

Università degli Studi di Salerno
DIPARTIMENTO DI SCIENZE ECONOMICHE E STATISTICHE

M. Nocera – R. Raucci – L. Taddeo

Su alcuni limiti fondamentali: tecniche non classiche

WORKING PAPER 3.212

Abstract

Si calcola il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ evidenziando come detto calcolo si possa ricondurre a quello di limiti notevoli senza utilizzare il primo teorema di de l'Hôpital o le classi delle funzioni infinitesime dello stesso ordine. Si prende spunto dal calcolo del limite per riflettere sull'utilizzo, a volte fatto con troppa disinvoltura, della sostituzione degli infiniti e degli infinitesimi. Inoltre si presenta un risultato teorico dal quale discende il suddetto limite e una prova non classica dell'altro limite notevole

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

1. Calcolo del limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Sarà utile nel seguito tener conto della definizione di minimo e massimo limite.

Sia f una funzione definita in A sottoinsieme di \mathbb{R} e sia x_0 un punto di accumulazione di A . Definiamo *minimo* (*massimo*) *limite* di f per x che tende x_0

$$\min \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \min \left\{ \min \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) : x_n \in A - \{x_0\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \right\}$$

$$\left(\max \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \max \left\{ \max \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) : x_n \in A - \{x_0\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \right\} \right)$$

È facile verificare che per ogni $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[- \{0\}$ si ha:

$$(1) \quad 0 \leq \frac{x - \sin x}{x^3} \leq \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$$

$$(2) \quad \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{\tan x - \sin x}{x^3} - \frac{\tan^2 x}{x^2} + \frac{2x - \sin 2x}{2x^3 \cos^2 x}$$

Per quanto riguarda la (1) basta tener presente che le funzioni $\frac{x - \sin x}{x^3}$ e $\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ sono funzioni pari e per ogni $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ $\sin x < x < \tan x$.

Per dimostrare la (2) si osservi che sussiste la seguente uguaglianza:

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{x - \sin x + \tan x - \tan x}{x^3} = \frac{\tan x - \sin x}{x^3} - \frac{\tan x - x}{x^3} \text{ e te-}$$

nuto conto che:

$$\begin{aligned} \frac{\tan x - x}{x^3} &= \frac{\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} - x}{x^3} = \frac{\sin 2x - x - x \cos 2x}{x^3(1 + \cos 2x)} = \\ &= \frac{\sin 2x - x - x \cos 2x - 2x + 2x}{x^3(1 + \cos 2x)} = \frac{\sin 2x - 2x + x - x \cos 2x}{x^3(1 + \cos 2x)} = \\ &= \frac{x(1 - \cos 2x)}{x^3(1 + \cos 2x)} - \frac{2x - \sin 2x}{x^3(1 + \cos 2x)} = \frac{\tan^2 x}{x^2} - \frac{2x - \sin 2x}{2x^3 \cos^2 x} \end{aligned}$$

si ottiene la (2).

Siccome $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$, da (1) si deduce che, il minimo limite $\min \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l'$ e il massimo limite $\max \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l''$ della funzione $f(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$, per x che tende a 0, appartengono all'insieme dei numeri reali.

Da $f(2x) = \frac{2x - \sin 2x}{(2x)^3}$, si ha, per x che tende a 0,

$\min \lim_{x \rightarrow x_0} f(2x) = l'$ e $\max \lim_{x \rightarrow x_0} f(2x) = l''$. Siccome le funzioni

$\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ e $\frac{\tan^2 x}{x^2}$ sono convergenti, poiché per la (2) risulta:

$$f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{x^3} - \frac{\tan^2 x}{x^2} + \frac{4}{\cos^2 x} f(2x)$$

si deduce:

$$l' = -\frac{1}{2} + 4l' \text{ e } l'' = -\frac{1}{2} + 4l''$$

da cui $l' = l'' = \frac{1}{6}$ e, dunque, l'asserto.

2. Generalizzazione

Sia f una funzione definita in un intorno I di x_0 (eventualmente privato di x_0). Se

1) esistono tre funzioni F , g e h tali che:

$$f(x) = g(x) + h(x)f(F(x)) \text{ per ogni } x \in I - \{x_0\}$$

con g e h convergenti in x_0 e $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \neq \pm 1$;

2) $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = x_0$;

3) f è limitata in $I - \{x_0\}$;

4) per ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset I$, con $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$, esiste una successione $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x_0 tale che $F(y_n) = x_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e $y_n \neq x_0$ frequentemente;

5) per ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a x_0 , con $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta $F(x_n) \neq x_0$ frequentemente.

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}{1 - \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)}.$$

Prima di dimostrare il teorema osserviamo che:

i) se F è continua in x_0 la **2)** equivale a dire che x_0 è un punto fisso di F ;

ii) se F è invertibile la **4)** equivale a dire che $\lim_{x \rightarrow x_0} F^{-1}(x) = x_0$;

iii) se il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = -1$ deduciamo che:

$$\min_{x \rightarrow x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \max_{x \rightarrow x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Dimostrazione.

