Control* n.24, pp. 1499-1525.

BACHELIER, L. (1900), *Theorie de la Speculation*, Parigi Università della Sorbona.

BACINELLO A.R. (2002), Pricing Guaranteed Life Insurance Participating Policies with Periodical Premiums and Surrender Option, *Quaderni del Dipartimento di Matematica Applicata alle Scienze Economiche Statistiche e Attuariali "Bruno de Finetti" n.2*, Università degli Studi di Trieste

BACINELLO A.R. (2004), Modelling the surrender conditions in equity-linked life insurance, *Quaderni del Dipartimento di Matematica Applicata alle Scienze Economiche Statistiche e Attuariali "Bruno de Finetti" n.2*, Università degli Studi di Trieste.

BAKSTEIN D., HOWINSON, S.D. (2004), An arbitrage-free liquidity model with observable parameters for derivatives, *Working Paper, Mathematical Institute, Oxford University*.

BASSO A., PIANCA P. (1996), Introduzione alla valutazione di opzioni esotiche, *Il Risparmio n. Dicembre*

BASSO A., PIANCA P. (2000), Tecniche reticolari per l'Option Pricing, *Il Risparmio n. 48*.

BELLALAH M., BRYE E., MINHAMA H., Options, *Futures and Exotic Derivatives*, F. De Varenne.

BENNINGA S. (2001), *Modelli Finanziari- La Finanza con Excel*, McGraw-Hill

BLACK F., SCHOLES M. (1973), The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* n. 81.

BOYLE, P., BROADIE, M., and GLASSERMAN P. (1997), Monte Carlo methods for security pricing, *Journal of Economics Dynamics and Control*.

BOYLE, P., LAU, S. H. (1994), Bumping up Against the Barrier with the Binomial Method, *Journal of Derivatives*, n. 1, 4 Summer.

BRAUN, M. (1978), *Differential Equations and their applications. An introduction to applied mathematics*, Springer, New York

CHERUBINI U., DELLA LUNGA G. (2002), *Matematica Finanziaria – Applicazioni con Visual Basic per Excel*, McGraw – Hill.

CHEUK, T., VORST, T. (1997), Currency Lookback Options & Observation Frequency: A Binomial Approach, *Journal of International Money & Finance*, 16, 2, pp 173-187,

CHRISS N.A. (1997)., *Black – Scholes and Beyond Options Pricing Models*, Mc Graw Hill.

CLELOW L., STRIKLAND C. (1997), *Exotic Options: the State of Art. London*, Thomson Business Press

CONSTANTINIDES G.M., MALLIARIS A.G. (2001), Options Markets, *Elgar Reference Collection* voll. 1-2.

CONZE A., VISWANATHAN R. (1991), Path-Dependent Options: the Case of Lookback Options, *Journal of Finance* n. 46.

COX J., ROSS S., RUBISTEIN M. (1979), Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics* n. 7.

DEEWYANNE J., HOWINSON S.D., WILMOTT P. , (1995), *The Mathematics of Financial Derivatives: a Student Introduction*, Cambridge University Press.

GOLDMAN, B., SOSIN, H., GATTO (1979), M. A., Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High, *Journal of Finance*, S.1111-1127

HAUG, E. (1998), *Complete Guide to Option Pricing Formulas*, 96-100,

HEYNEN, R., KAT, H. (1995), Lookback options with Discrete and Partial Monitoring of the Underlying Price, *Applied Mathematical Finance*, Vol 2, pp273-283.

HESTON S.L. (1993), A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies* n.6.

HOWINSON, S.D. (2005), *Practical Applied Mathematics*, Cambridge University Press HUNT P.J.

KENNEDY J.E. (2000), *Financial Derivatives in theory and practice*, Wiley.

HOWINSON S.D., KELLY F.P., WILMOTT P. (1995), *Mathematical Models in Finance*, Chapman-Hall.

HULL J.C. (2001), *Opzioni, futures e altri derivati*, Prentice-Hall International

- HULL J.C., WHITE A. (1993), Efficient Procedures for Valuing European and American Path-Dependent Options, *Journal of Derivatives*.
- JACKSON M., STAUNTON M. (2001), *Advanced Modelling in Finance using Excel and VBA*, Wiley Finance
- KAT, H. M. (1995), Pricing Lookback Options Using Binomial Trees: An Evaluation, *Journal of Financial Engineering n.4*, 375-397.
- KEMNA A. G. Z., VORST A. C. F. (1990), A pricing Method for Options Based on Average Asset Values, *Journal of Banking and Finance n.14*.
- LYUU, Y.-D (2002), *Financial Engineering and Computation: Principles, Mathematics, Algorithms*, Cambridge, U.K - Cambridge University Press
- MERTON R.C. (1973), Theory of rational option pricing. *Bell J. Econ. Manag. Sci.* 4.
- MILESKY, M.A., POSNER, S. E., Asian Options (1998) The Sum of Lognormals and Reciprocal Gamma Distribution, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, n. 3 September.
- NELKEN, I. (1996), *The Handbook of Exotic Options*, McGraw Hill.
- PIANCA, P. (2003), *Elementi di teoria delle opzioni*, Giappichelli, Torino.
- POOLEY, D.M., VETZAL, K., FORSYTH, P.A. (2001), Digital Projection, *Working Paper n. January*, University of Waterloo.
- PONTRYAGIN L. S. (1962), *Ordinary Differential Equations*, Addison Wesley, Reading (MA, USA), 1962.
- PRISMAN, E.Z. (2000), *Pricing Derivative Securities*, Academic Press,
- RASMUSSEN H.O., WILMOTT P. (2002). *Asymptotic Analysis of Stochastic Volatility Models*. In *New Directions in Mathematical Finance*, Eds. P. Wilmott and H. O. Rasmussen, Wiley
- RITCHEN, P. (1995), On pricing Barrier Options, *Journal of Derivatives n. 3*, 2 Winter.
- RUBINSTEIN, M., REINER E. (1991), Breaking down the Barriers, *Risk* n. September.
- STEELE J.M. (2001), *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer,

STEINER, M., WALLMEIER, M., HAFNER, R. (1999), Pricing near the barrier: the case of discrete knock-out options, *Journal of Computational Finance* Volume 3 n. 1,

STULZ, R.M. (1982), Options on the Minimum or Maximum of two Assets, *Journal of Financial Economics* n.10.

TURNBULL, S. M., WAKEMAN, L. M (1991), A Quick Algorithm for Pricing European Average Options, *Journal of Financial and Quantitative Finance* n. 26.

WYSTUP, U. (2003), The Market Price of One-Touch Options in Foreign Exchange Markets, *Derivatives Week* n. 12, 13

WORKING PAPERS DEL DIPARTIMENTO

- 1988, 3.1 Guido CELLA
Linkages e moltiplicatori input-output.
- 1989, 3.2 Marco MUSELLA
La moneta nei modelli di inflazione da conflitto.
- 1989, 3.3 Floro E. CAROLEO
Le cause economiche nei differenziali regionali del tasso di disoccupazione.
- 1989, 3.4 Luigi ACCARINO
Attualità delle illusioni finanziarie nella moderna società.
- 1989, 3.5 Sergio CESARATTO
La misurazione delle risorse e dei risultati delle attività innovative: una valutazione dei risultati dell'indagine CNR- ISTAT sull'innovazione tecnologica.
- 1990, 3.6 Luigi ESPOSITO - Pasquale PERSICO
Sviluppo tecnologico ed occupazionale: il caso Italia negli anni '80.
- 1990, 3.7 Guido CELLA
Matrici di contabilità sociale ed analisi ambientale.
- 1990, 3.8 Guido CELLA
Linkages e input-output: una nota su alcune recenti critiche.
- 1990, 3.9 Concetto Paolo VINCI
I modelli econometrici sul mercato del lavoro in Italia.
- 1990, 3.10 Concetto Paolo VINCI
Il dibattito sul tasso di partecipazione in Italia: una rivisitazione a 20 anni di distanza.
- 1990, 3.11 Giuseppina AUTIERO
Limiti della coerenza interna ai modelli con la R.E.H..
- 1990, 3.12 Gaetano Fausto ESPOSITO
Evoluzione nei distretti industriali e domanda di istituzione.
- 1990, 3.13 Guido CELLA
Measuring spatial linkages: input-output and shadow prices.
- 1990, 3.14 Emanuele SALSANO
Seminari di economia.