Per l'ipotesi **2)**, **4)** e **5)** si deduce che

$$\min_{x \rightarrow x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \min_{x \rightarrow x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(F(x))$$

e

$$\max_{x \rightarrow x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \max_{x \rightarrow x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(F(x))$$

e per la **3)** il minimo e massimo limite di f sono finiti.

Quindi, se $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \geq 0$ da **1)** segue:

$$\mathbf{a)} \quad \min_{x \rightarrow x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \cdot \min_{x \rightarrow x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\text{da cui, poiché } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \neq 1, \quad \min_{x \rightarrow x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}{1 - \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)} \quad \text{e}$$

l'asserto è conseguenza del fatto che vale anche

$$\max_{x \rightarrow x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}{1 - \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)}.$$

Invece, se $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) < 0$ da **1)** si ha invece:

$$\min_{x \rightarrow x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \cdot \max_{x \rightarrow x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

e

$$\mathbf{b)} \quad \max_{x \rightarrow x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \cdot \min_{x \rightarrow x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Sottraendo membro a membro deduciamo che $\min_{x \rightarrow x_0} \lim f(x) = \max_{x \rightarrow x_0} \lim f(x)$ da cui, poiché $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \neq -1$, facilmente l'asserto.

È facile ricavare, inoltre, l'osservazione **iii)** come conseguenza della **b)**.

Ora il nostro limite si ottiene come corollario della proposizione appena dimostrata.

3. Conseguenze

Come conseguenza immediata si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}, \text{ da cui } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

Utilizzando poi il teorema sui limiti delle funzioni composte, con la sostituzione $y = \arcsin x$ si ha: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \sin y}{\sin^3 y} = \frac{1}{6}$

Sempre per il teorema sui limiti delle funzioni composte, utilizzando la sostituzione $y = \arctan x$ si ha: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y - y}{\tan^3 y} = \frac{1}{3}$.

In tal modo abbiamo calcolato il valore dei limiti $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3} = \frac{1}{6}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{3} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} = \frac{1}{3} \text{ senza far}$$

uso dei teoremi di de l'Hôpital o della formula di Taylor, anticipando così risultati che in quasi tutti i testi scolastici e universitari vengono riportati nel contesto degli argomenti successivi alla derivazione.

Sia ora $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, utilizzando il teorema di generalizzazione pro-

viamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

A tal proposito notiamo che $f(x) = -\frac{\ln 2}{x} + 2 \frac{\ln 2x}{2x}$ ed essendo

$\ln x < x$ per ogni $x \in [1; +\infty[$, f è ivi limitata.

Valgono tutte le ipotesi del teorema di generalizzazione, infatti, le funzioni $g(x) = -\frac{\ln 2}{x}$ e $h(x) = 2$ sono convergenti in $x_0 = +\infty$, la funzione $F(x) = 2x$ diverge positivamente in $x_0 = +\infty$, verifica la **4**) e la **5**), e, come già detto, $f(x)$ è limitata. Pertanto, risulta,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}{1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Il problema del calcolo del limite utilizzando solo i limiti notevoli è sorto come conseguenza del fatto che molti studenti eseguono con disinvoltura la sostituzione degli infinitesimi commettendo errori e sono state tratte considerazioni di carattere didattico che di seguito vengono riportate.

Analizziamo la seguente dimostrazione

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \cdot \frac{x^2 + x \sin x + \sin^2 x}{x^2 + x \sin x + \sin^2 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin^3 x}{x^3 (x^2 + x \sin x + \sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin x (1 - \cos^2 x)}{x^3 (x^2 + x \sin x + \sin^2 x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin x (1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^3 (x^2 + x \sin x + \sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin x (1 - \cos x)(1 + \cos x)}{3x^5} = \\ &= [A] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin x \frac{x^2}{2} (1 + \cos x)}{3x^5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \frac{1 + \cos x}{2}}{3x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x \cos^2 \frac{x}{2}}{3x^3} = [B] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos^2 \frac{x}{2}}{3x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 \frac{x}{2}}{3x^2} = \\ &= \frac{1}{12} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

L'errore è dovuto alla sostituzione nella differenza degli infinitesimi in $[A]$ e $[B]$.

Riproponendo il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sin x(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{3x^5}$ se si sostituisce a $\sin x$ l'infinitesimo corrispondente alla tabella dei limiti notevoli si ottiene:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{3x^5} = \frac{1}{9}$. Mentre se sostituiamo a $(1 - \cos x)$ sempre l'infinitesimo corrispondente della tabella dei limiti

notevoli si ottiene: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \frac{x^2}{2} \sin x(1 + \cos x)}{3x^5} = \frac{5}{36}$. Visto i risultati diversi si potrebbe pensare allora di sostituire ad entrambe le funzioni gli infinitesimi corrispondenti, ottenendo però il risultato già analizzato precedentemente.