- 1990, 3.15 Emanuele SALSANO
Investimenti, valore aggiunto e occupazione in Italia in contesto biregionale: una prima analisi dei dati 1970/1982.
- 1990, 3.16 Alessandro PETRETTO- Giuseppe PISAURO
Uniformità vs selettività nella teoria della ottima tassazione e dei sistemi tributari ottimali.
- 1990, 3.17 Adalgiso AMENDOLA
Inflazione, disoccupazione e aspettative. Aspetti teorici dell'introduzione di aspettative endogene nel dibattito sulla curva di Phillips.
- 1990, 3.18 Pasquale PERSICO
Il Mezzogiorno e le politiche di sviluppo industriale.
- 1990, 3.19 Pasquale PERSICO
Priorità delle politiche strutturali e strategie di intervento.
- 1990, 3.20 Adriana BARONE - Concetto Paolo VINCI
La produttività nella curva di Phillips.
- 1990, 3.21 Emiddio GALLO
Varianze ed invarianze socio-spaziali nella transizione demografica dell'Italia post-industriale.
- 1991, 3.22 Alfonso GAMBARDELLA
I gruppi etnici in Nicaragua. Autonomia politica ed economica.
- 1991, 3.23 Maria SCATTAGLIA
La stima empirica dell'offerta di lavoro in Italia: una rassegna.
- 1991, 3.24 Giuseppe CELI
La teoria delle aree valutarie: una rassegna.
- 1991, 3.25 Paola ADINOLFI
Relazioni industriali e gestione delle risorse umane nelle imprese italiane.
- 1991, 3.26 Antonio e Bruno PELOSI
Sviluppo locale ed occupazione giovanile: nuovi bisogni formativi.
- 1991, 3.27 Giuseppe MARIGLIANO
La formazione del prezzo nel settore dell'intermediazione commerciale.
- 1991, 3.28 Maria PROTO
Risorse naturali, merci e ambiente: il caso dello zolfo.
- 1991, 3.29 Salvatore GIORDANO
Ricerca sullo stato dei servizi nelle industrie del salernitano.

- 1992, 3.30 Antonio LOPES
Crisi debitoria e politiche macroeconomiche nei paesi in via di sviluppo negli anni 80.
- 1992, 3.31 Antonio VASSILLO
Circuiti economici semplici, complessi, ed integrati.
- 1992, 3.32 Gaetano Fausto ESPOSITO
Imprese ed istituzioni nel Mezzogiorno: spunti analitici e modalità di relazione.
- 1992, 3.33 Paolo COCCORESE
Un modello per l'analisi del sistema pensionistico.
- 1994, 3.34 Aurelio IORI
Il comparto dei succhi di agrumi: un caso di analisi interorganizzativa.
- 1994, 3.35 Nicola POSTIGLIONE
Analisi multicriterio e scelte pubbliche.
- 1994, 3.36 Adriana BARONE
Cooperazione nel dilemma del prigioniero ripetuto e disoccupazione involontaria.
- 1994, 3.37 Adriana BARONE
Le istituzioni come regolarità di comportamento.
- 1994, 3.38 Maria Giuseppina LUCIA
Lo sfruttamento degli idrocarburi offshore tra sviluppo economico e tutela dell'ambiente.
- 1994, 3.39 Giuseppina AUTIERO
Un'analisi di alcuni dei limiti strutturali alle politiche di stabilizzazione nei LCDs.
- 1994, 3.40 Bruna BRUNO
Modelli di contrattazione salariale e ruolo del sindacato.
- 1994, 3.41 Giuseppe CELI
Cambi reali e commercio estero: una riflessione sulle recenti interpretazioni teoriche.
- 1995, 3.42 Alessandra AMENDOLA, M. Simona ANDREANO
The TAR models: an application on italian financial time series.
- 1995, 3.43 Leopoldo VARRIALE
Ambiente e turismo: Parco dell'Iguazù - Argentina.

- 1995, 3.44 A. PELOSI, R. LOMBARDI
Fondi pensione: equilibrio economico-finanziario delle imprese.
- 1995, 3.45 Emanuele SALSANO, Domenico IANNONE
Economia e struttura produttiva nel salernitano dal secondo dopoguerra ad oggi.
- 1995, 3.46 Michele LA ROCCA
Empirical likelihood and linear combinations of functions of order statistics.
- 1995, 3.47 Michele LA ROCCA
L'uso del bootstrap nella verosimiglianza empirica.
- 1996, 3.48 Domenico RANESI
Le politiche CEE per lo sviluppo dei sistemi locali: esame delle diverse tipologie di intervento e tentativo di specificazione tassonomica.
- 1996, 3.49 Michele LA ROCCA
L'uso della verosimiglianza empirica per il confronto di due parametri di posizione.
- 1996, 3.50 Massimo SPAGNOLO
La domanda dei prodotti della pesca in Italia.
- 1996, 3.51 Cesare IMBRIANI, Filippo REGANATI
Macroeconomic stability and economic integration. The case of Italy.
- 1996, 3.52 Annarita GERMANI
Gli effetti della mobilitazione della riserva obbligatoria. Analisi sull'efficienza del suo utilizzo.
- 1996, 3.53 Massimo SPAGNOLO
A model of fish price formation in the north sea and the Mediterranean.
- 1996, 3.54 Fernanda MAZZOTTA
RTFL: problemi e soluzioni per i dati Panel.
- 1996, 3.55 Angela SPAGNUOLO
Concentrazione industriale e dimensione del mercato: il ruolo della spesa per pubblicità e R&D.
- 1996, 3.56 Giuseppina AUTIERO
The economic case for social norms.
- 1996, 3.57 Francesco GIORDANO
Sulla convergenza degli stimatori Kernel.
- 1996, 3.58 Tullio JAPPELLI, Marco PAGANO
The determinants of saving: lessons from Italy.

- 1997, 3.59 Tullio JAPPELLI
The age-wealth profile and the life-cycle hypothesis: a cohort analysis with a time series of cross sections of Italian households.
- 1997, 3.60 Marco Antonio MONACO
La gestione dei servizi di pubblico interesse.
- 1997, 3.61 Marcella ANZOLIN
L'albero della qualità dei servizi pubblici locali in Italia: metodologie e risultati conseguiti.
- 1997, 3.62 Cesare IMBRIANI, Antonio LOPES
Intermediazione finanziaria e sistema produttivo in un'area dualistica. Uno studio di caso.
- 1997, 3.63 Tullio JAPPELLI
Risparmio e liberalizzazione finanziaria nell'Unione europea.
- 1997, 3.64 Alessandra AMENDOLA
Analisi dei dati di sopravvivenza.
- 1997, 3.65 Francesco GIORDANO, Cira PERNA
Gli stimatori Kernel per la stima non parametrica della funzione di regressione.
- 1997, 3.66 Biagio DI SALVIA
Le relazioni marittimo-commerciali nell'imperiale regio litorale austriaco nella prima metà dell'800.
I. Una riclassificazione delle Tafeln zur Statistik der Österreichischen Monarchie.
- 1997, 3.67 Alessandra AMENDOLA
Modelli non lineari di seconda e terza generazione: aspetti teorici ed evidenze empiriche.
- 1998, 3.68 Vania SENA
L'analisi econometrica dell'efficienza tecnica. Un'applicazione agli ospedali italiani di zona.
- 1998, 3.69 Domenico CERBONE
Investimenti irreversibili.
- 1998, 3.70 Antonio GAROFALO
La riduzione dell'orario di lavoro è una soluzione al problema disoccupazione: un tentativo di analisi empirica.
- 1998, 3.71 Jacqueline MORGAN, Roberto RAUCCI
New convergence results for Nash equilibria.