Si potrebbe allora pensare di sostituire contemporaneamente ad entrambi gli addendi del numeratore e/o del denominatore i corrispondenti infinitesimi dei limiti notevoli ma si potrebbero ottenere sempre degli errori. Infatti, gli ulteriori due esempi che seguono mostrano come gli alunni potrebbero deliberatamente eseguire sostituzioni con errori nel calcolo dei limiti.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \cos x} - \log^2(1 + \sqrt{x}) - 1}{\sqrt{\sin x - x \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos x - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{\sin x - x \cos x}} =$$

$$= \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x(1 - \cos x)}{\sqrt{x^3}} = 0$$

mentre il limite è uguale: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \cos x} - \log^2(1 + \sqrt{x}) - 1}{\sqrt{\sin x - x \cos x}} = \sqrt{3}$;

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \cos x} - \log^2(1 + \sqrt{x}) - 1}{\sin x - x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x(1 - \cos x)}{x(1 - \cos x)} = -1 \quad \text{mentre}$$

$$\text{il limite è uguale a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x \cos x} - 1 - \log^2(1 + \sqrt{x})}{\sin x - x \cos x} = +\infty.$$

In entrambi gli esempi, l'errore è dovuto al fatto che le funzioni $f(x) = e^{x \cos x} - \log^2(1 + \sqrt{x}) - 1$ e $g(x) = \sqrt{\sin x - x \cos x}$ sono infinitesime dello stesso ordine di $h(x) = \sqrt{x^3}$ e nel calcolo del limite utilizzando la sostituzione degli infinitesimi equivalenti sarebbe praticamente impossibile stabilirne l'ordine a priori sulla base dei limiti notevoli.

Da quanto provato segue allora che nella pratica si compiono sugli infinitesimi alcune manipolazioni algebriche, che li rendono molto utili, commettendo, però, un grave ma comunissimo errore e cioè che se ad una funzione infinitesima di ordine superiore rispetto ad f aggiungiamo un'altra funzione con la stessa proprietà, non miglioriamo la nostra conoscenza della prima, pertanto, nelle differenze di funzioni infinitesime non è possibile sostituire ad una delle due funzioni l'infinitesimo corrispondente senza conoscere con esattezza l'ordine dell'infinitesimo differenza.

Va comunque sottolineato che l'utilizzo degli infiniti e infinitesimi è molto utile nel calcolo dei limiti e deve essere proposto in ogni ordine scolastico che ne preveda il loro studio, evidenziando però che la sostituzione può avvenire solo in alcuni casi, come il prodotto e il quoziente di funzioni.

WORKING PAPERS DEL DIPARTIMENTO

- 1988, 3.1 Guido CELLA
Linkages e moltiplicatori input-output.
- 1989, 3.2 Marco MUSELLA
La moneta nei modelli di inflazione da conflitto.
- 1989, 3.3 Floro E. CAROLEO
Le cause economiche nei differenziali regionali del tasso di disoccupazione.
- 1989, 3.4 Luigi ACCARINO
Attualità delle illusioni finanziarie nella moderna società.
- 1989, 3.5 Sergio CESARATTO
La misurazione delle risorse e dei risultati delle attività innovative: una valutazione dei risultati dell'indagine CNR- ISTAT sull'innovazione tecnologica.
- 1990, 3.6 Luigi ESPOSITO - Pasquale PERSICO
Sviluppo tecnologico ed occupazionale: il caso Italia negli anni '80.
- 1990, 3.7 Guido CELLA
Matrici di contabilità sociale ed analisi ambientale.
- 1990, 3.8 Guido CELLA
Linkages e input-output: una nota su alcune recenti critiche.
- 1990, 3.9 Concetto Paolo VINCI
I modelli econometrici sul mercato del lavoro in Italia.
- 1990, 3.10 Concetto Paolo VINCI
Il dibattito sul tasso di partecipazione in Italia: una rivisitazione a 20 anni di distanza.
- 1990, 3.11 Giuseppina AUTIERO
Limiti della coerenza interna ai modelli con la R.E.H..
- 1990, 3.12 Gaetano Fausto ESPOSITO
Evoluzione nei distretti industriali e domanda di istituzione.
- 1990, 3.13 Guido CELLA
Measuring spatial linkages: input-output and shadow prices.
- 1990, 3.14 Emanuele SALSANO
Seminari di economia.

- 1990, 3.15 Emanuele SALSANO
Investimenti, valore aggiunto e occupazione in Italia in contesto biregionale: una prima analisi dei dati 1970/1982.
- 1990, 3.16 Alessandro PETRETTO- Giuseppe PISAURO
Uniformità vs selettività nella teoria della ottima tassazione e dei sistemi tributari ottimali.
- 1990, 3.17 Adalgiso AMENDOLA
Inflazione, disoccupazione e aspettative. Aspetti teorici dell'introduzione di aspettative endogene nel dibattito sulla curva di Phillips.
- 1990, 3.18 Pasquale PERSICO
Il Mezzogiorno e le politiche di sviluppo industriale.
- 1990, 3.19 Pasquale PERSICO
Priorità delle politiche strutturali e strategie di intervento.
- 1990, 3.20 Adriana BARONE - Concetto Paolo VINCI
La produttività nella curva di Phillips.
- 1990, 3.21 Emiddio GALLO
Varianze ed invarianze socio-spaziali nella transizione demografica dell'Italia post-industriale.
- 1991, 3.22 Alfonso GAMBARDELLA
I gruppi etnici in Nicaragua. Autonomia politica ed economica.
- 1991, 3.23 Maria SCATTAGLIA
La stima empirica dell'offerta di lavoro in Italia: una rassegna.
- 1991, 3.24 Giuseppe CELI
La teoria delle aree valutarie: una rassegna.
- 1991, 3.25 Paola ADINOLFI
Relazioni industriali e gestione delle risorse umane nelle imprese italiane.
- 1991, 3.26 Antonio e Bruno PELOSI
Sviluppo locale ed occupazione giovanile: nuovi bisogni formativi.
- 1991, 3.27 Giuseppe MARIGLIANO
La formazione del prezzo nel settore dell'intermediazione commerciale.
- 1991, 3.28 Maria PROTO
Risorse naturali, merci e ambiente: il caso dello zolfo.
- 1991, 3.29 Salvatore GIORDANO
Ricerca sullo stato dei servizi nelle industrie del salernitano.

- 1992, 3.30 Antonio LOPES
Crisi debitoria e politiche macroeconomiche nei paesi in via di sviluppo negli anni 80.
- 1992, 3.31 Antonio VASSILLO
Circuiti economici semplici, complessi, ed integrati.
- 1992, 3.32 Gaetano Fausto ESPOSITO
Imprese ed istituzioni nel Mezzogiorno: spunti analitici e modalità di relazione.
- 1992, 3.33 Paolo COCCORESE
Un modello per l'analisi del sistema pensionistico.
- 1994, 3.34 Aurelio IORI
Il comparto dei succhi di agrumi: un caso di analisi interorganizzativa.
- 1994, 3.35 Nicola POSTIGLIONE
Analisi multicriterio e scelte pubbliche.
- 1994, 3.36 Adriana BARONE
Cooperazione nel dilemma del prigioniero ripetuto e disoccupazione involontaria.
- 1994, 3.37 Adriana BARONE
Le istituzioni come regolarità di comportamento.
- 1994, 3.38 Maria Giuseppina LUCIA
Lo sfruttamento degli idrocarburi offshore tra sviluppo economico e tutela dell'ambiente.
- 1994, 3.39 Giuseppina AUTIERO
Un'analisi di alcuni dei limiti strutturali alle politiche di stabilizzazione nei LCDs.
- 1994, 3.40 Bruna BRUNO
Modelli di contrattazione salariale e ruolo del sindacato.
- 1994, 3.41 Giuseppe CELI
Cambi reali e commercio estero: una riflessione sulle recenti interpretazioni teoriche.
- 1995, 3.42 Alessandra AMENDOLA, M. Simona ANDREANO
The TAR models: an application on italian financial time series.
- 1995, 3.43 Leopoldo VARRIALE
Ambiente e turismo: Parco dell'Iguazù - Argentina.

- 1995, 3.44 A. PELOSI, R. LOMBARDI
Fondi pensione: equilibrio economico-finanziario delle imprese.
- 1995, 3.45 Emanuele SALSANO, Domenico IANNONE
Economia e struttura produttiva nel salernitano dal secondo dopoguerra ad oggi.
- 1995, 3.46 Michele LA ROCCA
Empirical likelihood and linear combinations of functions of order statistics.
- 1995, 3.47 Michele LA ROCCA
L'uso del bootstrap nella verosimiglianza empirica.
- 1996, 3.48 Domenico RANESI
Le politiche CEE per lo sviluppo dei sistemi locali: esame delle diverse tipologie di intervento e tentativo di specificazione tassonomica.
- 1996, 3.49 Michele LA ROCCA
L'uso della verosimiglianza empirica per il confronto di due parametri di posizione.
- 1996, 3.50 Massimo SPAGNOLO
La domanda dei prodotti della pesca in Italia.
- 1996, 3.51 Cesare IMBRIANI, Filippo REGANATI
Macroeconomic stability and economic integration. The case of Italy.
- 1996, 3.52 Annarita GERMANI
Gli effetti della mobilitazione della riserva obbligatoria. Analisi sull'efficienza del suo utilizzo.
- 1996, 3.53 Massimo SPAGNOLO
A model of fish price formation in the north sea and the Mediterranean.
- 1996, 3.54 Fernanda MAZZOTTA
RTFL: problemi e soluzioni per i dati Panel.
- 1996, 3.55 Angela SPAGNUOLO
Concentrazione industriale e dimensione del mercato: il ruolo della spesa per pubblicità e R&D.
- 1996, 3.56 Giuseppina AUTIERO
The economic case for social norms.
- 1996, 3.57 Francesco GIORDANO
Sulla convergenza degli stimatori Kernel.
- 1996, 3.58 Tullio JAPPELLI, Marco PAGANO
The determinants of saving: lessons from Italy.