- 1998, 3.72 Rosa FERRENTINO
Niels Henrik Abel e le equazioni algebriche.
- 1998, 3.73 Marco MICOCCI, Rosa FERRENTINO
Un approccio markoviano al problema della valutazione delle opzioni.
- 1998, 3.74 Rosa FERRENTINO, Ciro CALABRESE
Rango di una matrice di dimensione K.
- 1999, 3.75 Patrizia RIGANTI
L'uso della valutazione contingente per la gestione del patrimonio culturale: limiti e potenzialità.
- 1999, 3.76 Annamaria NESE
Il problema dell'inefficienza nel settore dei musei: tecniche di valutazione.
- 1999, 3.77 Gianluigi COPPOLA
Disoccupazione e mercato del lavoro: un'analisi su dati provinciali.
- 1999, 3.78 Alessandra AMENDOLA
Un modello soglia con eteroschedasticità condizionata per tassi di cambio.
- 1999, 3.79 Rosa FERRENTINO
Su un'applicazione della trasformata di Laplace al calcolo della funzione asintotica di non rovina.
- 1999, 3.80 Rosa FERRENTINO
Un'applicazione della trasformata di Laplace nel caso di una distribuzione di Erlang.
- 1999, 3.81 Angela SPAGNUOLO
Efficienza e struttura degli incentivi nell'azienda pubblica: il caso dell'industria sanitaria.
- 1999, 3.82 Antonio GAROFALO, Cesare IMBRIANI, Concetto Paolo VINCI
Youth unemployment: an insider-outsider dynamic approach.
- 1999, 3.83 Rosa FERRENTINO
Un modello per la determinazione del tasso di riequilibrio in un progetto di fusione tra banche.
- 1999, 3.84 DE STEFANIS, PORZIO
Assessing models in frontier analysis through dynamic graphics.
- 1999, 3.85 Annunziato GESUALDI
Inflazione e analisi delle politiche fiscali nell'U.E..
- 1999, 3.86 R. RAUCCI, L. TADDEO
Dalle equazioni differenziali alle funzioni e^x , $\log x$, a^x , $\log_a x$, x^x .

- 1999, 3.87 Rosa FERRENTINO
Sulla determinazione di numeri aleatori generati da equazioni algebriche.
- 1999, 3.88 C. PALMISANI, R. RAUCCI
Sulle funzioni circolari: una presentazione non classica.
- 2000, 3.89 Giuseppe STORTI, Pierluigi FURCOLO, Paolo VILLANI
A dynamic generalized linear model for precipitation forecasting.
- 2000, 3.90 Rosa FERRENTINO
Un procedimento risolutivo per l'equazione di Dickson.
- 2000, 3.91 Rosa FERRENTINO
Un'applicazione della mistura di esponenziali alla teoria del rischio.
- 2000, 3.92 Francesco GIORDANO, Michele LA ROCCA, Cira PERNA
Bootstrap variance estimates for neural networks regression models.
- 2000, 3.93 Alessandra AMENDOLA, Giuseppe STORTI
A non-linear time series approach to modelling asymmetry in stock market indexes.
- 2000, 3.94 Rosa FERRENTINO
Sopra un'osservazione di De Vylder.
- 2000, 3.95 Massimo SALZANO
Reti neurali ed efficacia dell'intervento pubblico: previsioni dell'inquinamento da traffico nell'area di Villa S. Giovanni.
- 2000, 3.96 Angela SPAGNUOLO
Concorrenza e deregolamentazione nel mercato del trasporto aereo in Italia.
- 2000, 3.97 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO
Teoremi ingannevoli.
- 2000, 3.98 Francesco GIORDANO
Una procedura per l'inizializzazione dei pesi delle reti neurali per l'analisi del trend.
- 2001, 3.99 Angela D'ELIA
Some methodological issues on multivariate modelling of rank data.
- 2001, 3.100 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO
Nuove classi di funzioni scalari quasiconcave generalizzate: caratterizzazioni ed applicazioni a problemi di ottimizzazione.
- 2001, 3.101 Adriana BARONE, Annamaria NESE
Some insights into night work in Italy.
- 2001, 3.102 Alessandra AMENDOLA, Marcella NIGLIO

Predictive distributions of nonlinear time series models.

- 2001, 3.103 Roberto RAUCCI
Sul concetto di certo equivalente nella teoria HSSB.
- 2001, 3.104 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO
On stackelberg games: a result of unicity.
- 2001, 3.105 Roberto RAUCCI
Una definizione generale e flessibile di insieme limitato superiormente in \mathfrak{R}^n
- 2001, 3.106 Roberto RAUCCI
Stretta quasiconcavit  nelle forme funzionali flessibili.
- 2001, 3.107 Roberto RAUCCI
Sugli insiemi limitati in \mathfrak{R}^m rispetto ai coni.
- 2001, 3.108 Roberto RAUCCI
Monotonie, isotonie e indecomponibilit  deboli per funzioni a valori vettoriali con applicazioni.
- 2001, 3.109 Roberto RAUCCI
Generalizzazioni del concetto di debole Kuhn-Tucker punto-sella.
- 2001, 3.110 Antonia Rosa GURRIERI, Marilene LORIZIO
Le determinanti dell'efficienza nel settore sanitario. Uno studio applicato.
- 2001, 3.111 Gianluigi COPPOLA
Studio di una provincia meridionale attraverso un'analisi dei sistemi locali del lavoro. Il caso di Salerno.
- 2001, 3.112 Francesco GIORDANO
Reti neurali per l'analisi del trend: un approccio per identificare la topologia della rete.
- 2001, 3.113 Marcella NIGLIO
Nonlinear time series models with switching structure: a comparison of their forecast performances.
- 2001, 3.114 Damiano FIORILLO
Capitale sociale e crescita economica. Review dei concetti e dell'evidenza empirica.
- 2001, 3.115 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO
Generalizzazione del concetto di continuit  e di derivabilit .
- 2001, 3.116 Marcella NIGLIO
Ricostruzione dei dati mancanti in serie storiche climatiche.

- 2001, 3.117 Vincenzo VECCHIONE
Mutamenti del sistema creditizio in un'area periferica.
- 2002, 3.118 Francesco GIORDANO, Michele LA ROCCA, Cira PERNA
Bootstrap variable selection in neural network regression models.
- 2002, 3.119 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO
Insiemi debolmente convessi e concavità in senso generale.
- 2002, 3.120 Vincenzo VECCHIONE
Know how locali e percorsi di sviluppo in aree e settori marginali.
- 2002, 3.121 Michele LA ROCCA, Cira PERNA
Neural networks with dependent data.
- 2002, 3.122 Pietro SENESI
Economic dynamics: theory and policy. A stability analysis approach.
- 2002, 3.123 Gianluigi COPPOLA
Stima di un indicatore di pressione ambientale: un'applicazione ai comuni della Campania.
- 2002, 3.124 Roberto RAUCCI
Sull'esistenza di autovalori e autovettori positivi anche nel caso non lineare.
- 2002, 3.125 Maria Carmela MICCOLI
Identikit di giovani lucani.
- 2002, 3.126 Sergio DESTEFANIS, Giuseppe STORTI
Convexity, productivity change and the economic performance of countries.
- 2002, 3.127 Giovanni C. PORZIO, Maria Prosperina VITALE
Esplorare la non linearità nei modelli Path.
- 2002, 3.128 Rosa FERRENTINO
Sulla funzione di Seal.
- 2003, 3.129 Michele LA ROCCA, Cira PERNA
Identificazione del livello intermedio nelle reti neurali di tipo feedforward.
- 2003, 3.130 Alessandra AMENDOLA, Marcella NIGLIO, Cosimo VITALE
The exact multi-step ahead predictor of SETARMA models.
- 2003, 3.131 Mariangela BONASIA
La dimensione ottimale di un sistema pensionistico: means tested vs programma universale.
- 2003, 3.132 Annamaria NESE
Abitazione e famiglie a basso reddito.