- 1997, 3.59 Tullio JAPPELLI
The age-wealth profile and the life-cycle hypothesis: a cohort analysis with a time series of cross sections of Italian households.
- 1997, 3.60 Marco Antonio MONACO
La gestione dei servizi di pubblico interesse.
- 1997, 3.61 Marcella ANZOLIN
L'albero della qualità dei servizi pubblici locali in Italia: metodologie e risultati conseguiti.
- 1997, 3.62 Cesare IMBRIANI, Antonio LOPES
Intermediazione finanziaria e sistema produttivo in un'area dualistica. Uno studio di caso.
- 1997, 3.63 Tullio JAPPELLI
Risparmio e liberalizzazione finanziaria nell'Unione europea.
- 1997, 3.64 Alessandra AMENDOLA
Analisi dei dati di sopravvivenza.
- 1997, 3.65 Francesco GIORDANO, Cira PERNA
Gli stimatori Kernel per la stima non parametrica della funzione di regressione.
- 1997, 3.66 Biagio DI SALVIA
*Le relazioni marittimo-commerciali nell'imperiale regio litorale austriaco nella prima metà dell'800.
I. Una riclassificazione delle Tafeln zur Statistik der Österreichischen Monarchie.*
- 1997, 3.67 Alessandra AMENDOLA
Modelli non lineari di seconda e terza generazione: aspetti teorici ed evidenze empiriche.
- 1998, 3.68 Vania SENA
L'analisi econometrica dell'efficienza tecnica. Un'applicazione agli ospedali italiani di zona.
- 1998, 3.69 Domenico CERBONE
Investimenti irreversibili.
- 1998, 3.70 Antonio GAROFALO
La riduzione dell'orario di lavoro è una soluzione al problema disoccupazione: un tentativo di analisi empirica.
- 1998, 3.71 Jacqueline MORGAN, Roberto RAUCCI
New convergence results for Nash equilibria.

- 1998, 3.72 Rosa FERRENTINO
Niels Henrik Abel e le equazioni algebriche.
- 1998, 3.73 Marco MICOCCI, Rosa FERRENTINO
Un approccio markoviano al problema della valutazione delle opzioni.
- 1998, 3.74 Rosa FERRENTINO, Ciro CALABRESE
Rango di una matrice di dimensione K.
- 1999, 3.75 Patrizia RIGANTI
L'uso della valutazione contingente per la gestione del patrimonio culturale: limiti e potenzialità.
- 1999, 3.76 Annamaria NESE
Il problema dell'inefficienza nel settore dei musei: tecniche di valutazione.
- 1999, 3.77 Gianluigi COPPOLA
Disoccupazione e mercato del lavoro: un'analisi su dati provinciali.
- 1999, 3.78 Alessandra AMENDOLA
Un modello soglia con eteroschedasticità condizionata per tassi di cambio.
- 1999, 3.79 Rosa FERRENTINO
Su un'applicazione della trasformata di Laplace al calcolo della funzione asintotica di non rovina.
- 1999, 3.80 Rosa FERRENTINO
Un'applicazione della trasformata di Laplace nel caso di una distribuzione di Erlang.
- 1999, 3.81 Angela SPAGNUOLO
Efficienza e struttura degli incentivi nell'azienda pubblica: il caso dell'industria sanitaria.
- 1999, 3.82 Antonio GAROFALO, Cesare IMBRIANI, Concetto Paolo VINCI
Youth unemployment: an insider-outsider dynamic approach.
- 1999, 3.83 Rosa FERRENTINO
Un modello per la determinazione del tasso di riequilibrio in un progetto di fusione tra banche.
- 1999, 3.84 DE STEFANIS, PORZIO
Assessing models in frontier analysis through dynamic graphics.
- 1999, 3.85 Annunziato GESUALDI
Inflazione e analisi delle politiche fiscali nell'U.E..
- 1999, 3.86 R. RAUCCI, L. TADDEO
Dalle equazioni differenziali alle funzioni e^x , $\log x$, a^x , $\log_a x$, x^x .

- 1999, 3.87 Rosa FERRENTINO
Sulla determinazione di numeri aleatori generati da equazioni algebriche.
- 1999, 3.88 C. PALMISANI, R. RAUCCI
Sulle funzioni circolari: una presentazione non classica.
- 2000, 3.89 Giuseppe STORTI, Pierluigi FURCOLO, Paolo VILLANI
A dynamic generalized linear model for precipitation forecasting.
- 2000, 3.90 Rosa FERRENTINO
Un procedimento risolutivo per l'equazione di Dickson.
- 2000, 3.91 Rosa FERRENTINO
Un'applicazione della mistura di esponenziali alla teoria del rischio.
- 2000, 3.92 Francesco GIORDANO, Michele LA ROCCA, Cira PERNA
Bootstrap variance estimates for neural networks regression models.
- 2000, 3.93 Alessandra AMENDOLA, Giuseppe STORTI
A non-linear time series approach to modelling asymmetry in stock market indexes.
- 2000, 3.94 Rosa FERRENTINO
Sopra un'osservazione di De Vylder.
- 2000, 3.95 Massimo SALZANO
Reti neurali ed efficacia dell'intervento pubblico: previsioni dell'inquinamento da traffico nell'area di Villa S. Giovanni.
- 2000, 3.96 Angela SPAGNUOLO
Concorrenza e deregolamentazione nel mercato del trasporto aereo in Italia.
- 2000, 3.97 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO
Teoremi ingannevoli.
- 2000, 3.98 Francesco GIORDANO
Una procedura per l'inizializzazione dei pesi delle reti neurali per l'analisi del trend.
- 2001, 3.99 Angela D'ELIA
Some methodological issues on multivariate modelling of rank data.
- 2001, 3.100 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO
Nuove classi di funzioni scalari quasiconcave generalizzate: caratterizzazioni ed applicazioni a problemi di ottimizzazione.
- 2001, 3.101 Adriana BARONE, Annamaria NESE
Some insights into night work in Italy.