- 2003, 3.133 Maria Lucia PARRELLA
Le proprietà asintotiche del Local Polynomial Bootstrap.
- 2003, 3.134 Silvio GIOVE, Maurizio NORDIO, Stefano SILVONI
Stima della prevalenza dell'insufficienza renale cronica con reti bayesiane: analisi costo efficacia delle strategie di prevenzione secondaria.
- 2003, 3.135 Massimo SALZANO
Globalization, complexity and the holism of the italian school of public finance.
- 2003, 3.136 Giuseppina AUTIERO
Labour market institutional systems and unemployment performance in some Oecd countries.
- 2003, 3.137 Marisa FAGGINI
Recurrence analysis for detecting non-stationarity and chaos in economic times series.
- 2003, 3.138 Marisa FAGGINI, Massimo SALZANO
The reverse engineering of economic systems. Tools and methodology.
- 2003, 3.139 Rosa FERRENTINO
In corso di pubblicazione.
- 2003, 3.140 Rosa FERRENTINO, Roberto RAUCCI
Sui problemi di ottimizzazione in giochi di Stackelberg ed applicazioni in modelli economici.
- 2003, 3.141 Carmine SICA
In corso di pubblicazione.
- 2004, 3.142 Sergio DESTEFANIS, Antonella TADDEO, Maurizio TORNATORE
The stock of human capital in the Italian regions.
- 2004, 3.143 Elena Laureana DEL MERCATO
Edgeworth equilibria with private provision of public good.
- 2004, 3.144 Elena Laureana DEL MERCATO
Externalities on consumption sets in general equilibrium.
- 2004, 3.145 Rosa FERRENTINO, Roberto RAUCCI
Su alcuni criteri delle serie a termini non negativi.
- 2004, 3.146 Rosa FERRENTINO, Roberto RAUCCI
Legame tra le soluzioni di Minty e di Stempacenhia nelle disequazioni variazionali.

- 2004, 3.147 Gianluigi COPPOLA
In corso di pubblicazione.
- 2004, 3.148 Massimo Spagnolo
The Importance of Economic Incentives in Fisheries Management
- 2004, 3.149 F. Salsano
La politica monetaria in presenza di non perfetta osservabilità degli obiettivi del banchiere centrale.
- 2004, 3.150 A. Vita
La dinamica del cambiamento nella rappresentazione del territorio. Una mappa per i luoghi della Valle dell'Irno.
- 2004, 3.151 Celi
Empirical Explanation of vertical and horizontal intra-industry trade in the UK: a comment.
- 2004, 3.152 Amendola – P. Vitale
Self-Assessment and Career Choices: An On-line resource for the University of Salerno.
- 2004, 3.153 A. Amendola – R. Troisi
Introduzione all'economia politica dell'organizzazione: nozioni ed applicazioni.
- 2004, 3.154 A. Amendola – R. Troisi
Strumenti d'incentivo e modelli di gestione del personale volontario nelle organizzazioni non profit.
- 2004, 3.155 Lavinia Parisi
La gestione del personale nelle imprese manifatturiere della provincia di Salerno.
- 2004, 3.156 Angela Spagnuolo – Silvia Keller
La rete di accesso all'ultimo miglio: una valutazione sulle tecnologie alternative.
- 2005, 3.157 Davide Cantarelli
Elasticities of Complementarity and Substitution in Some Functional Forms. A Comparative Review.
- 2005, 3.158 Pietro Coretto – Giuseppe Storti
Subjective Expectations in Economics: a Statistical overview of the main findings.
- 2005, 3.159 Pietro Coretto – Giuseppe Storti
Moments based inference in small samples.