- 2001, 3.102 Alessandra AMENDOLA, Marcella NIGLIO
Predictive distributions of nonlinear time series models.
- 2001, 3.103 Roberto RAUCCI
Sul concetto di certo equivalente nella teoria HSSB.
- 2001, 3.104 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO
On stackelberg games: a result of unicity.
- 2001, 3.105 Roberto RAUCCI
Una definizione generale e flessibile di insieme limitato superiormente in \mathfrak{R}^n
- 2001, 3.106 Roberto RAUCCI
Stretta quasiconcavit  nelle forme funzionali flessibili.
- 2001, 3.107 Roberto RAUCCI
Sugli insiemi limitati in \mathfrak{R}^m rispetto ai coni.
- 2001, 3.108 Roberto RAUCCI
Monotonie, isotonie e indecomponibilit  deboli per funzioni a valori vettoriali con applicazioni.
- 2001, 3.109 Roberto RAUCCI
Generalizzazioni del concetto di debole Kuhn-Tucker punto-sella.
- 2001, 3.110 Antonia Rosa GURRIERI, Marilene LORIZIO
Le determinanti dell'efficienza nel settore sanitario. Uno studio applicato.
- 2001, 3.111 Gianluigi COPPOLA
Studio di una provincia meridionale attraverso un'analisi dei sistemi locali del lavoro. Il caso di Salerno.
- 2001, 3.112 Francesco GIORDANO
Reti neurali per l'analisi del trend: un approccio per identificare la topologia della rete.
- 2001, 3.113 Marcella NIGLIO
Nonlinear time series models with switching structure: a comparison of their forecast performances.
- 2001, 3.114 Damiano FIORILLO
Capitale sociale e crescita economica. Review dei concetti e dell'evidenza empirica.
- 2001, 3.115 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO
Generalizzazione del concetto di continuit  e di derivabilit .
- 2001, 3.116 Marcella NIGLIO

- 2001, 3.117 *Ricostruzione dei dati mancanti in serie storiche climatiche.*
Vincenzo VECCHIONE
Mutamenti del sistema creditizio in un'area periferica.
- 2002, 3.118 Francesco GIORDANO, Michele LA ROCCA, Cira PERNA
Bootstrap variable selection in neural network regression models.
- 2002, 3.119 Roberto RAUCCI, Luigi TADDEO
Insiemi debolmente convessi e concavità in senso generale.
- 2002, 3.120 Vincenzo VECCHIONE
Know how locali e percorsi di sviluppo in aree e settori marginali.
- 2002, 3.121 Michele LA ROCCA, Cira PERNA
Neural networks with dependent data.
- 2002, 3.122 Pietro SENESI
Economic dynamics: theory and policy. A stability analysis approach.
- 2002, 3.123 Gianluigi COPPOLA
Stima di un indicatore di pressione ambientale: un'applicazione ai comuni della Campania.
- 2002, 3.124 Roberto RAUCCI
Sull'esistenza di autovalori e autovettori positivi anche nel caso non lineare.
- 2002, 3.125 Maria Carmela MICCOLI
Identikit di giovani lucani.
- 2002, 3.126 Sergio DESTEFANIS, Giuseppe STORTI
Convexity, productivity change and the economic performance of countries.
- 2002, 3.127 Giovanni C. PORZIO, Maria Prosperina VITALE
Esplorare la non linearità nei modelli Path.
- 2002, 3.128 Rosa FERRENTINO
Sulla funzione di Seal.
- 2003, 3.129 Michele LA ROCCA, Cira PERNA
Identificazione del livello intermedio nelle reti neurali di tipo feedforward.
- 2003, 3.130 Alessandra AMENDOLA, Marcella NIGLIO, Cosimo VITALE
The exact multi-step ahead predictor of SETARMA models.
- 2003, 3.131 Mariangela BONASIA
La dimensione ottimale di un sistema pensionistico: means tested vs programma universale.
- 2003, 3.132 Annamaria NESE

Abitazione e famiglie a basso reddito.

- 2003, 3.133 Maria Lucia PARRELLA
Le proprietà asintotiche del Local Polynomial Bootstrap.
- 2003, 3.134 Silvio GIOVE, Maurizio NORDIO, Stefano SILVONI
Stima della prevalenza dell'insufficienza renale cronica con reti bayesiane: analisi costo efficacia delle strategie di prevenzione secondaria.
- 2003, 3.135 Massimo SALZANO
Globalization, complexity and the holism of the italian school of public finance.
- 2003, 3.136 Giuseppina AUTIERO
Labour market institutional systems and unemployment performance in some Oecd countries.
- 2003, 3.137 Marisa FAGGINI
Recurrence analysis for detecting non-stationarity and chaos in economic times series.
- 2003, 3.138 Marisa FAGGINI, Massimo SALZANO
The reverse engineering of economic systems. Tools and methodology.
- 2003, 3.139 Rosa FERRENTINO
In corso di pubblicazione.
- 2003, 3.140 Rosa FERRENTINO, Roberto RAUCCI
Sui problemi di ottimizzazione in giochi di Stackelberg ed applicazioni in modelli economici.
- 2003, 3.141 Carmine SICA
In corso di pubblicazione.
- 2004, 3.142 Sergio DESTEFANIS, Antonella TADDEO, Maurizio TORNATORE
The stock of human capital in the Italian regions.
- 2004, 3.143 Elena Laureana DEL MERCATO
Edgeworth equilibria with private provision of public good.
- 2004, 3.144 Elena Laureana DEL MERCATO
Externalities on consumption sets in general equilibrium.
- 2004, 3.145 Rosa FERRENTINO, Roberto RAUCCI
Su alcuni criteri delle serie a termini non negativi.
- 2004, 3.146 Rosa FERRENTINO, Roberto RAUCCI
Legame tra le soluzioni di Minty e di Stempacenhia nelle disequazioni variazionali.

- 2004, 3.147 Gianluigi COPPOLA
In corso di pubblicazione.
- 2004, 3.148 Massimo Spagnolo
The Importance of Economic Incentives in Fisheries Management
- 2004, 3.149 F. Salsano
La politica monetaria in presenza di non perfetta osservabilità degli obiettivi del banchiere centrale.
- 2004, 3.150 A. Vita
La dinamica del cambiamento nella rappresentazione del territorio. Una mappa per i luoghi della Valle dell'Irno.
- 2004, 3.151 Celi
Empirical Explanation of vertical and horizontal intra-industry trade in the UK: a comment.
- 2004, 3.152 Amendola – P. Vitale
Self-Assessment and Career Choices: An On-line resource for the University of Salerno.
- 2004, 3.153 A. Amendola – R. Troisi
Introduzione all'economia politica dell'organizzazione: nozioni ed applicazioni.
- 2004, 3.154 A. Amendola – R. Troisi
Strumenti d'incentivo e modelli di gestione del personale volontario nelle organizzazioni non profit.
- 2004, 3.155 Lavinia Parisi
La gestione del personale nelle imprese manifatturiere della provincia di Salerno.
- 2004, 3.156 Angela Spagnuolo – Silvia Keller
La rete di accesso all'ultimo miglio: una valutazione sulle tecnologie alternative.
- 2005, 3.157 Davide Cantarelli
Elasticities of Complementarity and Substitution in Some Functional Forms. A Comparative Review.
- 2005, 3.158 Pietro Coretto – Giuseppe Storti
Subjective Expectations in Economics: a Statistical overview of the main findings.
- 2005, 3.159 Pietro Coretto – Giuseppe Storti
Moments based inference in small samples.

- 2005, 3.160 Massimo Salzano
Una simulazione neo-keynesiana ad agenti eterogeni.
- 2005, 3.161 Rosa Ferrentino
Su alcuni paradossi della teoria degli insiemi.
- 2005, 3.162 Damiano Fiorillo
Capitale sociale: uno o molti? Pochi.
- 2005, 3.163 Damiano Fiorillo
Il capitale sociale conta per outcomes (macro) economici?.
- 2005, 3.164 Damiano Fiorillo – Guadalupi Luigi
*Attività economiche nel distretto industriale di Nocera inferiore – Gragnano.
Un'analisi su Dati Tagliacarne.*
- 2005, 3.165 Rosa Ferrentino
Pointwise well-posedness in vector optimization and variational inequalities.
- 2005, 3.166 Roberto Iorio
La ricerca universitaria verso il mercato per il trasferimento tecnologico e rischi per l'Open Science": posizioni teoriche e filoni di indagine empirica.
- 2005, 3.167 Marisa Faggini
The chaotic system and new perspectives for economics methodology. A note.
- 2005, 3.168 Francesco Giordano
Weak consistent moving block bootstrap estimator of sampling distribution of CLS estimators in a class of bilinear models
- 2005, 3.169 Edgardo Sica
Tourism as determinant of economic growth: the case of south-east asian countries.
- 2005, 3.170 Rosa Ferrentino
On Minty variational inequalities and increasing along rays functions.
- 2005, 3.171 Rosa Ferrentino
On the Minty and Stampacchia scalar variational inequalities
- 2005, 3.172 Destefanis - Storti
A procedure for detecting outliers in frontier estimation
- 2005, 3.173 Destefanis - Storti
Evaluating business incentives through DEA. An analysis on capitalia firm data