- 2005, 3.160 Massimo Salzano
Una simulazione neo-keynesiana ad agenti eterogeni.
- 2005, 3.161 Rosa Ferrentino
Su alcuni paradossi della teoria degli insiemi.
- 2005, 3.162 Damiano Fiorillo
Capitale sociale: uno o molti? Pochi.
- 2005, 3.163 Damiano Fiorillo
Il capitale sociale conta per outcomes (macro) economici?.
- 2005, 3.164 Damiano Fiorillo – Guadalupi Luigi
Attività economiche nel distretto industriale di Nocera inferiore – Gragnano. Un'analisi su Dati Tagliacarne.
- 2005, 3.165 Rosa Ferrentino
Pointwise well-posedness in vector optimization and variational inequalities.
- 2005, 3.166 Roberto Iorio
La ricerca universitaria verso il mercato per il trasferimento tecnologico e rischi per l'Open Science: posizioni teoriche e filoni di indagine empirica.
- 2005, 3.167 Marisa Faggini
The chaotic system and new perspectives for economics methodology. A note.
- 2005, 3.168 Francesco Giordano
Weak consistent moving block bootstrap estimator of sampling distribution of CLS estimators in a class of bilinear models
- 2005, 3.169 Edgardo Sica
Tourism as determinant of economic growth: the case of south-east asian countries.
- 2005, 3.170 Rosa Ferrentino
On Minty variational inequalities and increasing along rays functions.
- 2005, 3.171 Rosa Ferrentino
On the Minty and Stampacchia scalar variational inequalities
- 2005, 3.172 Destefanis - Storti
A procedure for detecting outliers in frontier estimation
- 2005, 3.173 Destefanis - Storti
Evaluating business incentives through DEA. An analysis on capital firm data

- 2005, 3.174 Nese – O'Higgins
In and out of the capitalia sample: evaluating attrition bias.
- 2005, 3.175 Maria Patrizia Vittoria
Il Processo di terziarizzazione in Campania. Analisi degli indicatori principali nel periodo 1981-2001
- 2005, 3.176 Sergio Destefanis – Giuseppe Mastromatteo
Inequality and labour-market performance. A survey beyond an elusive trade-off.
- 2006, 3.177 Giuseppe Storti
Modelling asymmetric volatility dynamics by multivariate BL-GARCH models
- 2006, 3.178 Lucio Valerio Spagnolo – Mario Cerrato
No euro please, We're British!
- 2006, 3.179 Maria Carmela Miccoli
Invecchiamento e seconda transizione demografica
- 2006, 3.180 Maria Carmela Miccoli – Antonio Cortese
Le scuole italiane all'estero: una realtà poco nota
- 2007, 3.181 Rosa Ferrentino
Variational inequalities and optimization problems
- 2007, 3.182 Lavinia Parisi
Estimating capability as a latent variable: A Multiple Indicators and Multiple Causes Approach. The example of health
- 2007, 3.183 Rosa Ferrentino
Well-posedness, a short survey
- 2007, 3.184 Roberto Iorio – Sandrine Labory – Daniele Paci
Relazioni tra imprese e università nel biotech-salute dell'Emilia Romagna. Una valutazione sulla base della co-authorship delle pubblicazioni scientifiche
- 2007, 3.185 Lavinia Parisi
Youth Poverty after leaving parental home: does parental income matter?
- 2007, 3.186 Pietro Coretto – Christian Hennig
Identifiability for mixtures of distributions from a location-scale family with uniform
- 2007, 3.187 Anna Parziale
Il fitness landscape: un nuovo approccio per l'analisi del federalismo fiscale
- 2007, 3.188 Christian Di Pietro – Elena L. del Mercato
Seminal contributions to the theory of Knowledge and technological change

Stampa a cura della C.U.S.L. Cooperativa Universitaria Studio e Lavoro, Via Ponte Don Melillo, Fisciano per conto Del Dipartimento di Scienze Economiche e Statistiche
Finito di stampare il 12 Dicembre 2007