- 2005, 3.174 Nese – O'Higgins
In and out of the capitalia sample: evaluating attrition bias.
- 2005, 3.175 Maria Patrizia Vittoria
Il Processo di terziarizzazione in Campania. Analisi degli indicatori principali nel periodo 1981-2001
- 2005, 3.176 Sergio Destefanis – Giuseppe Mastromatteo
Inequality and labour-market performance. A survey beyond an elusive trade-off.
- 2007, 3.177 Giuseppe Storti
Modelling asymmetric volatility dynamics by multivariate BL-GARCH models
- 2007, 3.178 Lucio Valerio Spagnolo – Mario Cerrato
No euro please, We're British!
- 2007, 3.179 Maria Carmela Miccoli
Invecchiamento e seconda transizione demografica
- 2007, 3.180 Maria Carmela Miccoli – Antonio Cortese
Le scuole italiane all'estero: una realtà poco nota
- 2007, 3.181 Rosa Ferrentino
Variational inequalities and optimization problems
- 2007, 3.182 Lavinia Parisi
Estimating capability as a latent variable: A Multiple Indicators and Multiple Causes Approach. The example of health
- 2007, 3.183 Rosa Ferrentino
Well-posedness, a short survey
- 2007, 3.184 Roberto Iorio – Sandrine Labory – Daniele Paci
Relazioni tra imprese e università nel biotech-salute dell'Emilia Romagna. Una valutazione sulla base della co-authorship delle pubblicazioni scientifiche
- 2007, 3.185 Lavinia Parisi
Youth Poverty after leaving parental home: does parental income matter?
- 2007, 3.186 Pietro Coretto – Christian Hennig
Identifiability for mixtures of distributions from a location-scale family with uniform
- 2007, 3.187 Anna Parziale
Il fitness landscape: un nuovo approccio per l'analisi del federalismo fiscale
- 2007, 3.188 Christian Di Pietro – Elena L. del Mercato
Seminal contributions to the theory of Knowledge and technological change

- 2007, 3.189 Valeria D'Amato
Pricing di Opzioni esotiche: Rassegna Teorica e Strumenti Informatici per il Prezzamento
- 2007, 3.190 Roberto Iorio – Sandrine Labory – Daniele Paci
The Determinants of Research Quality in Italy: Empirical Evidence using Bibliometric Data in the Biotech Sector
- 2008, 3.191 Luca Romaniello – Roberto Iorio
Soddisfazione ed insoddisfazione nel lavoro. Determinanti individuali dell'insoddisfazione lavorativa ed analisi dei fattori di disagio. Un'analisi del caso del Triveneto
- 2008, 3.192 Antonio Cortese – Maria Carmela Miccoli
L'immigrazione nei paesi dell'Europa mediterranea: il caso del Portogallo
- 2008, 3.193 Marialuisa Restaino
Dropping out of University of Salerno: a Survival Approach
- 2008, 3.194 Mari Carmela Miccoli
Stranieri sempre più numerosi, con figli sempre più istruiti. Le seconde generazioni nel nostro sistema scolastico
- 2008, 3.195 Carlo Capuano – Giuseppe De Feo
Privatization in oligopoly: the Impact of the shadow cost of public funds
- 2008, 3.196 Giuseppe De Feo
Efficiency gains and mergers
- 2008, 3.197 Maria Olivella Rizza
Gunnar Myrdal's Critiques of Utility Theory. Some implications
- 2008, 3.198 Sergio De Stefanis – Giuseppe Mastromatteo
Winds of change and policies. The nequality-Employment trade-off in the OECD
- 2008, 3.199 Giuseppe Giordano – Michele La Rocca – Maria Prosperina Vitale
Strumenti di analisi per esplorare reti di collaborazione scientifica
- 2008, 3.200 Domenico De Stefano – Giancarlo Ragozzini - Maria Prosperina Vitale
Un approccio di rete all'analisi delle relazioni amicali dei disoccupati nella città di Napoli
- 2008, 3.201 Francesco Giordano
Weak consistent moving block bootstrap estimator for the variance of cls estimators in a class of bilinear models

- 2008, 3.202 Antonio Guariglia
L'evoluzione del regime degli scambi nel commercio internazionale agroalimentare: dal GATT alla WTO
- 2008, 3.203 Giovanni Camillo Porzio – Maria Prosperina Vitale
Assessing Linearity in Structural Equation Models through Graphics
- 2009, 3.204 Antonio Cortese
La rilevazione statistica dei senza tetto e delle altre persone non occupanti un'abitazione
- 2009, 3.205 Roberto Iorio – Daniele Paci
La ricerca in collaborazione con l'industria dei docenti universitari: aggiornamento sugli esiti di un questionario
- 2009, 3.206 Rosamaria D'Amore - Roberto Iorio
Internal and external sources of innovation in the Italian biotech sector
- 2009, 3.207 Maria Carmela Miccoli – Giovanni Ancona – Antonella Biscione
Dinamica demografica, crescita economica e povertà in Albania
- 2009, 3.208 Giuseppina Albano – Francesco Giordano – Cira Perna
Parameter Estimation In Continuous Stochastic Volatility Models
- 2009, 3.209 Francesco Giordano – Maria Lucia Parrella
A locally adaptive bandwidth selector for kernel based regression
- 2010, 3.210 Alessandra Amendola – Marcella Niglio – Cosimo Damiano Vitale
A Note on the Invertibility of the Threshold Moving Average Model
- 2011, 3.211 Matteo Fragetta – Giovanni Melina
Assessing Linearity in Structural Equation Models through Graphics

Stampa a cura della C.U.S.L. Cooperativa Universitaria Studio e
Lavoro, Via Ponte Don Melillo, Fisciano
Finito di stampare il 28 Aprile 2010